**Том 68** **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 2023** **Выпуск 4**

 ***БОЛДИН М. В.****

# О СИММЕТРИЗОВАННЫХ КРИТЕРИЯХ ТИПА ХИ-КВАДРАТ В АВТОРЕГРЕССИИ С ВЫБРОСАМИ В ДАННЫХ

Мы рассматриваем линейную стационарную модель $\mathrm{AR}(p)$ с неизвестными средним, коэффициентами и функцией распределения инноваций $G(x)$. Наблюдения за авторегрессией содержат грубые ошибки (выбросы, засорения). Распределение засорений $\Pi$ неизвестно, их интенсивность — $\gamma n^{-1/2}$ с неизвестным $\gamma$, $n$ — число наблюдений. Основной задачей (помимо прочих) является проверка гипотезы о нормальности инноваций $\boldsymbol{H}_\Phi\colon G(x) \in \{\Phi(x/\theta),\, \theta > 0\}$, $\Phi(x)$ — функция распределения $\boldsymbol{N}(0,1)$. В рассматриваемой ситуации неприменимы тесты, которые строились ранее для авторегрессии с нулевым средним. В качестве альтернативы в этой работе предлагаются специальные симметризованные тесты типа хи-квадрат. Их асимптотическое распределение при гипотезе и $\gamma=0$ свободно. Изучается асимптотическая мощность при локальных альтернативах в виде смеси $G(x) = A_{n,\Phi}(x) := (1-n^{-1/2})\Phi(x/\theta_0) + n^{-1/2}H(x)$, где $H(x)$ — функция распределения, а $\theta_0^2$ — неизвестная дисперсия инноваций при $\boldsymbol{H}_\Phi$. Устанавливается асимптотическая качественная робастность тестов в терминах равностепенной непрерывности семейства предельных мощностей (как функций $\gamma$, $\Pi$ и $H(x)$) относительно $\gamma$ в точке $\gamma = 0$.

*Ключевые слова и фразы*: авторегрессия, выбросы, остатки, эмпирическая функция распределения, тесты хи-квадрат, локальные альтернативы, робастность.

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5559

**1. Введение и постановка задачи.** В [1] рассматривалась линейная стационарная авторегрессия $\mathrm{AR}(p)$ с нулевым средним, неизвестными параметрами и выбросами в наблюдениях. Был построен тест типа хи-квадрат для проверки гипотезы $\boldsymbol{H}_\Phi$ о нормальности ненаблюдаемых инноваций. Нормальность инноваций эквивалентна нормальности

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: boldin_m@hotmail.com

самой авторегрессионной последовательности и обеспечивает оптимальность процедур наименьших квадратов оценивания и проверки гипотез, см., например, [2], [3]. Поэтому проверка $\boldsymbol{H}_\Phi$ — содержательная задача. Показано, что распределение тестовой статистики при гипотезе в схеме без выбросов асимптотически свободно, найдена мощность теста при локальных альтернативах. При наличии выбросов тест асимптотически качественно робастен.

В этой работе сделан следующий шаг. Мы рассматриваем AR($p$) с неизвестным средним и выбросами в данных. Основной задачей ставится опять построение теста типа хи-квадрат для проверки $\boldsymbol{H}_\Phi$. Рассматриваемая задача содержательна. Дело в том, что в AR($p$) модели с неизвестным средним тестовые статистики типа рассмотренных в [1], даже при отсутствии выбросов асимптотически несвободны при гипотезе, но зависят от параметров авторегрессии, среднего и их оценок. В качестве альтернативы тестам из [1] мы предлагаем специальные симметризованные тесты типа хи-квадрат.

Итак, рассмотрим AR($p$) модель с ненулевым средним

$$v_t = \beta_1 v_{t-1} + \cdots + \beta_p v_{t-p} + \nu + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbf{Z}. \tag{1.1}$$

В (1.1) $\{\varepsilon_t\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с неизвестной функцией распределения (ф.р.) $G(x)$; $\mathbf{E}\varepsilon_1 = 0$, $0 < \mathbf{E}\varepsilon_1^2 < \infty$; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top \in \mathbf{R}^p$ — вектор неизвестных параметров таких, что корни соответствующего (1.1) характеристического уравнения по модулю меньше единицы; $\nu$ — неизвестное среднее, $\nu \in \mathbf{R}^1$, размерность $p$ известна. Эти условия дальше всегда предполагаются выполненными и особо не оговариваются.

Мы будем рассматривать модель (1.1) в предположении, что наблюдения авторегрессии (1.1) содержат выбросы (грубые ошибки, засорения). А именно, предполагается, что наблюдаются величины

$$y_t = v_t + z_t^{\gamma_n}\xi_t, \qquad t = 1-p, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где $v_{1-p}, \ldots, v_n$ — выборка из стационарного решения $\{v_t\}$ уравнения (1.1); $\{z_t^{\gamma_n}\}$ — н.о.р.с.в., имеющие распределение Бернулли, т.е. принимающие значения 1 и 0, причем вероятность единицы $\gamma_n$, где

$$\gamma_n = \min\left(1, \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right), \qquad \gamma \geqslant 0 \text{ неизвестно.}$$

Кроме того, $\{\xi_t\}$ — н.о.р.с.в. с произвольным и неизвестным распределением П. Последовательности $\{v_t\}$, $\{z_n^{\gamma_n}\}$, $\{\xi_t\}$ независимы. Переменные $\{\xi_t\}$ интерпретируются как выбросы (засорения), $\gamma_n$ — уровень засорения. Для $\gamma = 0$ мы получаем модель (1.1) без засорений. Схема (1.2) — локальный вариант хорошо известной модели засорения данных во временных рядах, см. [4].

