

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления
Лаборатория управления и навигации



Дипломная работа

**Детектирование сбоев спутниковых
навигационных измерений при наличии
информации от инерциальных датчиков**

Detection of outliers in satellite radionavigation measurements using inertial sensors

Работу выполнил

студент V курса

Клейменов В. А.

Научные руководители:

д.ф.-м.н. Голован А. А.

к.ф.-м.н. Козлов А. В.

Москва, 2014

Содержание

1 Введение	3
2 Схема навигационной системы	4
3 Основные уравнения	5
3.1 Математические модели	5
3.1.1 Датчик угловых скоростей	5
3.1.2 Спутниковые навигационные измерения	5
3.2 Формула Эйлера	6
3.3 Комментарии к полученным уравнениям	7
4 Метод, основанный на формуле Эйлера	8
4.1 Оценки ошибок в компонентах вектора скорости	8
4.2 Описание алгоритма	9
4.2.1 Способы распределения измерений по группам	9
4.2.2 Пример работы алгоритма	10
4.3 Результаты проверки алгоритма	10
4.3.1 Полный перебор комбинаций измерений	11
5 Метод, предполагающий наличие информации о матрице ориентации	13
5.1 Кинематическое уравнение для матрицы ориентации	13
5.2 Численное решение кинематического уравнения для матрицы ориентации	13
5.3 Алгоритм детектирования сбоев	15
5.4 Результаты	16
5.4.1 Результаты при отсутствии сбоев в измерениях опорного спутника	16
5.4.2 Результаты при наличии сбоев в измерениях опорного спутника	18
5.4.3 Исследование сингулярных чисел	20
6 Выводы	22
6.1 Выводы для метода, основанного на формуле Эйлера	22
6.2 Выводы для метода, предполагающего наличие информации о матрицы ориентации	22
7 Краткий обзор стандартных методов детектирования сбоев	23
Список литературы	25

1 Введение

Данная работа продолжает рассмотрение алгоритмов, позволяющих определять сбои в первичных спутниковых измерениях. Так же, как и в предшествующих работах, сбойным считается измерение с погрешностью больше, чем 3σ , где σ — характерное для конкретного типа измерений среднеквадратичное отклонение. Наличие даже одного сбоя при использовании стандартного метода задач спутниковой навигации — метода наименьших квадратов (МНК) — может привести к существенным ошибкам при вычислении координат или вектора скорости приемника.

В работе третьего курса была рассмотрена замена МНК — метод наименьших модулей (МНМ) в варианте алгоритма Вейсфельда [5, главы 4.2-4.5], менее подверженный влиянию сбоев. Исследования метода показали, что МНМ, как правило, достаточно для детектирования 1–2 сбоев [3, пункты 5.2,6].

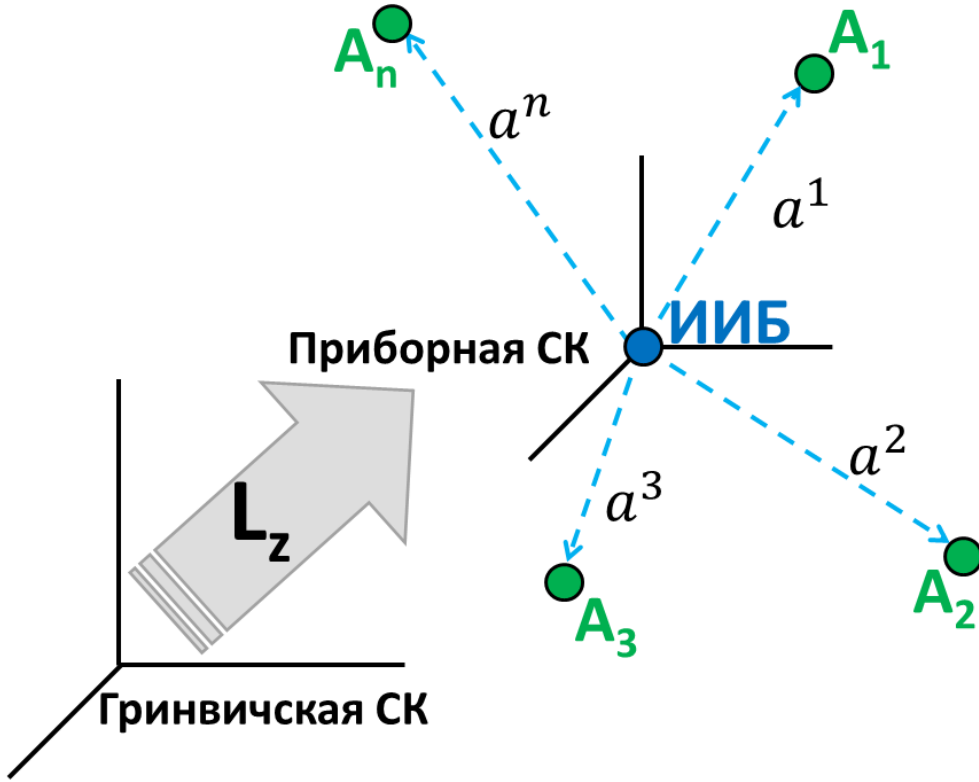
В работе четвертого курса был подробно рассмотрен важный частный случай базовой станции. Базовая станция — неподвижный приемник, координаты которого известны; базовые станции используются в дифференциальном режиме функционирования спутниковой навигационной системы для более точного определения координат и компонент вектора скорости других приемников в окрестностях базовых станций. Использование информации о неподвижности приемника позволяет детектировать любое количество сбоев [3, пункты 5,6], таким образом, при дифференциальном режиме исключается влияние сбойных измерений базовой станции на результат для подвижного приемника.

Дополнительно был реализован алгоритм, сводящий метод наименьших модулей к решению задачи линейного программирования симплекс-методом [4, пункт 3.1]. Сравнение двух методов не выявило более предпочтительный, однако известны примеры задач линейного программирования, которые приводят к долгому времени работы симплекс-метода, а алгоритм Вейсфельда не имеет подобных недостатков, поэтому эта реализация МНМ является рекомендуемой [4, пункт 3.3].

В настоящей работе вновь рассматривается общий случай: приемник не является базовой станцией. Для более качественного детектирования сбоев аналогично предыдущей работе используется дополнительная информация: данные от инерциального измерительного блока, а именно датчика угловых скоростей. Угловая скорость, определяемая ДУС, очевидным образом связана со скоростями точек твердого тела, которым является рассматриваемый объект с навигационной системой, состоящей из приемника и ИИБ (3.2). Именно из этого вытекает необходимость использования нескольких антенн у приемника.

В результате было предложено два метода, первый из которых годится для детектирования факта наличия сбоев в измерениях (см. 4), а второй (5) позволяет полноценно детектировать сбои, определяя конкретное измерение, содержащее его. Для работы второго метода дополнительно требуется информация о матрице ориентации в начальный момент времени. Оба предложенных алгоритма были реализованы на языке программирования *C* и проверены на модельных данных.

2 Схема навигационной системы



Рассматриваемая навигационная система состоит из инерциального измерительного блока (ИИБ) и нескольких антенн спутникового приемника ($A_1, A_2, \dots, A_n$). Все приборы жестко закреплены на корпусе объекта. В начало отсчета приборной системы координат помещен ИИБ, радиус-векторы a^i для всех антенн известны. Помимо приборной системы координат Oz будем использовать гринвичскую $O\eta$ и инерциальную $O\xi$. Матрицу ориентации приборного трехгранника относительно гринвичской системы координат будем обозначать L_z , опуская, но подразумевая наличие зависимости от времени. Поскольку L_z — ортогональная матрица, верны равенства $L_z^T = L_z^{-1}$ и $\|L_z\| = 1$. Нижними индексами z и η будем обозначать проекции векторов в системах координат Oz и $O\eta$ соответственно.

3 Основные уравнения

3.1 Математические модели

3.1.1 Датчик угловых скоростей

Модель измерений датчика угловых скоростей имеет вид

$$\omega'_z + \nu_z = \omega_z,$$

где:

- ω'_z — измерения ДУС,
- ν_z — инструментальная погрешность измерения,
- ω_z — реальная угловая скорость корпуса объекта относительно инерциальной системы координат в проекции на приборную.

