

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

УДК 519.214

Попов Никита Романович

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ ФИШЕРА-ТИППЕТА-ГНЕДЕНКО

Специальность 01.04.02 —

«Комбинаторный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
магистра физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н

Родионов Игорь Владимирович

Москва — 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	3
Глава 1. Необходимые определения и теоремы	6
1.1 О функциях распределений	6
1.2 Обратные функции	8
Глава 2. Основные результаты	13
2.1 Необходимые сведения	13
2.2 Выделение асимптотики функций	14
2.2.1 Случай $\gamma \neq 0$	14
2.2.2 Случай $\gamma = 0$	15
2.2.3 Итоговые результаты	17
2.3 Обращение функций	18
2.3.1 Случай $\gamma \neq 0$	18
2.3.2 Случай $\gamma = 0$	21
2.4 Примеры	26
Заключение	28
Список литературы	29

Введение

Классическая теория экстремумов — асимптотическая теория распределения максимума [1]

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n),$$

где $X_1, \dots, X_n$ - независимые одинаково распределённые случайные величины, — начала активно развиваться около полувека назад, хотя её корни уходят глубоко в историю математики. В основе теории лежит фундаментальный результат, полученный Фишером и Типпетом [2] и позднее обобщённый Б.В. Гнеденко [3] — теорема об экстремальных типах, также известная как теорема Фишера-Типпета-Гнеденко, которая описывает все возможные формы распределения M_n при линейной нормировке. Строго говоря, Б.В. Гнеденко доказал, что если для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0$, b_n случайная последовательность $a_n^{-1}(M_n - b_n)$ имеет невырожденное предельное распределение, т.е. существует такая невырожденная функция распределения $G(x)$, что

$$P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x), \quad (1)$$

то G принадлежит одному из трёх экстремальных типов (т.е. существуют такие константы $a > 0$ и b , что функция распределения $G(x) := G_i(ax+b)$ в точности равна одной из указанных ниже функций распределения):

$$\begin{aligned} \text{Тип I: } G_1(x) &= e^{-e^{-x}} \\ \text{Тип II: } G_2(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{для некоторого } \alpha > 0, \quad x > 0 \end{cases} \\ \text{Тип III: } G_3(x) &= \begin{cases} e^{-(-x)^\alpha} & \text{для некоторого } \alpha > 0, \quad x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

где $G_1(x)$ - так называемое распределение Гумбеля, $G_2(x)$ - класс распределений Фреше, а $G_3(x)$ - класс распределений Вейбулла. Параметр α , возникающий в теореме Фишера-Типпета-Гнеденко, называется экстремальным индексом. Пусть $F(x)$ - маргинальная функция распределения случайной последовательности $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Тогда в случае независимых наблюдений верно

$$P(M_n \leq x) = F^n(x),$$

т.е. (1) можно переписать в следующем виде:

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x). \quad (2)$$

Если для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0$ и b_n выполнено (2), то говорят, что F принадлежит области притяжения распределения G , и пишут $F \in D(G)$. Известны критерии, дающие необходимые и достаточные условия принадлежности F области притяжения того или иного экстремального типа (см. например [1] или [4]). Однако есть распределения, которые не принадлежат ни одной из трёх областей максимального притяжения, например, пуассоновское распределение.

К сегодняшнему дню классическая теория экстремумов сформировалась полностью и имеет большое количество различных приложений (см. например книгу Гумбеля [5]). Позднее, начиная с работ Крамера, Лойнса, Бермана, Лидбеттера и Уотсона, возник интерес к расширению классической теории на последовательности зависимых случайных величин и на стационарные процессы с непрерывным временем. Развитие шло в следующих направлениях: создание теории для гауссовских процессов с непрерывным временем (Крамер) и стационарных последовательностей (Берман, Лидбеттер), а также доказательство результатов классической теории для некоторых типов зависимостей случайных величин (Уотсон, Лойнс).

Предметом данной работы является исследование скорости сходимости в центральной теореме стохастической теории экстремумов – теореме Фишера-Типпета-Гнеденко. В отличие от классической теории суммирования случайных величин, где соответствующий результат носит название теоремы Берри-Эссеена [6; 7], окончательный вид которой (точное значение нормировочной константы) был получен сравнительно недавно (Илья Тюрин, [8]), задача нахождения скорости сходимости в теореме Фишера-Типпета-Гнеденко до сих пор остаётся не решённой.

Для некоторых частных случаев эта задача все же была решена. Например, в [9] доказано, что для нормального распределения скорость сходимости не может быть быстрее $O((\ln n)^{-1})$. Однако скорость сходимости не всегда такая медленная – в [10] установлено, что для экспоненциальных случайных величин скорость сходимости обратно-линейная. Есть результаты и для менее классических примеров: например, для асимметричного нормального распределения с плотностью

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(\alpha x), \quad (3)$$

где $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ – плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины соответственно в [11] показано, что скорость сходимости такая же, как и у обычного нормального распределения. Такая скорость сходимости – довольно частое событие: её также имеет обобщенное распределение ошибок [12]:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x-\nu}{\sigma}\right|^{\frac{1}{k}}}}{2^{k+1}\sigma\Gamma(k+1)} \quad (4)$$

Однако обратно-логарифмическая скорость сходимости не является самым медленным результатом. Например, у логвейбулловского распределения с плотностью

$$f(x) = \frac{\gamma}{x} (\ln x)^{\gamma-1} e^{-(\ln x)^\gamma} I(x > 1), \quad (5)$$

скорость сходимости равна $O((\ln n)^{-1+\frac{1}{\gamma}})$, если $\gamma > 1$.

В данной работе решалась следующая задача: по заданной скорости сходимости выделить класс функций распределения, имеющих такую скорость сходимости.

Глава 1. Необходимые определения и теоремы

1.1 О функциях распределений

Теория экстремальных значений построена вокруг одного предельного закона, по смыслу очень похожего на центральную предельную теорему. ЦПТ, наверное, является одним из самых известных предельных законов в теории вероятностей, в самой простой формулировке утверждает следующее: для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ с конечным вторым моментом их нормированная сумма по распределению сходится к стандартному нормальному закону:

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (1.1)$$

Здесь $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Нормировочные константы хорошо известны – сдвиг b_n определяет матожидание суммы, а масштаб a_n – корень из её дисперсии. Центральную предельную теорему можно считать следующим порядком точности после закона больших чисел, ведь фактически она показывает насколько сильно распределение среднего от случайных величин отличается от предела, который по ЗБЧ равняется матожиданию от закона, по которому распределены случайные величины.