В этой работе в качестве основной задачи мы рассматриваем проверку гипотезы о нормальности инноваций

$$\boldsymbol{H}_\Phi\colon G(x) \in \left\{\Phi\left(\frac{x}{\theta}\right),\, \theta > 0\right\}, \qquad \Phi(x) \text{ — стандартная нормальная ф.р.} \tag{1.3}$$

Обозначим неизвестную дисперсию инноваций при $\boldsymbol{H}_\Phi$ через $\theta_0$. В качестве альтернативы к $\boldsymbol{H}_\Phi$ берется предположение о том, что $\{\varepsilon_t\}$ в (1.1) — н.о.р.с.в. с ф.р. в виде смеси

$$G(x) = A_{n,\Phi}(x) := (1 - n^{-1/2})\Phi\left(\frac{x}{\theta_0}\right) + n^{-1/2}H(x), \quad \text{где} \;\; H(x) \text{ — ф.р.} \tag{1.4}$$

Предположение (1.4) будем понимать как локальную альтернативу к $\boldsymbol{H}_\Phi$ и обозначать $\boldsymbol{A}_{n,\Phi}$.

Наша цель — найти предельное распределение симметризованной статистики хи-квадрат для $\boldsymbol{H}_\Phi$ при альтернативе $\boldsymbol{A}_{n,\Phi}$, построить тест и исследовать его устойчивость к выбросам.

Два важных обстоятельства характеризуют симметризованную статистику хи-квадрат. Во-первых, ее предельное распределение при гипотезе свободно от мешающих параметров $\boldsymbol{\beta}$ и $\nu$ и от распределений любых их $n^{1/2}$-состоятельных оценок. В схеме без засорений при $\gamma = 0$ это предельное распределение есть обычное распределение хи-квадрат с $m-2$ степенями свободы, где $m$ — число элементов разбиения, определяющего статистику хи-квадрат. Во-вторых, соответствующий тест оказывается асимптотически качественно устойчивым к выбросам. Тест для $\boldsymbol{H}_\Phi$ и результаты о его свойствах представлены в п. 2.3.

Помимо основной задачи мы строим тест для гипотезы

$$\boldsymbol{H}_0\colon G(x) = G_0(x), \quad G_0(x) \text{ — полностью известная симметричная ф.р.} \tag{1.5}$$

Мощность этого теста изучим при локальных альтернативах $\boldsymbol{A}_n$, при которых ф.р. инноваций

$$G(x) = A_n(x) := (1 - n^{-1/2})G_0(x) + n^{-1/2}H(x). \tag{1.6}$$

Эти результаты представлены в п. 2.2.

Исследование тестов для $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{H}_\Phi$ основано на стохастическом разложении эмпирической ф.р. остатков. Соответствующие результаты приведены в п. 2.1. Все доказательства вынесены в раздел 3.

## 2. Основные результаты.

**2.1. Стохастическое разложение остаточной эмпирической функции распределения.** В этом разделе мы строим оценку ф.р. $G(x)$ — остаточную эмпирическую функцию распределения (о.э.ф.р.).

Цель — получить стохастическое разложение о.э.ф.р. Будем предполагать в п. 2.1, что рассматривается авторегрессия (1.1) при альтернативе $\boldsymbol{A}_n$ с ф.р. $G(x)$ из (1.6). Относительно $G_0(x)$ и $H(x)$ из (1.6) нам потребуются некоторые предположения.

*Условие* ($\boldsymbol{R}$). Функции распределения $G_0(x)$ и $H(x)$ имеют среднее нуль, конечные дисперсии. Они дважды дифференцируемы с ограниченными вторыми производными.

Перепишем уравнение (1.1) в удобном для дальнейшего рассмотрения виде. Для этого определим константу $\mu$ соотношением $\nu = (1 - \beta_1 - \dots - \beta_p)\mu$, тогда

$$v_t - \mu = \beta_1(v_{t-1} - \mu) + \dots + \beta_p(v_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbf{Z}.$$

Если положить $u_t := v_t - \mu$, то

$$v_t = \mu + u_t, \quad u_t = \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_p u_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad t \in \mathbf{Z}. \tag{2.1}$$

Последовательность $\{u_t\}$ в (2.1) — авторегрессионная с нулевым средним и конечной дисперсией. Построим по наблюдениям $\{y_t\}$ из (1.2) оценки ненаблюдаемых $\{\varepsilon_t\}$. Далее $\Gamma \geqslant 0$ — любое конечное число. Пусть $\widehat{\mu}_n$ — любая оценка $\mu$, для которой при $\boldsymbol{A}_n$ равномерно по $\gamma \leqslant \Gamma$ последовательность

$$n^{1/2}(\widehat{\mu}_n - \mu) = O_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Положим $\widehat{u}_t = y_t - \widehat{\mu}_n$, $t = 1-p, \dots, n$. Пусть $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n = (\widehat{\beta}_{1n}, \dots, \widehat{\beta}_{pn})^\top$ — любая оценка $\boldsymbol{\beta}$, для которой при $\boldsymbol{A}_n$ равномерно по $\gamma \leqslant \Gamma$ последовательность

$$n^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) = O_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty. \tag{2.3}$$

Широкий класс подходящих оценок $\widehat{\mu}_n$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$ составляют, например, M-оценки для $\mu$ и GM-оценки для $\boldsymbol{\beta}$, построенные по $\{y_t\}$ и $\{\widehat{u}_t\}$ соответственно. GM-оценки для $\boldsymbol{\beta}$ в авторегрессии с нулевым средним и выбросами в данных уже рассматривались в [5, п. 2.4]. В рассматриваемой здесь ситуации результаты аналогичны, и мы опускаем подробности.

