УДК 517.956.32

И.С. Ломов[1]

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ*

В работе приведен новый метод построения быстро сходящегося ряда, представляющего обобщенное решение смешанной задачи для телеграфного уравнения, рассматриваемого в полуполосе. Рассмотрен случай существенно несамосопряженного оператора по пространственной переменной. Для построения решения применен аксиоматический метод А.П. Хромова, основанный на активном привлечении для работы расходящихся рядов. Использованы идеи Л. Эйлера по назначению суммы расходящемуся ряду. Для рассмотренной задачи в общем случае не применим метод разделения переменных, приводящий, как правило, к медленно сходящимся рядам. Доказан аналог теоремы Лебега об интегрировании тригонометрических рядов Фурье для рассмотренных в статье биортогональных рядов.

Ключевые слова: волновое уравнение, телеграфное уравнение, обобщенная формула Даламбера, биортогональная система функций, несамосопряженный оператор, расходящиеся ряды, почленное интегрирование рядов.

Конечной целью работы является построение обобщенного решения смешанной задачи для так называемого телеграфного уравнения $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - qu(x,t)$. Рассмотрен случай, когда потенциал q может зависеть от обеих переменных: $q = q(x,t)$. Для построения решения обобщенной смешанной задачи применяем недавно разработанный аксиоматический метод А. П. Хромова [1]. Ранее им был разработан секвенциальный метод построения обобщенного решения рассматриваемой задачи [2, 3]. Преимущество этих методов перед методами, используемыми ранее, состоит в том, что на исходные данные задачи накладываются минимальные требования, обоснование результата привлекает минимальное число дополнительных утверждений, а решение дается в виде быстро сходящегося функционального ряда.

Данная работа продолжает исследования, приведенные в статье [3], где были построены классическое и обобщенное решения смешанной задачи для телеграфного уравнения. Потенциал q зависел только от x, применен секвенциальный метод А. П. Хромова — обобщенное решение определялось как предел классических решений. В данной статье для построения обобщенного решения классические решения не привлекаются.

Рассмотрим последовательно четыре задачи, для которых найдем обобщенные решения.

1. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевым начальным отклонением. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

$\varphi(x)$ — комплекснозначная, интегрируемая на $(0,1)$ функция, $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$. Используем обозначение производных: $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и др.

[1] Факультет ВМК МГУ, проф., д.ф.-м.н., e-mail: lomov@cs.msu.su

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2022–284.

Особенность задачи (1)–(3) связана с тем, что соответствующий этой задаче оператор Штурма–Лиувилля L_0: $ly = -y''(x)$, $x \in (0,1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = y'(1)$, является существенно несамосопряженным (по Ильину), т.е. система корневых функций этого оператора, кроме собственных функций, содержит бесконечное число присоединенных функций (задача Самарского–Ионкина). Выпишем эту систему.

Обозначим через ϱ_k квадратные корни из собственных значений оператора, $\{u_k(x)\}$ — система собственных и присоединенных функций оператора, причем, $u_{2k-1}(x)$ — собственные функции, $u_{2k}(x)$ — присоединенные функции, $k \geqslant 1$, $\{v_k(x)\}$ — биортогонально сопряженная система функций,

$$(u_k, v_n) = \int\limits_0^1 u_k(x)v_n(x)dx = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Тогда справедливо: $\varrho_0 = 0$, $\varrho_{2k-1} = \varrho_{2k} = 2\pi k$, $k \geqslant 1$, $u_0(x) = x$, $v_0(x) = 2$, $u_{2k-1}(x) = \sin 2\pi kx$, $v_{2k-1}(x) = 4(1-x)\sin 2\pi kx$, $u_{2k}(x) = -\dfrac{x}{4\pi k}\cos 2\pi kx$, $v_{2k}(x) = -16\pi k \cos 2\pi kx$. Так выбранная система $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора образует безусловный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(0,1)$. Система $\{v_k(x)\}$ также образует безусловный базис в этом пространстве.