Многие другие функционалы от последовательности случайных величин в том или ином виде сводятся к сумме – например, произведение случайных величин. Но существуют такие функционалы, которые никаким образом не сводятся к сумме. Одним из важных примеров такого функционала является максимум или минимум последовательности случайных величин. Очевидно, что максимум последовательности случайных величин стремится к предельной точке распределения (к точке, после которой функция распределения случайных величин равна единице, или бесконечности, если функция распределения везде меньше единицы). Центральный результат теории экстремальных значений – предельный закон для нормированного максимума последовательности случайных величин:

Теорема 1 (Фишер, Типпет, Гнеденко). Пусть последовательность независимых случайных величин $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ имеет функцию распределения $F(x)$. Тогда, если существуют нормировочные коэффициенты $a_n > 0, b_n$ такие, что

$$\frac{\xi_{(n)} - b_n}{a_n} \rightarrow \xi, \quad (1.2)$$

где ξ имеет невырожденную функцию распределения $G(x)$, выполнено

$$G(x) = G_\gamma(ax + b), \quad (1.3)$$

где

$$G_\gamma(x) = e^{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, \quad 1 + \gamma x > 0, \quad (1.4)$$

причем $\gamma = \gamma(F) \in \mathbb{R}$ зависит только от функции распределения F . При $\gamma = 0$ функция $G_0(x)$ подразумевается равной

$$G_0(x) = e^{-e^{-x}}. \quad (1.5)$$

В отличие от центральной предельной теоремы, помимо матожидания и дисперсии у предельного закона есть еще одна степень свободы – γ , называемая *критическим индексом* распределения F . Иногда, для удобства, предельное распределение разбивают на три семейства распределений, в зависимости от знака критического индекса:

$$G_\gamma(x) = \begin{cases} \begin{cases} e^{-(-x)^{-\frac{1}{\gamma}}}, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} & \gamma < 0, \\ e^{-e^{-x}}, & \gamma = 0, \\ \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x^{-\frac{1}{\gamma}}}, & x > 0, \end{cases} & \gamma > 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Эти семейства распределений называются *обратное распределение Вейбулла*, *распределение Гумбеля* и *распределение Фреше* соответственно. Такие распределения также называются *максимум-устойчивыми распределениями*, потому что для них и только для них выполнено следующее свойство:

$$\xi_{(n)} \stackrel{d}{=} a_n \xi_1 + b_n. \quad (1.7)$$

Из-за специфики доказательства в теории экстремальных значений предельный закон обычно записывают в терминах функций распределения:

$$P(\xi_{(n)} \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G_\gamma(x), \quad (1.8)$$

и говорят, что функция распределения F принадлежит области максимального притяжения G_γ (записывается как $F \in D(G_\gamma)$).

Существует критерий принадлежности функции распределения к области максимального притяжения:

Теорема 2. Пусть $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Функция распределения F принадлежит области максимального притяжения G_γ тогда и только тогда, когда

1. для $\gamma > 0$: $x_F = +\infty$, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-1/\gamma} \quad (1.9)$$

для всех $x > 0$;

2. для $\gamma < 0$: $x_F < +\infty$, и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - F(x_F - tx)}{1 - F(x_F - t)} = x^{-1/\gamma} \quad (1.10)$$

для всех $x > 0$;

3. для $\gamma = 0$: x_F может быть конечной и бесконечной, и

$$\lim_{t \rightarrow x_F} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = e^{-x} \quad (1.11)$$

для всех x , где f – некоторая положительная функция.

Как и для любого предельного закона, разумно задаться вопросом о скорости сходимости функции распределения максимума к пределу. Опять же, для ЦПТ есть замечательное неравенство Берри-Эссеена:

$$|P(S_n \leq a_n x + b_n) - \Phi(x)| \leq \frac{C \mathbb{E}|\xi_1|^3}{\sqrt{n}(\mathbb{D}\xi_1)^{3/2}}, \quad (1.12)$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения, C – некоторая абсолютная константа, а третий абсолютный момент распределения существует и конечен. К сожалению, никакого общего результата для распределения максимума касательно скорости сходимости на данный момент не существует.

1.2 Обратные функции

Несмотря на сходство постановки задач, методы доказательства ЦПТ и теоремы Гнеденко сильно различаются. При доказательстве ЦПТ использовались характеристические функции

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}, \quad (1.13)$$

которые абсолютно непригодны для доказательства результатов теории экстремальных значений. Здесь очень удобно работать в терминах обратных функций:

Определение 1. Пусть $F(x)$ – неубывающая функция. Тогда

$$F^{\leftarrow}(x) = \inf\{y : F(y) \geq x\} \quad (1.14)$$

называется непрерывной справа обратной функцией.

Далее такие функции будут просто называться обратными.

Очевидно, что если последовательность функций сходится к какой-то функции поточечно, то и обратные функции будут поточечно сходиться. Однако будут ли сохраняться свойства сходимости при переходе от функций к их обратным функциям? Оказывается, что да:

Лемма 1 (Ферфаат). Пусть y – непрерывная функция, и $x_1, x_2, \dots$ – неубывающие функции, определенные на некотором интервале $[a, b]$. Пусть есть неубывающая функция g на $[a, b]$ с

положительной производной g' . Пусть также есть последовательность положительных чисел δ_n , стремящихся к нулю, и выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n(s) - g(s)}{\delta_n} = y(s) \quad (1.15)$$

равномерно на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{\leftarrow}(s) - g^{\leftarrow}(s)}{\delta_n} = -(g^{\leftarrow})'(s)y(g^{\leftarrow}(s)) \quad (1.16)$$

равномерно на $[g(a), g(b)]$.

Из этой леммы следует, что скорость сходимости прямой и обратной функции совпадают, при выполнении равномерной сходимости.

Если переписать теорему Гнеденко в терминах обратных функций, то получится очень элегантное и простое утверждение: пусть $f(x) = (\frac{-1}{\ln F})^{\leftarrow}(x)$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(nx) - b_n}{a_n} = \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}. \quad (1.17)$$

При $\gamma = 0$, то правая часть полагается равной $\ln x$. Оказывается, это классическая постановка задачи теории регулярно меняющихся функций.

Определение 2. Говорят, что функция f является расширенно регулярно меняющейся функцией, если выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx) - b(t)}{a(t)} = \frac{x^\gamma - 1}{\gamma} \quad (1.18)$$

(записывают как $f \in ERV_\gamma$). Если выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{b(t)} = x^\gamma, \quad (1.19)$$

то говорят, что f является регулярно меняющейся функцией, и записывают как $f \in RV_\gamma$.

В обоих случаях в качестве $b(t)$ можно взять $f(t)$. Функцию $a(t)$ называют вспомогательной функцией.

Классы RV_γ и ERV_γ для монотонных функций при $\gamma \neq 0$ совпадают в следующем смысле:

$$f \in ERV_\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} f \in RV_\gamma, & f(\infty) = \infty, \\ f(\infty) - f \in RV_\gamma, & f(\infty) < \infty. \end{cases} \quad (1.20)$$

То есть $ERV_\gamma \neq RV_\gamma$, например, $1 - x^{-2} \in RV_0$, но $1 - x^{-2} \in ERV_{-2}$. При $\gamma = 0$ существует несколько оговорок: класс RV_0 содержит больше функций, нежели $ERV_0 = \Pi$. Однако далее будут рассматриваться функции из класса ERV_γ .