Положим

$$\widehat{\varepsilon}_t = \widehat{u}_t - \widehat{\beta}_{1n}\widehat{u}_{t-1} - \dots - \widehat{\beta}_{pn}\widehat{u}_{t-p}, \qquad t = 1, \dots, n. \tag{2.4}$$

Величины $\{\widehat{\varepsilon}_t\}$ называются остатками, это оценки ненаблюдаемых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

Ведем остаточную эмпирическую функцию распределения

$$\widehat{G}_n(x) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} I(\widehat{\varepsilon}_t \leqslant x), \qquad x \in \mathbf{R}^1, \quad I(\,\cdot\,) \text{ — индикатор события.}$$

Функция $\widehat{G}_n(x)$ — аналог гипотетической э.ф.р. $G_n(x) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} I(\varepsilon_t \leqslant x)$.

**Теорема 2.1.** *Предположим, что верна альтернатива $\boldsymbol{A}_n$. Пусть выполнено условие ($\boldsymbol{R}$) и $g_0(x) = G_0'(x)$. Тогда для любых $\delta > 0$ и $\Gamma \geqslant 0$*

$$\sup_{\gamma\leqslant\Gamma} \mathbf{P}\big(\big|n^{1/2}[\widehat{G}_n(x) - G_n(x)] - g_0(x)\alpha(\boldsymbol{\beta})n^{1/2}(\widehat{\mu}_n - \mu) - \gamma\Delta_0(x,\Pi)\big| > \delta\big) \to 0,$$

$n \to \infty$. *Здесь* $\Delta_0(x,\Pi) = \sum_{j=0}^{p}[\mathbf{E}G_0(x + \beta_j\xi_1) - G_0(x)]$, $\beta_0 = -1$; $\alpha(\boldsymbol{\beta}) = 1 - \beta_1 - \cdots - \beta_p$.

Доказательство теоремы 2.1 кропотливо и, чтобы не перегружать эту заметку, мы опубликовали его в отдельной работе [6].

Тесты для гипотез о виде ф.р. инноваций $G(x)$, основанные на статистиках типа о.э.ф.р. $\widehat{G}_n(x)$, в случае симметричной $G(x)$ естественно основывать на симметризованных вариантах о.э.ф.р. В качестве симметризованной о.э.ф.р. будем брать

$$\widehat{S}_n(x) := \frac{\widehat{G}_n(x) + 1 - \widehat{G}_n(-x)}{2}. \tag{2.5}$$

Положим

$$\Delta_S(x,\Pi) := \frac{\Delta_0(x,\Pi) - \Delta_0(-x,\Pi)}{2}. \tag{2.6}$$

Пусть

$$S_n(x) := \frac{G_n(x) + 1 - G_n(-x)}{2}.$$

Поскольку для симметричной ф.р. $G_0(x)$ плотность $g_0(x)$ четная, из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 2.1.** *При выполнении условий теоремы 2.1 для симметричной $G_0(x)$*

$$\sup_{\gamma\leqslant\Gamma} \mathbf{P}\big(\big|n^{1/2}[\widehat{S}_n(x) - S_n(x)] - \gamma\Delta_S(x,\Pi)\big| > \delta\big) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

**2.2. Симметризованный тест типа хи-квадрат для $\boldsymbol{H}_0$.** В этом пункте мы построим и изучим тест типа хи-квадрат для гипотезы $\boldsymbol{H}_0$ из (1.5). Пусть выполнена альтернатива $\boldsymbol{A}_n$ из (1.6) и справедливо условие ($\boldsymbol{R}$). Для полуинтервалов $B_j^+ = (x_{j-1}, x_j]$, $j = 1,\ldots,m$, $m > 1$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \infty$, пусть $p_j^+ := G_0(x_j) - G_0(x_{j-1}) > 0$. Тогда при гипотезе $\boldsymbol{H}_0$ вероятность $\mathbf{P}(\varepsilon_1 \in B_j^+) = p_j^+$. Если ввести еще симметричные полуинтервалы $B_j^- = (-x_j, -x_{j-1}]$, то при $\boldsymbol{H}_0$

$$p_j^0 := \mathbf{P}(\varepsilon_1 \in B_j^+ \cup B_j^-) = 2p_j^+ > 0, \qquad \sum_{j=1}^{m} p_j^0 = 1.$$

Пусть $\widehat{\nu}_j^+$ обозначает число остатков (они определены в (2.4)) среди $\{\widehat{\varepsilon}_t,\, t = 1,\ldots,n\}$, попавших в $B_j^+$, а $\widehat{\nu}_j^-$ обозначает число остатков, попавших в $B_j^-$. Пусть $\widehat{\nu}_j = \widehat{\nu}_j^+ + \widehat{\nu}_j^-$. Интересующая нас тестовая статистика типа хи-квадрат для $\boldsymbol{H}_0$ имеет вид

$$\widehat{\chi}_n^2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{(\widehat{\nu}_j - np_j^0)^2}{np_j^0}.$$

Статистика $\widehat{\chi}_n^2$ является функционалом от $\widehat{S}_n(x)$, так как

$$\begin{aligned} n[\widehat{S}_n(x_j) - \widehat{S}_n(x_{j-1})] &\\ = \frac{1}{2}\bigl\{n[\widehat{G}_n(x_j) - \widehat{G}_n(x_{j-1})] + n[\widehat{G}_n(-x_{j-1}) - \widehat{G}_n(-x_j)]\bigr\} &\\ = \frac{\widehat{\nu}_j^+ + \widehat{\nu}_j^-}{2} = \frac{\widehat{\nu}_j}{2}. & \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Будем называть $\widehat{\chi}_n^2$ симметризованной статистикой Пирсона.

