

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет педагогического образования

Аттестационная работа

**Проблема интуиции в обучении школьников
теории вероятностей**

Выполнила слушатель

Факультета педагогического образования

Поспелова Мария Дмитриевна

Научный руководитель

д.ф.-м.н., доцент, профессор ФПО МГУ

Боровских Алексей Владиславович

Москва 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. Обзор основных проблем интуитивного восприятия теории вероятностей	7
§1. Исторические примеры неверных вероятностных рассуждений	7
§2. Соотношение бытовых представлений о вероятности событий с теоретическими	8
§3. Метапредметный навык решения задач	10
§4. Влияние формулировки задачи на ее восприятие	12
§5. Отдельные сложности теории вероятностей	14
§6. Итоги	14
ГЛАВА 2. Пути решения	16
§1. Общие представления о применимости теории вероятностей	16
§2. Модель случайного эксперимента	17
§3. Работа с формулировкой задачи	18
§4. Формирование понятийной базы теории вероятностей	20
Понятия случайного эксперимента и случайного события	21
Понятие вероятности случайного события	23
§5. Частные сложности теории вероятностей	24
Гипотеза равновероятности	24
Понятие комбинаторного порядка	24
Условная вероятность	25
§6. Итоги	25
ГЛАВА 3. Разбор задач	27
§1. Парадокс Монти Холла	27
§2. Парадокс мальчика и девочки	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	32
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	33
ПРИЛОЖЕНИЯ	35

ВВЕДЕНИЕ

Оценки рисков и вероятностей встречаются во всех областях деятельности человека и требует обладания определенной культурой вероятностного мышления. Задачи такого рода решает врач, оценивая вероятности наличия у пациента определенного заболевания или риски от применения данного лекарственного средства, водитель, когда оценивает дорожную ситуацию перед маневром, присяжные или судья, пытаясь понять, виновен ли подсудимый, сотрудники банка, решая, дать ли кредит данному клиенту и многие другие. Ошибки, которые совершают большинство людей, сталкиваясь с нестандартно сформулированными задачами, связаны с характерными для бытового мышления заблуждениями и искажениями, которые должны быть преодолены с помощью внедрения адекватных научных представлений. Эту задачу должен был бы решать школьный курс теории вероятностей, но, как показывает практика, этого в массовом порядке не происходит. Неверные рассуждения можно встретить в средствах массовой информации, тематических обсуждениях в интернете и просто в повседневной жизни.

Не существует единого мнения о целесообразности присутствия теории вероятностей в школьной программе, а также общепринятой методики изложения этого предмета. Стандартный университетский курс сложно адаптировать для школьников, то есть изложить его одновременно полно и корректно. Для этого, как правило, недостаточно времени и математического контекста. Одна из проблем, затрудняющих усвоение и дальнейшее применение на практике теории вероятностей заключается в том, что многие ее результаты противоречат интуиции. Целью данного исследования является раскрытие причин противоречий человеческой

интуиции и научного знания в области теории вероятностей, а также разработать подходы к устранению этих противоречий.

Практически в любой области знаний можно встретить забавные задачки-парадоксы, решение которых, на первый взгляд, противоречит интуиции. Помимо средства скрашивания досуга, такие задачи являются своеобразным индикатором, помогающим обнаружить и локализовать проблему неполного и искаженного понимания предмета, заставить человека критически отнестись к своим представлениям. Теория вероятностей в смысле подобных задач особенно коварна — ее содержание зачастую перестает отвечать бытовой интуиции уже на самых первых этапах изучения. Если при ознакомлении школьников с основами данной науки эти противоречия останутся не выявленными, у учащегося могут сложиться неверные представления о вероятностной природе окружающего мира, и цели обучения останутся не достигнутыми.

Авторы учебного пособия [1] не рекомендуют фокусироваться в процессе преподавания материала на задачах-парадоксах: “Такого рода задачи, как показывает практика обучения, отвлекают и путают учащихся, порождают в них неуверенность в собственных силах и сомнения в применимости вероятностных моделей вообще” [2]. Авторы рекомендуют избегать таких задач на начальном этапе обучения, однако, стоит заметить, что курс теории вероятности в общеобразовательной школе этим этапом и ограничивается. Данное исследование, напротив, исходит из тезиса о том, что только через столкновение учащихся с противоречиями их представлений и объективных законов происходит развитие и углубление понимания предмета. Важно лишь то, чтобы данные задачи вводились в курс не с целью просто разобрать верное решение, а для создания учебной ситуации, где преодоление противоречия производится самими учениками.

В связи с вышесказанным, в качестве материала для выявления и решения проблем, связанных с работой интуиции в области теории вероятностей, было решено использовать задачи-парадоксы. При этом были поставлены следующие задачи:

- Собрать сведения о распространенных проблемных для понимания задачах и парадоксах
- Выделить основные моменты, вызывающие сложности
- Установить причины затруднений
- Найти подходы к устранению противоречий

Исследование проводилось методами наблюдения и анализа. В качестве источника материала для исследования основных ошибок рассуждений были использованы веб-страницы с обсуждениями вероятностных задач-парадоксов [9], а также исследования различных психологов [3, 5, 8].

Тематика данной работы перекликается сразу с несколькими глобальными проблемами образования и общественной жизни. Во-первых, давней и до сих пор не решенной проблемой является формальное и механическое усвоение знаний учащимися, которое ведет к невозможности в дальнейшем воспользоваться полученными знаниями в реальной ситуации. Школьники привыкли воспринимать учебную информацию некритически, как набор готовых алгоритмов для решения задач, которые необходимо запомнить, что приводит к полной беспомощности в ситуации, где задача недостаточно четко сформулирована. Во-вторых, большой вклад в тенденцию неверно рассуждать в вероятностных (и не только) вопросах вносят так называемые когнитивные искажения. Эти сложные явления, являющиеся объектом изучения целого комплекса наук, накладывают отпечаток на все сферы деятельности человека. Они влияют на способности адекватно интерпретировать информацию, логически рассуждать и принимать

решения. Замещение этих механизмов адекватными средствами принятия решений входит в задачи школьного образования.

Результаты имеют практическое значение и могут использоваться учителями на уроках математики в качестве средства освоения нового материала и углубления понимания изученного.

