Краевая задача оптимального управления со связанными терминальными условиями

Елена Хорошилова

МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, каф. общей математики

ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ
Москва, 14 апреля 2014

khorelena@gmail.com

Содержание

На фиксированном отрезке времени рассматривается управляемая система с линейной динамикой:

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$

где $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ – фазовая траектория,
$u(t) = (u_1(t), ..., u_r(t))$ – управление (ограничено).

Зная нач. значение фазовой траектории $x(t_0)$, при зад. управлении $u(\cdot)$ можно решить систему диф. уравнений и найти траекторию $x(\cdot)$ на всем отрезке. Правый конец $x(t_1)$ траектории при различных управлениях формирует множество достижимости.

2. Введение (продолжение)

Близкие постановки задач:

Классическая задача ОУ: найти управление $u(\cdot) \in U$ (кусочно-непрерывное и ограниченное в равномерной метрике) такое, чтобы траектория, подчиняясь системе диф. уравнений, выйдя из точки x_0, пришла в точку, являющуюся решением некот. задачи оптимизации.

Классическая задача управляемости-наблюдаемости: найти управление $u(\cdot) \in U$ (кусочно-непрерывное и ограниченное в равномерной метрике) такое, чтобы траектория, подчиняясь системе диф. уравнений, соединила две заданные точки x_0 и x_1 на концах отрезка.

3. Введение (продолжение)

В данной постановке:

1. Начальное x_0 и конечное x_1 (терминальные) значения траектории – не известны и подлежат определению в процессе решения.
2. Терминальные значения траектории должны быть решением конечномерной задачи оптимизации $\varphi_0(x_0) + \varphi_1(x_1) \to \min.$
3. Задача оптимизации решается при доп. линейных ограничениях:

$$A_0x_0 + A_1x_1 \leq a, \ (x_0, x_1) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$$

(связанные терминальные условия).

Характеристики решения:

4. Фазовые траектории $x(\cdot)$ – непрерывные функции из класса абсолютно непрерывных функций $\mathrm{AC}^n[t_0, t_1]$.
5. Управления ограничены по норме $\mathrm{L}_2^r[t_0, t_1]$ (интегрально)

$$u(\cdot) \in \mathrm{U} = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] | \ \tfrac{1}{2}\|u(\cdot)\|^2_{L_2^r} \leq \mathrm{C}^2\}.$$

6. Множество достижимости: все R^n или его подпространство.

4. Постановка задачи ОУ

Задача ОУ со связанными терминальными условиями:

$$(x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in \mathrm{Argmin}\{\varphi_0(x_0) + \varphi_1(x_1) \mid \tag{1}$$

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 \leq a,\ (x_0, x_1) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0^*,\ x(t_1) = x_1^*, \}, \tag{3}$$

$$x(\cdot) \in \mathrm{AC}^n[t_0, t_1],\ u(\cdot) \in \mathrm{U} = \{u(\cdot) \in L_2^r[t_0, t_1] \mid \tfrac{1}{2}\|u(\cdot)\|_{L_2^r}^2 \leq \mathrm{C}^2\}, \tag{4}$$

в которой требуется **найти**: управление $u^*(\cdot) \in \mathrm{U}$, концы траектории (x_0^*, x_1^*) и саму траекторию $x^*(\cdot)$ такие, чтобы $x^*(\cdot)$, подчиняясь системе ОДУ (3), соединила две компоненты x_0^* и x_1^* решения задачи выпуклого программирования (1)-(2).

5. Седловой подход для решения задачи ОУ

КАК РЕШАТЬ?

Задача решается без применения принципа максимума Понтрягина.

Используется **седловой подход**, основанный на методе Лагранжа и сведении задачи к нахождению седловых точек лагранжиана.

Линеаризуем функционал в точке минимума и затем скаляризируем задачу (1)-(4), введя **функцию Лагранжа:**

$$\mathcal{L}(x_0, x_1, x(\cdot), u(\cdot); p, \psi(\cdot)) = \langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1\rangle$$

$$+\langle p, A_0x_0 + A_1x_1 - a\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\rangle dt, \quad (5)$$

при всех $(x_0, x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$,
$(p, \psi(\cdot)) \in \mathrm{R}^m_+ \times \Psi^n_2[t_0, t_1]$, где $\Psi^n_2[t_0, t_1]$ – лин. многообразие абс. непр. функций из сопряж. пр-ва. Здесь $(x(\cdot), u(\cdot))$ – прямые переменные. $(\psi(\cdot), p)$ – сопряженные (двойственные) переменные.