Чтобы описать асимптотические свойства $\widehat{\chi}_n^2$ нам понадобятся некоторые обозначения. Введем диагональную матрицу $\boldsymbol{P}_0 = \operatorname{diag}\{p_1^0, \dots, p_m^0\}$ и векторы

$$\boldsymbol{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_m^0)^\top, \qquad \boldsymbol{p}_H = (p_1^H, \dots, p_m^H)^\top,$$
$$p_j^H := H(x_j) - H(x_{j-1}) + (H(-x_{j-1}) - H(-x_j)).$$

Нам понадобится еще вектор $\boldsymbol{\delta}(\Pi) = (\delta_1(\Pi), \dots, \delta_m(\Pi))^\top$ с компонентами $\delta_j(\Pi) = 2(\Delta_S(x_j, \Pi) - \Delta_S(x_{j-1}, \Pi))$, сдвиг $\Delta_S(x, \Pi)$ определен в (2.6).

Обозначим $F_k(x, \lambda^2)$ ф.р. нецентрального хи-квадрата с $k$ степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda^2$. Далее $|\cdot|$ означает евклидову норму вектора или матрицы.

**Теорема 2.2.** *Пусть альтернатива $\boldsymbol{A}_n$ верна. Пусть выполнено условие ($\boldsymbol{R}$). Тогда для любого $\Gamma \geqslant 0$*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^1, \gamma \leqslant \Gamma} \bigl|\mathbf{P}(\widehat{\chi}_n^2 \leqslant x) - F_{m-1}(x, \lambda^2(\gamma, \Pi, H))\bigr| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

*Параметр нецентральности* $\lambda^2(\gamma, \Pi, H) = |\boldsymbol{P}_0^{-1/2}(\boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0 + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi))|^2$.

В силу теоремы 2.2 при $\boldsymbol{H}_0$ и $\gamma = 0$ параметр нецентральности $\lambda^2(\gamma, \Pi, G_0) = 0$, и предельным распределением тестовой статистики $\widehat{\chi}_n^2$ будет распределение хи-квадрат с $m-1$ степенями свободы. Для заданного $0 < \alpha < 1$ будем отвергать гипотезу $\boldsymbol{H}_0$, когда

$$\widehat{\chi}_n^2 > \chi_{1-\alpha}(m-1), \qquad (2.8)$$

$\chi_{1-\alpha}(m-1)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ распределения хи-квадрат с $m-1$ степенями свободы. Мощность такого теста равна $W_n(\gamma, \Pi, H) = \mathbf{P}(\widehat{\chi}_n^2 > \chi_{1-\alpha}(m-1))$. В силу теоремы 2.2 эта мощность сходится при $n \to \infty$ равномерно по $\gamma \leqslant \Gamma$ к асимптотической мощности

$$W(\gamma, \Pi, H) = 1 - F_{m-1}(\chi_{1-\alpha}(m-1), \lambda^2(\gamma; \Pi, H)),$$
$$W(0, \Pi, G_0) = \alpha \quad \text{при} \quad \boldsymbol{H}_0 \quad \text{и} \quad \gamma = 0.$$

Используя неравенство $|F_k(x,\lambda_1^2)-F_k(x,\lambda_2^2)| \leqslant \sqrt{2/\pi}\,|\lambda_1-\lambda_2|$, получаем

$$\sup_{\Pi,H}|W(\gamma,\Pi,H)-W(0,\Pi,H)| \to 0, \qquad \gamma\to 0. \tag{2.9}$$

Это соотношение означает равностепенную непрерывность по $\gamma$ в точке $\gamma=0$ семейства асимптотических мощностей $\{W(\gamma,\Pi,H)\}$. Его естественно интерпретировать как асимптотическую качественную робастность теста (2.8). Качественно (2.9) означает, что $\boldsymbol{H}_0$ для малых $\gamma$ можно проверять примерно с асимптотическим уровнем $\alpha$, и тест будет иметь примерно такую же асимптотическую мощность при $\boldsymbol{A}_n$, как в схеме без засорений. И это независимо от распределения засорений $\Pi$ и ф.р. $H(x)$.

**2.3. Симметризованный тест типа хи-квадрат для $\boldsymbol{H}_\Phi$.** В этом пункте мы построим тест типа хи-квадрат для проверки гипотезы $\boldsymbol{H}_\Phi$ из (1.3) о нормальности инноваций. Как отмечалось во введении, такая гипотеза эквивалентна гауссовости стационарного решения (1.1).

*Условие* ($\boldsymbol{H}$). Функция распределения $H(x)$ из (1.4) имеет нулевое среднее, конечную дисперсию и ограниченную вторую производную.

Напомним, $\theta_0$ — истинное и неизвестное значение $\theta$ при $\boldsymbol{H}_\Phi$, и тогда $G(x)=\Phi(x/\theta_0)$. Возьмем разбиение, как в предыдущем пункте. А именно, пусть для $m>2$ и $0=x_0<x_1<\dots<x_m=\infty$

$$B_j^+=(x_{j-1},x_j], \quad B_j^-=(-x_j,-x_{j-1}], \qquad j=1,\dots,m.$$

Пусть $p_j^+(\theta)=\Phi(x_j/\theta)-\Phi(x_{j-1}/\theta)>0$. При $\boldsymbol{H}_\Phi$ справедливо $\mathbf{P}(\varepsilon_1\in B_j^+)=p_j^+(\theta_0)$, а

$$\mathbf{P}(\varepsilon_1\in B_j^+\cup B_j^-)=2p_j^+(\theta_0)=:p_j(\theta_0), \qquad \sum_{j=1}^m p_j(\theta_0)=1.$$

Пусть $\widehat{\nu}_j^+$ обозначает число остатков среди $\{\widehat{\varepsilon}_t,\, t=1,\dots,n\}$, попавших в $B_j^+$, $\widehat{\nu}_j^-$ обозначает число остатков, попавших в $B_j^-$, а $\widehat{\nu}_j=\widehat{\nu}_j^+ + \widehat{\nu}_j^-$. В качестве оценки $\theta_0$ возьмем решение уравнения

$$\sum_{j=1}^m \frac{\widehat{\nu}_j}{p_j(\theta)}p_j'(\theta)=0, \tag{2.10}$$

в котором штрих означает производную относительно $\theta$. Такое уравнение — аналог обычного уравнения модифицированного метода хи-квадрат, в котором ненаблюдаемые частоты $\nu_1,\dots,\nu_m$ инноваций, попавших в $B_1,\dots,B_m$, $B_j:=B_j^+\cup B_j^-$, заменены их оценками $\widehat{\nu}_1,\dots,\widehat{\nu}_m$.