ГЛАВА 1. Обзор основных проблем интуитивного восприятия теории вероятностей

§1. Исторические примеры неверных вероятностных рассуждений

Теория вероятностей прошла сложный многовековой путь, прежде чем обрела современную форму. Многие задачи и вопросы этой области долгое время решались неверно даже довольно именитыми учеными. Французский математик Даламбер, говоря о семьях с двумя детьми, полагал (и писал в своей энциклопедии), что с равными вероятностями $\frac{1}{3}$ в таких семьях могут быть два мальчика; две девочки; мальчик + девочка. [10]. Многочисленные исторические источники содержат немало неверных (не учитывающих порядка) попыток выписать все комбинации выпадения двух костей. Получившиеся при этом шансы не согласовывались с реальной частотой выпадения сумм очков, это несоответствие иногда называют парадоксом Кардано[7], который, собственно, этот парадокс благополучно разрешил.

Вот другой пример того, как на выработку решения связанной с вероятностями задачи ушли века. Итальянский математик Лука Пачоли в 1492 году описал задачу о разделении ставки при незавершенной игре, которую он предложил решить пропорционально заработанным очкам. Быстро стало очевидно, что это решение некорректно, т.к. не подразумевает вознаграждения вообще не заработавшему очков участнику, хотя некоторый небольшой шанс на победу тот все же имеет. Эта задача занимала многие умы на протяжении нескольких веков, и лишь в середине XVII в. в письме Паскаля, адресованному Ферма, появляется верное (т.е., пропорциональное шансам на возможную победу в случае продолжения игры) решение данной задачи [6].

Все эти исторические примеры говорят о высокой сложности принципов теории вероятностей, а также о том, что не стоит ожидать от школьников мгновенного понимания после простого изложения материала. Над овладением теорией вероятностей как инструментом даже на самом элементарном уровне необходимо специальным образом работать.

§2. Соотношение бытовых представлений о вероятности событий с теоретическими

Как было показано на исторических примерах в прошлом параграфе, теория вероятностей не является интуитивной без наличия специфических знаний и опыта. В отсутствии оных в силу вступают разнообразные эвристики — приемы и методы нашей психики, облегчающие и упрощающие решение задач путем сужения области поиска. Эвристики формируются на основе предшествующего опыта, и, в отличие от строгих рассуждений, не всегда приводят к верному выводу.

В качестве иллюстрации можно привести текст так называемой “проблемы Линды”. Она формулируется следующим образом:

Линде 31 год, она не замужем, за словом в карман не лезет и очень сообразительная. Она училась на факультете философии. Студенткой много размышляла о дискриминации и социальной несправедливости, участвовала в демонстрациях против распространения ядерного оружия“.

Вопрос: что более вероятно

- 1. Линда – кассир в банке;*
- 2. Линда – кассир в банке и активная феминистка.*

Большинство опрошенных, которым предложили эту задачу, выбирают второй вариант ответа, что, очевидно, не может быть верным — одновременное выполнение двух условий не может быть вероятнее выполнения лишь одного из них. В формировании этой ошибки участвуют разные факторы, в том числе так называемая эвристика репрезентативности, которая помогает нам быстро сделать выбор в пользу максимального соответствия некоему шаблону, игнорируя важную объективную информацию. То есть, услышав описание Линды, наш мозг тут же выдает подходящий шаблон, которому Линда наверняка соответствует, и согласно которому она также является феминисткой. Точно так же люди игнорируют значимые данные об относительной частоте рассматриваемого явления: если одной группе испытуемых сообщить, что на фотографиях в представленной им выборке только 30% инженеров и 70% адвокатов, а другой группе, наоборот, — 70% инженеров и 30% адвокатов, то на результатах оценки кто есть кто это никак не отразится [3].

Помимо эвристики репрезентативности, в формировании данного явления участвует и другой фактор. Даже научное понимание вероятности имеет разные интерпретации помимо частотной: байесовская, физическая, логическая и др. Часть из них смотрят на вероятность как на объективное свойство предметов или явлений окружающего мира, а часть — как на субъективное восприятие их человеком. Бытовое понимание данного термина также обладает множеством оттенков в зависимости от ситуации. Как испытуемые интерпретировали вопрос в задаче Линды? Исследования с различными формулировками показали, что Для того, чтобы разобраться в том, что понимается под словом вероятность в общем смысле, и каким образом это значение соотносится с научными представлениями, обратимся к книге Эмиля Бореля “Вероятность и достоверность”. Автор предлагает разделить употребление данного

термина в повседневной речи на три случая: когда речь идёт о наших собственных намерениях и действиях (“Весьма вероятно, что я не пойду завтра в школу”), действиях других людей (“Иванов точно не пойдёт завтра в школу”) или явлениях природы (“Подброшенный камень упадёт на землю”). Ясно, что в каждом из трех случаев за суждениями человека стоят разные механизмы. При этом подчёркивается субъективный характер оценки вероятности в повседневном смысле: к примеру, оба участника некоторого спора могут быть абсолютно уверены в том, что шансы на победу каждого из них больше, чем у соперника, в то время как в действительности такого быть не может. Подобное несоответствие в оценках вероятностей упирается в уникальность опыта и объёма знаний каждого человека[4]. На этой субъективности бытовой оценки вероятности основаны некоторые парадоксы.

§3. Метапредметный навык решения задач

Рассмотрим типичную формулировку для задачи по теории вероятностей “с подвохом”:

Три узника А, Б и В одинаково хорошего поведения ходатайствовали о помиловании. Губернатор решил освободить двух из них, и это стало известно. Однако узники не знают, кто именно эти двое. Поэтому заключенный А считает, что у него шансы выйти на свободу равны $\frac{2}{3}$.

У заключенного А среди охраны есть друг, который знает, кого помилуют, но не должен разглашать тайну. С трудом он соглашается назвать имя одного из двух других заключенных, кто будет помилован — это Б.