Для регулярно меняющихся функций получено много результатов, особенно относительно их скорости сходимости, которая по лемме Ферфаата будет совпадать со скоростью

сходимости и функции распределения (асимптотически, константы будут разные). Интересующая нас скорость сходимости $A(t)$ будет удовлетворять следующему свойству:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(tx) - f(t)}{a(t)} - \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}}{A(t)} = H(x). \quad (1.21)$$

Несложно заметить, что если заменить $a(t)$ на $a(t)(1 + cA(t))$, то предельная функция станет $H(x) - c\frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$, то есть, если $H(x)$ пропорциональна $\frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$, то предел можно занулить, не меняя асимптотику функций a и A . Поэтому предполагают, что $H(x) \neq c\frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$. В таком случае верна следующая теорема:

Теорема 3 (Де Хаан, Штатмюллер). *Если выполнено (1.20), и $H(x) \neq c\frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$, то $H(x) = H_{\gamma, \rho}(x)$, где $\rho \leq 0$, и*

$$H_{\gamma, \rho}(x) = c_1 \int_1^x s^{\gamma-1} \int_1^s u^{\rho-1} du ds + c_2 \int_1^x s^{\gamma+\rho-1} ds \quad (1.22)$$

для $x > 0$, и говорят, что $f \in 2ERV_{\gamma, \rho}$. Более того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{a(tx)}{a(t)} - x^\gamma}{A(t)} = c_1 x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad (1.23)$$

и $A \in RV_\rho$. При $\rho = 0$ константа c_1 не может равняться нулю.

Главное следствие из этой теоремы следующее – функция $A(t)$, задающая скорость сходимости, не может убывать быстрее, чем степенная функция. Это не означает, что разность не может убывать быстрее степени, это всего лишь говорит о том, что разность не будет декомпозироваться на произведение функций по переменным t и x . Далее будут рассматриваться только функции из класса $2ERV_{\gamma, \rho}$.

Для дважды непрерывных функций f можно легко получить явный вид вспомогательной функции $a(t)$ и скорости сходимости $A(t)$:

Лемма 2. Пусть $f \in 2ERV_{\gamma, \rho}$ и f дважды дифференцируема, тогда

$$a(t) = tf'(t), \quad (1.24)$$

$$A(t) = \frac{tf''(t)}{f'(t)} - \gamma + 1. \quad (1.25)$$

При таких функциях a и A константы c_1, c_2 в предельной функции H будут равны 1 и 0 соответственно.

В качестве следствия получается следующая декомпозиция функции $f(tx)$ для $f \in 2ERV_{\gamma, \rho}$:

$$f(tx) = f(t) + tf'(t) \left[\frac{x^\gamma - 1}{\gamma} + H_{\gamma, \rho}(x)(1 - \gamma) \right] + t^2 f''(t) H_{\gamma, \rho}(x)(1 + o(1)). \quad (1.26)$$

Из последних полезных свойств, которые далее пригодятся, остается теорема о равномерной сходимости:

Теорема 4. Для функций $f \in ERV_\gamma$ (1.18) выполнено равномерно на любом отрезке $[a, b]$, если $0 < a < b < \infty$.

Также очень удобно перейти от мультипликативной записи (произведение tx в аргументе функции f) к аддитивному с помощью замены $h(t) = f(e^t)$, тогда все тождества переписутся в следующем виде:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t+s) - h(t)}{a(e^t)} = \frac{e^{\gamma s} - 1}{\gamma}, \quad (1.27)$$

$$a(e^t) = h'(t), \quad (1.28)$$

$$A(e^t) = B(t) = \frac{h''(t)}{h'(t)} - \gamma, \quad (1.29)$$

$$h(t+s) = h(t) + h'(t) \left[\frac{e^{\gamma s} - 1}{\gamma} - \gamma H_{\gamma, \rho}(e^s) \right] + h''(t) H_{\gamma, \rho}(e^s) (1 + o(1)). \quad (1.30)$$

Почему вообще есть смысл рассматривать только дважды дифференцируемые функции f ? На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Теорема 5. Пусть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(tx) - f(t)}{a(t)} - \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}}{A(t)} = H(x) \quad (1.31)$$

с $H(x) \neq c \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}$. Тогда существует дважды дифференцируемая f_1 такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) - f_1(t)}{a(t)A(t)} = 0, \quad (1.32)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t) - t f_1'(t)}{a(t)A(t)} = 0, \quad (1.33)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_1(t)}{A(t)} = 1; \quad (1.34)$$

для $h = f$ или $h = f_1$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{h(tx) - h(t)}{t f_1'(t)} - \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}}{A_1(t)} = H(x), \quad (1.35)$$

где

$$A_1(t) = \frac{t f_1''(t)}{f_1'(t)} - \gamma + 1, \quad (1.36)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_1(t) = 0, \quad (1.37)$$

$$A_1 \in RV_\rho, \quad (1.38)$$

и знак $A_1(t)$ постоянен с некоторого t_0 .

Следствие: для любой функции $f \in 2ERV_{\gamma,\rho}$ существует дважды дифференцируемая функция f_1 , у которой скорость сходимости такая же, причем отличаются они друг от друга не очень сильно:

$$f(t) - f_1(t) = o(t f_1'(t) A_1(t)). \quad (1.39)$$

Основной довод для рассмотрения функций из класса $2ERV_{\gamma,\rho}$ состоит в следующем: если функция $H(t)$ принадлежит этому классу, разность функции распределения нормированного максимума для соответствующей ей функции распределения и его предельного распределения записывается в виде

$$F^n(a_n x + b_n) - G_\gamma(x) = K(x) A(n) (1 + o(1)), \quad (1.40)$$

причем функция $K(x)$ обязана быть ограниченной. В таком случае скорость сходимости получается равной

$$\sup_x |F^n(a_n x + b_n) - G_\gamma(x)| = C |A(n)|, \quad (1.41)$$

где $C = \sup_x |K(x)|$, то есть имеет место *равномерная* скорость сходимости. Если же функция распределения нормированного максимума не декомпозируется на произведение функций по n и по x , в таком случае нельзя гарантировать существование равномерной скорости сходимости.

Также далее будут рассматриваться только функции распределения с бесконечной предельной точкой, так как любое распределение с $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\} < \infty$ можно свести к распределению с бесконечной предельной точкой заменой

$$\eta = \frac{1}{x_F - \xi}, \quad (1.42)$$

или, в терминах функций распределений,

$$\hat{F}(x) = F\left(x_F - \frac{1}{x}\right). \quad (1.43)$$

Несложно заметить, что у $\hat{F}$ предельная точка бесконечна, а критический индекс поменяет свой знак. После получения необходимых свойств для функции $\hat{F}$ можно сделать обратную замену и получить необходимые свойства и для исходной функции F .