Представим угловую скорость ω_z как сумму угловой скорости корпуса относительно гринвичской системы координат Ω_z и угловой скорости гринвичской системы координат относительно инерциальной u_z — то есть угловой скорости Земли. Вектор $\Omega_z + u_z$ будем записывать в гринвичской системе координат (то есть как $\Omega_\eta + u_\eta$), с учетом матрицы перехода к приборной системе координат получаем итоговое уравнение для модели:

$$\omega'_z + \nu_z = L_z(\Omega_\eta + u_\eta) \quad (1)$$

3.1.2 Спутниковые навигационные измерения

Задачи определения координат или вектора скорости антенны по спутниковым измерениям сводятся к решению переопределенных систем линейных уравнений [1, главы 4.2.9, 4.4.2, 4.5.1]

$$y = Hx + r, \quad (2)$$

где:

- y — вектор приведенных к определенному виду измерений размерности, равной числу видимых спутников n ,
- r — вектор случайных погрешностей той же размерности,
- x — искомый вектор размерности $m = 3$ или 4 (содержит координаты или проекции вектора скорости антенны в гринвичской системе координат, четвертая компонента — поправка, связанная с ошибкой часов приемника, при использовании первых разностей измерений не входит в x),
- H — известная матрица размера $n \times m$ ($n > m$).

Замечания.

1. Очевидно, что для решения задач определения координат или вектора скорости антенны требуется не менее 4 спутниковых измерений.

2. Для детектирования сбоев будут задействованы только алгоритмы для определения скорости антенны приемника, то есть в нашем случае $x := v$.
3. Поскольку антенны расположены на малых расстояниях друг от друга, матрицы H для разных антенн можно считать равными: в рассматриваемой задаче определения компонент вектора скорости H состоит из строк вида

$$\left(\frac{\eta_1^{rcv} - \eta_1^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, \frac{\eta_2^{rcv} - \eta_2^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, \frac{\eta_3^{rcv} - \eta_3^{sat_i}}{\rho^{(i)}}, 1 \right),$$

а при использовании первых разностей, соответственно, из первых трех компонент разностей таких строк для рассматриваемого и опорного спутника. Здесь η^{rcv} , η^{sat_i} — гринвичские координаты антенны и i -того спутника, $\rho^{(i)}$ — вычисленная дальность между антенной и i -тым спутником [1, глава 4.4.2]. Поскольку спутники системы GPS обращаются по орбитам с радиусом около 26 тысяч километров [1, глава 1.1.1], изменение η^{rcv} даже на несколько десятков метров изменит компоненту матрицы H на величину порядка 10^{-6} .

4. В дальнейшем для обозначения вектора измерений i -той антенны будет использоваться обозначение z^i , а для ее скорости — v^i .
5. Вектор v^i определяется в гринвичской системе координат.

С учетом замечаний и принятым в разделе 2 обозначениям для векторов уравнение (2) для i -той антенны принимает вид

$$y^i = H v_\eta^i + r^i. \quad (3)$$

3.2 Формула Эйлера

Поскольку все антенны и ИИБ жестко закреплены на корпусе, их можно рассматривать как точки A и B твердого тела, для которых будет справедлива формула Эйлера:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \quad (4)$$

Далее в работе будет использоваться матричная форма записи векторного произведения:

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \hat{\alpha} \beta = -\hat{\beta} \alpha.$$

Через $\hat{x}$ для любого трехмерного вектора x обозначается кососимметричная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Принимая во внимание, что векторы скорости, определяемые по спутниковым измерениям, заданы в гринвичской системе координат (см. 3.1.2), а радиус-векторы, соответствующие антеннам (см. 2) — в приборной, для антенн с номерами i и j получим:

$$v_\eta^i - v_\eta^j = \hat{\Omega}_\eta L_z^T (a_z^i - a_z^j). \quad (5)$$

3.3 Комментарии к полученным уравнениям

Итак, были получены следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\omega'_z + \nu_z &= L_z(\Omega_\eta + u_\eta); \\ y^i &= H v_\eta^i + r^i, \quad i \in N_{an}; \\ v_\eta^i - v_\eta^j &= \hat{\Omega}_\eta L_z^T(a_z^i - a_z^j), \quad i, j \in N_{an}.\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь введено обозначение N_{an} — множество номеров антенн. В этих уравнениях известными являются векторы измерений ИИБ ω'_z и антенн спутникового приемника $y^i, i \in N_{an}$, радиус-векторы антенн $a_z^i, i \in N_{an}$, угловая скорость Земли u и матрица H .

Из уравнений нельзя найти в общем виде решения для неизвестных векторов и матриц ($v_\eta^i, i \in N_{an}; L_z; \Omega_\eta$), в связи с чем далее будут предложены два реализуемых на практике метода детектирования сбоев, основанных на вышеприведенных уравнениях.

4 Метод, основанный на формуле Эйлера

Вернемся к рассмотрению уравнения Эйлера (4). Поскольку $\vec{\omega} \times \vec{AB} = \|\vec{\omega}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{AB})$, будет верным следующее неравенство:

$$\|\vec{v}_A - \vec{v}_B\|^2 \leq \|\vec{\omega}\|^2 \cdot \|\vec{AB}\|^2,$$

или, с использованием введенных обозначений:

$$\|v_\eta^i - v_\eta^j\|^2 \leq \|\Omega_\eta\|^2 \cdot \|L_z^T(a_z^i - a_z^j)\|^2. \quad (7)$$

А поскольку ортогональная матрица L_z^T не меняет норму вектора:

$$\|v_\eta^i - v_\eta^j\|^2 \leq \|\Omega_\eta\|^2 \cdot \|a_z^i - a_z^j\|^2.$$

Поскольку $\Omega_\eta = L_z^T(\omega'_z + \nu_z) - u_\eta$, то $\|\Omega_\eta\|^2 \leq \|\omega'_z\|^2 + \|\nu_z\|^2 + \|u_\eta\|^2$ и

$$\|v_\eta^i - v_\eta^j\|^2 \leq (\|\omega'_z\|^2 + \|\nu_z\|^2 + \|u_\eta\|^2) \cdot \|a_z^i - a_z^j\|^2. \quad (8)$$

Здесь под ν_z понимаем известный характерное для конкретного ДУСа среднеквадратичное отклонение оценки (рассматривался грубый ДУС с уровнем шумов 0,1 градус в секунду). Наконец, нужно учесть погрешности в компонентах векторов скоростей, найденных по спутниковым измерениям. Обозначим все эти погрешности как ε , а оценки компонент векторов скоростей по спутниковым измерениям — как соответствующие величины с волной, тогда для k -тых компонент будет верно следующее:

$$((v_\eta^i)_k - (v_\eta^j)_k)^2 \geq ((\tilde{v}_\eta^i)_k - (\tilde{v}_\eta^j)_k)^2 - 4|\varepsilon| \cdot |(\tilde{v}_\eta^i)_k - (\tilde{v}_\eta^j)_k| + 4\varepsilon^2.$$

Подставляем в (8) и получаем итоговую форму неравенства:

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\eta^i - \tilde{v}_\eta^j\|^2 &\leq (\|\omega'_z\|^2 + \|\nu_z\|^2 + \|u_\eta\|^2) \cdot \|a_z^i - a_z^j\|^2 + 4|\varepsilon| \cdot \sum_{k=1}^3 |(\tilde{v}_\eta^i)_k - (\tilde{v}_\eta^j)_k| - 12\varepsilon^2 \leq \\ &\leq (\|\omega'_z\|^2 + \|\nu_z\|^2 + \|u_\eta\|^2) \cdot \|a_z^i - a_z^j\|^2 + 4|\varepsilon| \cdot \sum_{k=1}^3 |(\tilde{v}_\eta^i)_k - (\tilde{v}_\eta^j)_k|. \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка полученных по спутниковым измерениям решений для векторов скорости v_η^i и v_η^j в неравенство (9) позволяет определить наличие сбоев в векторе измерений: в случае выполнения неравенства считаем, что сбой, влияющие на решение, отсутствуют. Однако такая проверка не укажет, какие именно измерения являются сбойными, и, таким образом, не позволит найти верное решение. С опорой на основную идею предыдущей курсовой работы [4] был предложен алгоритм, который гипотетически мог быть лишен данного недостатка, однако проверка показала, что он срабатывает слишком редко, чтобы быть рекомендованным к практическому применению.

4.1 Оценки ошибок в компонентах вектора скорости

Оптимальная оценка вектора v для переопределенной системы линейных уравнений $y = Hv + r$ (см. 3.1.2) при $M[r] = 0$, $M[rr^T] = R$ имеет вид

$$\tilde{v} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} y. \quad (10)$$

Подставив $y = Hv + r$, получим $\tilde{v} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} (Hv + r) = v + (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} r$. Тогда ковариационная матрица $P_{\Delta v} = M[(v - \tilde{v})(v - \tilde{v})^T]$ имеет вид

$$\begin{aligned} P_{\Delta v} &= M[(H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \cdot r r^T \cdot ((H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1})^T] = \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \cdot R \cdot ((H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1})^T = \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T \cdot ((H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1})^T = \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} \cdot H^T ((H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1})^T = \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1} \cdot ((H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} H)^T = \\ &= (H^T R^{-1} H)^{-1}. \end{aligned}$$

Решение такой системы по алгоритму Вейсфелда имеет вид $\tilde{v} = (H^T W H)^{-1} H^T W y$, значит, $P_{\Delta v} = (H^T W H)^{-1}$. На диагонали ковариационной матрицы стоят величины $M[(v_i - \tilde{v}_i)^2]$. И силу несмещенности оценки (10) получаем, что $M[(v_i - \tilde{v}_i)^2] = D[(v_i - \tilde{v}_i)]$. Таким образом, вместо ε в (9) можно использовать вычисленные оценки среднеквадратичных отклонений для каждой из компонент вектора скорости.