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье есть

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}\Big\{2(x+t)(1,\varphi) + +4\sum_{n=1}^{\infty}\big[(\varphi(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x+t) + \\ &+ (\varphi(\tau),\cos 2\pi n\tau)(x+t)\cos 2\pi n(x+t)\big] + \\ &+ 2(x-t)(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\big[(\varphi(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi n(x-t) + \\ &+ (\varphi(\tau),\cos 2\pi n\tau)(x-t)\cos 2\pi n(x-t)\big]\Big\}. \end{aligned} \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е. Под классическим решением (решением почти всюду) задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u(x,t)$, непрерывную и непрерывно дифференцируемую по x и t в полуполосе $[0,1] \times [0,\infty)$, причем функции $u_x(x,t), u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны по $x \in [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$ соответственно, удовлетворяющую условиям (2), (3) и уравнению (1) почти всюду по x и t.

Приведем теорему единственности классического решения задачи (1)–(3). Зафиксируем произвольно число $T > 0$, пусть Q_T — прямоугольник, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$, обозначим через Q класс интегрируемых на Q_T функций, $f \in Q \Leftrightarrow f(x,t) \in \mathcal{L}(Q_T)$.

Т е о р е м а 1. *Если* $u(x,t)$ — *классическое решение задачи* (1)–(3) *с условием* $u_{tt}(x,t) \in Q$ $(\forall T > 0)$, *то оно единственно и находится по формуле* (4), *в которой ряды справа при любом фиксированном* $t > 0$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x \in [0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится по схеме, изложенной в [4], и не зависит от конкретного вида краевых условий.

Заметим, что ряд (4) имеет смысл для любой начальной функции $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, хотя теперь он может быть и расходящимся. Тем не менее будем считать, что он является *формальным решением* задачи (1)–(3), но понимаемой теперь *чисто формально*. Эту задачу (1)–(3) будем называть *обобщенной смешанной задачей*. Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти “сумму”, вообще говоря, расходящегося ряда. “Сумма” в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося (в общем случае) ряда (см. [5, с. 101; 6, с. 6, 19]).

Найти решение обобщенной смешанной задачи (1)–(3) — значит найти “сумму” расходящегося ряда (4).

Помимо трех аксиом о расходящихся рядах [6, с. 19], следуя А.П. Хромову, будем пользоваться правилом интегрирования расходящегося ряда:

$$\int \sum = \sum \int, \tag{5}$$

где $\int$ — определенный интеграл.

Вернемся к ряду (4). Прежде чем его преобразовать, запишем формальное разложение функции $\varphi(x)$ в ряд по системе корневых функций оператора L_0:

$$\varphi(x) \sim 2x(1,\varphi) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(\varphi(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx + (\varphi(\tau),\cos 2\pi n\tau)x\cos 2\pi nx]. \tag{6}$$

Ряд (4) представим как

$$u(x,t) = \sum\nolimits_{+} + \sum\nolimits_{-}, \tag{7}$$

где $\sum_{\pm} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ldots (x \pm t)$. Сравнивая (6), (7), заключаем, что для нахождения “суммы” ряда (4) нужно найти “сумму” ряда (6).

Пусть “сумма” ряда (6) при $x \in [0,1]$ есть некоторая функция $g(x) \in \mathcal{L}(0,1)$. Тогда в соответствии с правилом (5) имеем

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta = 2(1,\varphi)\int_0^x \eta\,d\eta + 4\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(\varphi(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\int_0^x \sin 2\pi n\eta\,d\eta +$$
$$+ (\varphi(\tau),\cos 2\pi n\tau)\int_0^x \eta\cos 2\pi n\eta\,d\eta\Big], \quad x \in [0,1]. \tag{8}$$

Имеет место следующее обобщение на рассматриваемую систему $\{u_k(x)\}$ теоремы Лебега о почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье.

