

УДК 539.4, 519.6

## **О численной оценке эффективных механических характеристик резинокордных композитов.**

### **About numerical estimation of the effective mechanical properties of rubber-cord composites.**

Яковлев Максим Яковлевич

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аспирант третьего года.

Адрес: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1.

E-mail: [beacon87@list.ru](mailto:beacon87@list.ru)

Ключевые слова: теория упругости, эффективные свойства, численные прочностные расчёты, резинокорд, пневматическая шина, метод конечных элементов.

Theory of elasticity, effective properties, numerical strength analysis, rubber-cord, pneumatic tyre, finite element method.

Описывается методика и алгоритм численной оценки эффективных механических свойств резинокордных композитов. Эффективные свойства ищутся в виде закона Гука для анизотропных материалов. С помощью программного модуля, реализованного на основе алгоритма, выполнены расчёты эффективных характеристик резинокорда. Исследована зависимость эффективных характеристик резинокорда от упругих свойств корда и резины, а также от шага нитей корда.

A method and an algorithm of numerical estimation of effective mechanical properties of rubber-cord composites are described in the article. The effective properties are found in form of Hooke law for anisotropic materials. The effective characteristics of rubber-cord are computed by means of a program module based on the given algorithm. The effective characteristics of rubber-cord as a function of the elastic properties of the cord and rubber and as a function of a distance between fibers in the cord are examined.

### ***Введение***

Резинокордный материал представляет собой слой резины, армированный нитями корда. Резинокорд широко применяется при производстве пневматических шин [1] – из него изготавливаются такие детали автомобильных шин, как брекеры и каркасы. При оценке напряжённо-деформированного состояния шины разумно моделировать резинокордные детали с точностью до каждой нити корда лишь в пятне контакта, где наблюдаются максимальные напряжения в резине между нитями корда, которые влияют на ресурс шины. Во всей остальной части шины (не контактирующей с поверхностью) столь подробная детализация резинокорда не требуется – более того, она усложнит конечноэлементную модель и потребует неоправданно больших вычислительных ресурсов для расчёта. Поэтому вне пятна контакта резинокорд имеет смысл моделировать

эффективным материалом [6, 7, 8, 9, 11] (с осреднёнными по пространству механическими свойствами – эффективными свойствами [21, 27, 28]).

Особенности вычисления эффективных свойств резинокорда состоят в том, что он является анизотропным [16, 19] армированным [15, 24, 26] материалом, в состав которого входит резина – слабосжимаемый высокоэластичный материал [3, 4, 5, 25], а модули упругости резины и корда могут различаться на 3-4 порядка [1]. Эти свойства резинокорда могут вызывать сложности при расчётах его напряжённо-деформированного состояния, необходимых для оценки эффективных свойств.

### **Алгоритм вычисления эффективных механических свойств резинокордного композита**

Приведём основные обозначения, которые будем использовать в описании алгоритма вычисления эффективных свойств резинокорда.

$\overset{0}{R}, R$  – радиус-вектор частицы в начальном и текущем состояниях;

$u = R - \overset{0}{R}$  – вектор перемещений;

$\xi^i$  – материальные координаты частицы;

$x^i$  – пространственные координаты частицы;

$e^i$  – базисные векторы системы отсчёта;

$\overset{0}{\varepsilon}_i = \frac{\partial \overset{0}{R}}{\partial \xi^i}, \varepsilon_i = \frac{\partial R}{\partial \xi^i}$  – базисные векторы в начальном и текущем состояниях;

$\overset{0}{\nabla} = \overset{0}{\varepsilon}_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \nabla = \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$  – операторы градиента в начальном и текущем состояниях;

$I$  – единичный тензор;

$\Psi = \overset{0}{\nabla} R = I + \overset{0}{\nabla} u = (\nabla r)^{-1} = (I - \nabla u)^{-1}$  – аффинор деформаций;

$\overset{0}{E} = \frac{1}{2} (\Psi \cdot \Psi^* - I) = \frac{1}{2} (\overset{0}{\nabla} u + u \overset{0}{\nabla} + \overset{0}{\nabla} u \cdot u \overset{0}{\nabla})$  – тензор деформаций Грина;

$E = \frac{1}{2} (I - \Psi^{-1} \cdot \Psi^{*-1}) = \frac{1}{2} (\nabla u + u \nabla - \nabla u \cdot u \nabla)$  – тензор деформаций Альманси;

$\Delta = \det \Psi - 1$  – относительное изменение объёма;

$*$  – знак транспонирования;

$:$  – знак двойной скалярной свёртки;

$\sigma$  – тензор истинных напряжений;

$\mathfrak{R} = (1 + \Delta) \Psi^{*-1} \cdot \sigma$  – первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

$\overset{0}{\Sigma} = (1 + \Delta) \Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}$  – второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа;

$V_0, V$  – представительный объём в начальном и в текущем состояниях;

$\Gamma_0, \Gamma$  – граница объёма в начальном и текущем состояниях;

$\overset{0}{N}, N$  – нормаль к границе в начальном и текущем состояниях.