4.2 Описание алгоритма

В предыдущей курсовой работе рассматривался случай базовой станции и предлагался алгоритм, определяющий сбой по невязкам для нулевого вектора скорости. В данной работе рассматриваются невязки для полученного по всем измерениям для одной антенны решения. Если максимальная и минимальная невязка отличаются друг от друга больше, чем на 3σ , измерения разбиваются на две группы: с меньшими и большими невязками; для обозначения соответствующих групп для i -той антенны введем обозначения Y^i и $Y^{i'}$. Предполагалось, что сбойные и несбойные измерения при таком отборе могут оказаться в разных группах, а выбор нужной осуществим благодаря использованию (9).

При тестировании алгоритма рассматривалась система с двумя антеннами. Для нее составлялась таблица следующего вида:

$$\begin{array}{cc} Y^2 & Y^{2'} \\ Y^1 & \cdot \quad \cdot \\ Y^{1'} & \cdot \quad \cdot \end{array}$$

На месте точек стоят 1 в случае выполнения условия (9) при подстановке решений, получаемых с использованием только измерений групп из соответствующих строки и столбца, и 0 в противном случае. В идеальной ситуации в таблице будет только одна 1, соответствующая ей пара групп и будет являться несбойной.

4.2.1 Способы распределения измерений по группам

Было рассмотрено 3 способа распределения невязок (а следовательно, измерений) по группам:

1. Разделение относительно середины отрезка между наибольшей и наименьшей невязкой.
2. Разделение относительно 3σ , где σ — характерное среднеквадратичное отклонение для измерений.
3. Распределение по следующему алгоритму: на каждом шаге рассматриваются наибольшая и наименьшая из ранее не распределенных невязок, которые распределяются в ту группу, к предыдущим элементам которой они ближе.

4.2.2 Пример работы алгоритма

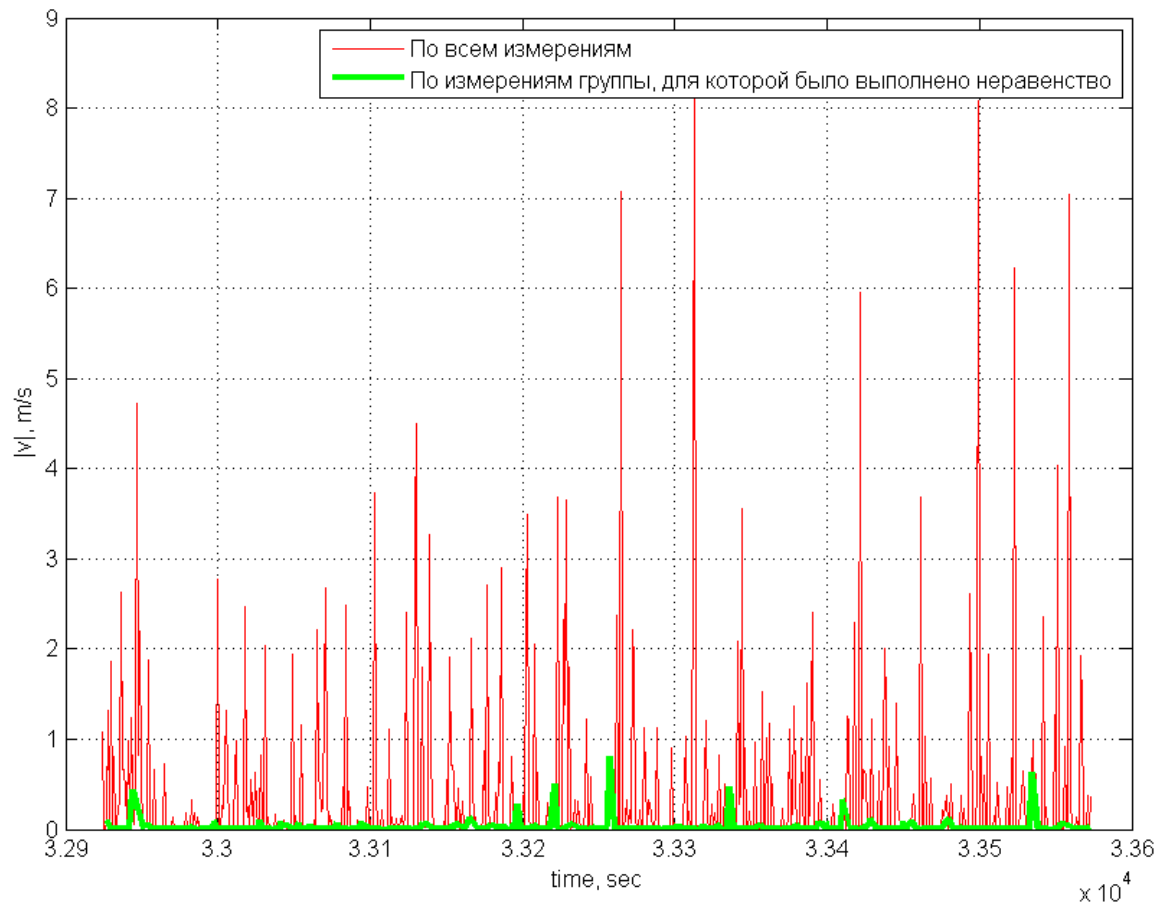
Проиллюстрируем алгоритм примером, для которого разбиение на группы позволило найти верное решение и определить сбойные измерения. В доплеровские измерения первой антенны рассматриваемой системы были внесены сбои, измерения второй антенны остались неизменными. Обе антенны покоились относительно гринвичской системы координат. Поскольку невязки для измерений второй антенны отличались друг от друга менее, чем на 3σ , на группы они не распределялись. В таблице ниже представлены невязки и решения для соответствующих групп измерений первой антенны, а также результаты проверки условия (9):

	$Y^1 \cup Y^{1'}$	Y^1	$Y^{1'}$
невязки (модули)	+2149.11149		+0.00000
	+2043.61093		+0.00000
	+ 245.29835	+0.00000	
	+1223.45938		+0.00000
	+0.00000	+0.00000	
	+1868.37974		+0.00000
	+89.45873	+0.00000	
	+0.00000	+114.03251	
	+57.86982	+0.13814	
	+0.00000	+190.30327	
	+0.00000	+0.00000	
скорость, м/с	+100.39077	+0.02995	+7013.76603
	−32.82122	−0.09068	+39112.94074
	+124.56700	+0.11414	+75002.02440
результат проверки условия (9)	0	1	0

По невязкам группы Y^1 видно, что в нее попали сбойные измерения, которые благодаря методу наименьших модулей не внесли сбоев в итоговое решение, и именно для этого решения было выполнено неравенство (9). В результате работы алгоритма однозначно несбойными будут считаться только те измерения, невязки для которых выделены полужирным шрифтом. Остальные измерения группы Y^1 будут считаться сбойными в силу того, что для оценки $\tilde{v}_{Y^1}$, считающейся правильной, им соответствуют невязки, превышающие 3σ ; измерения группы $Y^{1'}$ — в силу того, что дают нулевые невязки (с точностью до вычислительной погрешности) для оценки $\tilde{v}_{Y^{1'}}$, считающейся ошибочной.