Вдруг А подумал, что теперь его шансы уменьшились до $\frac{1}{2}$. Так ли это? [13]

Эта задача более известна в несколько другом изложении под названием “Парадокс Монти Холла”, вокруг которого и по сей день разгорается огромное количество споров. Задача подкупает своей кажущейся доступностью, и, несмотря на исчерпывающий разбор задачи во многих источниках, остается масса людей, упорно отказывающихся верить “официальному” ответу. Проблема большинства предложенных решений этой и подобных задач заключается в том, что они столь же убедительны, как и собственные рассуждения, дающие противоположный ответ. То есть, человека можно как убедить, что некое решение верно, и он увидит в нем логику, так и столь же последовательно разубедить обратно. Нам эта задача очень важна, потому что на ней проявляется классическая ошибка восприятия теории вероятностей — субъективное отношение к оценке вероятности.

Возвращаясь к исходному тексту, можно сказать, что это яркий пример задачи, где собственно задача в понимании типичного школьника не сформулирована. Текст задания содержит лишь субъективную информацию заключенного, а построить модель случайного процесса в ней необходимо самому, а при этом еще придется поразмышлять и критически оценить условие.

Школьные задачи практически всегда сформулированы с явно заданной моделью, и для решения надо лишь применить изученный алгоритм. В процессе такой учебной деятельности навык вдумчивого изучения условия и построения модели у учащихся не формируется.

Курс теории вероятностей дает хорошую почву для развития базы метапредметных навыков решения задач, так как в большинстве задач одной без этих навыков просто не обойтись. Критичными для решения задач можно назвать следующие умения:

- Читать и анализировать условие
- Понимать информационный контекст задачи

- Выбор модели
- Выбор способа решения
- Способность к рефлексии

Данные навыки могут развиваться в рамках отдельного метапредмета либо в процессе решения задач на основных предметах.

§4. Влияние формулировки задачи на ее восприятие

Задачи по теории вероятностей отличаются богатством формулировок, многие из которых вызывают у учеников растерянность. Одна и та же задача, сформулированная в разном контексте вызывает у человека различные ассоциации и задействует различные механизмы рассуждения. Задача Линды — яркий тому пример. В стандартной формулировке она пробуждает у человека бытовую интуицию, которая спешит на основе изложенной информации о Линде сделать заключение о ее занятиях. Но эта же задача, изложенная несколько иначе, с использованием множеств людей, подходящих под описание Линды, сводит процент неверно ответивших испытуемых практически до нуля. Люди еще с раннего детства накапливают богатый опыт мыслительных операций с множествами, поэтому решение поставленной таким образом задачи становится очевидным. Кроме того, формулировка со множествами уводит людей от бытовых оценок, и они начинают смотреть на эту задачу с более научной точки зрения[9].

В одних формулировках наличие необходимости учитывать комбинаторный порядок может оказаться более или менее очевидным, например, когда речь идет о событиях, случившихся одно за другим (два последовательных броска монеты). В других порядок берется буквально из ниоткуда: например, когда мы хотим узнать, какова вероятность того, что стоящие вдалеке двое случайных людей разного пола. Хотя данная задача абсолютно аналогична задаче с монетой, в которой необходимо найти

вероятность выпадения и орла и решки по одному разу в двух бросках, понять это из формулировки, где речь идет о людях, очень сложно. Та же самая задача может быть изложена на примере семьи с двумя детьми, где надо найти вероятность того, что дети разного пола. Одним людям учет порядка в этой ситуации кажется очевидным (ведь дети в любом случае появляются один за другим, даже если это близнецы), другим — нет.

Также на восприятие условия влияет то, насколько сложно разглядеть в нем случайный эксперимент. Одно дело, когда в задаче мы подбрасываем монету сколько угодно раз, а совсем другое, когда говорим о конкретной семье, где уже родились двое детей — найти в ней случайный эксперимент не так то просто.

Подытожив, можно сказать, что формулировка задачи может как подсказывать верное решение, так и отвлекать и уводить от него.

§5. Отдельные сложности теории вероятностей

Сюда, помимо понятия комбинаторного порядка, описанного во введении к главе, относится понятие условной вероятности. Несмотря на то, что эта тема в школьном курсе может не рассматриваться, она неявно фигурирует в формулировках большого числа задач. Винить в трудностях использования данного понятия опять приходится обыденную речь, где фраза “при условии, что” означает несколько иное, нежели в теории вероятностей что приводит к парадоксам типа “Парадокс мальчика и девочки”.

Еще один вопрос без четкого ответа, это применение гипотезы равновероятности. Большая часть рассматриваемых на уроках задач подразумевает равновозможность всех исходов (см., например, условие задачи о трех узниках из §3, где явно не сказано о том, что помилованы будут двое случайным образом выбранных узника, но, видимо, это само собой разумеется). Однако для применения этой гипотезы необходимы

определенные основания. Без представлений об уместности использования гипотезы равновероятности можно сделать множество неверных заключений.

§6. Итоги

Основные выявленные проблемы не интуитивности восприятия теории вероятностей школьниками:

- Преобладание бытового опыта понимания и оценки вероятностей
- Отсутствие у учащихся метапредметных навыков решения задач: критического подхода к условию, выбора и построения модели
- Формулировка задачи сильно влияет на восприятие условия и может как помогать прийти к верному решению, так и отдалять от него
- Некоторые вопросы: комбинаторный порядок, гипотеза равновозможности, понятие условной вероятности

Помимо этого, можно отметить высокую уверенность в своих знаниях у многих участников интернет-обсуждений при довольно ограниченном фактическом понимании ими теории вероятностей, если посмотреть на их рассуждения. Это говорит о том, что усвоение школьной или институтской программы способно породить у человека обманчивое ощущение знания и понимания. Для того, чтобы поколебить это ощущение, необходимо создать проблемную ситуацию, когда противоречие убеждений человека объективной реальности станет очевидным.

Часть упомянутых в данной главе задач были предложены мною ученикам 9го класса в ходе педагогической практики. Задачи вызвали ожидаемые затруднения даже у самых мотивированных и хорошо успевающих по предмету учеников, что подтвердило наличие проблем с усвоением перечисленных моментов.

