

## Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой

УДК 624.031

**Белянкин Никита Андреевич**

Студент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: belankin2@gmail.com;

**Бойко Андрей Юрьевич**

Студент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: trianglukator@mail.ru;

**Кирсанов Михаил Николаевич**

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин» ФГБОУ ВО Национальный исследовательский университет «МЭИ», член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, e-mail: c216@ya.ru

Статья получена: 04.03.2017. Рассмотрена: 11.03.2017. Одобрена: 11.04.2017. Опубликовано онлайн: 25.06.2017. ©РИОР

**Аннотация.** Получена формула для расчета прогиба статически определимой плоской фермы под действием равномерно распределенной нагрузки. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов. Прогиб в зависимости от числа панелей найден по формуле Максвелла–Мора с применением метода индукции и системы компьютерной математики *Maple*.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, формула Максвелла–Мора, *Maple*.

Для усиления верхнего пояса плоской фермы в ее схему введены дополнительные стержни (рис. 1). Уменьшение длины сжатых элементов приводит к увеличению критической нагрузки стержней и всей конструкции в целом в смысле потери устойчивости.

Оценим прогиб фермы под действием равномерной нагрузки. Для обобщения решения на произвольное число панелей применим метод индукции. Ранее этот метод применялся в [4] для вывода аналитических формул для плоских ферм и в [2] для пространственных. В [6] для вывода уравнений линий влияния применялся метод двойной индукции. Усилия в стержнях определим по программе [3], написанной применительно к математической системе символьных вычислений *Maple*. Ввод данных в программу начинается с нумерации стержней и узлов (рис. 2).

Начало координат совпадает с левой подвижной опорой. Ввод координат производится в циклах ( $n$  — число панелей):

```
> for i to 4*n+1 do x[i]:=(i-1)*a; y[i]:=2*h;
```

### ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION OF A GIRDER WITH REINFORCED TRIANGULAR LATTICE

**Belyankin Nikita**

Student, national research University “MPEI”,  
e-mail: belankin2@gmail.com;

**Boyko Andrey**

Student, national research University “MPEI”,  
e-mail: trianglukator@mail.ru;

**Kirsanov Mikhail**

Doctor of Physical-mat. Sciences, Professor of the Chair “Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines” National

Research University “MPEI”, Member of the Russian National Committee on Theoretical and Applied Mechanics;  
e-mail: c216@ya.ru

**Manuscript received:** 04.03.2017. **Revised:** 11.03.2017. **Accepted:** 11.04.2017. **Published online:** 25.06.2017. ©РИОР

**Abstract.** The formula for calculation of deflection of statically determinate flat truss under the action of uniformly distributed load is obtained. The forces in the rods are determined by cutting out the knots. The deflection depending on the number of panels was found using Maxwell – Mohr formula, the method of induction and a computer algebra system Maple.

**Keywords:** truss, deflection, Maxwell–Mohr’ formula, Maple.

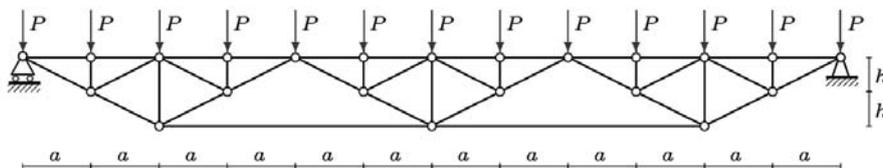
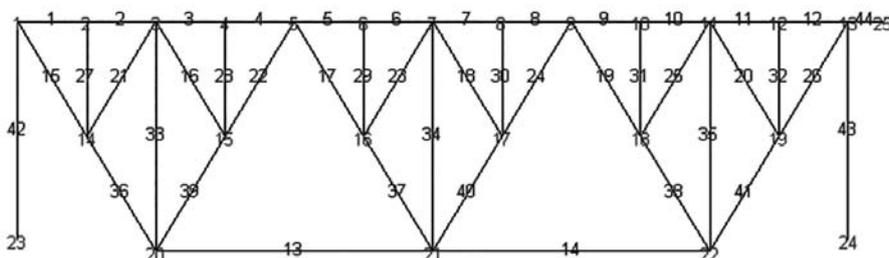
Рис. 1. Ферма при  $n = 3$ 

Рис. 2. Номера узлов и стержней

```

od:
> for i to 2*n do x[i+4*n+1]:= (i-1)*2*a+a;
y[i+4*n+1]:=h;
od:
> for i to n do x[i+6*n+1]:=2*a*(i*2-1); y[i+6*n+1]:=0;
od:

```

Для задания решетки фермы необходимо указать порядок соединения стержней и узлов. По числу стержней введем специальные векторы, координаты которых задают номера концов этих стержней:

```

> for i to 4*n do N[i]:= [i, i+1];
od:
> for i to n-1 do N[i+4*n]:= [6*n+1+i, i+6*n+2];
od:
> for i to 2*n do
N[i+5*n-1]:= [2*i-1, i+4*n+1];
N[i+7*n-1]:= [2*i+1, i+4*n+1];
N[i+9*n-1]:= [2*i, i+4*n+1];
od:
> for i to n do N[i+11*n-1]:= [4*i-1, i+6*n+1];
N[i+12*n-1]:= [2*i+4*n, i+6*n+1];
N[i+13*n-1]:= [2*i+4*n+1, i+6*n+1];
od:

```

Всего в ферме  $m = 14n + 2$  стержня, для которых в программе составлены уравнения равновесия методом вырезания узлов. Элементами матрицы системы уравнений являются направляющие косинусы стержней. В нечетные строки с номером  $i$  вписываются косинусы стержней, соединенных с этим узлом, с горизонтальной осью  $x$ , в четные — косинусы с осью  $y$ . Вектор правой части формируется аналогично из внеш-

них усилий. В этой задаче — это только вертикальные нагрузки  $P$ . Прогиб определяется по формуле Максвелла–Мора, в которой учитываются только продольные усилия:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

где  $S_i$  — усилия от действия внешней нагрузки, распределенной по верхнему поясу;  $s_i$  — усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к среднему узлу верхнего пояса (где измеряется прогиб);  $l_i$  — длины стержней;  $m$  — число стержней, включая опорные стержни.

