

Влияние продольного растяжения на развитие изгибно-гравитационных волн в сплошном ледяном покрове

С учётом продольного растяжения изучается процесс развития изгибно-гравитационных волн, вызываемых в сплошном ледяном покрове периодическими возмущениями. Дан анализ влияния растягивающего усилия на распределение фазовой скорости, скорости переднего фронта и амплитуды генерируемых волн по их длине и частоте колебаний.

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ колебания ледяного покрова при отсутствии растягивающего усилия исследовались в работах [1-4].

Проведем анализ влияния продольного растяжения на процесс развития волн, генерируемых в ледяном покрове периодическими возмущениями.

1. Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей безграничный бассейн постоянной глубины H , плавает сплошной ледяной покров. Начиная с момента времени $t=0$, к поверхности ледяного покрова прикладываются периодические давления

$$p = p_0 f(x) \exp(i\delta t), \quad (1.1)$$

Исследуем влияние продольного растяжения на неустановившиеся колебания ледяного покрова, предполагая, что в начальный момент времени ледяной покров и жидкость находятся в невозмущенном состоянии.

Рассматривая ледяной покров как тонкую упругую пластинку [5, 6] и считая движение жидкости потенциальным, а скорости малыми, получим с учетом продольного растягивающего усилия [6, 7] для определения потенциала скорости φ уравнение Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \quad -H < z < 0, \quad |x| < \infty \quad (1.2)$$

с граничными

$$D_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \gamma + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\alpha}{\rho_0} p \quad \text{при } z=0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z=-H, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{при } z=0$$

и начальными

$$\varphi = \zeta = 0 \quad \text{при } t=0 \quad (1.4)$$

условиями.

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \alpha_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}, \quad \alpha = \frac{\rho_0}{\rho g};$$

E, h, ρ, μ - модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда; ρ - плотность жидкости; Q - продольное растягивающее усилие, приходящееся на единицу ширины ледяной пластины; ζ - прогиб льда или возвышение поверхности лед-вода.

Применяя для решения задачи комплексное преобразование Фурье по переменной x и удовлетворяя граничным условиям (1.3), получим

$$\zeta_{tt} + \tau^2 \zeta = -a\theta(r) \bar{f}(r) \exp(i\sigma t), \quad (1.5)$$

$$\tau = \left[\theta(r) (D_1 r^4 + Q_1 r^2 + 1) \right]^{1/2}, \quad \theta(r) = r g t h r h / (1 + \alpha_1 r g t h r h),$$

где \bar{f} и \bar{f} - преобразование Фурье функций ζ и f .

Решая уравнение (1.5) с начальными условиями (1.4) и применяя теорему обращения, найдем

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(r) \psi(r, t) \bar{f}(r) e^{irx} dr,$$

$$\psi(r, t) = \left(\frac{\zeta}{\Delta} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\tau \Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\tau \Delta_2 t} \right) e^{i\sigma t}, \quad (1.6)$$

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad \Delta_{1,2} = \sigma \mp \tau.$$

Анализ показал, что уравнение $\Delta_1(r) = 0$ имеет два действительных корня $r = \pm r_1$. Следовательно первое и второе слагаемые в (1.6) имеют на действительной оси особенности в точках $r = \pm r_1$. Так как эти особенности взаимно погашаются, то в силу теории Коши исходный путь интегрирования можно деформировать в контур, обходящий точки $r = \pm r_1$. Следуя Стокеру [8], в качестве контура интегрирования возьмем путь, идущий вдоль действительной оси и обходящий корни уравнения $\Delta_1(r) = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) > 0$. Перепишем теперь (1.6) так:

$$\zeta = -\frac{a}{2\sqrt{2\pi}} (\eta_1 - \eta_2 - \eta); \quad (1.7)$$

$$\eta_k = \int_{L_k} \frac{\tau(r)}{(1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4) \Delta_k} \bar{f}(r) \exp(i|x| M_k) dr, \quad k=1,2;$$

$$\eta = \int_{L_1} \frac{2\tau^2(r)}{(1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4) \Delta} \bar{f}(r) \exp(irx) dr \exp(i\sigma t);$$

$$M_{1,2} = r \operatorname{sign} x \pm i\nu(r), \quad \nu = \tau/|x|.$$

Здесь L_2 идет вдоль действительной оси, а L_1 обходит $r = r_1$ сверху и $r = -r_1$ снизу. Такой выбор контура интегри-

рования обеспечивает стремление к нулю ζ_1 и ζ_2 при $t \rightarrow \infty$.