Т е о р е м а 2. *Пусть задана функция* $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, *имеющая ряд* (6) *своим биортогональным разложением по системе* $\{u_k(x)\}$. *Если отрезок* $[A,B] \subseteq [0,1]$, *то*

$$\int_A^B \varphi(x)dx = \int_A^B 2x(1,\varphi)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_A^B [4(\varphi(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx + 4(\varphi(\tau),\cos 2\pi n\tau)x\cos 2\pi nx]dx.$$

Таким образом, биортогональный ряд (6) можно почленно интегрировать, полученный ряд сходится и его сумма равна $\int\limits_A^B \varphi(x)dx$. При этом сам ряд (6) может и не сходиться.

Доказательство теоремы 2 проведено в п. 5.

Согласно теореме 2 суммой ряда (8), обычной суммой, является функция $\int\limits_0^x \varphi(\eta)d\eta$. Но тогда, $\int\limits_0^x g(\eta)d\eta = \int\limits_0^x \varphi(\eta)d\eta$, т.е. справедливо $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду на отрезке $[0,1]$, мы нашли “сумму” ряда (6), который может быть и расходящимся.

Формальный ряд (6) определен для всех значений $x \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\widetilde{\varphi}(x)$ “сумму” ряда (6) для всех значений $x \in \mathbb{R}$. В силу (6) и (7) заключаем, что “сумма” $u(x,t)$ ряда (4) есть функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)]. \tag{9}$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *является функция* $u(x,t)$ *из класса* Q, *определяемая по формуле* (9).

Найдем алгоритм продолжения функции $\widetilde{\varphi}(x)$ с отрезка $[0,1]$, где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, на всю числовую прямую. Считая, что $\widetilde{\varphi}(x)$ гладкая функция, подставим соотношение (9) в краевые условия (2). Получим два равенства: $\widetilde{\varphi}(x) = -\widetilde{\varphi}(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, т. е. функция $\widetilde{\varphi}(x)$ — нечетная, и

$$\widetilde{\varphi}'(1+x) = 2\widetilde{\varphi}'(x) - \widetilde{\varphi}'(1-x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где учтено, что $\widetilde{\varphi}'(x)$ — четная функция. Проинтегрируем равенство (10) по отрезку $[0,x]$, получим

$$\widetilde{\varphi}(1+x) = 2\widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(1-x),\ x > 0. \tag{11}$$

Соотношение (11) позволяет продолжить функцию $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in [0,1]$, с отрезка $[0,1]$ на полуось $x > 0$, затем продолжаем функцию на полуось $x < 0$ как нечетную функцию.

2. Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с нулевым начальным отклонением. Рассмотрим следующую обобщенную смешанную задачу:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty), \tag{12}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geqslant 0, \tag{13}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{14}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q.

Формальное решение задачи (12)–(14) по методу Фурье есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{t-\tau} \big\{2(x+\eta)(1, f(\xi,\tau)) +$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}\big[(f(\xi,\tau),(1-\xi)\sin 2\pi n\xi)\sin 2\pi n(x+\eta) + (f(\xi,\tau),\cos 2\pi n\xi)(x+\eta)\cos 2\pi n(x+\eta)\big]+$$

$$+2(x-\eta)(1,f(\xi,\tau)) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\big[(f(\xi,\tau),(1-\xi)\sin 2\pi n\xi)\sin 2\pi n(x-\eta)+$$

$$+(f(\xi,\tau),\cos 2\pi n\xi)(x-\eta)\cos 2\pi n(x-\eta)\big]\big\}d\eta.$$

Мы воспользовались правилом (5) и вынесли интегралы за знаки сумм. Объединим слагаемые с аргументами $(x+\eta)$ и $(x-\eta)$, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \big\{2\eta(1,f(\xi,\tau))+$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}\big[(f(\xi,\tau),(1-\xi)\sin 2\pi n\xi)\sin 2\pi n\eta+ \tag{15}$$

$$+(f(\xi,\tau),\cos 2\pi n\xi)\eta\cos 2\pi n\eta\big]\big\}d\eta = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta,$$