4.3 Результаты проверки алгоритма

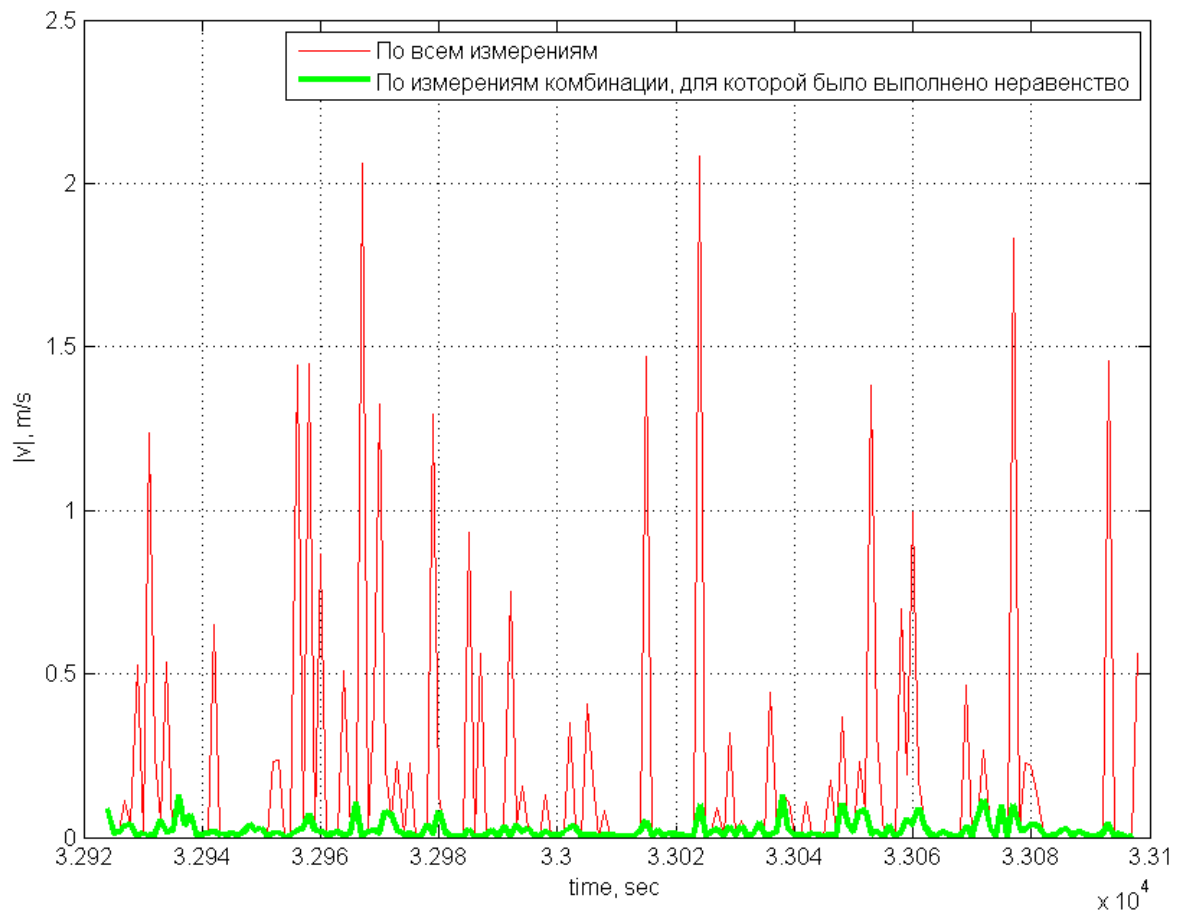
Результаты показали, что неравенство действительно можно применять для определения факта наличия в спутниковых измерениях сбоев, но разбиение на группы срабатывает далеко не всегда. Ниже представлен график для реальных измерений одной из антенн системы, по горизонтальной оси на котором отложены моменты времени, а по вертикальной — модули вектора скорости в соответствующие моменты. Красная линия соответствует не проведенным через алгоритм измерениям, а зеленая — тем группам измерений, для которых оказалось выполнено неравенство (9):



Измерения регистрировались в течение 650 последовательных моментов времени, из них алгоритм сработал в 270 случаев (41, 5%).

4.3.1 Полный перебор комбинаций измерений

Аналогичное исследование было проведено для полного перебора всевозможных комбинаций измерений. Каждая комбинация является сочетанием 4 измерений — минимально необходимого количества для решения задач спутниковой навигации. Все пары комбинаций проходили проверку на неравенстве (9). Преимуществом относительно изначального варианта алгоритма является то, что решение, удовлетворяющее неравенству, находилось всегда, недостатком — долгое время работы ввиду рассмотрения большого количества пар (для двух антенн, регистрирующих измерения от 11 спутников, например, число различных пар составляет $C_{11}^4 \cdot C_{11}^4 = 108900$), что делает этот вариант пригодным только для постобработки данных. График, аналогичный предыдущему, но построенный для меньшего числа моментов времени, представлен ниже:



5 Метод, предполагающий наличие информации о матрице ориентации

5.1 Кинематическое уравнение для матрицы ориентации

Согласно [2, формула 2.18] матрица ориентации C трехгранника Os относительно трехгранника Op удовлетворяет следующему кинематическому уравнению:

$$\dot{C} = \hat{\omega}_s C - C \hat{\omega}_p, \quad (11)$$

где ω_s и ω_p — векторы абсолютной угловой скорости соответствующих трехгранников относительно инерциальной системы координат $O\xi$.

Рассматриваемая в задаче матрица ориентации L_z связывает приборный трехгранник Oz и гринвичский $O\eta$, абсолютная угловая скорость $O\eta$ относительно $O\xi$ есть угловая скорость Земли u_η . В результате для L_z уравнение (11) запишется следующим образом:

$$\dot{L}_z = \hat{\omega}_z L_z - L_z \hat{u}_\eta. \quad (12)$$

Будем считать известной матрицу L_z в начальный момент времени (момент первой регистрации измерений датчиком угловых скоростей). Решение уравнения (12) при ω_z , не зависящем от t , с начальным условием L_0 имеет вид

$$L_z(t) = e^{\hat{\omega}_z t} L_0 (e^{-(\hat{u}_\eta)^T t})^T = e^{\hat{\omega}_z t} L_0 (e^{\hat{u}_\eta t})^T. \quad (13)$$

Здесь была учтена кососимметричность матрицы $\hat{u}_\eta$.

5.2 Численное решение кинематического уравнения для матрицы ориентации

В момент k -той регистрации измерений датчиком угловых скоростей t_k матрицу L_z будем обозначать L_k . В предположении $\omega_z(t) = \text{const}$ на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ из решения (13) с начальным условием L_j получаем:

$$L_{j+1} = e^{\hat{\omega}_z \tau} L_j (e^{\hat{u}_\eta \tau})^T, \quad (14)$$

где $\tau = t_{j+1} - t_j$, а ω_z берем как среднее двух измерений:

$$\omega_z = \frac{\omega_z(t_j) + \omega_z(t_{j+1})}{2}.$$

Разложим матричную экспоненту вида $e^{\hat{\omega}\tau}$ в степенной ряд:

$$e^{\hat{\omega}\tau} = E + \hat{\omega}\tau + \frac{\hat{\omega}^2 \tau^2}{2} + \frac{\hat{\omega}^3 \tau^3}{3!} + \frac{\hat{\omega}^4 \tau^4}{4!} + \dots \quad (15)$$

Возведем матрицу $\hat{\omega}$ во вторую и третью степени:

$$\hat{\omega}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_2^2 - \omega_3^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_3 \omega_1 \\ \omega_1 \omega_2 & -\omega_3^2 - \omega_1^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_3 \omega_1 & \omega_2 \omega_3 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\omega}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega_2^2 - \omega_3^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_3 \omega_1 \\ \omega_1 \omega_2 & -\omega_3^2 - \omega_1^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_3 \omega_1 & \omega_2 \omega_3 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 \end{pmatrix} = -\|\omega\|^2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для матрицы $\hat{\omega}$ верно следующее:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}^{2n} &= (-1)^{n-1} \|\omega\|^{2(n-1)} \hat{\omega}^2, \\ \hat{\omega}^{2n+1} &= (-1)^n \|\omega\|^{2n} \hat{\omega},\end{aligned}\tag{16}$$

где $n \in \mathbb{N}$. Для удобства введем обозначение $W = \|\omega\|$.

С учетом формул (16) ряд (15) преобразуется к виду

$$e^{\hat{\omega}\tau} = E + \hat{\omega}\tau + \frac{\hat{\omega}^2\tau^2}{2} - \frac{W^2\hat{\omega}\tau^3}{3!} - \frac{W^2\hat{\omega}^2\tau^4}{4!} + \dots$$

Группируя коэффициенты, стоящие перед матрицами $\hat{\omega}$ и $\hat{\omega}^2$, получаем следующее:

$$e^{\hat{\omega}\tau} = E + \left(\tau - \frac{W^2\tau^3}{3!} + \dots\right)\hat{\omega} + \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{W^2\tau^4}{4!} + \dots\right)\hat{\omega}^2.\tag{17}$$

Выражения, стоящие в скобках в (17) — разложения в ряд функций $\frac{\sin(W\tau)}{W}$ и $\frac{1 - \cos(W\tau)}{W^2}$ соответственно. В результате получаем следующее тождество для $e^{\hat{\omega}\tau}$:

$$e^{\hat{\omega}\tau} = E + \frac{\sin(W\tau)}{W}\hat{\omega} + \frac{1 - \cos(W\tau)}{W^2}\hat{\omega}^2.\tag{18}$$