6. Седловой подход: переход в сопряженное пр-во

Задача ОУ в выпуклом случае (все ограничения – линейны) сводится к нахождению **седловых точек лагранжиана**.

КАК ЭТО ДЕЛАЕТСЯ: с помощью

✓ перехода к сопряженным матричным операторам

$$\langle \psi, Dx \rangle = \langle D^{\mathrm{T}}\psi, x \rangle, \ \langle \psi, Bu \rangle = \langle B^{\mathrm{T}}\psi, u \rangle,$$

✓ и перехода к сопряженному диф. оператору (формулы интегрирования по частям на отрезке $[t_0, t_1]$)

$$\langle \psi_1, x_1 \rangle - \langle \psi_0, x_0 \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \frac{d}{dt}\psi(t), x(t) \rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), \frac{d}{dt} x(t) \rangle dt$$

лагранжиан записывается в **сопряженной форме**, используя которую, выводится **двойственная задача** к поставленной выше.

Лагранжиан классический (прямой)

$$\mathcal{L}(p,\psi(\cdot);x_0,x_1,x(\cdot),u(\cdot)) = \langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1\rangle$$

$$+\langle p, A_0x_0 + A_1x_1 - a\rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t)\rangle dt,$$

и в сопряженной форме:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{T}}(\cdot) = \langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}}p + \psi_0, x_0\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}}p - \psi_1, x_1\rangle + \langle -p, a\rangle$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \langle D^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), u(t)\rangle dt, \quad (6)$$

$(p,\psi(\cdot)) \in \mathrm{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0,t_1]$, $(x_0,x_1,x(\cdot),u(\cdot)) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0,t_1]$ $\times \mathrm{U}$, где $\psi_0 = \psi(t_0)$, $\psi_1 = \psi(t_1)$, имеют одни и те же седловые точки.

8. Система седловых неравенств функции Лагранжа

Задача сводится к нахождению **седловых точек** $(p^*, \psi^*(\cdot), x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ лагранжиана, удовлетворяющих, по определению, системе:

$$\mathcal{L}(p, \psi; x_1^*, x^*, u^*) \leq \mathcal{L}(p^*, \psi^*; x_1^*, x^*, u^*) \leq \mathcal{L}(p^*, \psi^*; x_1, x, u), \tag{7}$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0^* \rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1^* \rangle + \langle p, A_0 x_0^* + A_1 x_1^* - a \rangle \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \rangle dt \\
&\leq \langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0^* \rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1^* \rangle + \langle p^*, A_0 x_0^* + A_1 x_1^* - a \rangle \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - \frac{d}{dt}x^*(t) \rangle dt \\
&\leq \langle \nabla\varphi_0(x_0^*), x_0 \rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*), x_1 \rangle + \langle p^*, A_0 x_0 + A_1 x_1 - a \rangle \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \langle \psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t) - \frac{d}{dt}x(t) \rangle dt
\end{aligned} \tag{8}$$

9. Сопряженная форма системы седловых неравенств

Система седловых неравенств в сопряженном виде:

$$
\begin{aligned}
&\langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm T} p + \psi_0, x_0^*\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm T} p - \psi_1, x_1^*\rangle + \langle -p, a\rangle \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \langle D^{\mathrm T}(t)\psi(t) + \frac{d}{dt}\psi(t), x^*(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm T}(t)\psi(t), u^*(t)\rangle dt \\
&\le \langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm T} p^* + \psi_0^*, x_0^*\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm T} p^* - \psi_1^*, x_1^*\rangle + \langle -p^*, a\rangle \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \langle D^{\mathrm T}(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm T}(t)\psi^*(t), u^*(t)\rangle dt \\
&\le \langle \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm T} p^* + \psi_0^*, x_0\rangle + \langle \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm T} p^* - \psi_1^*, x_1\rangle + \langle -p^*, a\rangle \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \langle D^{\mathrm T}(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x(t)\rangle dt + \int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm T}(t)\psi^*(t), u(t)\rangle dt \qquad (9)
\end{aligned}
$$

для всех $(x_0, x_1, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$,
$(p, \psi(\cdot)) \in \mathrm{R}^m_+ \times \Psi_2^n[t_0, t_1]$.