Более точно: в качестве оценки $\theta_0$ (обозначим эту оценку $\widehat{\theta}_n$) возьмем $n^{1/2}$-состоятельное решение уравнения (2.10), если оно существует, и произвольное положительное число (скажем, единицу) в противном случае. Отметим, что $n^{1/2}$-состоятельное решение уравнения (2.10) существует с вероятностью, стремящейся к единице при $n \to \infty$, см. доказательство теоремы 2.3 в разделе 3. Там же мы докажем, что $\widehat{\theta}_n$ асимптотически нормальна. А именно, введем диагональную матрицу $\boldsymbol{P}(\theta) = \operatorname{diag}\{p_1(\theta), \ldots, p_m(\theta)\}$, векторы $\boldsymbol{p}(\theta) = (p_1(\theta), \ldots, p_m(\theta))^\top$, $\boldsymbol{p}'(\theta) = (p_1'(\theta), \ldots, p_m'(\theta))^\top$, $\boldsymbol{b}(\theta) = \boldsymbol{P}(\theta)^{-1/2}\boldsymbol{p}'(\theta)$, $\boldsymbol{a}(\theta) = \boldsymbol{b}(\theta)/|\boldsymbol{b}(\theta)|$. Как и в п. 2.2, пусть

$$\boldsymbol{p}_H = (p_1^H, \ldots, p_m^H)^\top, \quad p_j^H := H(x_j) - H(x_{j-1}) + (H(-x_{j-1}) - H(-x_j)).$$

Нам понадобится еще вектор

$$\boldsymbol{\delta}_\Phi(\Pi) = (\delta_1^\Phi(\Pi), \ldots, \delta_m^\Phi(\Pi))^\top, \quad \delta_j^\Phi(\Pi) := 2(\Delta_S(x_j, \Pi) - \Delta_S(x_{j-1}, \Pi)),$$

сдвиг $\Delta_S(x, \Pi)$ определен соотношением (2.6), в котором следует положить $G_0(x) = \Phi(x/\theta_0)$. Положим также для краткости $\boldsymbol{P}_0 := \boldsymbol{P}(\theta_0)$, $\boldsymbol{p}_0 := \boldsymbol{p}(\theta_0)$, $\boldsymbol{b}_0 := \boldsymbol{b}(\theta_0)$, $\boldsymbol{a}_0 := \boldsymbol{b}_0/|\boldsymbol{b}_0|$. Тогда (см. доказательство теоремы 2.3) при альтернативе $\boldsymbol{A}_{n,\Phi}$ и условии $(\boldsymbol{H})$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^1,\, \gamma \leqslant \Gamma} |P(n^{1/2}(\widehat{\theta} - \theta_0) \leqslant x) - F(x, \gamma, \Pi, H)| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

где

$$F(x, \gamma, \Pi, H) = \Phi\biggl(\frac{x - \boldsymbol{b}_0^\top \boldsymbol{P}_0^{-1/2}\boldsymbol{m}(\gamma, \boldsymbol{\Pi}, H)}{\sigma(\theta_0)}\biggr),$$
$$\boldsymbol{m}(\gamma, \boldsymbol{\Pi}, H) = \boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0 + \gamma\boldsymbol{\delta}_\Phi(\boldsymbol{\Pi}), \qquad \sigma^2(\theta_0) = |\boldsymbol{b}_0|^{-2}.$$

Очевидно,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^1,\, \Pi, H} |F(x, \gamma, \Pi, H) - F(x, 0, \Pi, H)| \to 0, \qquad \gamma \to 0.$$

Это соотношение означает равностепенную непрерывность по $\gamma$ в точке $\gamma = 0$ семейства распределений $\{F(x, \gamma, \Pi, H)\}$. Его будем интерпретировать как асимптотическую качественную робастность оценки $\widehat{\theta}_n$.

Интересующая нас тестовая статистика типа хи-квадрат для $\boldsymbol{H}_\Phi$ имеет вид

$$\widehat{\chi}^2_{n,\Phi} = \sum_{j=1}^m \frac{(\widehat{\nu}_j - np_j(\widehat{\theta}_n))^2}{np_j(\widehat{\theta}_n)}.$$

В силу (2.7) и (2.10) статистика $\widehat{\chi}^2_{n,\Phi}$ является функционалом от $\widehat{S}_n(x)$. Будем называть ее симметризованной статистикой хи-квадрат для $\boldsymbol{H}_\Phi$.

Дальше $\boldsymbol{E}_k$ означает единичную матрицу порядка $k$.

**Теорема 2.3.** *Пусть альтернатива $\boldsymbol{A}_{n,\Phi}$ верна. Пусть выполнено условие ($\boldsymbol{H}$). Тогда для любого* $\Gamma \geqslant 0$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^1,\gamma\leqslant\Gamma}\left|\mathbf{P}(\widehat{\chi}^2_{n,\Phi}\leqslant x)-F_{m-2}\big(x,\lambda^2_\Phi(\gamma,\Pi,H)\big)\right|\to 0,\qquad n\to\infty.$$

*Параметр нецентральности*

$$\lambda^2_\Phi(\gamma,\Pi,H)=\left|(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0^\top)\boldsymbol{P}_0^{-1/2}\big(\boldsymbol{p}_H-\boldsymbol{p}_0+\gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi)\big)\right|^2.$$