Для $\omega = \omega_z = \frac{\omega_z(t_j) + \omega_z(t_{j+1})}{2}$ при приближении второго порядка по углу поворота за $[t_j, t_{j+1}]$ получим:

$$e^{\hat{\omega}_z\tau} = E + \frac{\sin(W\tau)}{W} \frac{\hat{\omega}_z(t_j) + \hat{\omega}_z(t_{j+1})}{2} + \frac{1 - \cos(W\tau)}{W^2} \hat{\omega}_z(t_j) \hat{\omega}_z(t_{j+1}).\tag{19}$$

Перед тем, как записать $e^{\hat{u}_\eta\tau}$, вспомним, что угловая скорость Земли в проекциях на гринвичскую систему координат записывается следующим образом:

$$u_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицы $\hat{u}_\eta$ и $\hat{u}_\eta^2$ будут равны

$$\hat{u}_\eta = u \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{u}_\eta^2 = u^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{20}$$

Подставляя (20) в (18) и учитывая, что $\|u_\eta\| = u$, находим $e^{\hat{u}_\eta\tau}$:

$$e^{\hat{u}_\eta\tau} = \begin{pmatrix} \cos(u\tau) & \sin(u\tau) & 0 \\ -\sin(u\tau) & \cos(u\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{21}$$

Подставляя (19) и (21) в (14), получаем итоговое численное решение для L_{j+1} при известном численном решении $\tilde{L}_j$ для матрицы L_j :

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{j+1} &= \\ &= \left[E + \frac{\sin(W\tau)}{W} \frac{\hat{\omega}_z(t_j) + \hat{\omega}_z(t_{j+1})}{2} + \frac{1 - \cos(W\tau)}{W^2} \hat{\omega}_z(t_j) \hat{\omega}_z(t_{j+1}) \right] \tilde{L}_j \begin{pmatrix} \cos(u\tau) & \sin(u\tau) & 0 \\ -\sin(u\tau) & \cos(u\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{22}$$

где $\tau = t_{j+1} - t_j$, $W = \left\| \frac{\omega_z(t_j) + \omega_z(t_{j+1})}{2} \right\|$.

Таким образом, при известной L_0 можно вычислить $\tilde{L}_j$ для любого момента регистрации измерений антеннами спутникового приемника.

5.3 Алгоритм детектирования сбоев

Вернемся к рассмотрению системы уравнений (6):

$$\begin{cases} \omega'_z + \nu_z = L_z(\Omega_\eta + u_\eta); \\ y^i = H v_\eta^i + r^i, \quad i \in N_{an}; \\ v_\eta^i - v_\eta^j = \hat{\Omega}_\eta L_z^T (a_z^i - a_z^j), \quad i, j \in N_{an}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы домножим на $L_z^T = L_z^{-1}$, а последнее — на H :

$$\begin{cases} L_z^T \omega'_z + L_z^T \nu_z = \Omega_\eta + u_\eta; \\ y^i = H v_\eta^i + r^i, \quad i \in N_{an}; \\ H(v_\eta^i - v_\eta^j) = H \hat{\Omega}_\eta L_z^T (a_z^i - a_z^j), \quad i, j \in N_{an}. \end{cases}$$

Подставим выражения для v_η^i и v_η^j из второго уравнения в последнее и введем новые обозначения: $R_\eta = L_z^T \nu_z$, $r^{ij} = r^i - r^j$, $a_z^{ij} = a_z^i - a_z^j$. В результате система примет вид

$$\begin{cases} y^i - y^j = H \hat{\Omega}_\eta L_z^T a_z^{ij} + r^{ij}, \quad i, j \in N_{an}; \\ L_z^T \omega'_\eta - u_\eta = \Omega_\eta + R_\eta. \end{cases} \quad (23)$$

Это переопределенная система линейных уравнений, в которой неизвестными являются компоненты вектора Ω_η . Система очевидно является наблюдаемой, что следует из нижнего векторного уравнения. Наконец, воспользуемся равенством $\hat{\alpha}\beta = -\hat{\beta}\alpha$ и выделим в явном виде искомый вектор в рассматриваемой системе:

$$\begin{pmatrix} y^i - y^j \\ L_z^T \omega'_\eta - u_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H(\widehat{L_z^T a_z^{ij}}) \\ E \end{pmatrix} \Omega_\eta + \begin{pmatrix} r^{ij} \\ R_\eta \end{pmatrix}, \quad i, j \in N_{an}. \quad (24)$$

В этой системе уравнений часть, соответствующая измерениям ДУСа предполагается свободной от сбоев. Этот факт учитывается при решении благодаря изменению в алгоритме Вейсфеля. Сначала вспомним алгоритм в стандартном виде.

Алгоритм Вейсфеля предполагает сведение метода наименьших модулей при решении переопределенной системы уравнений вида $p = Bx + q$ к обобщенному методу наименьших квадратов:

$$\tilde{x} = (B^T W B)^{-1} B^T B p.$$

Минимизация суммы модулей компонент вектора невязки осуществляется за счет внесения изменений в весовую матрицу W . При первой итерации матрица W считается единичной, в дальнейшем диагональные компоненты W_{ii} задаются в зависимости от соответствующего модуля компоненты вектора невязки $|\Psi_i| = |p_i - \sum_{j=1}^m B_{ij} x_j|$ согласно следующему правилу:

$$W_{ii} = \begin{cases} \frac{1}{2|\Psi_i|}, & \text{если } |\Psi_i| > \alpha; \\ \frac{1}{2\alpha}, & \text{если } |\Psi_i| \leq \alpha; \end{cases}$$

где α — некоторое заранее заданное малое положительное число.

Итерационный процесс оканчивается при достижении двух следующих условий одновременно:

1. число измерений с весами, равными $\frac{1}{2\alpha}$ не меньше, чем размерность искомого вектора x ;
2. $\left| \sum_{i=0}^n |\Psi_i^{(k)}| - \sum_{i=0}^n |\Psi_i^{(k-1)}| \right| < \alpha$, где k — номер текущей итерации.

В рассматриваемой системе (24) последние три компоненты вектора $p = \begin{pmatrix} y^i - y^j \\ L_z^T \omega'_z - u_\eta \end{pmatrix}$, как было упомянуто выше, считаются свободными от сбоев, и соответствующие им W_{ii} принимаем тождественно равными $\frac{1}{2\alpha}$. Тогда наибольшие W_{ii} и, соответственно, наименьшие по модулю компоненты вектора невязки будут соответствовать тем измерениям вектора $(y^i - y^j)$, которые дают оценку $\tilde{\Omega}_\eta$, наиболее близкую к той, которая была бы получена при использовании только $(L_z^T \omega'_z - u_\eta)$ (такую оценку в силу отсутствия сбоев в компонентах этого вектора мы считаем правильной).

k -тая компонента вектора разности спутниковых измерений $(y^i - y^j)$ считается содержащей сбой, если модуль соответствующей компоненты вектора невязки $|\Psi_k| > 3\sigma$, где σ — характерный для соответствующих измерений уровень шумов. Очевидно, что двух антенн недостаточно для того, чтобы определить, в каком именно векторе, y^1 или y^2 , содержится сбой.

5.4 Результаты

Для проверки алгоритма использовались реальные измерения двух неподвижных антенн, сбои были добавлены дополнительно. Вектор ω'_z симулировался с частотой 100 Гц по известному вектору $u_\eta + \Omega_\eta$ и численному значению матрицы ориентации $\tilde{L}$ с уровнем шума, характерным для грубых ИНС (0,1 градуса в секунду).

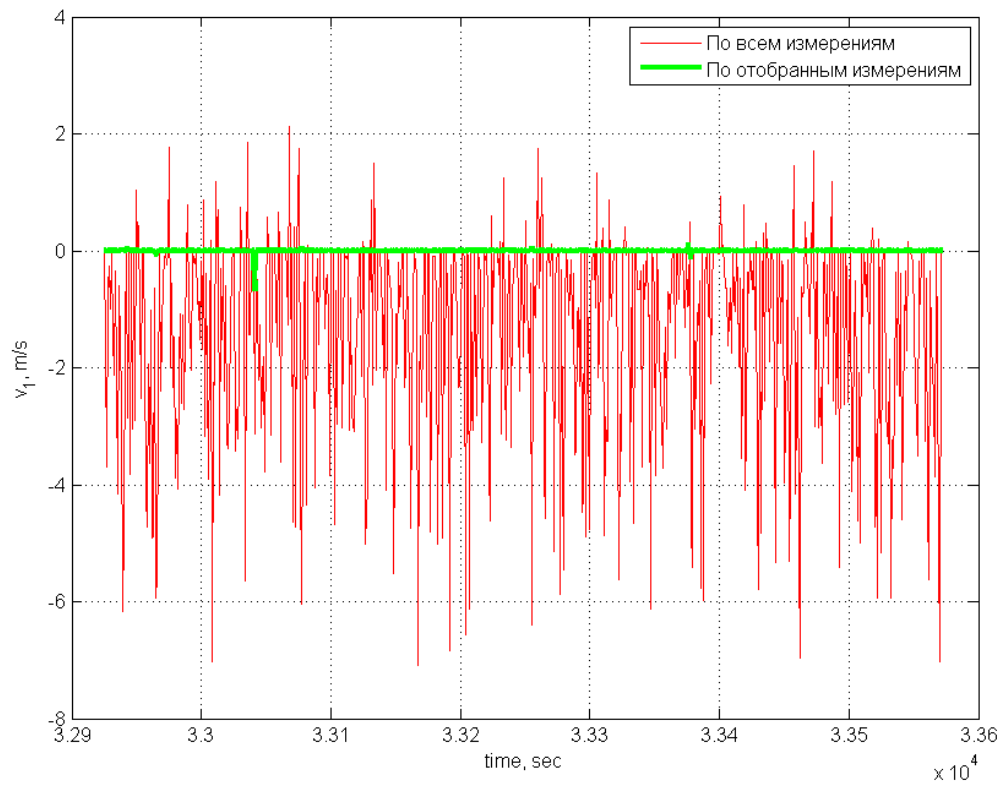
5.4.1 Результаты при отсутствии сбоев в измерениях опорного спутника