Рассмотрим представительный объём, заполненный резинокордным композитом. **Эффективным (осреднённым) материалом** мы назовём однородный материал, удовлетворяющий условию: если этим материалом заполнить представительный объём, то средние напряжения по объёму в исходном и эффективном материале будут равны при одинаковых перемещениях граней [10,12,22,23].

Опишем способ построения эффективных определяющих соотношений для резинокордного материала с использованием приведённых выше определений.

Для представительного объёма  $V_0$ , выделенного в начальном состоянии (до деформации) решаем определённое количество последовательностей краевых задач теории упругости [7, 17, 18, 20]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u \Big|_{\Gamma_0} = R(\psi^e - I) \quad (2)$$

Резина и корд могут описываться законом Гука или определяющими соотношениями Мурнагана [14]:

$$\overset{0}{\Sigma} = \lambda(\overset{0}{E} : I) + 2G\overset{0}{E} + 3C_3(\overset{0}{E} : I)^2 I + C_4(\overset{0}{E}^2 : I)I + 2C_4(\overset{0}{E} : I)\overset{0}{E} + 3C_5\overset{0}{E}^2 \quad (3)$$

Каждая последовательность решаемых задач соответствует определённому виду тензора деформаций Грина  $\overset{0}{E}^e$  эффективного материала (и определённому виду аффинора  $\psi^e$  в граничных условиях). В свою очередь, разные задачи в рамках одной последовательности различаются величиной деформации. Могут быть решены следующие последовательности задач [10]:

- 1)  $\overset{0}{E}_{11} = q$  – растяжение или сжатие по оси  $X$ ,
- 2)  $\overset{0}{E}_{22} = q$  – растяжение или сжатие по оси  $Y$ ,
- 3)  $\overset{0}{E}_{33} = q$  – растяжение или сжатие по оси  $Z$ ,
- 4)  $\overset{0}{E}_{12} = q$  – сдвиг в плоскости  $XY$ ,
- 5)  $\overset{0}{E}_{13} = q$  – сдвиг в плоскости  $XZ$ ,
- 6)  $\overset{0}{E}_{23} = q$  – сдвиг в плоскости  $YZ$ ,

где  $q$  – величина деформации.

Решая каждую из задач каждой последовательности, находим тензор напряжений  $\sigma$ . Зная его, вычисляем тензор напряжений  $\sigma^e$  эффективного материала по следующей формуле:

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} N \cdot \sigma R d\Gamma \quad (4)$$

Последнее равенство в (4) получено с использованием формулы Гаусса-Остроградского и того, что

$$\nabla(\sigma R) = (\nabla \sigma)R + \sigma(\nabla R)^* = (\nabla \sigma)R + \sigma \cdot I = \sigma \quad (5)$$

Зная аффино́р деформаций (который был нами задан) и тензор истинных напряжений, мы можем вычислить тензор деформаций Грина и второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа эффективного материала:

$$E^e = \frac{1}{2}(\Psi^e \cdot \Psi^{e*} - I) \quad (6)$$

$$\Sigma^e = (\det \Psi^e) (\Psi^e)^{* -1} \cdot \sigma^e \cdot (\Psi^e)^{-1} \quad (7)$$

Эффективные определяющие соотношения будем искать в виде зависимости тензора Пиолы-Кирхгофа  $\Sigma^e$  от тензора Грина  $E^e$ :

$$\Sigma_{ij}^e = C_{ijkl}^{(0)} E_{kl}^e \quad (8)$$

На практике удобнее задавать не аффино́р деформаций эффективного материала, а тензор деформаций Грина – и, зная его, вычислять аффино́р из формулы (6). Поскольку аффино́р – несимметричный тензор второго ранга, определить его однозначно из симметричного тензора Грина не получится. Поэтому мы задаём его верхнетреугольным – тогда шесть его компонент однозначно определяются по шести независимым компонентам тензора Грина.

Вычислив аффино́р, мы прикладываем к модели граничные условия (2), решаем краевую задачу теории упругости и находим  $\sigma$ . С помощью осреднения по формуле (4) вычисляем эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ , далее из (7) находим тензор Пиолы-Кирхгофа  $\Sigma^e$ . Затем для каждой последовательности задач строится зависимость компонент тензора Пиолы-Кирхгофа от величины деформации  $q$ . Эти зависимости аппроксимируются выражениями вида [10]:

$$\Sigma_{ij}^e = \alpha_{ij} q \quad (9)$$

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  могут быть определены, к примеру, с использованием метода наименьших квадратов. Коэффициенты  $C_{ijkl}$  из (8) определяются через коэффициенты  $\alpha_{ij}$ , вычисленные для соответствующей последовательности задач:

$$\begin{aligned} 1) \quad E^e &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = C_{ij11} q \\ 2) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = C_{ij22} q \\ 3) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = C_{ij33} q \\ 4) \quad E^e &= \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij12} + C_{ij21}) q \end{aligned}$$

$$5) \quad E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij13} + C_{ij31})q$$

$$6) \quad E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_{ij}^e = (C_{ij23} + C_{ij32})q$$