Глава 2. Основные результаты

2.1 Необходимые сведения

Как было сказано в главе 1, дважды дифференцируемой функции $f \in 2ERV_\gamma$ скорость сходимости следующая:

$$A(t) = \frac{tf''(t)}{f'(t)} + 1 - \gamma. \quad (2.1)$$

Очень удобно перейти от мультипликативного представления, когда рассматривается разность $f(tx) - f(t)$, к аддитивному:

$$H(t) = f(e^t), \quad (2.2)$$

тогда разность преобразуется к следующему виду:

$$f(e^{t+s}) - f(e^t) = H(t+s) - H(t). \quad (2.3)$$

В таком представлении скорость сходимости преобразуется к выражению

$$A(e^t) = \frac{H''(t)}{H'(t)} - \gamma = B(t). \quad (2.4)$$

Зафиксируем скорость сходимости $A(t)$ и найдем для неё класс функций $H(t)$, которые имеют эту скорость сходимости. Для этого решим уравнение (2.4) относительно функции H :

$$(\ln H'(t))' = B(t) + \gamma \Leftrightarrow H(x) = \int_{t_0}^x \exp \left\{ \gamma t + \int_{t_0}^t B(s) ds \right\} dt. \quad (2.5)$$

Полученная функция $H(t)$ имеет скорость сходимости, в точности равную $A(t)$. Однако, интереснее найти класс функций, для которых скорость сходимости будет асимптотически эквивалентна $A(t)$. Из этой теоремы 5 следует, что любая функция вида

$$H_1(t) = H(t) + o(H'(t)B(t)) \quad (2.6)$$

будет иметь скорость сходимости, асимптотически эквивалентную H , причем $H_1(t)$ даже не обязана быть дифференцируемой. То есть, для любой функции вида

$$H(x) = \int_{t_0}^x \exp \left\{ \gamma t + \int_{t_0}^t B(s) ds \right\} dt + o \left(B(t) \exp \left\{ \gamma x + \int_{t_0}^x B(s) ds \right\} \right) \quad (2.7)$$

будет иметь скорость сходимости, равную $B(t)(1 + o(1))$. Из все той же теоремы 5 следует, что все функции H , имеющие одинаковую скорость сходимости, также имеют одинаковую асимптотику, поэтому разумно перейти от функции H , заданной с помощью интеграла, к чему-то с более простым видом, но с той же асимптотикой.

Дальнейший план получения функций распределения будет следующий:

1. Получение простой асимптотики функции H .
2. Обращение полученной функции, построение по ней функции распределения.
3. Доказательство того, что полученная функция распределения будет иметь выбранную скорость сходимости.

2.2 Выделение асимптотики функций

Для получения скоростей сходимости функций распределений, необходимо обратить функцию (2.7). Обращать интегралы достаточно сложно, однако, можно выделить асимптотику интеграла, которая будет характеризовать класс функций, имеющих заданную скорость сходимости, и обращать уже её.

2.2.1 Случай $\gamma \neq 0$

Предположим, что $\gamma \neq 0$, тогда, беря интеграл в (2.7) по частям, получаем

$$H(x) = \frac{\exp \left\{ \gamma x + \int_{t_0}^x B(s) ds \right\}}{\gamma + B(x)} + \int_{t_0}^x \frac{B'(t)}{(\gamma + B(t))^2} \exp \left\{ \gamma t + \int_{t_0}^t B(s) ds \right\} dt. \quad (2.8)$$

Теперь проверим, что, если взять только первый член из формулы (2.8), то его скорость сходимости будет асимптотически эквивалентна $B(t)$:

$$\hat{H}(x) = \exp \left\{ \gamma x + \int_{t_0}^x B(s) ds \right\} \quad (2.9)$$

$$A_{\hat{H}}(t) = \frac{\hat{H}''(t)}{\hat{H}'(t)} - \gamma = B(t) + \frac{B'(t)}{\gamma + B(t)}. \quad (2.10)$$

Остается доказать, что $B'(t) = O(B(t))$.

Предположим противное: пусть

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = -c(t), \quad c(t) \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Минус возникает из-за того, что $B(t)$ стремится к нулю; следовательно, её производная будет иметь противоположный знак. Тогда, интегрируя это равенство, получаем

$$B(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t c(s)ds\right\}. \quad (2.12)$$

Учитывая то, что $B(t) \in RV_\rho$ получаем противоречие – показатель экспоненты будет расти быстрее, чем линейная функция, что противоречит принадлежности функции $B(t)$ классу регулярно меняющихся функций.

Следовательно,

$$A_{\hat{H}}(t) = \Theta(B(t)), \quad (2.13)$$

то есть функция $\hat{H}$ имеет скорость сходимости, асимптотически эквивалентную $B(t)$.

2.2.2 Случай $\gamma = 0$

Для случая $\gamma = 0$ нужно рассмотреть два случая. Снова возьмем интеграл (2.7) по частям:

$$H(x) = x \exp\left\{\int_{t_0}^x B(s)ds\right\} + \int_{t_0}^x tB(t) \exp\left\{\int_{t_0}^t B(s)ds\right\} dt. \quad (2.14)$$

Если $tB(t) = o(1)$, тогда второе слагаемое в (2.14) будет бесконечно малым по сравнению с $H(x)$, и, следовательно, первое слагаемое будет асимптотически эквивалентно $H(x)$.

Найдем скорость сходимости для первого слагаемого из (2.14):

$$A(t) = \frac{H''(t)}{H'(t)} = B(t) + \frac{B(t) + tB'(t)}{1 + tB(t)}. \quad (2.15)$$

Подозрения вызывает только слагаемое $tB'(t)$. Проверим, что оно асимптотически меньше, чем $B(t)$ – как и в случае $\gamma \neq 0$, предположим противное, тогда

$$\frac{tB'(t)}{B(t)} = -c(t), \quad c(t) \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Решая это уравнение относительно B , получаем

$$B(t) = \exp\left\{-\int_{t_0}^t \frac{c(s)}{s} ds\right\}. \quad (2.17)$$

При $B(t) = o(t^{-1})$ функция $c(t)$ никогда не стремится к нулю, она либо константа, либо растет линейно, либо нечто среднее. То есть доминирующим слагаемым будет $tB'(t)$, причем оно

может убывать к нулю медленнее, чем $B(t)$. В случае, когда $c(t)$ стремится к бесконечности, обойти эту неприятную особенность можно, например, с помощью замены $B(t)$ на

$$\tilde{B}(t) = - \int_t^\infty \frac{B(s)}{s} ds. \quad (2.18)$$

Если же $tB(t) = \omega(1)$, интегрирование по частям (2.14) не работает – второе слагаемое будет асимптотически больше $H(x)$ для этого случая возьмем интеграл по частям несколько другим способом:

$$H(x) = \frac{1}{B(x)} \exp \left\{ \int_{t_0}^x B(s) ds \right\} + \int_{t_0}^x \frac{B'(t)}{B^2(t)} \exp \left\{ \int_{t_0}^t B(s) ds \right\} dt. \quad (2.19)$$

Докажем, что при условии $B(t) = \omega(t^{-1})$, второе слагаемое асимптотически меньше $H(x)$.

Как и прежде, рассуждая от противного, получаем

$$\frac{B'(t)}{B^2(t)} = c(t) \Leftrightarrow B(t) = \frac{1}{\int_{t_0}^t c(s) ds}. \quad (2.20)$$

Если $c(t)$ не стремится к нулю, то $B(t)$ убывает не медленнее t^{-1} , что противоречит условию.

Можно еще упростить вид функции – можно переписать её в виде

$$H(x) = \exp \left\{ \int_{t_0}^x B(s) \left(1 - \frac{B'(s)}{B^2(s)} \right) ds \right\}. \quad (2.21)$$

Как уже было доказано выше, $B'(t)/B^2(t) = o(1)$, поэтому можно немного видоизменить $B(t)$, не меняя её асимптотики, упростив тем самым $H(x)$ до

$$H(x) = \exp \left\{ \int_{t_0}^x B(s) ds \right\}. \quad (2.22)$$

Скорость сходимости для второго слагаемого из (2.22) следующая:

$$A(t) = B(t) \left[1 - \frac{B'(t)}{B^2(t)} \right]. \quad (2.23)$$

Несложно заметить, что $A(t) = \Theta(B(t))$.