В силу теоремы 2.3 при $\boldsymbol{H}_\Phi$ и $\gamma=0$ параметр нецентральности есть нуль и предельным распределением тестовой статистики $\widehat{\chi}^2_{n,\Phi}$ будет распределение хи-квадрат с $m-2$ степенями свободы. Для заданного $0<\alpha<1$ будем отвергать $\boldsymbol{H}_\Phi$, когда

$$\widehat{\chi}^2_n>\chi_{1-\alpha}(m-2). \tag{2.11}$$

Мощность такого теста равна $W_{n,\Phi}(\gamma,\Pi,H)=\mathbf{P}(\widehat{\chi}^2_{n,\Phi}>\chi_{1-\alpha}(m-2))$. В силу теоремы 2.3 эта мощность сходится при $n\to\infty$ равномерно по $\gamma\leqslant\Gamma$ к асимптотической мощности

$$W_\Phi(\gamma,\Pi,H)=1-F_{m-2}\big(\chi_{1-\alpha}(m-2),\lambda^2_\Phi(\gamma,\Pi,H)\big).$$

При гипотезе $\boldsymbol{H}_\Phi$ и $\gamma=0$ асимптотическая мощность (асимптотический уровень значимости) равна $\alpha$. Как в п. 2.2, получаем

$$\sup_{\Pi,H}|W_\Phi(\gamma,\Pi,H)-W_\Phi(0,\Pi,H)|\to 0,\qquad \gamma\to 0.$$

Последнее соотношение означает асимптотическую качественную робастность теста (2.11).

## 3. Доказательства.

**3.1. Доказательство теоремы 2.2.** Введем векторы $\widehat{\boldsymbol{\nu}}=(\widehat{\nu}_1,\dots,\widehat{\nu}_m)^\top$ и $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_m)^\top$, где $\nu_j$ — число случайных величин среди $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$, попавших в $B_j$. Тогда, аналогично (2.7),

$$n[S_n(x_j)-S_n(x_{j-1})]=\frac{\nu_j}{2}.$$

Имеем при альтернативе $\boldsymbol{A}_n$ в силу следствия 2.1:

$$\begin{aligned}n^{1/2}\left(\frac{\widehat{\nu}_j}{n}-p_j^0\right)-n^{1/2}\left(\frac{\nu_j}{n}-p_j^0\right)&=n^{1/2}\left(\frac{\widehat{\nu}_j}{n}-\frac{\nu_j}{n}\right)\\&=2n^{1/2}\big\{\big[\widehat{S}_n(x_j)-\widehat{S}_n(x_{j-1})\big]-\big[S_n(x_j)-S_n(x_{j-1})\big]\big\}\\&=\gamma\delta_j(\Pi)+o_{\mathbf{P}}(1),\qquad n\to\infty.\end{aligned}$$

Здесь и далее $o_{\mathbf{P}}(1)$ обозначает величину (скалярную или векторную), сходящуюся к нулю по вероятности равномерно по $\gamma \leqslant \Gamma$. Пусть

$$\boldsymbol{p}_A = (p_1^A, \dots, p_m^A)^\top, \quad p_j^A := (1 - n^{-1/2})p_j(\theta_0) + n^{-1/2}p_j^H.$$

Тогда

$$\begin{aligned} n^{1/2}\left(\frac{\widehat{\boldsymbol{\nu}}}{n} - \boldsymbol{p}_0\right) &= n^{1/2}\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_0\right) + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi) + o_{\mathbf{P}}(1) \\ &= n^{1/2}\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\right) + n^{1/2}(\boldsymbol{p}_A - \boldsymbol{p}_0) + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi) + o_{\mathbf{P}}(1) \\ &= n^{1/2}\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\right) + (\boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0) + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi) + o_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Отметим еще, что в силу центральной предельной теоремы

$$n^{1/2}\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\right) \xrightarrow{d} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\, \boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_0^\top), \qquad n \to \infty. \tag{3.2}$$

Теперь обратимся к нашей тестовой статистике. Имеем в силу (3.1):

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_n^2 &= \sum_{j=1}^m \frac{\{n^{1/2}(\widehat{\nu}_j/n - p_j^0)\}^2}{p_j^0} \\ &= \left|\boldsymbol{P}_0^{-1/2} n^{1/2}\left(\frac{\widehat{\boldsymbol{\nu}}}{n} - \boldsymbol{p}_0\right)\right|^2 = |\boldsymbol{\xi}_n|^2 + o_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty, \\ \boldsymbol{\xi}_n &:= \boldsymbol{P}_0^{-1/2}\left(n^{1/2}\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\right) + \boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0 + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi)\right). \end{aligned}$$

Введем ортогональную матрицу $\boldsymbol{U}$ с первой строкой $(\sqrt{p_1^0}, \dots, \sqrt{p_m^0})$. У матрицы $\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_0^{-1/2}$ первая строка состоит из единиц, так что вектор $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}_n$ имеет нулевую первую компоненту. В силу (3.2) и сделанного замечания

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{N}\big(\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_0^{-1/2}(\boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0 + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi)),\, \widetilde{\boldsymbol{E}}_m\big), \qquad n \to \infty. \tag{3.3}$$

$\widetilde{\boldsymbol{E}}_m$ получается из единичной матрицы $\boldsymbol{E}_m$ заменой первого элемента главной диагонали на нуль. Через $\operatorname{proj}(\,\cdot\,)$ будем обозначать проекцию $m$-мерного вектора на последние $m-1$ компонент. В силу (3.3)

$$\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}_n) \xrightarrow{d} \boldsymbol{N}\big(\operatorname{proj}\big(\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_0^{-1/2}(\boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0 + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi))\big), \boldsymbol{E}_{m-1}\big), \qquad n \to \infty. \tag{3.4}$$

Сходимость в (3.4), очевидно, равномерна по $\gamma \leqslant \Gamma$. Теперь из (3.4) следует, что

$$|\boldsymbol{\xi}_n|^2 = |\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}_n|^2 = |\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}_n)|^2 \xrightarrow{d} \boldsymbol{\chi}^2(m-1, \lambda^2(\gamma, \Pi, H)), \qquad n \to \infty, \tag{3.5}$$

$\boldsymbol{\chi}^2(m-1, \lambda^2(\gamma, \Pi, H))$ — распределение хи-квадрат с $m-1$ степенью свободы и параметром нецентральности

$$\lambda^2(\gamma, \Pi, H) = \left|\boldsymbol{P}_0^{-1/2}\big(\boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0 + \gamma\boldsymbol{\delta}(\Pi)\big)\right|^2.$$

Равномерная по $\gamma \leqslant \Gamma$ слабая сходимость в (3.5) влечет равномерную сходимость функций распределения из формулировки теоремы 2.2. Что и требовалось доказать.