Поскольку мы ищем эффективные определяющие соотношения в виде (8), вышеуказанных шести последовательностей задач достаточно для вычисления коэффициентов  $C_{ijkl}$ . Учитывая симметричность тензора деформаций Грина, будем считать  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ .

Данный алгоритм реализован в программном модуле САЕ «ФИДЕСИС» [13, 31] с использованием метода конечных элементов [29, 30]. Реализованы следующие шаги алгоритма:

- импорт модели представительного объёма и конечноэлементной сетки в формате \*.k; подготовка сетки к расчёту (построение массива граней элементов в случае его отсутствия; проверка правильности нумерации узлов в элементе; определение размеров модели; нумерация граней модели);
- задание типа и констант материала для резины и корда;
- задание количества шагов по деформациям (т.е. количества задач в каждой последовательности) и типов деформаций (количества последовательностей);
- решение краевой задачи теории упругости для каждой задачи каждой последовательности (задание граничных условий через аффинор деформаций, вычисляемый по тензору Грина; нахождение напряжённо-деформированного состояния в представительном объёме; вывод полученных полей напряжений и перемещений в файл формата \*.vtk);
- осреднение тензора напряжений Грина для каждой посчитанной задачи с использованием формулы (4); вычисление тензора Пиолы-Кирхгофа эффективного материала по формуле (7);
- вычисление коэффициентов  $\alpha_{ij}$  и  $C_{ijkl}$ ; вывод коэффициентов  $C_{ijkl}$  в текстовый файл.

## Результаты расчётов

После разработки и отладки программного модуля с его помощью были вычислены эффективные коэффициенты  $C_{ijkl}$  для представительного объёма, заполненного сплошным материалом Мурнагана – с целью тестирования модуля. Исходя из вида определяющих соотношений Мурнагана, должно было получиться  $C_{1122} = \lambda$ ,  $C_{1212} = G$ . Рассматривался материал Мурнагана с константами  $\lambda = G = 1,32 \cdot 10^{10}$  Па, представительный объём в виде прямоугольного параллелепипеда  $10 \times 4 \times 2$ , количество конечных элементов в сетке 49151.

Коэффициенты  $C_{1122}$  и  $C_{1212}$  в зависимости от величины деформаций получились следующими:

- для деформаций 0,1% –  $C_{1122} = 1,31737 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{1212} = 1,32000 \cdot 10^{10}$  Па;

- для деформаций 1% –  $C_{1122} = 1,29412 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{1212} = 1,32026 \cdot 10^{10}$  Па;
- для деформаций 10% –  $C_{1122} = 1,10000 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{1212} = 1,34606 \cdot 10^{10}$  Па.

Таким образом, для малых деформаций программный модуль даёт хорошую точность, а при увеличении уровня деформаций результаты искажаются. Это объясняется тем, что определяющие соотношения мы ищем в виде (8) – т.е. в линейном виде. Поэтому для линейных деформаций вычисляются соответствующие теории коэффициенты, а для нелинейных – искажённые, т.к. мы пытаемся аппроксимировать линейными соотношениями нелинейную задачу. Исходя из полученных результатов, дальнейшие расчёты проводились для деформаций 0,1%.

Была исследована зависимость эффективных свойств резинокорда от упругих свойств корда, при неизменных свойствах резины. Свойства корда описывались определяющими соотношениями Мурнагана с константами  $\lambda/G = 1,36816$ ,  $C_3/G = -0,398$ ,  $C_4/G = -2,8607$ ,  $C_5/G = -3,3333$ , а константа  $G$  менялась в диапазоне от  $0,804 \cdot 10^9$  Па до  $0,804 \cdot 10^{11}$  Па (последнее значение соответствует стали 35). Такое варьирование свойств корда на два порядка обусловлено тем, что в реальном резинокорде может использоваться металлокорд и текстильный корд – а их модули упругости могут различаться примерно на два порядка. Резина описывалась законом Гука с модулем Юнга  $E = 2$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,49$ . Толщина слоя резинокорда – 2 мм, диаметр нити – 0,75 мм, частота нитей – 100 штук на 10 см. Нити корда направлены по оси  $X$ .

Ниже приводятся графики зависимости коэффициентов  $C_{1111}$  и  $C_{1212}$  от упругих свойств корда. Графики построены в логарифмической шкале.