Вычисляя интегралы (1.7) методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек (корней уравнения $M_2'(r) = 0$) относительно полюсов $r = \pm r_1$; подынтегральных функций [8], получим

$$\zeta = \begin{cases} A \sin \alpha + o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right) & \text{при } |x| < Vt, \\ o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right) & \text{при } |x| > Vt, \end{cases} \quad (1.8)$$

где

$$A = \bar{f}(\alpha_1) B(r_1), \quad \alpha_1 = -r_1 \operatorname{sign} x, \quad \alpha = r_1 |x| - \beta t,$$

$$V = c(r_1), \quad B(r) = a r g t h r H / [(1 + x r g t h r H) \beta \tau'], \quad a = \sqrt{\frac{\pi}{2}} Q$$

и штрих означает производную по r .

Видно, что периодические давления (1.1) генерируют в ледяном покрове (на поверхности лед-вода) незатухающие с расстоянием волны, уходящие от области приложения давлений в положительном и отрицательном направлениях оси x . Передний фронт возникающих волн перемещается со скоростью V , а их длина и фазовая скорость равны $\lambda = 2\pi/r_1$, $V = \beta/r_1$, соответственно.

2. Для оценки влияния величины продольного растягивающего усилия Q на элементы генерируемых волн проводились численные расчеты при

$$F = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \rho, g = 870 \text{ кг/м}^3, \quad \nu = 0,34, \quad \ell = 3 \cdot 10^2 \text{ м}, \quad H = 10^3 \text{ м}, \quad h = 1 \text{ м}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \ell, \\ 0 & |x| > \ell. \end{cases} \quad (2.1)$$

Рис. 1 иллюстрирует зависимость длины волны $\lambda = 2\pi/r_1$ от частоты колебаний β . Здесь кривые по порядку снизу вверх отвечают значениям $Q_2 = 3,54 \cdot 10^{-9} Q$ (Н/м), равным 0; $5,948 \cdot 10^{-3}$; $1,071 \cdot 10^{-2}$; $3,125 \cdot 10^{-2}$; $6,25 \cdot 10^{-2}$; $1,25 \cdot 10^{-1}$; 0,25; 0,5; 1. (2.2)

Этим значениям Q_2 в аналогичном порядке отвечают и кривые снизу вверх на рис. 2, 3, иллюстрирующих зависимость фазовой скорости V и скорости переднего фронта V (м/с) генерируемых волн от r_1 (длины волны) и от частоты колебаний.

Видно, что зависимость длины волны от частоты колебаний представляет собою монотонно убывающую функцию. Большему Q_2 отвечает меньшее значение β , начиная с которого заметно проявляется влияние продольного растягивающего усилия на длинах генерируемых волн. Например,

при Q_2 равных $1,071 \cdot 10^{-4}$ и 1 Н/м такими частотами будут $\sigma = 0,3$ и $\sigma = 0,2 \text{ с}^{-1}$. Увеличение значения Q для