ГЛАВА 2. Пути решения

§1. Общие представления о применимости теории вероятностей

Для формирования у учащихся критического подхода к предстоящему изложению материала очень важно начать с общих сведений о месте теории вероятностей в жизни и науке, организовать у учащихся четкое представление о сфере и характере применимости теории вероятностей, соотнести стохастические представления с общей картиной мира. При этом необходимо обсудить следующие вопросы:

1. В реальности не существует точных измерений и идеального соответствия теоретическим моделям, по сути все формальные описания явлений окружающего мира отражают реальность только с некоторой точностью. Многие явления возможно описать только статистически.
2. Что нужно для того, чтобы воспользоваться теорией вероятностей? Теория вероятностей изучает не всякие события, а только те, которые можно формализовать в рамках случайного эксперимента. Случайный эксперимент подразумевает неограниченную повторяемость и постоянство условий, а такое всегда возможно только с некоторыми оговорками. Не всякое жизненное событие удастся так формализовать.
3. Любая ли случайность имеет закономерность? Не во всех случайных явлениях наблюдается устойчивость частот.
4. Когда относительная частота события становится вероятностью?

5. Какую информацию дает нам вероятность и какие выводы из нее можно сделать?

§2. Модель случайного эксперимента

Математический аппарат описания вероятностей опирается на определенную схему представления самого предмета исчисления вероятности. Вариант графического представления данной схемы предложен на рисунке 1. Важно подчеркнуть, что в любой ситуации, когда речь идет о расчете вероятности, должен присутствовать:

- Случайный эксперимент, выполняющийся в определенных постоянных условиях и на каждом испытании заканчивающийся некоторым исходом.
- Множество элементарных исходов, состоящее из всех возможных исходов
- События — любые комбинации элементарных исходов
- Способ определить численное значение вероятности для любой комбинации элементарных исходов

Понимание необходимости присутствия данной модели в любой ситуации, где речь идет об исчислении вероятностей, решает подавляющее число проблем, связанных с неверной интерпретацией условия задачи.

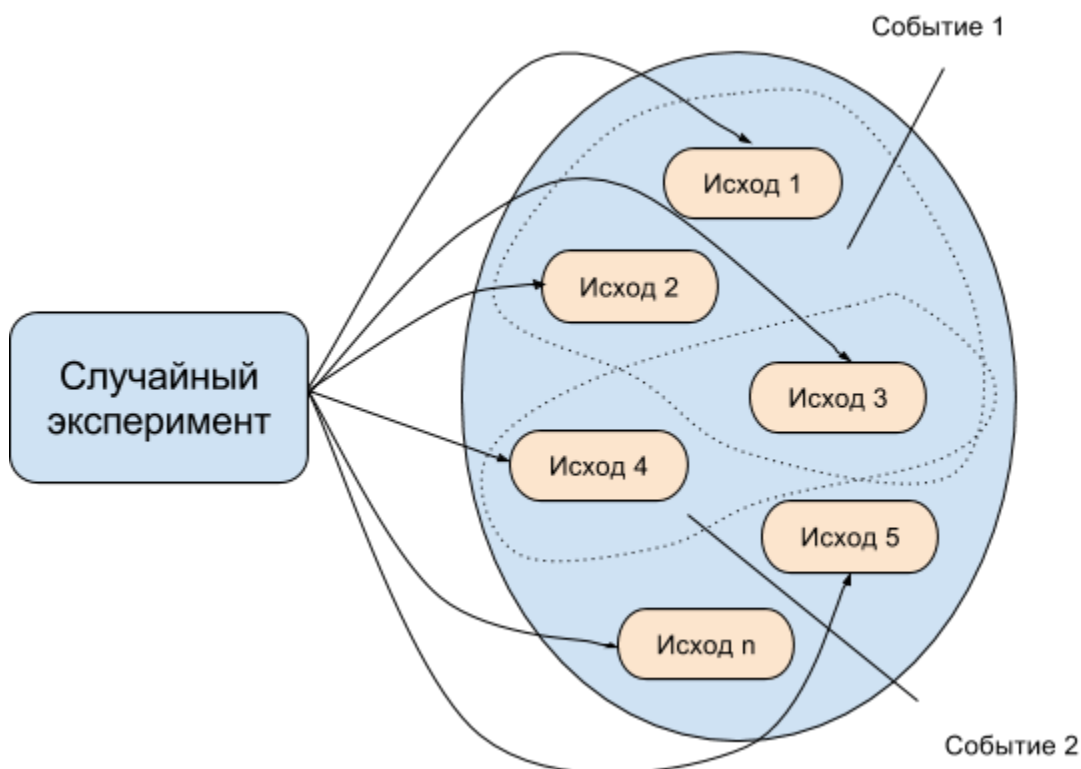


Рис. 1. Схема случайного эксперимента

В рассуждениях людей при решении задач данная модель как правило отсутствует вообще, и о ее наличии большинство из решающих даже не осведомлены. Поэтому я считаю целесообразным выделить схему случайного эксперимента отдельно, в самом начале изучения теории вероятностей, чтобы добиться максимального усвоения. Отработка навыка нахождения и построения этой модели на большом количестве задач поможет сформировать научную интуицию и навык быстрого решения задач.

§3. Работа с формулировкой задачи

В первой главе обсуждались проблемы, которые могут вызывать различные формулировки по сути одной и той же задачи. Для того, чтобы избавиться от отвлекающих и уводящих от верного решения деталей, целесообразно переформулировать задачу в некотором стандартном виде, например в виде вытягивания шаров из мешка. Мешок будет

символизировать пространство элементарных событий. Такое описание содержит явную модель случайного эксперимента, что существенно облегчает дальнейшие рассуждения.

Для перехода от одного условия к другому необходимо определить, что в исходной формулировке составляет случайный эксперимент. Это действие требует наличие определенного опыта работы с задачами на вероятность. В таблице 1 приведены примеры перехода от стандартных условий задачи к условиям с вытягиванием из мешка. За основу взята классическая задача, вызывающая множество споров и очень чувствительная к четкости формулировки — так называемый парадокс мальчика и девочки. В стандартной формулировке речь идет о некой конкретной семье мистера Смита, где ровно двое детей. Далее дается разная информация об одном из детей мистера Смита и спрашивается о вероятности того, что второй ребенок, о котором ничего не известно, — мальчик. Ощущение растерянности вызывает то, что задача сформулирована как жизненная ситуация, а жизненный опыт отказывается подсказать, как факт пола и день рождения одного из детей могут влиять на пол другого. Но если рассматривать эту задачу на примере множеств, рассуждать становится значительно легче.