Случай $B(t) = \frac{C+\varepsilon(t)}{t}$, где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, а $C > 0$, требует отдельного рассмотрения. Для начала, можно проинтегрировать обратно-линейную часть в первом интеграле, для которого, соответственно, получаем

$$H(x) = \int_{t_0}^x t^C \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\} dt. \quad (2.24)$$

Снова интегрируя по частям, находим

$$H(x) = \frac{x^{C+1}}{C+1} \exp \left\{ \int_{t_0}^x \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\} + \int_{t_0}^x \frac{t^C \varepsilon(t)}{C+1} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\} dt. \quad (2.25)$$

Очевидно, что второе слагаемое является бесконечно малым по сравнению с $H(x)$, поэтому $H(x)$ асимптотически эквивалентна первому слагаемому:

$$H(x) \sim x^{C+1} \exp \left\{ \int_{t_0}^x \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}. \quad (2.26)$$

Проверим, что скорость сходимости асимптотически не изменилась:

$$H'(x) = \frac{C+1+\varepsilon(x)}{x} H(x), \quad (2.27)$$

$$H''(x) = \left[\left(\frac{C+1+\varepsilon(x)}{x} \right)^2 - \frac{C+1-x\varepsilon'(x)}{x^2} \right] H(x), \quad (2.28)$$

$$A(t) = \frac{C+1+\varepsilon(x)}{x} - \frac{C+1-x\varepsilon'(x)}{x(C+1-\varepsilon(x))}. \quad (2.29)$$

Из стремления $\varepsilon(x)$ к нулю следует, что $A(t) \sim B(t)$.

Можно заметить, что ограничение на константу можно ослабить до $C > -1$, и рассуждения все равно останутся в силе.

2.2.3 Итоговые результаты

Агрегируя результаты выше, получаем, что справедлива следующая

Лемма 3. Пусть задана скорость сходимости $B(t)$. Тогда функция

$$H(x) \sim \begin{cases} \exp \left\{ \gamma x + \int_{t_0}^x B(s) ds \right\}, & \gamma \neq 0, \\ t \exp \left\{ \int_{t_0}^x \tilde{B}(s) ds \right\}, & \gamma = 0, B(t) = o(t^{-1}), \\ t^{C+1} \exp \left\{ \int_{t_0}^x \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}, & \gamma = 0, B(t) = \frac{C+\varepsilon(t)}{t}, C > -1, \\ \exp \left\{ \int_{t_0}^x B(s) ds \right\}, & \gamma = 0, B(t) = \omega(t^{-1}), \end{cases} \quad (2.30)$$

будет иметь скорость сходимости, асимптотически пропорциональную $B(t)$. Функция $\tilde{B}(t)$ равна

$$\tilde{B}(t) = - \int_t^\infty \frac{B(s)}{s} ds. \quad (2.31)$$

2.3 Обращение функций

В предыдущем разделе мы получили упрощенную асимптотику функции H , которая сохраняет асимптотику скорости сходимости $B(t)$. Теперь инвертируем эти функции, чтобы получить соответствующие для них распределения.

2.3.1 Случай $\gamma \neq 0$

Итак, у нас есть функция из $ERV_{\gamma}, \gamma \neq 0$:

$$H(t) = \exp \left\{ \gamma t + \int_{t_0}^t B(s) ds \right\}, \quad (2.32)$$

у которой скорость сходимости пропорциональна $B(\ln n)$. Найдем с её помощью распределение, у которого такая же скорость сходимости. Вернемся к мультипликативному виду:

$$f(t) = t^{\gamma} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{A(s)}{s} ds \right\} \quad (2.33)$$

и обратим эту функцию следующим образом: из-за того, что $A(t) = o(1)$, первый множитель растёт быстрее второго, поэтому перепишем наше равенство:

$$t = y^{1/\gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^t \frac{A(s)}{s} ds \right\}, \quad (2.34)$$

где $y = f(t)$. Теперь итеративно будем приближаться к обратной функции следующим образом:

$$t_{k+1} = y^{1/\gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{t_k} \frac{A(s)}{s} ds \right\} \quad (2.35)$$

(в качестве t_0 полагаем $y^{1/\gamma}$). Если устремить $k \rightarrow \infty$, то можно получить уравнение на обратную функцию. К сожалению, оно получается неразрешимым в известных функций, поэтому снова воспользуемся приближением: возьмем в качестве "почти обратной" функции

$$g(y) = y^{1/\gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{y^{1/\gamma}} \frac{A(s)}{s} ds \right\}. \quad (2.36)$$

Несложно заметить, что $g(y) = t_1(y)$.

Функция распределения для $g(y)$ получается следующей:

$$F(y) = \exp \left\{ -y^{-1/\gamma} \exp \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{y^{1/\gamma}} \frac{A(s)}{s} ds \right\} \right\}. \quad (2.37)$$

Найдем для неё скорость сходимости. Если бы мы взяли в точности обратную функцию к $f(t)$, то можно было бы просто положить $a_n \sim f(n)$, и по лемме Ферфаата скорость сходимости была бы в точности равна $A(n)$. Однако, наше распределение построено не по точному обращению, поэтому такие нормировочные коэффициенты дают скорость сходимости медленнее. Вычислим наилучший коэффициент в смысле скорости сходимости.

Отталкиваясь будем от того, что для функций из ERV_γ вспомогательная функция a должна принадлежать RV_γ , поэтому возьмем

$$a_n = n^\gamma b_n, \quad (2.38)$$

где b_n – медленно меняющаяся функция. Подставим эту вспомогательную функцию в функцию распределения:

$$F^n(a_n y) = \exp \left\{ -y^{-1/\gamma} \exp \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{n(yb_n)^{1/\gamma}} \frac{A(s)}{s} ds - \frac{\ln b_n}{\gamma} \right\} \right\}. \quad (2.39)$$

Необходимо подобрать такое b_n , чтобы показатель второй экспоненты стремился к нулю асимптотически как $A(n)K(y)$, где $K(y)$ – некоторая функция, зависящая только от y .

Для упрощения вернемся обратно к аддитивному представлению:

$$\int_{t_0}^{\ln n + \ln(yb_n)/\gamma} B(s) ds - \ln b_n \sim B(\ln n)K(y). \quad (2.40)$$

Обозначим $P(t) = \int_{t_0}^t B(s) ds$, тогда наше выражение перепишется в виде

$$P\left(\ln n + \ln(yb_n)/\gamma\right) - \ln b_n \sim B(\ln n)K(y). \quad (2.41)$$

Теперь заметим следующие несколько полезных фактов. Во-первых, из $b_n \in RV_0$ следует

$$\ln b_n = o(\ln n). \quad (2.42)$$

Во-вторых, из $B(t) = o(1)$ следует

$$P(t) = o(t) \Rightarrow P(\ln t) = o(\ln t), \quad (2.43)$$

Из монотонности $P(t)$ следует $P(\ln t) \in RV_0$ – в зависимости от знака $P(t)$ либо стремится к бесконечности, либо к какой-то ненулевой константе, причем стремиться к бесконечности она может не слишком быстро.