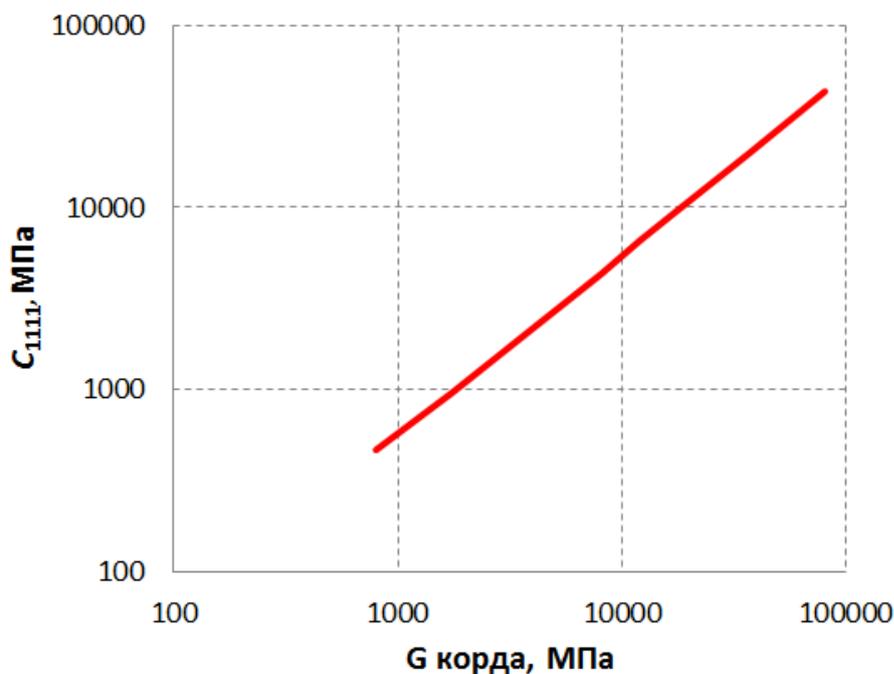


Рисунок 1. Зависимость коэффициента  $C_{1111}$  эффективного материала от упругих модулей корда.

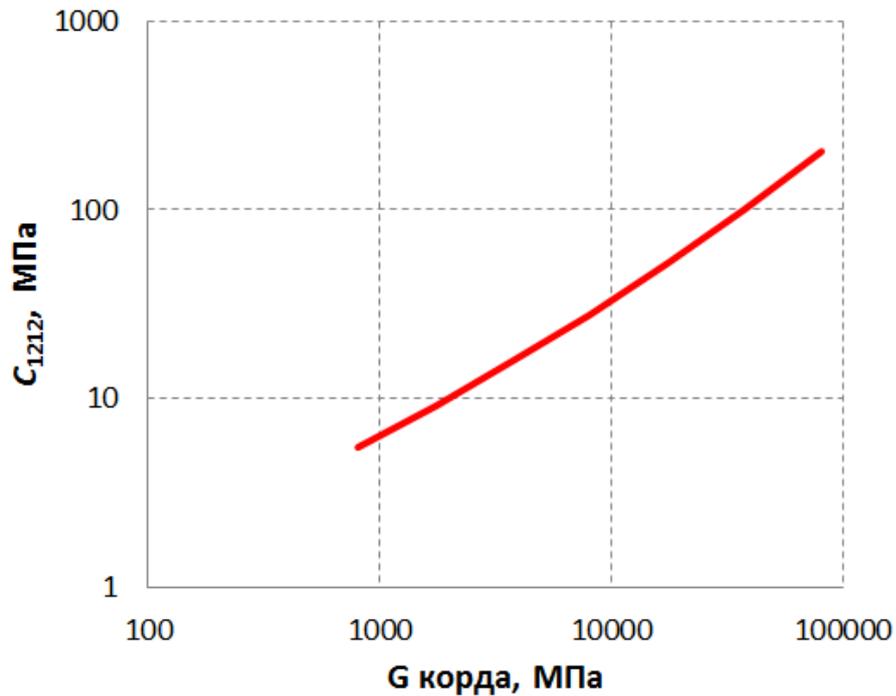


Рисунок 2. Зависимость коэффициента  $C_{1212}$  эффективного материала от упругих модулей корда.

Как видно из графиков, зависимость коэффициента  $C_{1111}$  от упругих свойств корда (рис. 1) является строго линейной – и при изменении констант, описывающих корд, на два порядка,  $C_{1111}$  тоже меняется на два порядка (т.е. наблюдается прямая пропорциональность  $C_{1111}$  упругим модулям корда). В аналогичной зависимости для коэффициента  $C_{1212}$  (рис. 2) проявляется некоторая нелинейность. Графики зависимости коэффициентов  $C_{1122}$ ,  $C_{2211}$  и  $C_{2222}$  не приводились, т.к. при изменении констант корда на два порядка данные коэффициенты менялись менее чем на 1% – т.е. они практически не зависят от свойств корда.