Условие задачи	Вытягивание из мешка
В семье двое детей. Один из них -	В мешке все семьи с двумя детьми. Там поровну семей где дети м+м, м+д, д+м, д+д. Мы

мальчик. Какова вероятность того, что второй тоже мальчик?	вытянули наугад семью, где один из детей мальчик (т.е, равновероятно $m+m$, $m+d$ или $d+m$). Какова вероятность того, что это семья $m+m$?
То же самое, но старший - мальчик.	Вытянули семью $m+m$ или $m+d$.
То же самое, но один из детей мальчик и родился в четверг.	Вытянули семьи: $m(чт)+m$, $m+m(чт)$, $m(чт)+d$, $d+m(чт)$.

Таблица 1.

§4. Формирование понятийной базы теории вероятностей

Работа интуиции во многом связана с соотнесением ситуации с предшествующим опытом. Одна из проблем в освоении теории вероятностей связана с наличием у учащихся бытовых представлений и повседневного опыта в вопросах оценки вероятностей событий, которые конфликтуют и вытесняют новые понятия. В связи с этим первое, чего необходимо добиться в процессе обучения – это сформировать научные взгляды на теорию вероятностей и развить научную интуицию. Лишь после формирования адекватных стохастических представлений появляется смысл рассматривать так называемые парадоксы теории вероятностей, которые представляют из себя противоречия интуитивного решения и фактически верного.

1. Понятия случайного эксперимента и случайного события

Слово “случайный” — чрезвычайно многогранно. В зависимости от контекста оно может означать:

- Непонятная или неизвестная закономерность
- Отсутствие умысла
- Уникальность
- Равновозможность
- Нерегулярность
- Определяемое внешними причинами

и другие. Все эти смыслы неявно всплывут в голове ученика, когда на уроке пойдет речь о случайности.

В быту под словом “случайный” часто подразумевается, что все исходы имеют равные шансы осуществиться. То есть, выпадение одной из граней игральной кости со смещенным центром тяжести зачастую не принято в повседневной речи называть случайным событием. Этот вопрос терминологии, и его следует уяснить в первую очередь.

При обсуждении случайных и детерминированных событий необходимо учитывать так называемый парадокс закономерности. Его суть иллюстрирует следующий эксперимент: участнику предлагаются две бумажки, на одной из которых записаны результаты 20 бросков монеты, а на другой - некая выдуманная последовательность орлов и решек. Записи на бумажке выглядят, к примеру, вот так: RRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR и ORROOOORRRORRRRROROR. Испытуемому задается вопрос, на каком из листков записан реальный результат подбрасывания монеты. Несмотря на то, что обе комбинации орлов и решек равновероятны, большинство опрошенных уверенно выбирают вторую. В таком выборе есть своя логика, но в четко сформулированной задаче он бессмысленен. Другое проявления этой проблемы — когда после трех бросков монеты и выпавших при этом трех орлах человек думает, что на четвертый раз

гораздо вероятнее выпадет решка, чем орел. Комбинация ОООР кажется ему более вероятной, чем ОООО.

Вот еще один пример искаженного интуитивного представления о случайности: если человека попросить придумать случайную бинарную последовательность нулей и единиц, то предложенный большинством испытуемых вариант будет гораздо более “равномерный” (то есть, содержать более короткие последовательности из идущих подряд нулей и единиц), чем наблюдаемые в реальных случайных процессах последовательности. [5]

Существуют разные теории, объясняющие этот феномен. Некоторые исследователи (Фальк, Конолд, 1997) считают, что люди ассоциируют понятие случайности с колмогоровской сложностью, другие (Канеман, Тверски, 1972) — с той же самой эвристикой репрезентативности. В любом случае, все эти примеры демонстрируют ряд проблем, накладывающих отпечаток на восприятие понятийного материала теории вероятностей. Для избежания большинства из них необходимо:

- Четко провести границу между значением слова “случайный” в теории вероятностей и в обиходе
- Обеспечить опыт работы со случайными данными, например статистикой погоды

2. Понятие вероятности случайного события

Понятие вероятности случайного события должно вводиться без отрыва от модели случайного эксперимента. Важно, чтобы учащийся осознавал, что вероятность — это характеристика не какой-то конкретной ситуации, а целого процесса, с частной реализацией которого мы в данный момент имеем дело.

Для школьника сложно сопоставить математическим манипуляциям с вероятностями свой предшествующий опыт [11]. Отчасти

эту проблему должна сгладить работа со статистическим материалом, предшествующая изучению вероятностей. Но для зарождения вероятностной интуиции необходимо предоставить учащимся наглядную и универсальную аналогию, которую возможно применить к любой задаче. Так как аксиоматика теории вероятностей базируется на теории меры множеств, вполне естественно с самого начала изучения работать с вероятностями через множества. Накопления опыта операций над множествами начинается с самых ранних лет развития, так что учащимся будет гораздо проще начать оперировать с новыми сущностями. Для более наглядного и конкретного представления пространства элементарных исходов его можно представить в виде мешка, откуда вытягивается исход. Свойства объектов в мешке участвуют в формировании событий.

§5. Частные сложности теории вероятностей

Гипотеза равновероятности

Изучение теории вероятностей зачастую начинается с классической вероятности, которая имеет место для равновозможных элементарных исходов. Из-за этого у учащихся может сложиться ложное впечатление, что все элементарные исходы всегда равновероятны. Пример такого подхода демонстрируется в известном анекдоте, где на вопрос “Какова вероятность встретить на улице динозавра?” следует ответ: “ $\frac{1}{2}$. Либо встречу, либо нет”. В данной ситуации всем очевидно, что такое распределение вероятностей не будет подтверждаться опытом. Но в ситуации с Даламбером, считавшим, что появление в семье мальчика и девочки равновероятно появлению мальчика и мальчика и девочки и девочки, проверить опытом не так-то просто.

