

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»



# СОВРЕМЕННАЯ НАУКА И ИННОВАЦИИ

**Научный журнал**

**Выпуск № 1 (17), 2017**

Выходит 4 раза в год

ISSN 2307-910X

Ставрополь – Пятигорск  
2017

М. Н. Кирсанов [M. N. Kirsanov]

УДК 624.04

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЖЕСТКОСТИ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ**

**FORMULAS FOR ESTIMATING THE STIFFNESS OF THE REINFORCED TRUSS**

Выводятся точные формулы для расчета прогиба статически определимой фермы с усиленной решеткой в зависимости от ее размеров, нагрузки и числа панелей. Рассматривается равномерное нагружение по верхнему поясу, нижнему и сосредоточенной силой в середине пролета. Определяются усилия в наиболее сжатых и растянутых поясах. Применяется метод вырезания узлов, реализованный в программе на языке компьютерной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей привлекается метод индукции. Анализируются асимптотические свойства решений.

Derives the exact formulas for the calculation of deflection of statically determinate truss with reinforced bars depending on its size, load and number of panels. Considered uniform loading on the upper belt, bottom and a concentrated force at Midspan. Determined forces in the most compressed and stretched elements. Method of cutting nodes, implemented in the program in the language of computer mathematics Maple is used. To generalize the solution for an arbitrary number of panels involved induction method. The asymptotic properties of the solutions are obtained.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple, аналитическое решение

**Key words:** truss, deflection, induction, Maple, analytical solution

Ферма с треугольной решеткой (рис. 1) усилена шпренгельными элементами. Ставится задача вывода аналитической зависимости прогиба фермы в середине пролета от числа панелей. Применяется алгоритм, предложенный в [1].

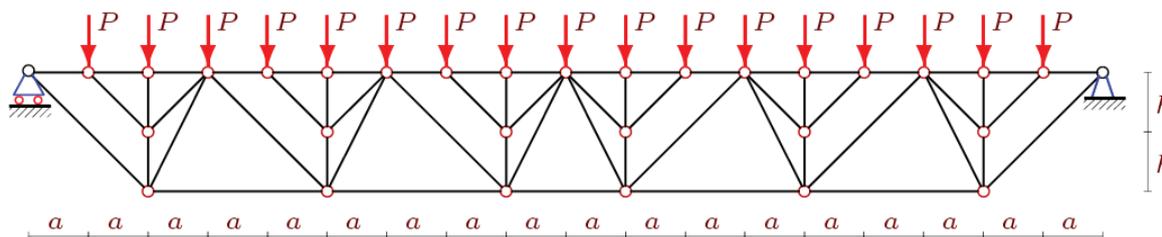


Рис. 1. Ферма, n=3

Ферма с n панелями содержит  $10n-2$  шарниров и  $m=20n+4$  стержней с учетом трех опорных стержней, два из которых соответствуют правой неподвижной шарнирной опоре, один – левой подвижной. Для определения прогиба применяется формула Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_i s_i l_i}{EF}$$

Обозначено:  $S_i$  – усилие в стержне  $i$  от действия внешней нагрузки,  $s_i$  – усилие в стержне  $i$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной в середине пролета к узлу верхнего пояса,  $EF$  – жесткость стержней,  $l_i$  – их длины. Суммирование ведется по деформируемым стержням. Опорные стержни приняты жесткими и в сумму не входят.

Для определения усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов необходимо составить общую для всей фермы систему уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат. За основу берется программа [1]. Элементами матрицы являются направляющие косинусы усилий, вычисляемые через координаты узлов. Приведем характерный фрагмент программы, написанный на языке системы Maple (рис. 2).

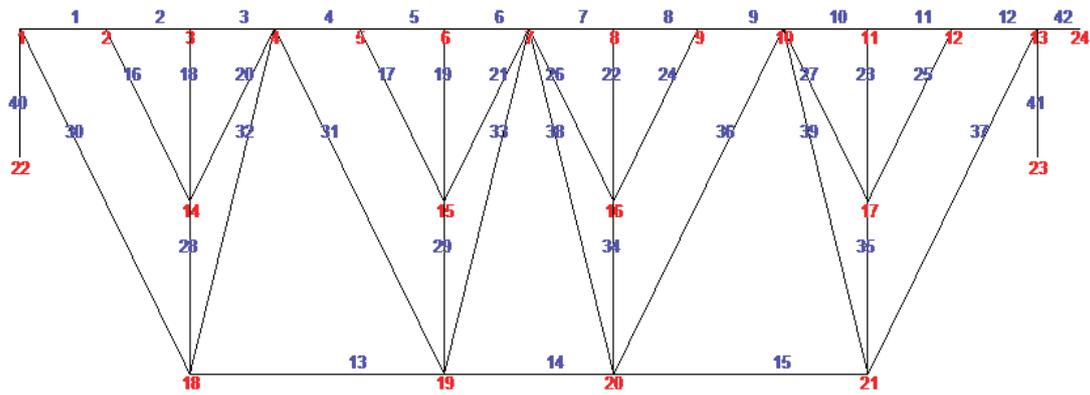


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, n=2

Начало координат располагается в левой подвижной опоре:

```
for i to 6*n+1 do x[i]:=a*(i-1); y[i]:=2*h; od;
for i to n do
x[i+6*n+1]:=3*a*i-a; y[i+6*n+1]:=h;
x[i+7*n+1]:=3*a*(i+n)-2*a; y[i+7*n+1]:=h;
x[i+8*n+1]:=3*a*(i-1)+2*a; y[i+8*n+1]:=0;
x[i+9*n+1]:=3*a*(i+n)-2*a; y[i+9*n+1]:=0;
od;
```