Также интерес представляло влияние свойств резины на эффективные характеристики резинокорда. Рассматривалась модель аналогичной геометрической конфигурации. Свойства корда были неизменны и описывались материалом Мурнагана с константами  $\lambda/G = 1,36816$ ,  $G = 0,804 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_3/G = -0,398$ ,  $C_4/G = -2,8607$ ,  $C_5/G = -3,3333$ . Модуль Юнга резины варьировался от 1 МПа до 5 МПа при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,49$  (при изготовлении шин используются резины примерно такого диапазона модулей упругости). Приведены графики зависимости коэффициентов  $C_{2222}$  и  $C_{1212}$  от модуля упругости резины.



Рисунок 3. Зависимость коэффициента  $C_{2222}$  эффективного материала от модуля Юнга резины.



Рисунок 4. Зависимость коэффициента  $C_{1212}$  эффективного материала от модуля Юнга резины.

Зависимость коэффициента  $C_{2222}$  от модуля Юнга резины (рис. 3) строго линейна, при увеличении модуля упругости резины в пять раз коэффициент тоже растёт в пять раз. В точности такой же характер имеют зависимости коэффициентов  $C_{1122}$  и  $C_{2211}$  от свойств резины. Зависимость коэффициента  $C_{1212}$  не является прямо пропорциональной, и в ней проявляется нелинейность. Коэффициент  $C_{1111}$  при изменении модуля Юнга резины в пять раз изменился примерно на 0,2% (от  $4,313 \cdot 10^{10}$  Па при модуле Юнга резины 1 МПа до  $4,320 \cdot 10^{10}$  Па при 5 МПа) – т.е. он практически не зависит от свойств резины.

Такие результаты логичны и ожидаемы: поведение резинокорда при растяжении в направлении нитей корда практически полностью определяется механическими свойствами корда; поведение резинокорда при растяжении в направлении, перпендикулярном нитям корда, практически полностью определяется упругими свойствами резины [2].

Также изучалась зависимость эффективных свойств резинокорда от шага нитей корда в слое (аналогично для одного слоя). Корд описывался материалом Мурнагана с константами  $\lambda/G = 1,36816$ ,  $G = 0,804 \cdot 10^{11}$  Па,  $C_3/G = -0,398$ ,  $C_4/G = -2,8607$ ,  $C_5/G = -3,3333$ . Резина описывалась законом Гука с модулем Юнга  $E = 2$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,49$ . Толщина слоя резинокорда – 2 мм, диаметр нити – 0,75 мм. Шаг нитей варьировался от 50 до 100 нитей на 10 см. Ниже приведены графики.