10. Двойственная задача

Аналогично тому, как из седл. системы для прямого лагранжиана получается исх. задача, из седловой системы для сопр. лагранжиана выводится **двойственная задача:**

$$\begin{cases} (p^*,\psi^*(\cdot)) \in \operatorname{Argmax}\Bigg\{ \langle -p, a\rangle + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t), u^*(t)\rangle dt \mid \\ \qquad \nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p + \psi_0 = 0,\ \ p \in \mathrm{R}_+^m,\ \ \psi(\cdot) \in \Psi_2^n[t_0,t_1], \\ \qquad D^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \dfrac{d}{dt}\psi(t) = 0,\ \ \psi_1 = \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p \Bigg\}, \\ \qquad \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t)\rangle dt \le 0,\ \ u(\cdot) \in \mathrm{U}. \end{cases} \tag{10}$$

Если динамика отсутствует, то **система прямой и двойственной задач** принимает вид, хорошо изв. в конечномерной оптимизации:

$$(x_0^*, x_1^*) \in \operatorname{Argmin}\{\varphi_0(x_0)+\varphi_1(x_1) \mid A_0x_0 + A_1x_1 \le a, (x_0,x_1) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n\},$$

$$p^* \in \operatorname{Argmax}\{\langle -p, a\rangle \mid \psi_1 = \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p,\ p \in \mathrm{R}_+^m\}.$$

11. Дифференциальная система седлового типа

Седловой подход приводит к системе прямой и двойственной задач: задач Коши (для $x^*(\cdot)$ и $\psi^*(\cdot)$) и вар. неравенств (для p^* и $u^*(\cdot)$):

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0^*,$$

$$\langle p - p^*, A_0 x_0^* + A_1 x_1^* - a \rangle \le 0, \quad p \ge 0, \tag{11}$$

$$D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0, \quad \psi_1^* = \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}} p^*, \text{ где } x_1^* = x^*(t_1),$$

$$\nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}} p^* + \psi_0^* = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t), u^*(t) - u(t) \rangle dt \le 0, \quad u(\cdot) \in \mathrm{U}. \tag{12}$$

Первые условия – как в Принципе максимума; отличия: последнее неравенство решается в функциональном пространстве (множество управлений ограничено интегрально).

12. Редукция вар.неравенств к урав. с операт. проектир.

Представим вариац. неравенства (11) и (12) в эквивалентной форме операт. уравнений с операторами проектирования [Ф.П. Васильев, 2011], тогда диф. **седловая система** принимает вид

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t), \quad x^*(t_0) = x_0^*, \tag{13}$$

$$p^* = \pi_+(p^* + \alpha(A_0x_0^* + A_1x_1^* - a)), \tag{14}$$

$$D^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t) = 0, \quad \psi_1^* = \nabla\varphi_1(x_1^*) + A_1^{\mathrm{T}}p^*, \tag{15}$$

$$\nabla\varphi_0(x_0^*) + A_0^{\mathrm{T}}p^* + \psi_0^* = 0, \tag{16}$$

$$u^*(t) = \pi_U(u^*(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^*(t)), \tag{17}$$

где $\pi_+(\cdot), \pi_U(\cdot)$ – операторы проектирования на положительный ортант пространства $\mathbb{R}_+^m$ и на множество управлений U, $\alpha > 0$.

Исходная задача ОУ сведена к системе (13)–(17).

13. Несходимость метода простой итерации

Для решения системы (13)–(17) выпишем **метод простой итерации**:

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t), \quad x^k(t_0) = x_0^k,$$

$$p^{k+1} = \pi_+(p^k + \alpha(A_0 x_0^k + A_1 x_1^k - a)),$$

$$D^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t) + \frac{d}{dt}\psi^k(t) = 0, \quad \psi_1^k = \nabla\varphi_1(x_1^k) + A_1^{\mathrm{T}} p^k,$$

$$x_0^{k+1} = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}} p^k + \psi_0^k),$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t)), \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Данный процесс $(p^k, \psi^k(\cdot); x_0^k, x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot))$ сходится к решению $(p^*, \psi^*(\cdot); x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ только для строго сжимающих отображений. В случае же седловых задач сходимости метода, вообще говоря, нет. Гарантию сходимости дают **методы седлового типа** [А.С. Антипин, 1997].