последнее равенство объясняется тем, что выражение в скобках $\{\cdot\}$ в (15), как это следует из формулы (6), имеет “сумму” $\widetilde{f}(\eta,\tau)$, где $\widetilde{f}(\eta,\tau)$ — продолжение функции $f(\eta,\tau)$ по η на всю числовую ось по тем же формулам, что и функция $\varphi(x)$.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. *Решение $u(x,t)$ обобщенной смешанной задачи* (12)–(14) *есть функция класса Q, определяемая по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta. \tag{16}$$

Из формулы (16), используя формулы продолжения, получаем оценку

$$\|u(x,t)\|_{\mathcal{L}(Q_T)} \leqslant c_T\|f(x,t)\|_{\mathcal{L}(Q_T)}, \quad \forall T > 0,\ c_T = \mathrm{const} > 0.$$

Это подтверждает, что $u(x,t)$ есть функция класса Q.

3. Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с ненулевым начальным отклонением. Рассмотрим обобщенную смешанную задачу

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tag{17}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geqslant 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{19}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q, $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$.

Формальное решение задачи (17)–(19) по методу Фурье есть $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где $u_0(x,t)$ есть ряд (4), а $u_1(x,t)$ есть ряд (15). Поэтому, исходя из пп. 1, 2, получаем следующее утверждение.

Т е о р е м а 5. *Обобщенная смешанная задача* (17)–(19) *имеет решение* $u(x,t)$ *класса* Q, *определяемое по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}(\eta,\tau)d\eta. \tag{20}$$

4. Смешанная задача для телеграфного уравнения. Используем результаты пп. 1–3 для решения следующей задачи:

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - q(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \tag{21}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad t \geqslant 0, \tag{22}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{23}$$

где $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, функция $q(x,t)$ такова, что найдется функция $q_0(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, такая, что $|q(x,t)| \leqslant q_0(x)$, функция $q(x,t)u(x,t)$ есть функция класса Q.

Из теоремы 5 получим, что нахождение решения задачи (21)–(23) в классе Q сводится к нахождению в этом классе решения интегрального уравнения

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)] - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)}d\eta, \tag{24}$$

где $\widetilde{q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)}$ есть продолжение по η на всю числовую ось с отрезка $[0,1]$ при каждом τ функции $q(\eta,\tau)u(\eta,\tau)$ по тем же формулам, что и функция $\varphi(x)$.

Интегральное уравнение (24) имеет единственное решение в классе Q, получаемое по методу последовательных подстановок. Это решение дается формулой

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t), \tag{25}$$

где

$$a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)],$$

$$a_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{n-1}(\eta,\tau)d\eta, \quad n = 1,2,\ldots,$$

где $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = f_n(\eta,\tau) = -q(\eta,\tau)a_n(\eta,\tau)$ при $\eta \in [0,1]$, $n = 0,1,\ldots$, $f_n(\eta,\tau)$ продолжается по переменной η с $[0,1]$ на всю прямую так же, как функция $\varphi(x)$, $\widetilde{f}_n(\eta,\tau) = -q(\eta,\widetilde{\tau)a_n}(\eta,\tau)$.

Формулу (25) можно назвать обобщенной формулой Даламбера.

Т е о р е м а 6. *Если $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, то ряд $A(x,t)$ (25) сходится абсолютно и равномерно (с экспоненциальной скоростью) в прямоугольнике Q_T для любого $T > 0$.*

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из следующей оценки общего члена ряда (25).

Л е м м а. *Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, T — произвольное положительное число. Тогда справедливы оценки*

$$\|a_n(x,t)\|_{C(Q_T)} \leqslant c_T^{n+1}\|q_0\|_1^n\|\varphi\|_1\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \ \ c_T = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство леммы проводится с использованием метода математической индукции и приведено в [3].

5. Теорема о почленном интегрировании. Приведем здесь обоснование теоремы 2 о почленном интегрировании биортогонального разложения по системе $\{u_k(x)\}$ интегрируемой на отрезке $[0,1]$ функции. Придерживаемся известной схемы доказательства теоремы Лебега с поправкой на то, что теперь разложение в ряд ведется не по ортонормированной системе, а по биортогональной системе. Переобозначим в теореме 2 $\varphi(x)$ на $f(x)$.