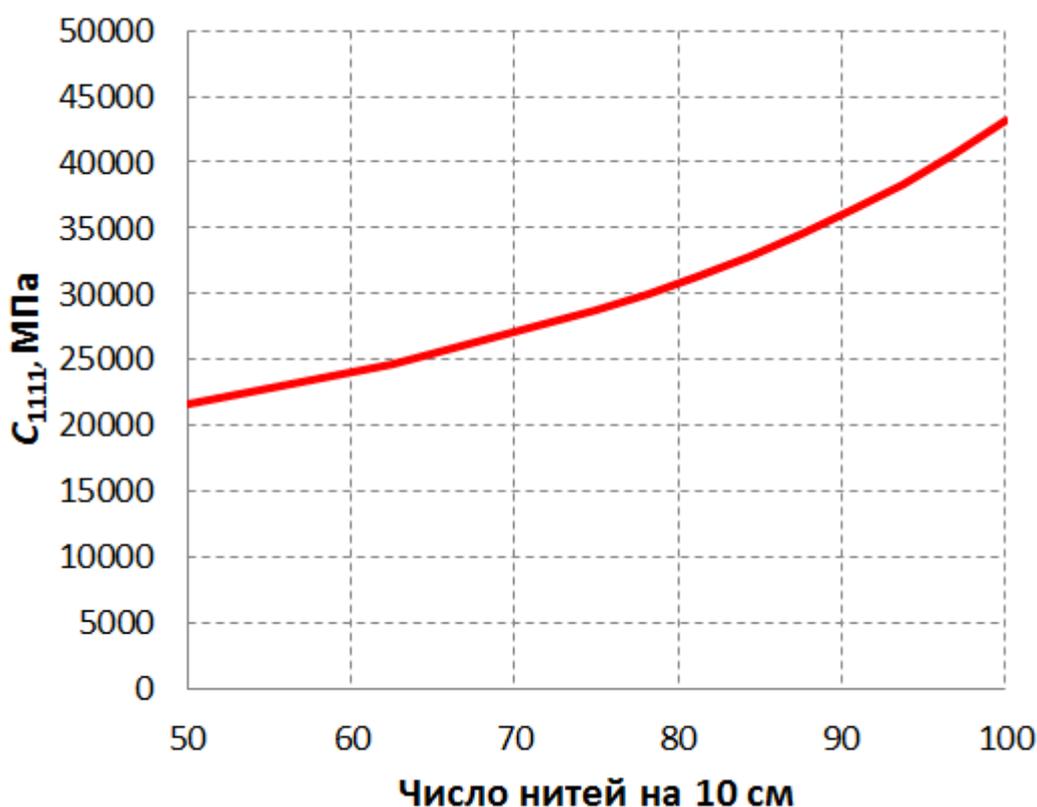


Рисунок 5. Зависимость коэффициента  $C_{1111}$  эффективного материала от шага нитей корда.

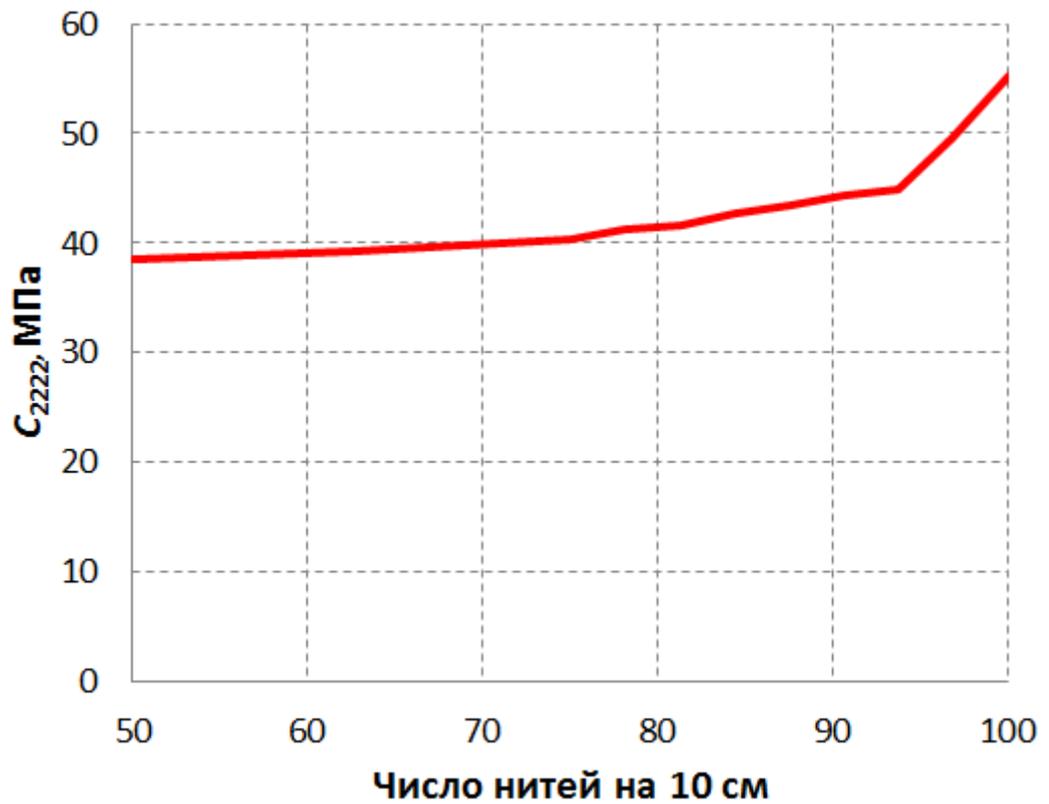


Рисунок 6. Зависимость коэффициента  $C_{2222}$  эффективного материала от шага нитей корда.

Коэффициенты  $C_{1122}$  и  $C_{2211}$  при увеличении частоты нитей корда в два раза увеличиваются на 10-15% – при этом характер зависимости такой же, как и на графиках на рис. 5 и рис. 6 (чем чаще расположены нити, тем быстрее меняются коэффициенты).

В качестве иллюстрации приведём распределение поля напряжений  $\sigma_{xx}$  для случая одноосного растяжения по оси X. Как видно из рис. 7, максимальные напряжения сосредоточены в нитях корда.