Вместе с равномерной сходимостью регулярно меняющихся функций можно получить следующее:

$$\begin{aligned} P\left(\ln n + \ln(yb_n)/\gamma\right) &= P\left(\ln n \left(1 + \frac{\ln(yb_n)}{\gamma \ln n}\right)\right) \\ &= P(\ln n) + P'(\ln n) \ln n \ln \left(1 + \frac{\ln(yb_n)}{\gamma \ln n}\right) (1 + o(1)) \\ &= P(\ln n) + B(\ln n) \frac{\ln y + \ln(b_n)}{\gamma} + o(B(\ln n)). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Таким образом, чтобы получить скорость сходимости, равную $B(\ln n)$, нам нужно, чтобы выполнялось равенство

$$P(\ln n) + B(\ln n) \frac{\ln(b_n)}{\gamma} - \ln b_n = 0. \quad (2.45)$$

Из этого тождества получаем выражение для b_n :

$$b_n = \exp \left\{ \int_{t_0}^n \frac{A(s)}{s} ds \left(1 - \frac{A(n)}{\gamma}\right)^{-1} \right\}. \quad (2.46)$$

С такой вспомогательной функцией a_n функция распределения получается следующей:

$$\begin{aligned} F^n(a_n y) &= \exp \left\{ -y^{-1/\gamma} \exp \left\{ \frac{A(n) \ln y}{\gamma^2} (1 + o(1)) \right\} \right\} \\ &= e^{-y^{-1/\gamma}} \left(1 - A(n) \frac{y^{-1/\gamma} \ln y}{\gamma^2} (1 + o(1))\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Таким образом, для функции распределения (2.37) скорость сходимости равняется $A(n)$, таким образом, справедлива следующая

Теорема 6. *Функция распределения с критическим индексом $\gamma \neq 0$*

$$F(y) = \exp \left\{ -y^{-1/\gamma} \exp \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_{t_0}^{y^{1/\gamma}} \frac{A(s)}{s} ds \right\} \right\}. \quad (2.48)$$

имеет скорость сходимости, пропорциональную $A(n)$.

2.3.2 Случай $\gamma = 0$

Для начала рассмотрим случай $B(t) = o(t^{-1})$. Для него мы имеем следующую функцию H :

$$H(t) = t \exp \left\{ \int_{t_0}^t B(s) ds \right\}. \quad (2.49)$$

Обратим её итеративно, как и в случае $\gamma \neq 0$, следующим образом:

$$t_{k+1} = y \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_k} B(s) ds \right\}. \quad (2.50)$$

Опять же, несложно заметить, что, устремив k к бесконечности, получим уравнение на обратную функцию для H . Такое уравнение снова не решается в общем виде, поэтому воспользуемся приближенным обращением (итерацией $k = 1$):

$$f(y) = y \exp \left\{ - \int_{t_0}^y B(s) ds \right\}. \quad (2.51)$$

Соответствующая функция распределения будет выглядеть следующим образом:

$$F(y) = e^{-e^{-f(y)}} = \exp \left\{ - \exp \left\{ - y \exp \left\{ - \int_{t_0}^y B(s) ds \right\} \right\} \right\}. \quad (2.52)$$

Для поиска скорости сходимости полезно заметить, что она будет пропорциональна разности $f(a_n y + b_n) - \ln n - y$ с некоторым коэффициентом, зависящем только от y , поэтому будем искать асимптотику именно этой разности. Используя явный вид функции $f(y)$, получаем:

$$f(a_n y + b_n) - \ln n - y = (a_n y + b_n) C(a_n y + b_n) - \ln n - y. \quad (2.53)$$

Здесь введено обозначение $C(t) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^t B(s) ds \right\}$.

Для начала предположим, что интеграл расходится, то есть $C(t)$ стремится к нулю или к бесконечности, в зависимости от знака $B(t)$. Чтобы найти нормировочные константы, разложим эту функцию:

$$C(tx) = C(t) - C(t)B(t)t \frac{x^{c_1} - 1}{c_1} + C(t)(B^2(t) - B'(t))t^2 H_{c_1, c_2}(x)(1 + o(1)). \quad (2.54)$$

Конкретные значения c_1 и c_2 не важны, так как мы будем применять это разложение с $x = 1 + \alpha(n)$, $\alpha(n) \rightarrow 0$, и при любых критических индексах поведение предельных функций

будет одинаковым:

$$C(t(1 + \alpha(n))) = C(t) \left[1 - B(t)t\alpha(n)(1 + \alpha(n)(c_1 - 1)/2) + (B^2(t) - B'(t))t^2\alpha^2(n) \right]. \quad (2.55)$$

Нам нужно получить асимптотику $C(b_n + a_n y)$, следовательно, $t = b_n, \alpha(n) = a_n y / b_n$. Применим это разложение в равенстве (2.53), сохранив слагаемые вплоть до второго порядка по y :

$$\begin{aligned} (a_n y + b_n)C(a_n y + b_n) - \ln n - y &= C(b_n)b_n - \ln n \\ &+ y \left[C(b_n)a_n(1 - B(b_n)b_n) - 1 \right] \\ &+ y^2 C(b_n) \left[-B(b_n) \frac{a_n^2(1 + c_1)}{2} + b_n a_n^2 (B^2(b_n) - B'(b_n)) \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Из правой части мы тут же получаем уравнения на a_n, b_n :

$$a_n C(b_n)(1 - B(b_n)b_n) - 1 = 0, \quad (2.57)$$

$$b_n C(b_n) - \ln n = 0. \quad (2.58)$$

Аналитически выражается только a_n через b_n , но этого будет достаточно. Преобразуем (2.56) с учетом найденных коэффициентов:

$$(a_n y + b_n)C(a_n y + b_n) - \ln n - y = \frac{y^2 a_n}{1 - B(b_n)b_n} \left[-\frac{B(b_n)(1 + c_1)}{2} + (B^2(b_n) - B'(b_n))b_n \right]. \quad (2.59)$$

С учетом $B(t) = o(t^{-1})$ и того, что интеграл расходится, эта разность асимптотически пропорциональна $B'(b_n)b_n a_n$. Заменяя в рассуждениях $B(t)$ на $\tilde{B}(t)$, аналогично доказательству леммы 3, получаем, что $\tilde{B}'(b_n)a_n b_n = B(b_n)a_n$.