Понятие комбинаторного порядка

Вернемся к парадоксу мальчика и девочки. В условии задачи, где известен пол одного из детей (неизвестно, которого именно), ничего не говорится о возрасте детей. И когда, разъясняя верное решение этой задачи, вводится категория “старший-младший”, это резонно вызывает вопрос: а почему нас это вообще интересует? “Почему не рост, вес или длина косичек?” — такой вопрос был задан посетителем сайта с разбором этой задачи. На самом деле, конечно, не интересует. Просто имеется два независимых случайных события, два факта рождения ребёнка, и нам необходим способ пронумеровать их исходы в каждой семье с двумя детьми. Возраст — самый очевидный способ это сделать, ведь даже близнецы появляются на свет по очереди. Рост, вес и длина волос для этой цели не очень подходят, т.к. могут коррелировать с полом. То есть, если, например, ребенок с более длинными волосами — мальчик (а у мальчиков, как правило, короткие волосы), то второй ребенок, с еще более короткими волосами, уж наверняка тоже мальчик. Но абстрактная нумерация исходов — ещё одна не интуитивная вещь, которую недостаточно просто рассказать, она должна быть обобщена учеником самостоятельно.

Условная вероятность

Хотя условная вероятность редко входит в школьные программы теории вероятностей, задачи с формулировкой “найти вероятность события А при условии, что событие Б произошло” очень распространены. Понятное на первый взгляд условие содержит много (подвохов). Почему условия “из двух детей старший — мальчик” и “из двух детей по крайней мере один — мальчик” по-разному влияют на вероятность того, что оба мальчика?

В рамках предложенной модели условная вероятность имеет очень простую интерпретацию: это просто сужение множества, на котором происходит вычисление вероятности.

§6. Итоги

Для решения большинства проблем, возникающих при решении нестандартных задач по теории вероятностей, достаточно учитывать следующие моменты:

- Понятие вероятности имеет смысл только в контексте случайного эксперимента.
- Если в условии задачи модель случайного эксперимента не описана, ее необходимо построить самостоятельно.
- Перевод условия задачи в терминологию частот, множеств и их долей способен существенно облегчить решение задачи.

ГЛАВА 3. Разбор задач

§1. Парадокс Монти Холла

Вот типичная формулировка данной задачи:

«Допустим, некоему игроку предложили поучаствовать в известном американском телешоу Let's Make a Deal, которое ведет Монти Холл, и ему необходимо выбрать одну из трех дверей. За двумя дверьми находятся козы, за одной — главный приз, автомобиль, ведущий знает расположение призов. После того, как игрок делает свой выбор, ведущий открывает одну из оставшихся дверей, за которой находится коза, и предлагает игроку изменить свое решение. Стоит ли игроку согласиться или лучше сохранить свой первоначальный выбор?»

Начнем с главного вопроса: что в этой задаче является случайным экспериментом? Для ответа на него рассмотрим конкретную игру, в которой хотим выписать все возможные сценарии развития событий в зависимости от выбора игрока. Приз при этом находится за фиксированной дверью, например за первой. Сценарии, где приз находится за второй или третьей дверью, ничем не отличаются от рассматриваемого и никакого влияния не вероятности оказывать не будут. В процессе перебора всех вариантов возникает масса вопросов: всегда ли ведущий открывает некоторую дверь? Как происходит выбор двери ведущим? Он подкидывает монетку и открывает случайную дверь или всегда для усиления интриги открывает дверь с козой? А может, ведущий треплет игроку нервы только когда тот сделал верный выбор? А если ошибся, сразу объявляет о проигрыше? В условии сказано лишь об осведомленности ведущего о расположении приза, но это не мешает ему быть сколь угодно коварным. Без информации о стратегии ведущего построить модель случайного эксперимента и ответить на вопрос задачи

невозможно. Эта недоопределенность условия и порождает ожесточенные споры любителей занимательных задач, ведь каждый видит эту задачу по-своему и строит свою модель.

Итак, определимся со стратегией ведущего. Классическая интерпретация подразумевает, что ведущий всегда открывает дверь с козой. Теперь все возможные исходы легко представить в виде дерева на рис. 2.

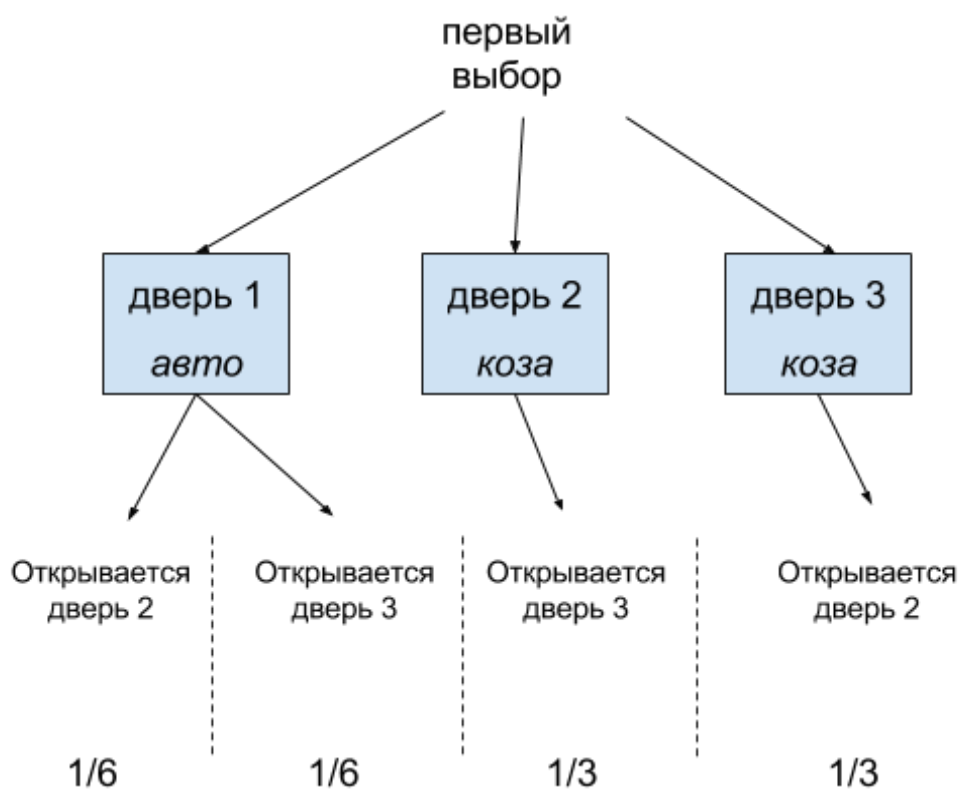


Рисунок 2. Дерево исходов задачи Монти Холла

Данная схема исчерпывает все возможные варианты развития событий в игре с данной стратегией ведущего. В случае, если изначально была выбрана дверь с козой ($\frac{2}{3}$ всех случаев), то смена выбора двери дает гарантированный выигрыш. И лишь в $\frac{1}{3}$ случаев лучше было бы этого не делать.