Схема соединений стержней решетки фермы и узлов введена специальными векторами, содержащими номера концов соответствующих стержней. Стержни верхнего пояса, например, кодируются в цикле так

```
for i to 6*n do N[i]:=[i,i+1];od;
```

нижнего –

```
for i to 2*n-1 do N[i+6*n]:=[i+8*n+1,i+8*n+2];od;
```

Матрица **G** направляющих косинусов заполняется в цикле по числу всех стержней фермы **m**. Учитывается, что направляющие косинусы противоположных концов одного стержня имеют разные знаки

```
for i to m do
Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]];
Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]];
L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2);
for j to 2 do
r:=2*N[i][2]-2+j;
if r<=m then G [r,i]:=-Lxy[j]/L[i];fi;
r:=2*N[i][1]-2+j;
if r<=m then G[r,i]:= Lxy[j]/L[i]; fi;
od;
od;
```

**Решение**

Расчет серии ферм с разным числом панелей в аналитической форме показывает, что решение всякий раз имеет один и тот же полиномиальный вид

$$\Delta_1 = P \frac{Aa^3 + Cc^3 + Dd^3}{8h^2 EF}, \tag{1}$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$  – длины раскосов. Коэффициенты A, C и D зависят только от числа панелей n. Зависимость коэффициентов от числа панелей получается методом индукции, нахождение этой зависимости составляет основную трудность задачи. Последовательность коэффициентов вводится в аргументы оператора **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple [1], который дает соответствующее рекуррентное уравнение. Для решения уравнения использован оператор **rsolve**. Оператор **rgf\_findrecur** требуется четное число членов последовательности, достаточное для выявления закономерности. В этой задаче потребовалось последовательно рассчитать 12 ферм. В результате получены следующие коэффициенты

$$\begin{aligned} A &= n(135n^3 + 3n + 4) / 2, \\ C &= 8n(3n + 2), \\ D &= n(3n - 4). \end{aligned}$$

Аналогично, для равномерной нагрузки по нижнему поясу имеем

$$\Delta_2 = P \frac{Aa^3 + Cc^3 + Dd^3}{4h^2 EF} \quad (2)$$

Коэффициенты в этой формуле имеют вид

$$\begin{aligned} A &= n(45n^3 + 12n^2 + 9n + 6) / 4, \\ C &= 4n(n + 1), \\ D &= n(n - 1) / 2. \end{aligned}$$

Получим также формулу для прогиба от действия сосредоточенной силы в середине пролета вида (1):

$$\Delta_3 = P \frac{Aa^3 + Cc^3 + Dd^3}{8h^2 EF} \quad (3)$$

Коэффициенты в этой формуле просты, для получения значений  $D=n$  и  $C=8n$  составление рекуррентных уравнений не потребовалось, а коэффициент  $A = 3n(1 + 6n^2)$  получен из анализа всего восьми ферм и решения уравнения четвертого порядка  $A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}$ .

Свойство линейности задачи позволяет рассчитывать фермы с широким набором нагрузок, получающимися комбинацией решений (1) – (3). Кроме того, решение можно обобщить на случай различных жесткостей стержней. Если, например жесткость коротких раскосов длиной  $c$  равна  $k_c EF$ , а жесткость длинных  $k_d EF$ , где  $EF$  жесткость поясов, то в соответствующую формулу вводятся поправочные коэффициенты

$$\Delta_1 = P \frac{Aa^3 + Cc^3 / k_c + Dd^3 / k_d}{8h^2 EF}.$$

На практике обычно поправочные коэффициенты жесткости  $k_c$  и  $k_d$  меньше единицы.

#### Анализ усилий в стержнях

Прочность и устойчивость фермы можно определять по величине максимальных сжимающих и растягивающих усилий. Очевидно, это усилия в средних стержнях соответственно верхнего и нижнего пояса. Непосредственно методом сечений здесь найти усилия невозможно. Однако, в процессе вычисления прогиба эти усилия уже были найдены. Остается получить только общую формулу для различного числа панелей.

Рассмотрим равномерную нагрузку по верхнему поясу. Наиболее растянутый стержень в середине нижнего пояса имеет усилие

$$S_{7n} = 9Pn^2 a / (4h),$$

сжатый стержень в середине верхнего пояса

$$S_{3n} = -P(9n^2 - 3)a / (4h).$$

#### Выводы

Для трех типов нагрузок выведены компактные формулы для прогиба фермы с усиленной решеткой. Шпренгельная система не позволяет находить усилия непосредственно методом сечений или последовательным вырезанием узлов. Метод индукции при математической поддержке пакета Maple дает возможность вывести формулу для прогиба и усилий в характерных стержнях. Полученные формулы могут быть полезны для оптимизации конструкции по весу, прочности, устойчивости. Кроме того, аналитические оценки необходимы при проектировании конструкций и оценке достоверности численных расчетов.