Осталось доказать

$$B(b_n)a_n \sim B(b_n) \exp \left\{ - \int_{t_0}^{b_n} \tilde{B}(s) ds \right\} \stackrel{?}{\sim} B(\ln n). \quad (2.60)$$

Так как $B(t) = o(t^{-1})$, можно ввести обозначение

$$B(t) = \frac{1}{t\varepsilon(t)}, \quad (2.61)$$

где $|\varepsilon(t)| \rightarrow \infty$. После этого обозначения задача сводится к следующему:

$$B(b_n)a_n \sim \frac{1}{b_n \varepsilon(b_n)} \exp \left\{ - \int_{t_0}^{b_n} \tilde{B}(s) ds \right\} \stackrel{?}{\sim} \frac{1}{\ln n \varepsilon(\ln n)}. \quad (2.62)$$

С учетом (2.58), где вместо $B(b_n)$ необходимо взять $\tilde{B}(b_n)$, эта асимптотика превращается в очень простое утверждение:

$$\varepsilon(b_n) \stackrel{?}{\sim} \varepsilon(\ln n). \quad (2.63)$$

Несмотря на то, что $|\varepsilon(t)|$ стремится к бесконечности, растет она не слишком быстро из-за требования расходимости интеграла. Как минимум, выполнено $|\varepsilon(t)| = o((\ln t)^2)$. Для $(\ln t)^2$ свойство (2.63) выполнено, так как интеграл растет медленнее, чем $\ln t$, следовательно, для функции, растущей медленнее квадрата логарифма, это свойство так же обязано выполняться.

Если же интеграл сходится, то a_n ограничена, а $b_n \sim \ln n$, и скорость сходимости снова получается пропорциональной $B(\ln n)$.

Теперь рассмотрим случай, когда $B(t) = \frac{C+\varepsilon(t)}{t}$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$. Для него имеем следующую функцию H :

$$H(t) = t^{C+1} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}, \varepsilon(t) \rightarrow 0. \quad (2.64)$$

Для итеративного обращения выразим t через $y = H(t)$ и интеграл:

$$t = y^{1/(C+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{C+1} \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}. \quad (2.65)$$

Как и раньше, берем первое приближение:

$$f(y) = y^{1/(C+1)} \exp \left\{ -\frac{1}{C+1} \int_{t_0}^{y^{1/(C+1)}} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}. \quad (2.66)$$

Выразим теперь скорость сходимости для соответствующей функции распределения $F(y) = e^{-e^{-f(y)}}$, для этого нужно подобрать нормировочные коэффициенты в разности

$$(a_n y + b_n)^{1/(C+1)} C(a_n y + b_n) - y - \ln n \rightarrow 0. \quad (2.67)$$

Здесь $C(y) = \exp \left\{ -\frac{1}{C+1} \int_{t_0}^{y^{1/(C+1)}} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\}$, как и ранее.

Раскладывая функцию $C(a_n y + b_n)$ в ряд

$$C(a_n y + b_n) \approx C(b_n) - \frac{\varepsilon(b_n^{1/(C+1)})}{(C+1)^2 b_n} C(b_n) a_n y, \quad (2.68)$$

а также степенную функцию

$$(a_n y + b_n)^{1/(C+1)} \approx b_n^{1/(C+1)} \left(1 + \frac{a_n y}{(C+1)b_n} - \frac{C a_n^2 y^2}{(C+1)^2 b_n^2} \right), \quad (2.69)$$

получаем асимптотику разности:

$$\begin{aligned}
(a_n y + b_n)^{1/(C+1)} C(a_n y + b_n) - y - \ln n &= b_n^{1/(C+1)} C(b_n) - \ln n \\
&+ \frac{y a_n b_n^{1/(C+1)} C(b_n)}{(C+1)b_n} \left[1 - \frac{\varepsilon(b_n^{1/(C+1)})}{C+1} \right] - y \\
&- \frac{C(b_n) b_n^{1/(C+1)-2} a_n^2 y^2}{(C+1)^2} \left[C + \frac{\varepsilon(b_n^{1/(C+1)})}{C+1} \right].
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Теперь, зануляя коэффициенты при свободном члене и при y , находим асимптотику скорости сходимости:

$$A(n) \sim C(b_n) b_n^{1/(C+1)-2} a_n^2 \frac{C}{(C+1)^2} \sim \frac{a_n^2 \ln n}{b_n^2} \sim \frac{1}{\ln n}, \tag{2.71}$$

что и требовалось доказать.

Последний случай, который необходимо разобрать – $B(t) = \omega(t^{-1})$. К сожалению, функция H выглядит следующим образом:

$$H(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t B(s) ds \right\}. \tag{2.72}$$

Обозначая за $P(t)$ интеграл от функции B , можно написать следующее обращение:

$$f(y) = P^{\leftarrow}(\ln y), \tag{2.73}$$

а функция распределения получится равной

$$F(y) = e^{-e^{-P^{\leftarrow}(\ln y)}}. \tag{2.74}$$

Так как обращение здесь точное, то можно воспользоваться леммой Ферфаата, но на всякий случай вычислим скорость сходимости для такой функции распределения – разложим $P^{\leftarrow}(y) = T(y)$:

$$T(y + \alpha) \approx T(y) + T'(y)\alpha + T''(y)\alpha^2. \tag{2.75}$$

Так как аргументом функции T будет служить $\ln(a_n y + b_n)$, разложим его тоже в ряд:

$$\ln(a_n y + b_n) \approx \ln b_n + \frac{a_n y}{b_n} - \frac{a_n^2 y^2}{b_n^2}. \tag{2.76}$$

С учетом того, что $T(y)$ является обратной функцией, можно по теореме об обратной функции вычислить производные $T(y)$:

$$T'(y) = \frac{1}{P'(T(y))} = \frac{1}{B(T(y))}, \tag{2.77}$$

$$T''(y) = \frac{-P''(T(y))}{(P'(T(y)))^3} = \frac{-B'(T(y))}{B^3(T(y))}. \tag{2.78}$$

Вычислим асимптотику разности $f(y) - y - \ln n$:

$$\begin{aligned} f(y) - y - \ln n &= T(\ln b_n) - \ln n \\ &+ y \left[\frac{a_n}{b_n B(T(\ln b_n))} - 1 \right] \\ &- \frac{y^2 a_n^2}{b_n^2} \left[\frac{1}{B(T(\ln b_n))} - \frac{B'(T(\ln b_n))}{B^3(T(\ln b_n))} \right]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Отсюда очень элегантноым образом следует, что $b_n = e^{P(\ln n)}$, а $a_n = e^{P(\ln n)} B(\ln n)$. С учетом того, что $B(t) = \omega(t^{-1})$, находим скорость сходимости для этого распределения:

$$A(n) \sim \frac{a_n^2}{b_n^2 B(T(\ln b_n))} = B(\ln n). \quad (2.80)$$

Конечно, это не явный вид для функции распределения, но лучше не получилось.

Таким образом, собирая воедино все результаты, получается следующая

Теорема 7. Для функции распределения из области максимального притяжения Гумбеля

$$F(y) = \begin{cases} \exp \left\{ - \exp \left\{ - y \exp \left\{ - \int_{t_0}^y \tilde{B}(s) ds \right\} \right\} \right\}, & B(t) = o(t^{-1}), \\ \exp \left\{ - \exp \left\{ - y^{1/(C+1)} \exp \left\{ - \frac{1}{C+1} \int_{t_0}^{y^{1/(C+1)}} \frac{\varepsilon(s)}{s} ds \right\} \right\} \right\}, & B(t) = \frac{C+\varepsilon(t)}{t}, \\ \exp \left\{ - \exp \left\{ - P^{\leftarrow}(\ln y) \right\} \right\}, & B(t) = \omega(t^{-1}), \end{cases} \quad (2.81)$$

где

$$\tilde{B}(t) = - \int_t^\infty \frac{B(s)}{s} ds, \quad (2.82)$$

$$\varepsilon(t) \rightarrow 0, C > -1, \quad (2.83)$$

$$P(t) = \int_{t_0}^t B(s) ds, \quad (2.84)$$

скорость сходимости пропорциональна $B(\ln n)$.