Т.к. людям зачастую сложно осознать, как умысел ведущего влияет на вероятность выигрыша, полезно рассмотреть также и другие стратегии

открытия дверей. Так будет выглядеть схема, если ведущий открывает одну из оставшихся дверей случайным образом.

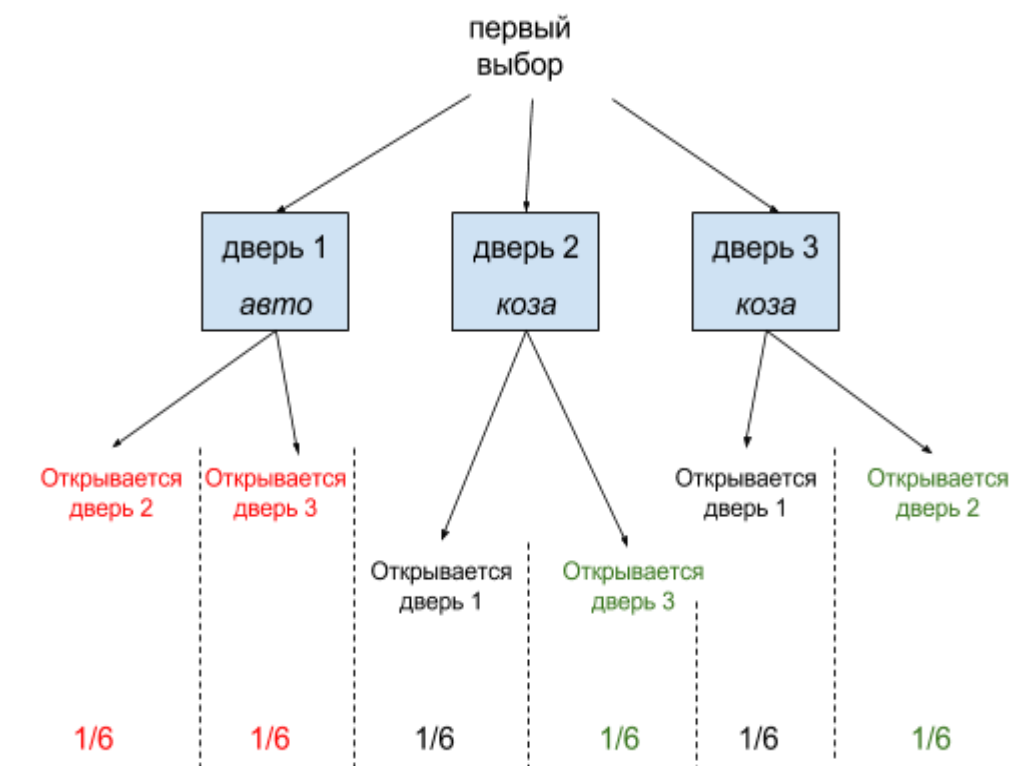


Рисунок 3. Дерево исходов при случайном выборе двери

Красным отмечены исходы, когда менять первоначальный выбор не надо было, зеленым — когда надо, а черным — когда ведущий открыл дверь с призом и игра окончена. Видно, что этих трех исходов поровну, и менять выбор или не менять, никакого значения не имеет.

Также можно обсудить ситуацию, когда ведущий открывает дверь лишь тогда, когда игрок изначально выбрал дверь с призом. Тогда ответ на вопрос задачи прямо противоположный, и выбор не нужно менять никогда. Ну, а если мы вообще ничего не знаем о замысле Монти, и он может применять любую из стратегий в зависимости от ситуации и своего настроения, то ничего не остается, кроме как попытаться угадать по его поведению, выражению лица и воспользоваться всем житейским

инструментарием принятия решения в ситуациях недостаточной информации.

§2. Парадокс мальчика и девочки

Впервые задача была сформулирована в 1959 году, когда Мартин Гарднер опубликовал один из самых ранних вариантов этого парадокса в журнале *Scientific American* под названием «The Two Children Problem», где привёл следующую формулировку:

- У мистера Смита двое детей. Старший ребенок — девочка. Какова вероятность того, что оба ребенка — девочки?
- У мистера Смита двое детей. Хотя бы один ребёнок — мальчик. Какова вероятность того, что оба ребенка — мальчики?

Мы добавим к этим вопросам еще и третий:

- У мистера Смита двое детей. Один из детей — мальчик, который родился в четверг. Какова вероятность того, что оба ребенка — мальчики?

Снова начинаем разбор задачи с вопроса, что является случайным экспериментом. Ответ на него не очевиден, т.к. у мистера Смита уже давно родились дети, все события произошли, где же повторяющийся эксперимент?

Во-первых, надо рассмотреть все возможные варианты состава семьи мистера Смита. С помощью простых аналогий, теми же шарами в мешке можно показать, что существует 4 равновозможных варианта: мальчик + мальчик, мальчик + девочка, девочка + мальчик, девочка + девочка.

Далее необходимо перейти к множественному представлению элементарных исходов для условия задачи. Это будет множество всех семей с ровно двумя детьми. Случайным экспериментом в задаче является

“выдача” семьи или, как предлагалось во второй главе, вытягивание мистером Смитом своей семьи из мешка. Мистер Смит со своей семьей — один из членов этого множества, причем он равновероятно может оказаться в любом из четырех его подмножеств. Далее различные формулировки вопроса просто накладывают определенные ограничения на то, в каких именно подмножествах может оказаться семья мистера Смита, и решение становится очевидным. Последняя формулировка (где один из мальчиков родился в четверг) часто вызывает большое сопротивление интуиции. В альтернативной формулировке с вытягиванием из мешка легко понять, что вероятность того, что вторым ребенком тоже мальчик не равна вероятности в случае, когда день недели, когда родился его брат неизвестен. Ведь подходящие комбинации будут: $m(чт) + m$, $m + m(чт)$, $m(чт) + д$, $д + m(чт)$. Можно заметить, что множества $m(чт) + m$ и $m + m(чт)$ имеют пересечение $m(чт) + m(чт)$, а значит таких семей с двумя мальчиками будет меньше, чем семей с девочками. Если довести задачу до конца, то полученный ответ будет равен $13/27$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной исследовательской работы было проделано следующее:

- Проведено обзорное исследование известных задач-парадоксов, связанных с вероятностями
- На основе изучения рассуждений посетителей различных интернет-сайтов были выделены основные проблемы в понимании теории вероятностей
- Проведен анализ источников затруднений
- Составлены ориентировочные пути решения данных проблем

Основные выводы исследования:

- В решении вероятностных задач люди, как правило, руководствуются бытовой интуицией и разнообразными эвристиками
- Бытовая интуиция в вопросах вероятностей часто не отвечает объективной реальности
- Если говорить о людях, которые пытаются воспользоваться методами теории вероятностей для решения задачи, то чаще всего им не хватает представлений о модели случайного эксперимента, которую необходимо найти и построить, прежде чем оценивать вероятность тех или иных событий.
- Явный переход к частотам, долям множеств событий может существенно облегчить восприятие задачи и направить мысли учащегося в нужную сторону.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Теория вероятностей и статистика. Тюрин и др. М.: МЦНМО:ОАО “Московские учебники”, 2008.
- [2] Теория вероятностей и статистика. Методическое пособие для учителя. Ю.Н. Тюрин и др. М.:МЦНМО: МИОО, 2014.
- [3] Tversky A., & Kahneman D., Availability: A heuristic for judging frequency and probability, *Cognitive Psychology*, 1973,N 5, p. 207-232.
- [4] Борель Э. Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1969
- [5] Randomness and Coincidences: Reconciling Intuition and Probability. Theory Thomas L. Griffiths & Joshua B. Tenenbaum Department of Psychology Stanford University Stanford, CA 94305-2130 USA
- [6] Теория вероятностей, исторический очерк. Л.Е. Майстров. М.: “Наука”, 1967.
- [7] Опойцев В.И. Школа Опойцева: Начала матанализа. Элементы теории вероятностей: Старшие классы. URSS. 2017
- [8] Hertwig, Ralph; Gigerenzer, Gerd (1999). "The 'Conjunction Fallacy' Revisited: How Intelligent Inferences Look Like Reasoning Errors". *Journal of Behavioral Decision Making*. 12: 275–305.
- [9] <https://www.youtube.com/watch?v=3LyUi13SUyg> — комментарии
- [10] Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Яценко, "Преподавание теории вероятностей и статистики в школе по учебному пособию Ю.Н.Тюрина, А.А.Макарова и др. «Теория вероятностей и статистика»", " Математика в школе " № 7, 2009 год.
- [11] И.Р.Высоцкий, И.В.Яценко, Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики, Математика в школе, No5, Москва, Школьная пресса, 2014, с. 30-41.

[12] Gigerenzer, Gerd (1996). "On narrow norms and vague heuristics: A reply to Kahneman and Tversky". *Psychological Review*. 103 (3): 592–596

[13] И.Р.Высоцкий, П.И.Захаров, В.В.Нестерова, И.В.Яценко, Теория вероятностей и статистика, Задачи заочных Интернет-олимпиад, Москва, Издательство МЦНМО, 2011.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Фрагменты рассуждений над парадоксом Монти Холла

Орфография и пунктуация авторские.

[Shadow 06_11](#)

Нет никакой проблемы, на самом деле. Чтобы это доказать, вовсе не нужны математические выкладки. В этом примере чувак открывает одну из дверей после того, как мы сделали выбор. Вероятность того, что за этой дверью козёл, равна 1. То есть, это неоспоримая достоверность. Это значит, что дверью с козлом за ней можно гипотетически пренебречь и нет никакой разницы, откроют ли нам её до нашего выбора или после. Другими словами, этой двери вообще как бы не существует. Есть только две двери, следовательно, шансы на победу 50/50, и менять первоначальный выбор абсолютно бессмысленно.

[Виктор Заводов](#)

Короче,объясняю принцип для тех,кто не понимает:когда перед тобой выбор из 3 вариантов,как здесь,вероятность попадания 33%,и 67% в двух других.Когда же ведущий открывает одну из дверей,это и является самым важным,он не может открыть твою дверь,и она имеет ту же вероятность в 33%.С другими дверями происходит следующее:до открытия двери ведущим,они имели по 33% каждая,когда же он открыл одну из дверей,те 33% у двери,которые были до открытия,переходят к другой двери,а перейти они могут только к той двери,которую ты не выбрал.В этом и заключается смещение переменной.Объяснение простое и доступное каждому.

[Weblay GUN](#)

Если взять 100 дверей. (За одной из них машина). Выбираем одну дверь. Шанс угадать 1 процент. Потом ведущий убирает 98 дверей (остается 2 двери: та которую выбрали и еще одна) и дает возможность поменять выбор. Как вы поступите? Я думаю почти все меняют выбор. А ведь это та же самая задача.

[Ирби Дрэкет](#)

Это же не классические вероятности, а байесовы. Открытие двери = новая информация, которую надо учитывать.

[Nurlan Mukashev](#)

Смешно смотреть на людей, которые не только изобретают велосипед, открывая для себя парадокс Монти-холла. Это то ладно, все когда-либо его открывали. Они еще спорят! С кем? С ведущими математиками мира? Этому парадоксу больше 50 лет! Чем больше они спорят и пытаются доказать обратное тем больше показывают свое невежество и тем больше мы убеждаемся в том, что к постижению науки способны далеко не все. К этому еще надо добавить общее отсутствие уважение к людям , которые это делали

[Farisey Дима](#)

вся эта теория вероятности сводится к тому что если у тебя всего одна попытка, то вероятность 50\50. либо выиграл либо нет. а вот если у тебя 1000 попыток))) , то используя тактику смены выбора можно выиграть гораздо больше машин))), чем при тактике без смены выбора. К сожалению в реальной жизни такого не бывает

[Shasta Narnian](#)

Нужно учесть, что ведущему не выгодно отдавать машину, да бы не убить интригу с выигрышем! Выбрали бы сначала козу, то ведущий не открывал бы никакой двери! Если мы выбрали машину, то ведущий откроет другую дверь, да бы посеять сомнение в нашем выборе! Поэтому полагаю что лучше не менять дверь!