Аналогичные решения методом индукции на основе программы [1] получены для плоских [2–11] и пространственных [12] ферм. Обзоры аналитических решений для прогиба плоских ферм дан в работах [13–15].

Предложенная схема решетки фермы явилась результатом усовершенствования фермы, рассмотренной в [16].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решение задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
3. Voropai R. A., Kazmiruk I. Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12.
4. Kirsanov M. Analysis of deformations of the open hinged-rod ring // Инновационная наука. 2017. №2-1. С. 10-11.
5. Shipaeva A. S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // Science Almanac. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.

6. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). Pp. 7-8.
7. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M. N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Вестник научных конференций. 2016. № 2-1(6). С. 6-7.
8. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 1-4 (5). С. 6-7.
9. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Вестник научных конференций. 2016. № 1-5(5). С.10-11.
10. Ponamareva M. A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Научный альманах. 2016. № 4-3(18). С.257-259.
11. Тиньков Д. В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
12. Ершов Л. А. Формулы для расчета деформаций пирамидального купола // Научный альманах. 2016. N11-2(25). С.315-318.
13. Кийко Л. К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
14. Тиньков Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.
15. Тиньков Д. В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
16. Марутян А. С. Оптимизация ферменных конструкций со стойками и полураскосами в треугольных решетках // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4(267). С. 60-68.

#### REFERENCES

1. Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Reshenie zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 s.
2. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. S. 14-17.
3. Voropai R. A., Kazmiruk I. Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12.
4. Kirsanov M. Analysis of deformations of the open hinged-rod ring// Innovatsionnaya nauka. 2017. №2-1. S. 10-11.
5. Shipaeva A. S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // Science Almanac. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.
6. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). Pp.7-8.
7. Al-Shahrabi A. M., Kirsanov M. N. Line of influence of the deflection for cantilever truss // Vestnik nauchnykh konferentsiy. 2016. № 2-1(6). S. 6-7.
8. Dong X., Kirsanov M. N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels // Vestnik nauchnykh konferentsiy. 2016. № 1-4 (5). S. 6-7.
9. Jiang H., Kirsanov M. N. An analytical expression for the influence line of the truss // Vestnik nauchnykh konferentsiy. 2016. № 1-5(5). S.10-11.
10. Ponamareva M. A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Nauchnyy al'manakh. 2016. № 4-3(18). S.257-259.
11. Tin'kov D. V. Formuly dlya rascheta progiba vsparushennoy balochnoy raskosnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley // Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2016. Т. 2. № 13 (13). S. 10-14.
12. Ershov L. A. Formuly dlya rascheta deformatsiy piramidal'nogo kupola // Nauchnyy al'manakh. 2016. N11-2(25). S.315-318
13. Kiyko L. K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviem vetrovoy nagruzki // Nauchnyy vestnik. 2016. № 1 (7). S. 247-254.
14. Tin'kov D. V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal. 2015. №5(57). S. 66-73.
15. Tin'kov D. V. Analiz tochnykh resheniy progiba regul'yarnykh sharnirno-sterzhnevyykh konstruksiy // Stroitel'naya mekhanika inzhenerykh konstruksiy i sooruzheniy. 2015. №6. S. 21-28.
16. Marutyanyan A. S. Optimizatsiya minimal'nykh vysot stropil'nykh i perekrestnykh stal'nykh ferm, vklyuchaya tipa «Pyatigorsk» // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2014. № 2(253). S. 60-66.

#### ОБ АВТОРЕ

**Кирсанов Михаил Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, e-mail: c216@ya.ru

**Kirsanov Mikhail Nikolaevich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research University «MPEI», Moscow, e-mail:c216@ya.ru,

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЖЕСТКОСТИ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ****М. Н. Кирсанов**

Предлагается схема статически определимой балочной фермы с треугольной решеткой и с дополнительными шпренгельными элементами, уменьшающими длину стержней в верхнем сжатом поясе. Выводятся формулы для прогиба фермы для трех видов нагрузок по верхнему и нижнему поясу. Получены формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях в зависимости от числа панелей. Символьные решения линейных алгебраических и рекуррентных уравнений, преобразования и анализ проводятся в системе компьютерной математики Maple.

**FORMULAS FOR ESTIMATING THE STIFFNESS OF THE REINFORCED TRUSS****M. N. Kirsanov**

The scheme of statically determinate girders with a triangular lattice and with additional truss elements, which reduces the length of the rods of the upper compressed zone is proposed. A formulas for the deflection of the truss under three types of loads at the upper and lower zone are obtained. Derived the formulas for forces in the most compressed and stretched rods depending on the number of panels. Symbolic solution of linear algebraic and recursion equations, transformations and analysis are carried out in the system of computer mathematics Maple.