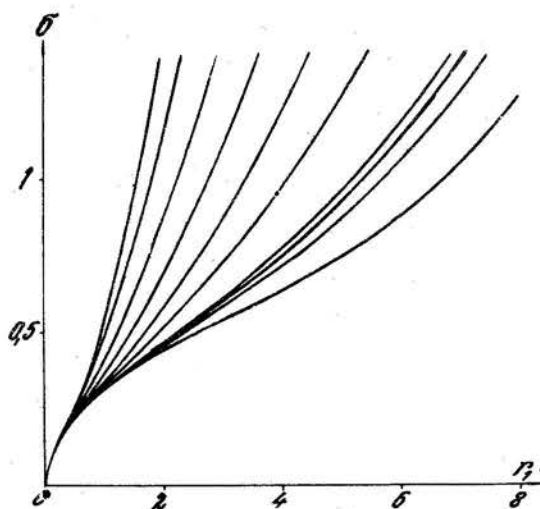


Рис. 1

фиксированных σ приводит к росту λ (уменьшению λ). Причем влияние растягивающего усилия увеличивается с ростом частоты. В частности, при изменении Q_2 (Н/м) $0+1$ длина волны возросла примерно $661 + 1047$ м, если $\sigma = 0,3 \text{ с}^{-1}$ и $92 + 405$ м, если $\sigma = 1 \cdot \text{с}^{-1}$. Так как $\sigma = \tau(r)$, то такая существенная зависимость λ от Q позволяет определить величину продольного растягивающего усилия ледяной пластины

с постоянной цилиндрической жесткостью по заданным (измеренным экспериментально) значениям длины и фазовой скорости (частоты колебаний) волн из формулы

$$Q_1 = r_1^{-2} \Delta^*(r_1), \quad \Delta^*(r) = \sigma^2 (1 + \alpha_1 r g t h r H) / (r g t h r H) - (1 + D_1 r^4).$$

Отметим, что выражение $\Delta^*(r)$ вытекает из $\Delta(r)$ при $Q=0$, а значение положительного корня уравнения $\Delta^*(r)=0$ больше, чем значение положительного корня уравнения $\Delta(r)=0$. В случае коротких волн ($r_1/H \gg 1$) найдем

$$\Delta^*(r) = \sigma^2 (\alpha_1 + \frac{1}{r g}) - (1 + D_1 r^4).$$

На частотах, где существенно сказывается влияние Q , такое приближение справедливо.

Фазовая скорость генерируемых волн как функция r_1 (длины волны) имеет минимум (рис. 2, а), а $\lim_{r_1 \rightarrow 0} v(r_1) = \sqrt{gH}$, $\lim_{r_1 \rightarrow \infty} v(r_1) = \infty$. Величина минимума растет с увеличением Q , а значение $r_1 = r_2$, при котором минимум достигается, убывает. Качественно похоже на $v(r_1)$ и зависимость $V(r_1)$. Скорость переднего фронта как функция r_1 также имеет минимум (рис. 2, б), а $\lim_{r_1 \rightarrow 0} V(r_1) = \sqrt{gH}$, $\lim_{r_1 \rightarrow \infty} V(r_1) = \infty$. Величина минимума и значение $r_1 = r_3$, при котором он достигается, меньше, чем соответствующие значения для фазовой скорости. Кроме того $v(r_3) > V(r_3)$, если $r_1 < r_2$.

и $v(\gamma) < V(\gamma)$, если $\gamma_1 > \gamma_2$. При $\gamma_1 = \gamma_2$ фазовая скорость и скорость переднего фронта волн совпадают.