**3.2. Доказательство теоремы 2.3.** Схема доказательства этой теоремы та же, что у теоремы 2.2 в [1]. Это позволяет сократить утомительные подробности. Начнем с оценки $\widehat{\theta}_n$ параметра $\theta_0$, определяемой уравнением (2.10). Далее, как в доказательстве теоремы 2.2, через $o_{\mathbf{P}}(1)$ обозначены величины, стремящиеся по вероятности к нулю равномерно по $\gamma \leqslant \Gamma$. (Ради краткости будем иногда писать короче — равномерно по $\gamma$.) Введем процесс

$$l_n(\theta) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\frac{\widehat{\nu}_j}{p_j(\theta)}p_j'(\theta).$$

Чтобы изучить свойства оценок, определяемых уравнением (2.10), нужно знать свойства процесса $l_n(\theta)$ в окрестности порядка $O(n^{-1/2})$ истинного значения параметра $\theta_0$. Чтобы сделать это, рассмотрим процесс $l_n(\theta_0 + n^{-1/2}\tau)$ переменной $\tau$, $|\tau| \leqslant \Theta < \infty$. Разложим функцию $p_j'(\theta_0 + n^{-1/2}\tau)/p_j(\theta_0 + n^{-1/2}\tau)$ по формуле Тейлора до второго члена и после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} l_n(\theta_0 + n^{-1/2}\tau) = \boldsymbol{b}_0^\top \boldsymbol{P}_0^{-1/2} n^{1/2}\left(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\right) - |\boldsymbol{b}_0|^2\tau \\ + \boldsymbol{b}_0^\top \boldsymbol{P}_0^{-1/2}\boldsymbol{m}(\gamma, \Pi, H) + o_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $o_{\mathbf{P}}(1)$ стремится к нулю по вероятности равномерно не только по $\gamma$, но и по $|\tau| \leqslant \Theta$, а $\boldsymbol{m}(\gamma, \Pi, H) = \boldsymbol{p}_H - \boldsymbol{p}_0 + \gamma\boldsymbol{\delta}_\Phi(\boldsymbol{\Pi})$. Вектор $n^{1/2}(\boldsymbol{\nu}/n - \boldsymbol{p}_A)$ в силу (3.2) ограничен по вероятности. Кроме того, $\gamma \leqslant \Gamma$, а $|\boldsymbol{b}_0|^2 > 0$. Значит, в силу (3.6) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\tau_0 > 0$, что на концах отрезка $[\theta_0 - n^{-1/2}\tau_0,\, \theta_0 + n^{-1/2}\tau_0]$ функция $l_n(\theta)$ примет разные знаки (плюс и минус соответственно) с вероятностью, не меньшей $1 - \varepsilon$ при всех достаточно больших $n$ и равномерно по $\gamma$. Но тогда, в силу непрерывности реализаций $l_n(\theta)$, решение уравнения (2.10) в указанном отрезке существует с вероятностью, не меньшей, чем $1 - \varepsilon$. В качестве нужного нам корня в силу непрерывности по $\theta$ реализаций процесса $l_n(\theta)$ можно взять ближайший к $\theta_0$ корень, он существует и от $\tau_0$ не зависит. Равномерная по $\gamma$ $n^{1/2}$-состоятельность такого решения очевидна.

Разумеется, наша оценка $\widehat{\theta}_n$ тоже является равномерной по $\gamma$ $n^{1/2}$-состоятельной. Кроме того, $l_n(\widehat{\theta}_n) = o_{\mathbf{P}}(1)$, $n \to \infty$. Поэтому (3.6) стандартным образом влечет

$$o_{\mathbf{P}}(1) = l_n(\widehat{\theta}_n) = \boldsymbol{b}_0^\top \boldsymbol{P}_0^{-1/2} n^{1/2}\Big(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\Big) - |\boldsymbol{b}_0|^2 n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \\ + \boldsymbol{b}_0^\top \boldsymbol{P}_0^{-1/2} \boldsymbol{m}(\gamma, \Pi, H) + o_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty.$$

Последнее соотношение влечет стохастическое разложение для оценки $\widehat{\theta}_n$:

$$n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) = |\boldsymbol{b}_0|^{-2} \boldsymbol{b}_0^\top \boldsymbol{P}_0^{-1/2} n^{1/2}\Big(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\Big) \\ + |\boldsymbol{b}_0|^{-2} \boldsymbol{b}_0^\top \boldsymbol{P}_0^{-1/2} \boldsymbol{m}(\gamma, \Pi, H) + o_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty. \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь собственно статистику $\widehat{\chi}^2_{n,\Phi}$. Имеем

$$\widehat{\chi}^2_{n,\Phi} = |\widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{n}}|^2, \quad \text{где} \quad \widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{n}} := \boldsymbol{P}^{-1/2}(\widehat{\theta}_n) n^{1/2}\Big(\frac{\widehat{\boldsymbol{\nu}}}{n} - \boldsymbol{p}(\widehat{\theta}_n)\Big).$$