Итак, пусть задана функция $f(x) \in \mathcal{L}(0,1)$, имеющая своим биортогональным разложением по системе $\{u_k(x), v_k(x)\}$ ряд

$$2x(1,f) + 4\sum_{n=1}^{\infty}[(f(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx + (f(\tau),\cos 2\pi n\tau)x\cos 2\pi nx]. \tag{26}$$

Пусть $[A,B] \subseteq [0,1]$, тогда требуется доказать, что

$$\int_A^B f(x)dx = 2\int_A^B x(1,f)dx + 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_A^B \big[(f(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi n\tau)\sin 2\pi nx + (f(\tau),\cos 2\pi n\tau)x\cos 2\pi nx\big]dx,$$

т.е. ряд (26) можно почленно интегрировать, полученный ряд сходится и его сумма равна $\int_A^B f(x)dx$.

При этом сам ряд (26) может расходиться.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [A,B], \\ 0, & x \in [0,1]\setminus[A,B]. \end{cases}$$

Каждая из систем $\{u_k(x)\}, \{v_k(x)\}$, образует безусловный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(0,1)$. Разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд по системе $\{v_k(x), u_k(x)\}$, назовем его сопряженным рядом:

$$\varphi(x) \sim 2\alpha_0 + 4\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k(1-x)\sin 2\pi kx + \beta_k\cos 2\pi kx] =$$
$$= 2(\varphi(\tau),\tau) + 4\sum_{k=1}^{\infty}[(\varphi(\tau),\sin 2\pi k\tau)(1-x)\sin 2\pi kx + (\varphi(\tau),\tau\cos 2\pi k\tau)\cos 2\pi kx]. \tag{27}$$

Вычислим коэффициенты $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$, $k \geqslant 1$, ряда (27). Имеем

$$\alpha_0 = (\varphi(\tau),\tau) = \int_A^B \tau d\tau = \frac{1}{2}(B^2 - A^2),$$

$$\alpha_k = (\varphi(\tau), \sin 2\pi k\tau) = \int\limits_A^B \sin 2\pi k\tau d\tau = \frac{1}{2\pi k}(\cos 2\pi kA - \cos 2\pi kB),$$

$$\beta_k = (\varphi(\tau), \tau\cos 2\pi k\tau) = \int\limits_A^B \tau\cos 2\pi k\tau d\tau = \frac{1}{2\pi k}[B\sin 2\pi kB - A\sin 2\pi kA +$$
$$+ \frac{1}{2\pi k}(\cos 2\pi kA - \cos 2\pi kB)].$$

Подставим полученные соотношения для коэффициентов в частичную сумму $S_n(x)$ ряда (27):

$$S_n(x) = B^2 - A^2 + 4\sum_{k=1}^{n}\big[\frac{1}{2\pi k}(\cos 2\pi kA - \cos 2\pi kB)(1-x)\sin 2\pi kx +$$
$$+ \frac{1}{2\pi k}(B\sin 2\pi kB - A\sin 2\pi kA)\cos 2\pi kx + \frac{1}{4\pi^2k^2}(\cos 2\pi kA - \cos 2\pi kB)\cos 2\pi kx\big].$$

Докажем, что: 1) последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится $\forall x \in [0,1]$; 2) последовательность $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена по n и x на $[0,1]$.

1. Для доказательства сходимости ряда (27) применим признак Дирихле–Абеля и признак сравнения числовых рядов. Преобразуем произведения тригонометрических функций в суммы и сгруппируем слагаемые. Получим

$$S_n(x) = B^2 - A^2 + \frac{1-x-A}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2\pi k(A+x)}{k} - \frac{1-x+A}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2\pi k(A-x)}{k} +$$
$$+ \frac{x-1+B}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2\pi k(B+x)}{k} + \frac{1-x+B}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2\pi k(B-x)}{k} + \tag{28}$$
$$+ \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}(\cos 2\pi kB - \cos 2\pi kA)\cos 2\pi kx.$$