На первом этапе проверки работоспособности алгоритма оценивалось, насколько точно он определяет сбои в векторе $y^1 - y^2$ для фазовых измерений. Для этого в измерения первой антенны, не соответствующие опорному спутнику (сбои в нем оказались бы внесены во все компоненты вектора) вносились случайные сбои, но не более, чем в 4 измерения. Затем решалась система (24) и находились невязки, по которым определялись сбои.

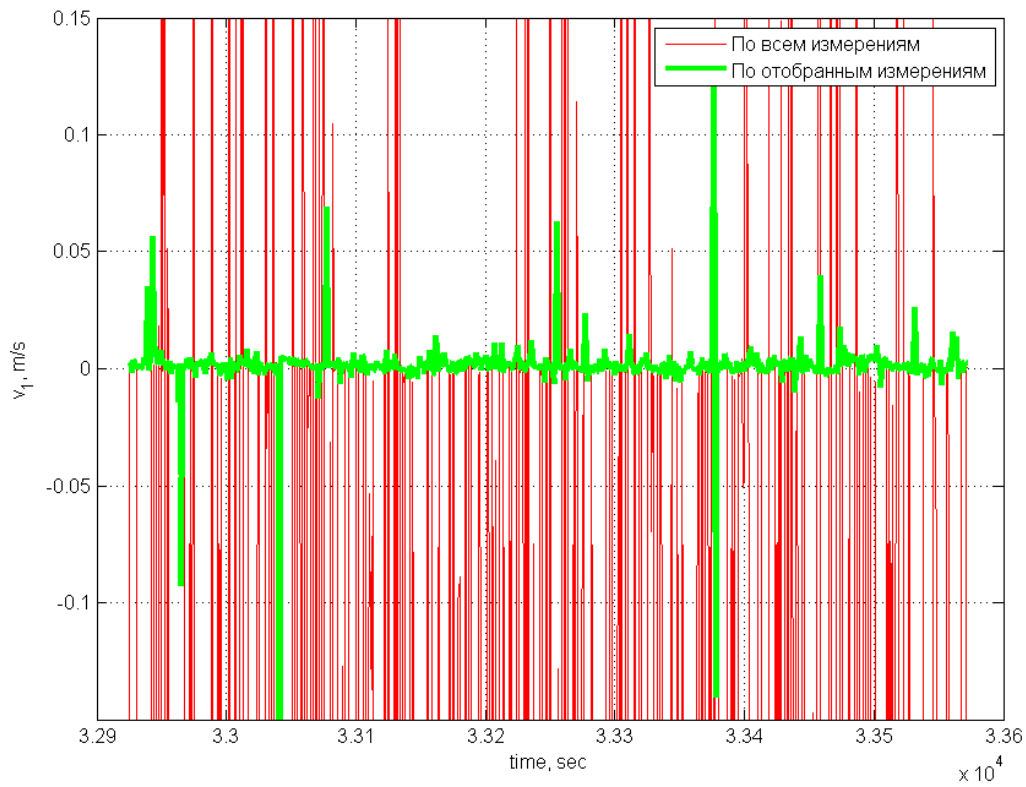
Тест был проведен для 3500 моментов времени и показал следующее:

- алгоритм определил свыше 99,7% сбоев;
- в один момент времени алгоритм упустил не более, чем 1 сбой.

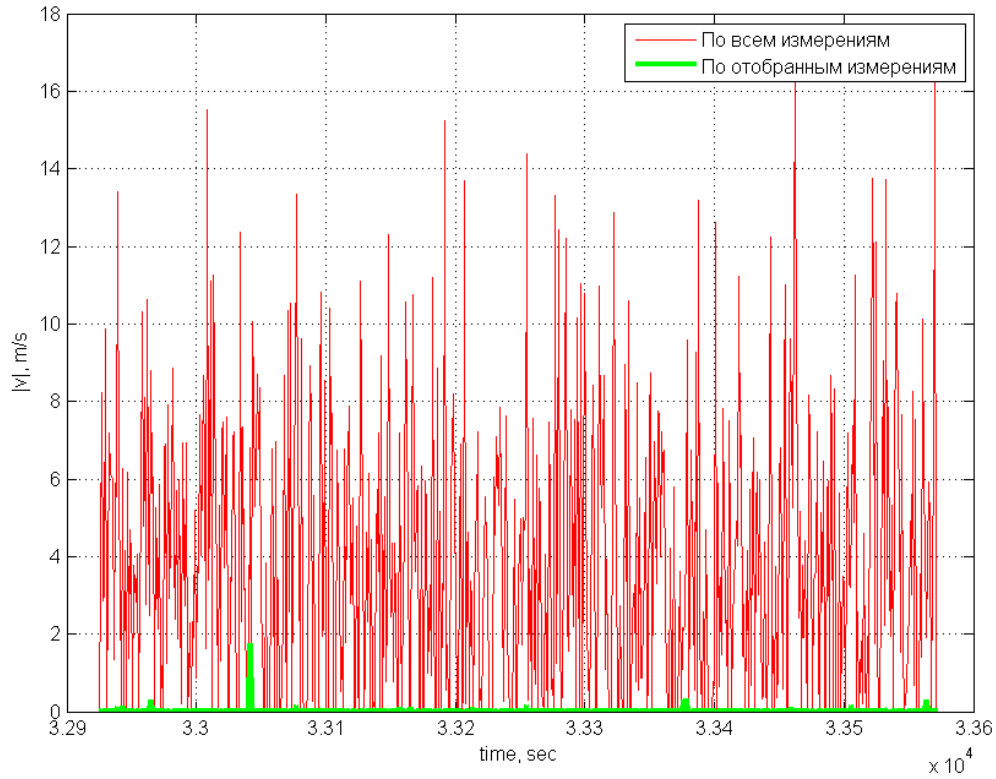
Затем было проведено сравнение двух решений: по всем измерениям и только по тем, в которых не были найдены сбои. На графике ниже представлена одна компонента скорости первой антенны, определенная по фазовым измерениям (вертикальная ось; по горизонтальной оси отложено время). Зеленым цветом построено решение по всем измерениям, красным — только по тем, которые алгоритм считал несбойными:



Те же графики, увеличенные:



Наконец, модуль скорости для тех же решений:



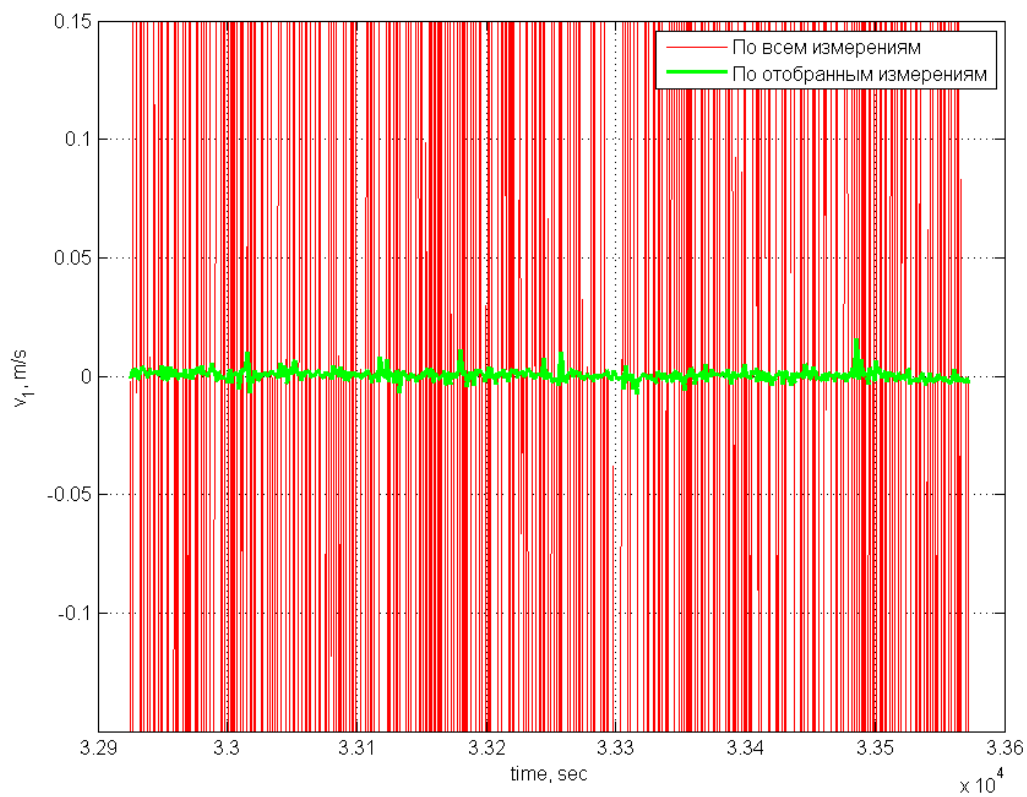
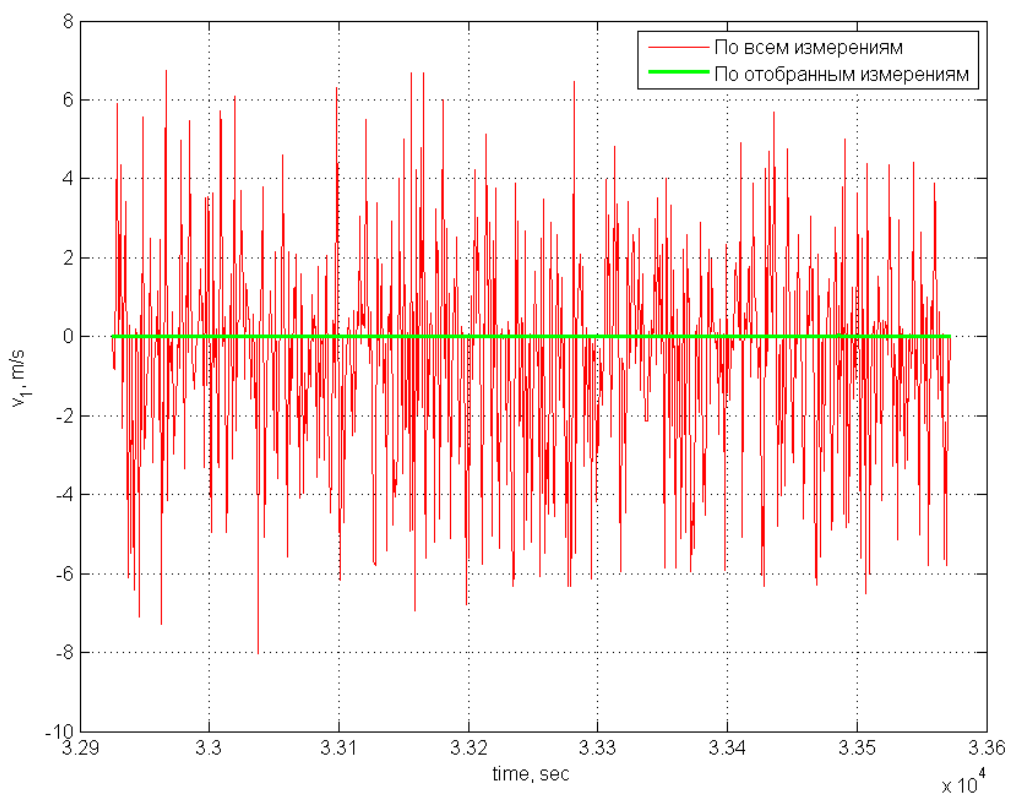
5.4.2 Результаты при наличии сбоев в измерениях опорного спутника

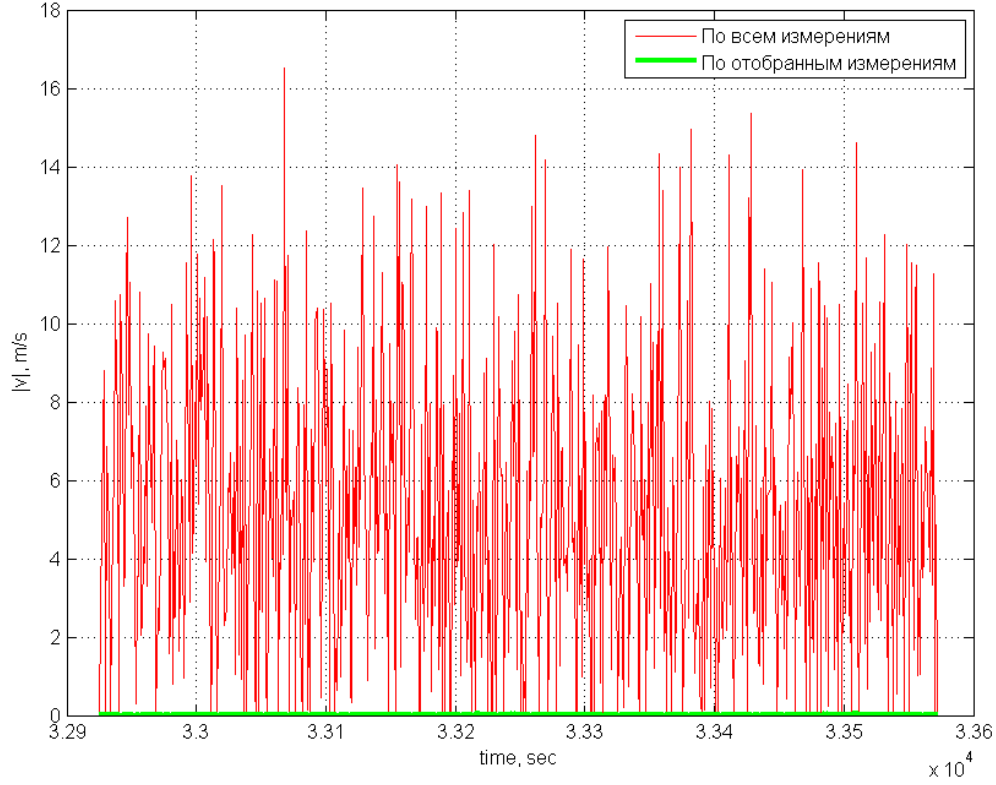
Для общего случая, когда измерение опорного спутника может содержать сбой, алгоритм, описанный в 5.3 был дополнен следующим образом: после отбора измерений по невязкам полученного решения $\tilde{\Omega}_\eta$ системы (24) и нахождения вектора скорости по тем из них, которые были сочтены несбойными, полученная пара решений для двух антенн проходила проверку на следующем неравенстве:

$$\|\vec{v}_A - \vec{v}_B\|^2 \leq \|\hat{\tilde{\Omega}}_\eta \tilde{L}_z^T (a_z^i - a_z^j)\|^2 + 4|\varepsilon| \cdot \sum_{k=1}^3 |(\tilde{v}_\eta^i)_k - (\tilde{v}_\eta^j)_k|$$

Это неравенство аналогично неравенству (9), но использует оценку матрицы ориентации $\tilde{L}_z$ и решение $\tilde{\Omega}_\eta$, найденное при работе алгоритма из 5.3, точность которому гарантируют изменения в весовой матрице W . В случае его невыполнения делалось предположение, что сбой содержался в измерении опорного спутника, и алгоритм 5.3 с последующей проверкой осуществлялся еще раз, но для другого опорного спутника (измерения от прошлого более не рассматривались).

Ниже представлены графики для этого случая, полностью аналогичные предыдущим трем. Отметим, что решение, полученное модифицированным алгоритмом, менее шумное, нежели предыдущее. Это позволяет сделать вывод о том, что в исходных данных содержались небольшие сбои в измерениях опорного спутника.





5.4.3 Исследование сингулярных чисел

Вставить ссылку на книгу с теорией

Также были вычислены сингулярные числа матрицы $\begin{pmatrix} -H(\widehat{L_z^T a_z^{ij}}) \\ E \end{pmatrix}$, служащие количественной мерой оцениваемости вектора Ω_η .