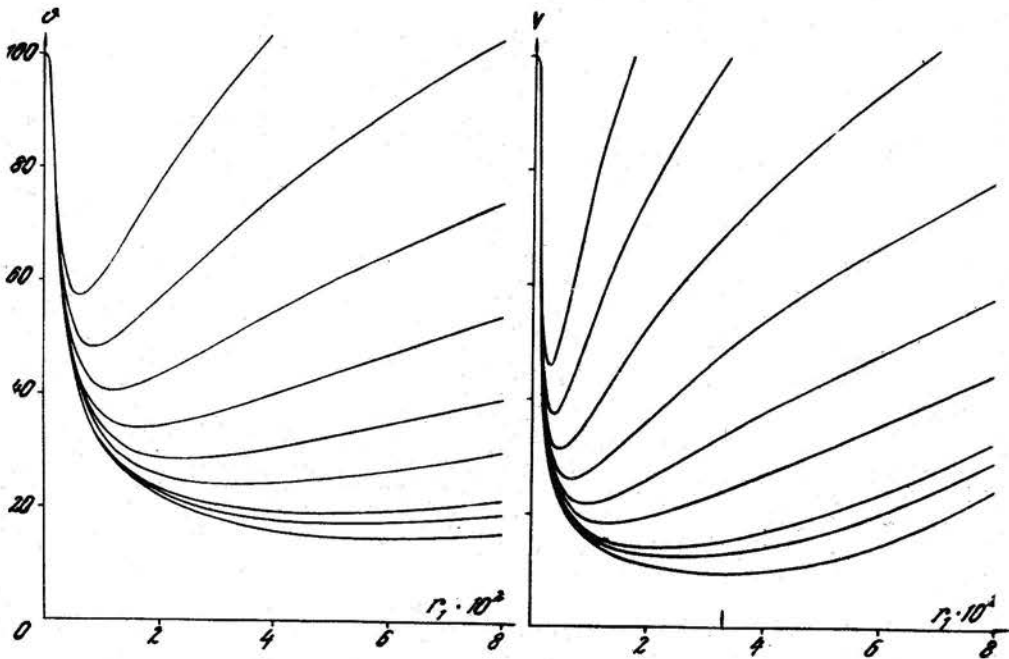


Рис. 2

Фазовая скорость и скорость переднего фронта генерируемых волн как функции частоты колебаний также имеют по одному минимуму (рис. 3). При фиксированном Q_2 ми-

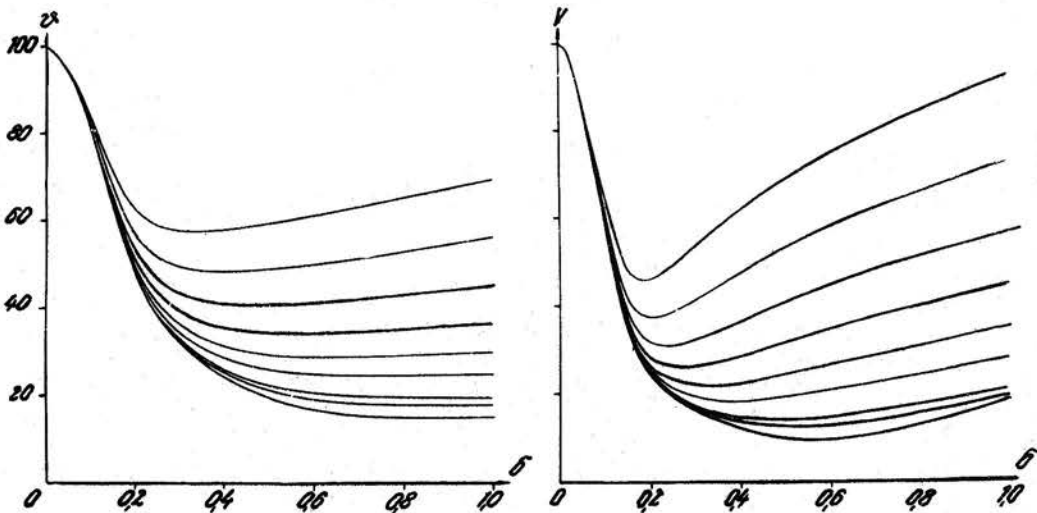


Рис. 3

нимум $V(\sigma)$ достигается на частоте $\sigma = \sigma_2$ меньшей, чем частота $\sigma = \sigma_1$ минимума фазовой скорости, а величина минимального значения у $V(\sigma)$ больше, чем у $V(\sigma)$. При $\sigma = \sigma_1$ выполняется равенство $v(\sigma_1) = V(\sigma_1)$. Кроме того

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} v(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} V(\sigma) = \sqrt{gH}, \quad \text{а} \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} V(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} v(\sigma) = \infty.$$

Увеличение продольного растягивающего усилия приводит к росту минимальных значений $v(\sigma)$ и $V(\sigma)$ и смещению их положения в сторону меньших частот (σ_1 и σ_2 уменьшаются). В частности, $v(\sigma)$ для значений σ_2 из (2.2) достигает минимума на частоте $\sigma = \sigma_1$ (с^{-1}), равной соответственно

$$0,874; 0,900; 0,894; 0,792; 0,684; 0,577; 0,485; 0,385; 0,344. \quad (2.3)$$

Минимум $V(\sigma)$ при этом имеет место для σ_2 (с^{-1}), равной

$$0,570; 0,518; 0,480; 0,381; 0,316; 0,283; 0,240; 0,218; 0,191. \quad (2.4)$$

Отметим, что $\sigma_1 = \tau(r_2)$, $\sigma_2 = \tau(r_3)$, а r_2 и r_3 положительные корни уравнений $r\tau'(r) - \tau(r) = 0$ и $\tau''(r) = 0$ соответственно. Штрих здесь означает производную по r .