Следствие 1. В зависимости от скорости роста $f(x) = -\ln(-\ln F(x))$ скорость сходимости будет:

1. равна $o((\ln n)^{-1})$, если $f(x) = x\varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x)$ меняется медленнее любой степени,
2. равна $\sim (\ln n)^{-1}$, если $f(x) = x^C \varepsilon(x)$, где $C > 0, C \neq 1$, а $\varepsilon(x)$ меняется медленнее любой степени x ,
3. равна $\omega((\ln n)^{-1})$, если $f(x) = \omega(\ln x)$, но растет медленнее любой степени x .

Доказательство. Первые два пункта напрямую следуют из явного вида функций распределения. Третий пункт справедлив благодаря тому, что $P(t) = \omega(\ln t)$, но одновременно

$P(t) = o(t)$, следовательно, $P^\leftarrow(\ln y)$ будет расти быстрее логарифма, но медленнее любой степени x . $\square$

2.4 Примеры

В этом разделе будут приведены несколько примеров применения полученных результатов.

Пример 1. *Нормальное распределение.*

Известно, что стандартное нормальное распределение $\Phi \in D(G_0)$. Асимптотически функция распределения ведет себя следующим образом:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 - O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right). \quad (2.85)$$

Найдем асимптотику повторного логарифма:

$$-\ln(-\ln \Phi(x)) \sim \frac{x^2}{2} + \ln x. \quad (2.86)$$

По следствию 1 скорость сходимости пропорциональна $(\ln n)^{-1}$.

Пример 2. *Логвейбулловское распределение*

Другой пример распределения, у которого скорость сходимости медленнее $(\ln n)^{-1}$, как отмечалось во введении, это логвейбулловское распределение с функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-(\ln x)^\gamma}, \gamma > 1. \quad (2.87)$$

Снова оценим асимптотику повторного логарифма:

$$-\ln(-\ln F(x)) \sim (\ln x)^\gamma(1 + o(1)). \quad (2.88)$$

По следствию 1, скорость сходимости будет $\omega((\ln n)^{-1})$.

Можно точно её вычислить, если обратить функцию $(\ln x)^\gamma(1 + o(1))$:

$$P^\leftarrow(\ln x) = (\ln x)^\gamma(1 + o(1)) \Rightarrow P(x) = x^{1/\gamma}(1 + o(1)) = \int_{t_0}^x B(s)ds, \quad (2.89)$$

Или $B(\ln n) \sim (\ln n)^{1/\gamma-1}$.

Пример 3. *Экспоненциальное распределение*

Для экспоненциального распределения с функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-x}$ её повторный логарифм асимптотически равен

$$-\ln(-\ln F(x)) \sim x + \frac{e^{-x}}{2}, \quad (2.90)$$

то есть мы попадаем в первый пункт следствия 1. Найдём через неё $\tilde{B}(x)$:

$$1 + \frac{e^{-x}}{2x} = \int_{t_0}^x \tilde{B}(s) ds \Rightarrow \tilde{B}(x) = -\frac{e^{-x}}{2x} \left(1 - \frac{2}{x}\right). \quad (2.91)$$

Теперь с легкостью можно вычислить истинную скорость сходимости:

$$\frac{e^{-x}}{x} \sim \int_x^\infty \frac{B(s)}{s} ds \Rightarrow B(x) \sim e^{-x}, \quad (2.92)$$

или $B(\ln n) \sim \frac{1}{n}$.

Пример 4. Распределение Парето

Напоследок хочется рассмотреть распределение с ненулевым критическим индексом с функцией распределения

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^k}, \quad (2.93)$$

так называемое распределение Парето. Приводя функцию распределения к условию теоремы 6, рассмотрим логарифм функции распределения:

$$-\ln F(x) \sim x^{-k} \left(1 + \frac{1}{2x^k}\right) \Rightarrow \gamma = k^{-1}. \quad (2.94)$$

Логарифмируя повторно и избавляясь от линейного по $\ln x$ члена, получаем

$$x^{-k} \sim \int_{t_0}^{k \ln x} B(t) dt \Rightarrow B(t) \sim e^{-t}. \quad (2.95)$$

Таким образом, для распределения Парето скорость сходимости тоже обратно-линейная.

Заключение

Основные результаты этой работы заключаются в нахождении функций распределений для всех критических индексов с заданной асимптотикой равномерной скорости сходимости. Это означает, что если задана желаемая скорость сходимости

$$A(n) \sim \sup_x |F^n(a_n x + b_n) - G_\gamma(x)|, \quad (2.96)$$

то предъявлен явный вид функции распределения $F_A(x)$, для которой предыдущая асимптотика справедлива.

Данный результат, как было продемонстрировано в примерах, можно использовать для поиска скорости сходимости по заданной функции распределения: зная область максимального притяжения, к которой принадлежит функция распределения F , можно по её асимптотике определить скорость сходимости.

Список литературы

1. *Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzén H.* Extremes and related properties of random sequences and processes. — Springer Science & Business Media, 2012.
2. *Fisher R. A., Tippett L. H. C.* Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. T. 24. — Cambridge Univ Press. 1928. — С. 180—190.
3. *Gnedenko B.* Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire // Annals of mathematics. — 1943. — С. 423—453.
4. *De Haan L., Ferreira A.* Extreme value theory: an introduction. — Springer Science & Business Media, 2007.
5. *Gumbel E. J.* Statistics of extremes. — Courier Corporation, 2012.
6. *Berry A. C.* The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates // Transactions of the american mathematical society. — 1941. — Т. 49, № 1. — С. 122—136.
7. *Esseen C.-G.* On the Liapounoff limit of error in the theory of probability // Ark. Mat. Astr. Fys. A. — 1942. — Т. 28, № 9. — С. 19.
8. *Tyurin I.* New estimates of the convergence rate in the Lyapunov theorem // arXiv preprint arXiv:0912.0726. — 2009.
9. *Hall P.* On the rate of convergence of normal extremes // Journal of Applied Probability. — 1979. — С. 433—439.
10. *Hall W., Wellner J. A.* The rate of convergence in law of the maximum of an exponential sample // Statistica Neerlandica. — 1979. — Т. 33, № 3. — С. 151—154.
11. Rates of convergence of extremes from skew-normal samples / X. Liao [и др.] // Statistics & Probability Letters. — 2014. — Т. 84. — С. 40—47.
12. Convergence rate of extremes for the general error distribution / Z. Peng, S. Nadarajah, F. Lin [и др.] // Journal of Applied Probability. — 2010. — Т. 47, № 3. — С. 668—679.
13. *De Haan L.* Equivalence classes of regularly varying functions // Stochastic Processes and their Applications. — 1974. — Т. 2, № 3. — С. 243—259.