Получено следующее выражение для прогиба:

$$EF\Delta = P(A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3) / (2h^2),$$

где  $c = \sqrt{h^2 + a^2}$  — длины раскосов.

Методом индукции найдены коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 A_n &= (20n^4 + 10n^2 - 3(-1)^n + 3) / 6, \\
 C_n &= (8n^2 - (-1)^n + 1) / 2, \\
 H_n &= 4(1 - (-1)^n).
 \end{aligned}$$

Для этого из решений для ферм с числом панелей от 1 до 12 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$ ,  $c$  и  $h$  соответственно:

6, 60, 286, 880, 2126, 4380, 8086, 13 760, 22 006, 33 500, 49 006, 69 360,

5, 16, 37, 64, 101, 144, 197, 256, 325, 400, 485, 576,

8, 0, 8, 0, 8, 0, 8, 0, 8, 0, 8, 0.

Оператор `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` системы *Maple* по этим данным дал рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют члены последовательностей:

$$\begin{aligned} A_n &= 4A_{n-1} - 5A_{n-2} + 5A_{n-4} - 4A_{n-5} + A_{n-6}, \\ C_n &= 2C_{n-1} - 2C_{n-3} + C_{n-4} \\ H_n &= H_{n-2}. \end{aligned}$$

Решения этих уравнений с помощью оператора `rsolve` этой же системы *Maple* дает искомые выражения для коэффициентов расчетной формулы.

На рис. 3 даны кривые полученной зависимости при фиксированной длине пролета  $L = 4an = 100$  м и заданной общей нагрузке  $P_0 = P(4n + 1)$ . Введено обозначение для безразмерного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ .

Кривые имеют неявно выраженные минимумы, полезные для оптимизации конструкции, однако аналитические их выражения получить не удастся. Численные же расчеты показывают, что в большинстве случаев они соответствуют нереально длинным панелям. В приведенном

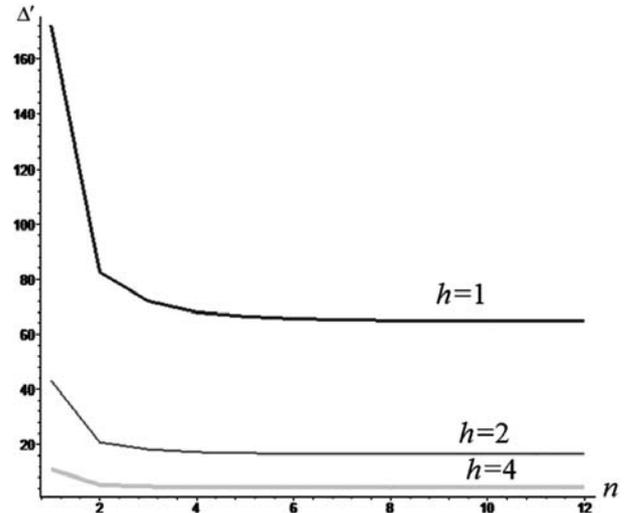


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей,  $L = 100$  м примере  $n = 2$ ,  $a = L / (4n) = 12,5$  м. Наклон асимптот кривых дает следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (2L).$$

Обзоры работ по нахождению аналитических решений приведены в [1; 5].

## Литература

1. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки [Текст] / Л.К. Кийко // Научный вестник. — 2016. — № 1. — С. 247–254.
2. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы [Текст] / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. — 2016. — № 5. — С. 19–22.
3. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика [Текст] / М.Н. Кирсанов / Под ред. А.И. Кириллова. — М.: Физматлит, 2008. — 382 с.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы [Текст] / М.Н. Кирсанов, А.Н. Маслов // Строительная механика и расчет сооружений. — 2017. — 2. — С. 4–10.
5. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций [Текст] / Д.В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — № 5. — С. 66–73.
6. Jiang H. An analytical expression for the influence line of the truss [Текст] / H. Jiang, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. — № 1–5. — С. 10–11. — DOI: 10.17117/cn.2016.01.05.

## References

1. Kiyko L.K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviem vetrovoy nagruzki [Analytical estimation of arch arch deflection under the influence of wind load]. *Nauchnyy vestnik* [Scientific Herald]. 2016, i. 1, pp. 247–254.
2. Kirsanov M.N. Otsenka progiba i ustoychivosti prostranstvennoy balochnoy fermy [Evaluation of the deflection and stability of a spatial beam truss]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction mechanics and calculation of structures]. 2016, i. 5, pp. 19–22.
3. Kirsanov M.N. *Reshebnik. Teoreticheskaya mekhanika* [The remover. Theoretical mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 382 p.
4. Kirsanov M.N., Maslov A.N. Formuly dlya rascheta progiba balochnoy mnogoreschetchatoy fermy [Formulas for calculating the deflection of a beam multi-lattice truss]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction mechanics and calculation of structures]. 2017, i. 2, pp. 4–10.
5. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy [Comparative analysis of analytical solutions to the problem of the deflection of truss structures]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Engineering and Construction Journal]. 2015, i. 5, pp. 66–73.
6. Jiang H., Kirsanov M.N. An analytical expression for the influence line of the truss // *Vestnik nauchnykh konferentsiy*. 2016, i. 1–5, pp. 10–11. DOI: 10.17117/cn.2016.01.05.