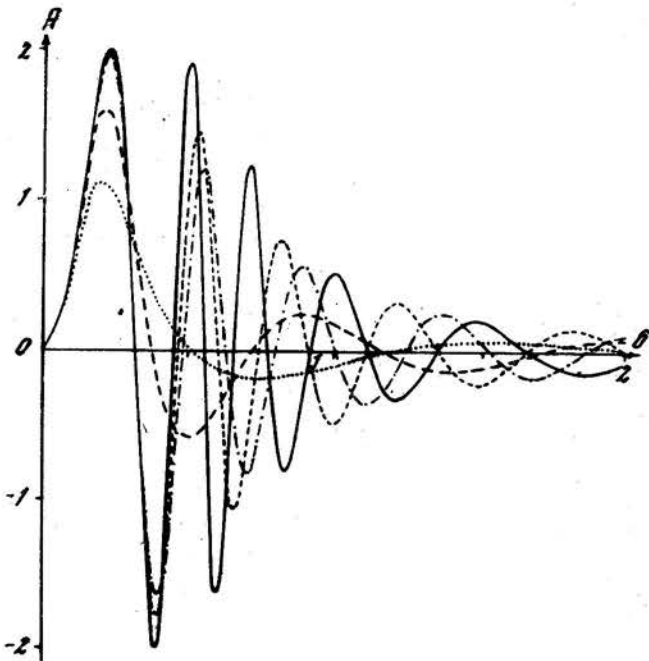


Рис. 4

скорости переднего фронта, имеются нули функции $A(\sigma)$, то расстояние между ними здесь с ростом σ убывает, а при $\sigma > \sigma_2$ - увеличивается. В противном случае указав-

Влияние продольного растяжения на амплитуду волн иллюстрируется с точностью до множителя α (рис. 4, 5), где сплошная, пунктирная, штрихпунктирная, штриховая и точечная кривые отвечают значениям σ_2 (Н/м), равным $0; 5948 \cdot 10^{-3}; 1,071 \cdot 10^{-2}; 1,25 \cdot 10^{-1}; 0,5$.

Видно, что зависимость A от σ и от r представляет собой осциллирующую функцию. При этом, если в интервале частоты от нуля до значения, соответствующего минимуму

ное расстояние всюду растет с частотой колебаний. Аналогичная зависимость имеет место и при $Q=0$, однако значение $\bar{\sigma}_2$ для $Q=0$ больше, чем в случае $Q>0$ (см. (2.4)).

Для $\bar{\sigma} < 0,1 \text{ с}^{-1}$ влияние изменения Q_2 в пределах (2.2) практически не проявляется на распределении A по частоте (все кривые на рис. 4 совпадают). При $\bar{\sigma} > 0,1 \text{ с}^{-1}$ продольное растяжение может привести как к увеличению, так и к уменьшению амплитуды волн по сравнению со случаем $Q=0$. Например, при $\bar{\sigma} = 0,51 \text{ с}^{-1}$ амплитуда A равна нулю, если $Q_2 = 0,5 \text{ Н/м}$ и $A = 1,91$, если $Q_2 = 0$. На частоте же $\bar{\sigma} = 0,32 \text{ с}^{-1}$ в первом случае $A = 0,66$, а во втором $A = 0$.