14. Седловой итерационный метод

Для нахождения решения использовался управляемый метод простой итерации экстраградиентного типа, каждая итерация которого распадается на два полушага:

1) прогнозный полушаг

$$\frac{d}{dt}x^k(t) = D(t)x^k(t) + B(t)u^k(t),\ \ x^k(t_0) = x_0^k, \tag{18}$$

$$\bar{p}^k = \pi_+(p^k + \alpha(A_0x_0^k + A_1x_1^k - a)), \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^k(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t) = 0,\quad \psi_1^k = \nabla\varphi_1(x_1^k) + A_1^{\mathrm{T}}p^k, \tag{20}$$

$$\bar{x}_0^k = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(x_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}p^k + \psi_0^k), \tag{21}$$

$$\bar{u}^k(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\psi^k(t)); \tag{22}$$

15. Седловой итерационный метод

2) основной полушаг

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^k(t) = D(t)\bar{x}^k(t) + B(t)\bar{u}^k(t),\ \bar{x}^k(t_0) = \bar{x}_0^k, \tag{23}$$

$$p^{k+1} = \pi_+(p^k + \alpha(A_0\bar{x}_0^k + A_1\bar{x}_1^k - a)), \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^k(t) + D^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t) = 0,\ \bar{\psi}_1^k = \nabla\varphi_1(\bar{x}_1^k) + A_1^{\mathrm{T}}\bar{p}^k, \tag{25}$$

$$x_0^{k+1} = x_0^k - \alpha(\nabla\varphi_0(\bar{x}_0^k) + A_0^{\mathrm{T}}\bar{p}^k + \bar{\psi}_0^k), \tag{26}$$

$$u^{k+1}(t) = \pi_U(u^k(t) - \alpha B^{\mathrm{T}}(t)\bar{\psi}^k(t)),\ k = 0, 1, 2, ... \tag{27}$$

16. Доказательство сходимости метода

Theorem (О сходимости метода)

1. ***Если*** *множество решений* $(p^*, \psi^*(\cdot); x_0^*, x_1^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ *задачи* (13)–(17) *не пусто и принадлежит пространству* $\mathrm{R}_+^m \times \Psi_2^n[t_0, t_1] \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{AC}^n[t_0, t_1] \times \mathrm{U}$, *функции* $\varphi_0(x_0)$, $\varphi_1(x_1)$ *дифференцируемы с градиентами, удовлетворяющими условию Липшица,*
2. *длина шага* α *удовлетворяет* $0 < \alpha < \min\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}, \frac{1}{\gamma_3}, \frac{1}{\gamma_4}\right)$,

то *последовательность* $\{(p^k, \psi^k(\cdot); x_0^k, x_1^k, x^k(\cdot), u^k(\cdot))\}$, *порожденная методом* (18)-(27), *сходится к решению задачи, в том числе: слабо – по управлениям, сильно – по фазовым и сопряженным траекториям, а также терминальным переменным. В частности, последовательность*

$$\left\{|p^k - p^*|^2 + |x_0^k - x_0^*|^2 + \|u^k(\cdot) - u^*(\cdot)\|^2\right\}$$

монотонно убывает на декартовом произведении

$$\mathrm{R}_+^m \times \mathrm{R}^n \times \mathrm{L}_2^r[t_0, t_1].$$

17. Литература.

- [1]. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал. 2011.
- [2]. *Антипин А.С., Васильев Ф.П., Хорошилова Е.В.* Экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления. *Вестн. Моск. ун-та.* Сер. 15. Вычисл. матем. и кибер. 2010. No.3. с.18–24.
- [3]. *Хорошилова Е.В.* Экстраградиентный метод в задаче оптимального управления с терминальными ограничениями. *Автоматика и телемеханика.* 2012. Вып. 3, С. 117–133.
- [4]. *Khoroshilova E.* Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function. *Optim. Lett.*, Vol. 7, No. 6, 2013. 1193–1214.
- [5]. *Антипин А.С., Хорошилова Е.В.* Оптимальное управление со связанными начальными и терминальными условиями. *Тр. Ин-та матем. и механ. УРО РАН*. 2014. Том 20. No.2.

Конец

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Е.В. Хорошилова
khorelena@gmail.com
МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, каф. общей математики