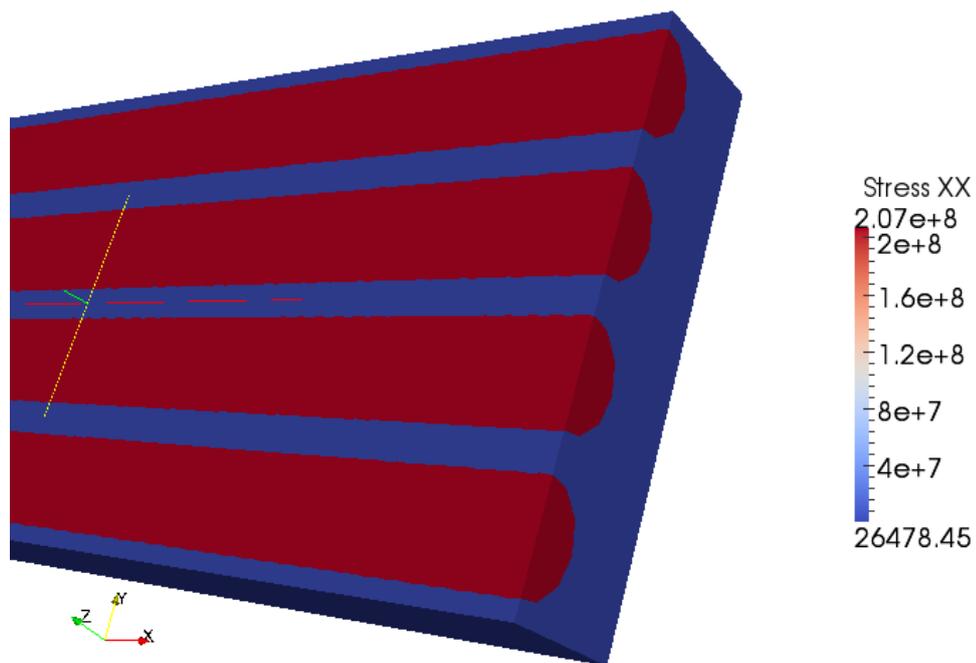


Рисунок 7. Распределение поля напряжений  $\sigma_{xx}$  при одноосном растяжении по оси  $X$  для одного слоя резинокорда.

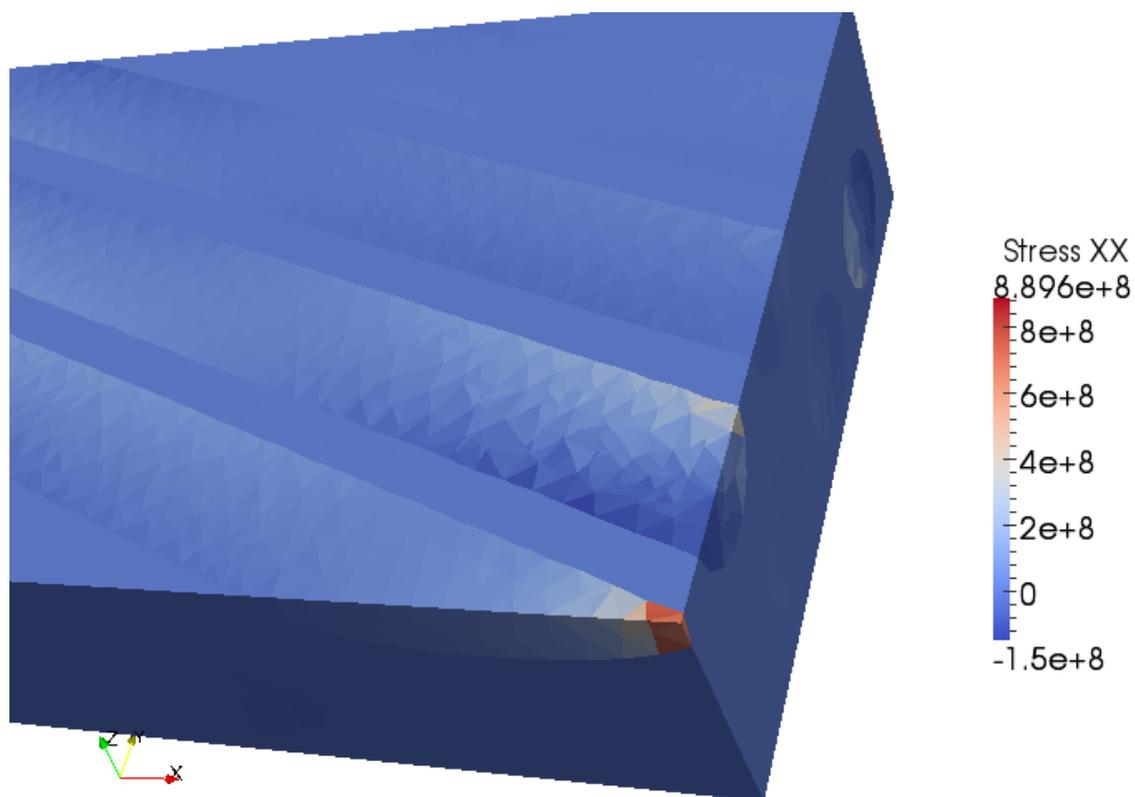


Рисунок 8. Распределение поля напряжений  $\sigma_{xx}$  при одноосном растяжении по оси  $X$  для двух слоёв резинокорда.