Вновь рассмотрим переопределенную систему линейных уравнений в общем виде: $p = Bx + q$. Любая вещественная матрица $B(m \times n)$ ранга k представима в виде сингулярного разложения

$$B = USV^T.$$

Здесь $U(m \times m)$, $V(n \times n)$ — ортогональные матрицы, а элементы матрицы $S(m \times n)$ равны:

$$(S)_{ij} = \begin{cases} s_i, & \text{если } i = j < k; \\ 0 & \text{в иных случаях;} \end{cases}$$

где $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k \geq 0$. Величины s_i называются сингулярными числами.

Матрица $\begin{pmatrix} -H(\widehat{L_z^T a_z^{ij}}) \\ E \end{pmatrix}$ имеет максимальный ранг, равный 3, поскольку ее нижний блок — единичная матрица $E(3 \times 3)$. Далее будем рассматривать случай матрицы максимального ранга $k = n$, тогда соответствующую ей матрицу S можно представить в блочном виде

$$S = \begin{pmatrix} S_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_n = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Сделав ортогональные замены координат

$$f = V^T x, g = \begin{pmatrix} g_I(n \times 1) \\ g_{II}(m - n \times 1) \end{pmatrix} = U^T p,$$

получим новую систему уравнений $g_I = S_n f + q'$. Ошибка оценки компоненты f_j вектора f , порожденная погрешностью в измерениях g_I , усиливается с коэффициентом усиления $1/s_j$, поэтому при малых сингулярных числах оценка вектора x может оказаться нецелесообразной.

Для рассмотренного случая все сингулярные числа матрицы $\begin{pmatrix} -H(\widehat{L_z^T a_z^{ij}}) \\ E \end{pmatrix}$ оказались не меньше 1.

6 Выводы

В работе было предложено и протестировано на модельных данных два метода, подведем итоги по каждому из них отдельно.

6.1 Выводы для метода, основанного на формуле Эйлера

Первый из предложенных методов можно применять для определения наличия сбоев в векторе измерений. При этом идея с разбиением измерений на группы по невязкам себя не оправдала: этот алгоритм дает верное решение менее, чем в половине случаев (см. 4.3).

Полный перебор всевозможных комбинаций из 4 измерений с последующей проверкой на неравенстве (9) был проведен прежде всего в исследовательских целях, поскольку не годится для обработки данных в реальном времени ввиду долгого времени работы (см. 4.3.1). Тем не менее, благодаря ему можно находить решения, не подверженное сбоям.

6.2 Выводы для метода, предполагающего наличие информации о матрицы ориентации

Если матрица ориентации L_z известна в начальный момент времени, то в дальнейшем по измерениям ДУСа ее можно пересчитывать для любого момента регистрации измерений ДУСом по формуле (22) и система (24) может быть решена для любого момента регистрации измерений антеннами спутникового приемника. Однако стоит помнить, что с каждым пересчетом точность оценки $\tilde{L}_z$ убывает, и вполне возможна ситуация, в которой алгоритм перестанет верно детектировать сбои. Предположение об отсутствии сбоев в измерениях ДУСа учитывается благодаря изменению в правиле формирования весовой матрицы для алгоритма Вейсфелда (см. 5.3).

Метод тестировался на реальных фазовых измерениях с моделированными сбоями. Первая серия тестов показала высокую эффективность предложенного алгоритма в случае отсутствия сбоев в измерениях опорного спутника: алгоритм определил свыше 99,7% сбоев, а в один момент времени упустил не более, чем 1 сбой (см. 5.4.1).

Затем было проведено тестирование алгоритма при возможности наличия сбоев в измерениях для опорного спутника. Поскольку измерения опорного спутника учитываются при формировании вектора z (см. 3.1.2) во всех его компонентах, без дополнительных алгоритмов метод не смог бы верно определить сбои. Такой алгоритм был предложен на основе формулы Эйлера по аналогии с первым методом (см. 5.4.2). Проверку на модельных данных модифицированный метод прошел успешно.

Наконец, были вычислены сингулярные числа матрицы $\begin{pmatrix} -H(\widehat{L_z^T a_z^{ij}}) \\ E \end{pmatrix}$ системы (24), служащие количественной мерой оцениваемости для вектора Ω_η . Сингулярных чисел, меньших 1, матрица не имеет, поэтому в получаемой оценке $\tilde{\Omega}_\eta$ ошибки вектора $\begin{pmatrix} z_\eta^i - z_\eta^j \\ L_z^T \omega'_z - u_\eta \end{pmatrix}$, составленного из измерений, не усиливаются.

7 Краткий обзор стандартных методов детектирования сбоев

В дополнение к вышеизложенной работе были изучены три стандартных статистических метода детектирования сбоев: критерий Граббса [6], критерий Диксона [7] и С-критерий Кохрана [8]. Данные методы неприменимы в целях детектирования сбоев в спутниковых измерениях, поскольку рассчитаны на данные, распределенные одинаково. Это подтвердила проверка критерия Граббса на примере из раздела 4.2.2: ни в векторе измерений, ни в векторе невязок сбой методом обнаружены не были.

В продолжение исследования была изучена статья [9], посвященная сравнению различных методов детектирования сбоев в спутниковых измерениях. В смоделированные псевдодалности вносились 0, 1 или 2 сбоя двух категорий: от 3σ до 6σ и от 6σ до 9σ , при этом не менее 5 измерений оставались несбойными [9, разделы 5.2, 5.3].

В статье были рассмотрены следующие методы детектирования сбоев:

- «The Danish Method» — алгоритм, изменяющий итерационно диагональные элементы весовой матрицы [9, раздел 4.1];
- метод наименьших модулей [9, раздел 4.2];
- метод наименьшей медианы квадратов, при котором минимизируется медиана набора квадратов взвешенных невязок [9, раздел 4.3];
- метод наименьших усеченных квадратов, при котором минимизируется сумма заранее определенного числа квадратов наименьших взвешенных невязок [9, раздел 4.4];
- «R-estimators», при котором минимизируется сумма взвешенных невязок, домноженных на функцию номера невязки по возрастанию [9, раздел 4.5];
- «M-», «S-» и «MM-Estimators», «Generalised M-Estimators» и «IGGIII», при которых минимизируется сумма функций невязок [9, разделы 4.6-4.10].

Также был рассмотрен критерий, аналогичный трем перечисленным в первом абзаце раздела, но адаптированный к невязкам оценки переопределенной системы линейных уравнений вида $z = Hx + r$ [9, раздел 3]. Для этой системы:

- $\Phi = H\tilde{x} - z$ — вектор невязок,
- P — весовая матрица (рассматривалась матрица, составленная по углам возвышения соответствующих спутников),
- $\Sigma = \sigma_0^2 P^{-1}$ — ковариационная матрица.

Затем рассматривались величины

$$w_i = \frac{|h_i P \Phi|}{\sigma_0 \sqrt{h_i^T P Q_\Phi P h_i}}, \quad (25)$$

где

- $h_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ — вектор с 1 на i -том месте той же размерности, что и z ,
- $Q_\Phi = P^{-1} - H(H^T P H)^{-1} H^T$.

Измерение с наибольшей w_i , превышающей заранее заданной пороговое значение (авторами было выбрано значение 3 [9, раздел 5.3]), считалось сбойным.

Этот метод показал наилучшие результаты при наличии 1 сбоя, но показал средние результаты при 2 сбоях. Метод наименьших модулей был признан авторами одним из самых эффективных [9, разделы 6,7] наряду с рассмотренным выше, а также методами «R-estimators» и «MM-estimators».

Список литературы

- [1] Вавилова Н. Б., Голован А. А., Парусников Н. А., Трубников С. А. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. М.: Издательство МГУ, 2010.
- [2] Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. — 2-е издание, исправленное и дополненное. Москва, Издательство Московского университета, 2009
- [3] Клейменов В. А. Детектирование сбоев первичных навигационных спутниковых измерений. Курсовая работа. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011–2012. Научные руководители: Козлов А. В., Голован А. А.
- [4] Клейменов В. А. Детектирование сбоев первичных навигационных спутниковых измерений базовой станции. Курсовая работа. Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2012–2013. Научные руководители: Козлов А. В., Голован А. А.
- [5] Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений: квазиподробные оценки. Москва, издательство „Радио и связь“, 1983.
- [6] Grubbs' test for outliers, <http://en.wikipedia.org/>. Версия страницы от 6 февраля 2014.
- [7] Dixon's Q test, <http://en.wikipedia.org/>. Версия страницы от 21 февраля 2014.
- [8] Cochran's C test, <http://en.wikipedia.org/>. Версия страницы от 22 марта 2013.
- [9] Nathan L. Knight, Jinling Wang. A Comparison of Outlier Detection Procedures and Robust Estimation Methods in GPS Positioning. The University of New South Wales, 2009.
- [10] Werner Gurtner, Lou Estey. RINEX (The Receiver Independent Exchange Format), ver. 2.11, 2007. Перевод на русский язык: Чукин В. В., Кононова Е. А., Российский государственный гидрометеорологический университет, 2008