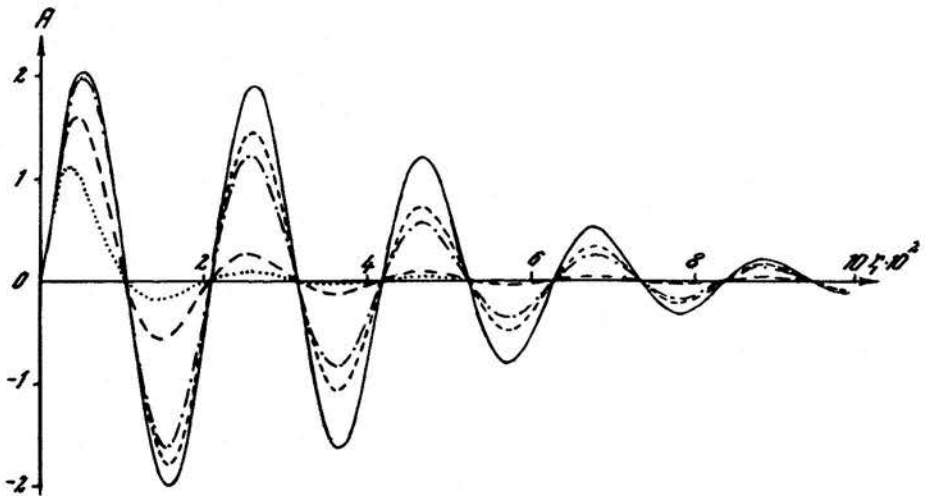


Рис. 5

Экстремальные значения функции $A(\bar{\sigma})$ в порядке возрастания их номера убывают с ростом Q , а их положение (кроме первого экстремума) смещается в сторону больших $\bar{\sigma}$. Первый экстремум смещается к меньшей частоте, но незначительно.

Волны с одинаковой длиной имеют большую амплитуду при меньшем растягивающем усилии (рис. 5). В частности, волна с длиной $\lambda = 256 \text{ м}$ имеет амплитуду $A = 1,9$ при $Q_2 = 0$ и $A = 0,25$ при $Q_2 = 1,25 \cdot 10^{-1} \text{ Н/м}$.

Таким образом, на основании проведенного анализа можно сделать выводы.

1. Продольное растяжение оказывает значительное влияние на колебания ледяного покрова с периодами меньшими одной минуты.

2. Увеличение продольного растягивающего усилия приводит к росту длин, фазовых скоростей и скоростей передних фронтов генерируемых волн.

3. Большому растягивающему усилию отвечает меньшая частота (большая длина волны), при которой фазовая скорость и скорость переднего фронта волн как функции частоты (длины волны) достигают минимальных значений.

4. Продольное растяжение в зависимости от частоты колебаний может привести как к увеличению, так и к уменьшению амплитуды волн по сравнению со случаем, когда растяжение отсутствует.

5. Волны с одинаковой длиной имеют большую амплитуду при меньшем растягивающем усилии.

ПРИСТАТЕЙНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. К., "Наук.думка", 1973, 247 с.
2. Хейсин Д.Е. Некоторые нестационарные задачи динамики ледяного покрова. - Труды Арктики и Антарктики. НИИ, 1971, т. 300, с. 112-117.
3. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения. - Морские гидрофизические исследования, № 2. Севастополь, 1971, с. 113-144.
4. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости. - Прикладная механика, 1977, 8, № 9, с. 103-107.
5. Красильников В.Н. О возбуждении изгибно-гравитационных волн. - Акустический журнал, 1962, 8, 1, с. 55-69.
6. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л., Гидрометеоиздат, 1967, 215 с.
7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., "Наука", 1967, 444 с.
8. Стокер Д.Д. Волны на воде. М., ИЛ, 1959, 617 с.

A.E.Bukatov

THE EFFECT OF LONGITUDINAL TENSION ON THE DEVELOPMENT OF FLEXURAL-GRAVITY WAVES IN A SOLID ICE COVER

The process of development of flexural-gravity waves caused in a solid ice cover by periodic disturbances is studied with due regard for longitudinal tension. Effect of the stretching force on the distribution of phase velocity, forward front velocity and amplitudes of generated waves is analysed based on their lengths and oscillation frequency.

Статья поступила в редакцию 20.05.1978 г.