В заключение приведём поле напряжений  $\sigma_{xx}$  при одноосном растяжении вдоль оси  $X$  для случая двух слоёв резинокорда (рис. 8), когда нити в каждом слое расположены под углом 20 градусов к оси  $X$  (40 градусов по отношению друг к другу). Расчёты таких

моделей позволят оценить эффективные свойства многослойного резинокорда, используемого в диагональных шинах [1].

### ***Заключение***

Результаты расчетов эффективных свойств резинокордного материала показывают, что этот материал является анизотропным. При этом поведение резинокорда при деформации вдоль нитей корда определяется механическими свойствами корда, а при деформации поперёк нитей корда – свойствами резины, что соответствует теоретическим данным. Характер построенных графиков указывает на необходимость учёта нелинейных эффектов при оценке эффективных свойств резинокордных композитов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-08-01284-а) и частично в рамках выполнения Государственного контракта № 07.514.12.4021 на выполнение научно-исследовательских работ.

Автор благодарит профессора МГУ В.А. Левина за постановку задачи и внимание при её решении.

## **Список использованной литературы**

1. Бидерман В.Л. и др. Автомобильные шины (конструкция, расчёт, испытание, эксплуатация). – М.: Госхимиздат, 1963. – 383 с.
2. Бухин Б.Л. Введение в механику пневматических шин.- М: Химия, 1988, 224 с.
3. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита. – Каучук и резина 2010, №4. С. 22-25.
4. Гамлицкий Ю.А., Мудрук В.И., Швачич М.В., Басс Ю.П. Упругий потенциал наполненных резин // Каучук и резина 2002, № 3. С. 39-39.
5. Гамлицкий Ю. А., Левин В. А., Филиппенко Е. В., Яковлев М. Я. Расчет поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокompозита при конечных деформациях с помощью МКЭ. – Сборник докладов 19 симпозиума «Проблемы шин и резинордных композитов», 13-17 октября 2008 г.
6. Левин В.А., Лохин В.В, Зингерман К.М. Об оценке эффективных характеристик пористых материалов при больших деформациях // Вести. МГУ Сер. Матем., мех 1996, № 6. С. 48-50
7. Левин В. А., Зингерман К. М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М., Физматлит, 2002. –272 с.
8. Левин В. А., Калинин В. В., Зингерман К. М., Вершинин А. В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. / Под ред. В. А. Левина. – М., Физматлит, 2007. – 392 с.
9. Левин В. А., Морозов Е. М., Матвиенко Ю. Г. Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М., Физматлит, 2004. – 408 с.
10. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 224 с.
11. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Об одном способе оценки эффективных характеристик пористых тел при конечных деформациях // Изв. РАН/ Мех тв. тела. 1997. № 4. С 45-50.
12. Левин В.А., Зингерман К.М. О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 482-487.
13. Левин В.А., Яковлев М.Я. Некоторые результаты сравнения универсальных прочностных САЕ при решении задач прочности. - Сборник докладов 21 симпозиума "Проблемы шин и резинордных композитов", 12-15 октября 2010 г.
14. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М., Наука, 1980. – 512 с.
15. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. — М.: Изд-во МГУ, 1984.- 336 с.
16. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
17. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. - 284 с.
18. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. — М. Наука, 1994 —528 с.
19. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
20. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
21. Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective Properties of Solids with Randomly Located Defects / In: Probabilities and Materials / Ed. by D. Breusse. Kluwera Publ.: 1994. P. 225-240.
22. V.A. Levin, K.M. Zingermann. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. P.809–816.

23. V.A. Levin, V.V. Lokhin, K.M. Zingerman. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2000. V. 67, No. 4. P. 667-670.
24. Piat R., Tsukrov I., Boehlke T., Bronzel N., Shrinivasa T., Reznik B., Gerthsen D. "Numerical studies of the influence of textural gradients on the local stress concentrations around fibers in carbon/carbon composites", Communications in Numerical Methods in Engineering, v. 24, pp. 2194-2205, 2008.
25. R. Rivlin, D. Saunders. Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, No. 865, 243, 251-288 (April 1951).
26. Tsukrov I., Kachanov M. Stress concentrations and microfracturing patterns in a brittle-elastic solid with interacting pores of diverse shapes // Intern. J. Solids and Structures. 1997. V. 34, No. 22. P. 2887-2904.
27. Tsukrov I., Novak J. Effective Elastic Properties of Solids with Defects of Irregular Shapes, International Journal of Solids and Structures, v. 39, pp. 1539-1555, 2002.
28. Tsukrov I., Kachanov M. Effective Moduli of an Anisotropic Material with Elliptical Holes of Arbitrary Orientational Distribution, International Journal of Solids and Structures, v. 37, No 41, pp. 5919-5941, 2000.
29. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. - Vol. 1. The finite element method. The basis, 2000, 707p.
30. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. - Vol. 2. The finite element method. Solid mechanics, 2000, 479p.
31. <http://cae-fidesys.ru/>