С помощью формулы Тейлора и (3.7) получаем после некоторых преобразований:

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_0^\top) \boldsymbol{P}_0^{-1/2} n^{1/2}\Big(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\Big) \\ + (\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_0^\top) \boldsymbol{P}_0^{-1/2} \boldsymbol{m}(\gamma, \Pi, H) + o_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty. \tag{3.8}$$

Положим для краткости

$$\boldsymbol{\eta}_n := (\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_0^\top) \boldsymbol{P}_0^{-1/2} n^{1/2}\Big(\frac{\boldsymbol{\nu}}{n} - \boldsymbol{p}_A\Big), \\ \boldsymbol{\zeta} := (\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{a}_0 \boldsymbol{a}_0^\top) \boldsymbol{P}_0^{-1/2} \boldsymbol{m}(\gamma, \Pi, H).$$

В силу (3.8) и введенных обозначений

$$\widehat{\chi}^2_{n,\Phi} = |\widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{n}}|^2 = |\boldsymbol{\eta}_n + \boldsymbol{\zeta}|^2 + o_{\mathbf{P}}(1), \qquad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Введем ортогональную матрицу

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1^0} & \dots & \sqrt{p_m^0} \\ \dfrac{p_1'(\theta_0)}{|b_0|\sqrt{p_1^0}} & \dots & \dfrac{p_m'(\theta_0)}{|b_0|\sqrt{p_m^0}} \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0^\top)\boldsymbol{P}_0^{-1/2}=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ 0 & \dots & 0\\ * & * & *\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Из (3.10) и определений векторов $\boldsymbol{\eta}_n$ и $\boldsymbol{\zeta}$ следует, что у векторов $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta}_n$ и $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\zeta}$ две первые компоненты нулевые. Обозначим $\operatorname{proj}(\,\cdot\,)$ проекцию любого $m$-мерного вектора, $m>2$, на его последние $m-2$ координаты. Тогда в силу ортогональности $\boldsymbol{U}$ и (3.9)

$$\widehat{\chi}^2_{n,\Phi}=|\boldsymbol{U}\widehat{\boldsymbol{\xi}}_{\boldsymbol{n}}|^2=|\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta}_n)+\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\zeta})|^2+o_{\mathbf{P}}(1),\qquad n\to\infty. \tag{3.11}$$

Из (3.2), определения вектора $\boldsymbol{\eta}_n$ и матрицы $\boldsymbol{U}$ следует, что

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta}_n\xrightarrow{d}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\widetilde{\boldsymbol{E}}_m),\qquad n\to\infty. \tag{3.12}$$

Матрица $\widetilde{\boldsymbol{E}}_m$ получается из единичной матрицы $\boldsymbol{E}_m$ заменой первых двух элементов главной диагонали на нули. Вид предельной ковариации $\widetilde{\boldsymbol{E}}_m$ в (3.12) устанавливается прямым вычислением, а именно,

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0^\top)\boldsymbol{P}_0^{-1/2}(\boldsymbol{P}_0-\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{p}_0^\top)\boldsymbol{P}_0^{-1/2}(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0^\top)\boldsymbol{U}^\top=\widetilde{\boldsymbol{E}}_m.$$

Теперь из соотношения (3.12) следует

$$\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta}_n)\xrightarrow{d}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{E}_{m-2}),\qquad n\to\infty.$$

Отсюда равномерно по $\gamma$

$$\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta}_n)+\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\zeta})\xrightarrow{d}\boldsymbol{N}(\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\zeta}),\boldsymbol{E}_{m-2}),\qquad n\to\infty.$$

Значит, правая часть (3.11) асимптотически распределена как нецентральный хи-квадрат с $m-2$ степенями свободы и параметром нецентральности

$$\begin{aligned}\lambda^2_\Phi(\gamma,\Pi,H)&=|\operatorname{proj}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\zeta})|^2=|\boldsymbol{U}\boldsymbol{\zeta}|^2=|\boldsymbol{\zeta}|^2\\&=\bigl|(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{a}_0^\top)\boldsymbol{P}_0^{-1/2}\bigl(\boldsymbol{p}_H-\boldsymbol{p}_0+\gamma\boldsymbol{\delta}_\Phi(\boldsymbol{\Pi})\bigr)\bigr|^2.\end{aligned}$$

Слабая сходимость $\widehat{\chi}^2_{n,\Phi}$ к этому пределу, разумеется, равномерна по $\gamma\leqslant\Gamma$, что влечет равномерную сходимость ф.р. в теореме 2.3. Что и требовалось доказать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. В. Болдин, “О проверке нормальности авторегрессии с засорениями критерием Пирсона”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **65**:1 (2020), 126–137; англ. пер.: M. V. Boldin, “On the Pearson’s chi-square test for normality of autoregression with outliers”, *Theory Probab. Appl.*, **65**:1 (2020), 102–110.

2. Т. Андерсон, *Статистический анализ временных рядов*, Мир, М., 1976, 756 с.; пер. с англ.: T. W. Anderson, Jr., *The statistical analysis of time series*, Wiley Ser. Probab. Stat., John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1971, xiv+704 pp.
3. P. J. Brockwell, R. A. Davis, *Time series: theory and methods*, Springer Ser. Statist., Springer-Verlag, New York, 1987, xiv+519 pp.
4. R. D. Martin, V. J. Yohai, "Influence functionals for time series", *Ann. Statist.*, **14**:3 (1986), 781–818.
5. M. V. Boldin, M. N. Petriev, "On the empirical distribution function of residuals in autoregression with outliers and Pearson's chi-square type tests", *Math. Methods Statist.*, **27**:4 (2018), 294–311.
6. M. V. Boldin, *On stochastic expansions of the empirical distribution function of residuals in autoregression schemes*, 2021, 14 pp., arXiv: 2108.05903.

Поступила в редакцию
16.II.2022