По обычной схеме получаем оценки

$$\big|\sum_{k=1}^{n}\sin 2\pi k(A\pm x)\big| \leqslant \frac{1}{|\sin\pi(A\pm x)|} \quad \forall n,\ \forall x \in [0,1],$$

$A \pm x \neq 0, A + x \neq 1$. Если $A \pm x = 0$ или $A + x = 1$, то соответствующие суммы равны нулю;

$$\big|\sum_{k=1}^{n}\sin 2\pi k(B\pm x)\big| \leqslant \frac{1}{|\sin\pi(B\pm x)|}, \quad \forall n\ \forall x \in [0,1],$$

$B - x \neq 0, B \pm x \neq 1, 2$. Если $B \pm x = 1, 2$ или $B - x = 0$, то соответствующие суммы равны нулю.

Таким образом, суммы синусов в первых четырех частичных суммах в (28) ограничены по модулю для всех значений n и $x \in [0,1]$. Следовательно, соответствующие этим суммам ряды сходятся в каждой точке $x \in [0,1]$. Ряд, соответствующий последней сумме в (28), сходится абсолютно и равномерно на множестве $[0,1]$.

Итак, последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится в каждой точке $x \in [0,1]$, т.е. ряд (27) сходится на $[0,1]$.

2. Докажем, что найдется постоянная $c > 0$, такая, что $|S_n(x)| \leqslant c$, $\forall n, \forall x \in [0,1]$. Для этого докажем равномерную ограниченность каждой из сумм в правой части (28).

Воспользуемся известной оценкой [7, с. 318]

$$\big|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k}\big| \leqslant 2\sqrt{\pi}, \quad \forall n,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Положив в первой сумме (28) $t = 2\pi(A + x)$, получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2\pi k(A+x)}{k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kt}{k}\right| \leqslant 2\sqrt{\pi} \quad \forall n,\ \forall x \in [0,1].$$

Аналогично оцениваем следующие три суммы в (28). Для последней суммы в (28) получим оценку сверху через постоянную $c = 4$, $\forall n$, $\forall x \in [0,1]$, так как $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} < 2$, $\forall n$. Для суммы $S_n(x)$ получим равномерную по n и $x \in [0,1]$ оценку через постоянную $c_1 = 1 + \dfrac{24}{\sqrt{\pi}} + \dfrac{4}{\pi^2}$:

$$|S_n(x)| \leqslant c_1 \quad \forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,1]. \tag{29}$$

Полученные в 1, 2 результаты позволяют применить теорему Лебега о предельном переходе [7, с. 139]:

$$\int\limits_0^1 f(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(x)S_n(x)dx.$$

Подставим в последнее равенство выражение для функции $\varphi(x)$ и используем соотношение (27),

$$\int\limits_A^B f(x)dx = 2\alpha_0\int\limits_0^1 f(x)dx + 4\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\alpha_k\int\limits_0^1 f(x)(1-x)\sin 2\pi kx dx + +\beta_k\int\limits_0^1 f(x)\cos 2\pi kx dx\Big] =$$

$$= 2(1,f)\int\limits_A^B x dx + 4\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(f(\tau),(1-\tau)\sin 2\pi k\tau)\int\limits_A^B \sin 2\pi kx dx + (f(\tau),\cos 2\pi k\tau)\int\limits_A^B x\cos 2\pi kx dx\Big],$$

получаем требуемую формулу. Теорема 2 доказана.

Автор признателен А.П. Хромову за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения. Вып. 21. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 319–324.
2. Хромов А.П., Корнев В.В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // ЖВМиМФ. 2019. **59**. № 2. С. 286–300.
3. Ломов И.С. Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2021. № 4. С. 37–42.
4. Хромов А.П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференц. уравн. 2019. **55**. № 5. С. 717–731.
5. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
6. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: КомКнига, 2006.
7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: ГИТТЛ, 1957.

Поступила в редакцию 04.04.22
Одобрена после рецензирования 20.06.22
Принята к публикации 20.06.22