

А. Е. БУКАТОВ, А. В. ЧЕРКЕСОВ

Влияние глубинной стратификации на внутренние волны

В работе исследуются внутренние волны, генерируемые в неоднородном море периодическими атмосферными возмущениями. Плотность морской воды непрерывно изменяется с глубиной по закону, соответствующему двухслойной плотностной модели. Оба слоя экспоненциально стратифицированы, но коэффициенты их стратификации различны.

Аналогичная задача для моря с линейным изменением плотности по всей глубине рассмотрена в работе [4], а для двухслойного моря с однородным нижним слоем - в работе [5]

1. П У С Т Ъ к свободной поверхности неограниченной в горизонтальных направлениях идеальной несжимаемой жидкости прикладываются периодические по времени давления вида

$$p_0 = af(x, y) \cos bt. \quad (1)$$

Плотность жидкости в невозмущенном состоянии меняется с глубиной по закону

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 \exp(-k_1 z) & -H_1 \leq z \leq 0 \\ \rho_1 \exp(-k_2 z) & -H \leq z \leq -H_1 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\rho_1 = \rho_0 \exp[(k_1 - k_2)H_1]$; H_1 - толщина верхнего слоя; H - глубина жидкости. Такой закон распределения плотности соответствует двухслойной плотностной модели непрерывно стратифицированного моря. Оба слоя экспоненциально

стратифицированы, но коэффициенты их стратификации различные ($\kappa_1 \neq \kappa_2$).

Проведем исследование внутренних волн, генерируемых давлениями (1). Будем считать, что движение жидкости в каждом из рассматриваемых слоев описывается системой уравнений Физельстада [8] при граничных условиях $\rho - \rho_0 \zeta = \rho_0 \zeta_t = w$ при $z = 0$; $w = 0$ при $z = -H$, где ρ - возмущенное давление; ζ - отклонение свободной поверхности от не-возмущенного состояния; w - вертикальная составляющая скорости. Кроме того, на границе раздела слоев удовлетворяется условие непрерывности w и гидродинамического давления жидкости.

Применяя к системе уравнений движения и граничным условиям преобразование Фурье по горизонтальным переменным x и y , получим для w такое окончательное интегральное представление:

$$w = -\frac{i\alpha}{2\pi\rho_0\sigma} \iint_{\Delta(r)} \frac{\psi(r, z)}{\Delta(r)} \bar{f}(m, n) \exp[i(m x + n y - \sigma t)] dm dn,$$

$$\psi(r, z) = \begin{cases} \psi_1(r, z) & -H_1 \leq z \leq 0 \\ \psi_2(r, z) & -H \leq z \leq -H_1, \end{cases}$$

$$\psi_1 = \left\{ \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{sh} \gamma_1(z + H_1) \left[(\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 H_2}{2 \gamma_2} - \operatorname{ch} \gamma_2 H_2 \right] - \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 H_2}{\gamma_2} \operatorname{ch} \gamma_1(z + H_1) \right\} \eta^2 e^{i(z + H_1) \gamma_1 / 2},$$

$$\psi_2 = \eta^2 \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{sh} \gamma_2(z + H) \exp \left[\frac{1}{2} \epsilon_1 \left(\frac{H_2}{H_1} - 1 \right) + \epsilon_2 (z + H_1) / 2 H_2 \right], \quad (3)$$

$$\Delta(r) = \frac{\Delta_1}{\gamma_1 \gamma_2} \operatorname{sh} \gamma_2 H_2 \operatorname{sh} \gamma_1 H_1 + \frac{\Delta_2}{\gamma_2} \operatorname{sh} \gamma_2 H_2 \operatorname{ch} \gamma_1 H_1 + \frac{\Delta_3}{\gamma_1} \operatorname{sh} \gamma_1 H_1 \operatorname{ch} \gamma_2 H_2 + \operatorname{ch} \gamma_2 H_2 \operatorname{ch} \gamma_1 H_1,$$

$$\Delta_1 = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{4} + \eta^2 \left[1 - (\kappa_2 + \kappa_1 / 2) g / \sigma^2 \right], \quad \eta = \sigma r / \sqrt{\sigma^2 - 4 \omega^2},$$

$$\Delta_2 = \frac{\kappa_2}{2} - g \eta^2 / \sigma^2, \quad \Delta_3 = \frac{\kappa_1}{2} - g \eta^2 / \sigma^2, \quad \epsilon_1 = \kappa_1 H_1, \quad \epsilon_2 = \kappa_2 H_2,$$

$$\gamma_{1,2} = (r_{1,2})^{1/2}, \quad r_{1,2} = \frac{\kappa_{1,2}}{4} + (1 - \kappa_{1,2} g / \sigma^2),$$

$$\bar{f}(m, n) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(mx + ny - \beta t)] dx dy.$$

В осесимметричном случае ($f(x, y) = f(R)$, $R^2 = x^2 + y^2$) интеграл (3) принимает вид

$$w = -\frac{\alpha i}{\rho_0 \beta} \int_0^{\infty} \frac{r \psi(r, z)}{\Delta(r)} \bar{f}(r) J_0(rR) dr \exp(-i\beta t), \quad (4)$$

$$\bar{f}(r) = \int_0^{\infty} R f(R) J_0(rR) dR.$$

Отсюда в силу неравенства

$$|J_0(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4)| < Ax^{-3/2},$$

где $A > 0$, для больших R с ошибкой порядка не ниже $R^{-3/2}$ находим

$$w = -\frac{\alpha i}{\rho_0 \beta} \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{r}}{\Delta} \psi(r, z) f(r) \cos(rR - \pi/4) dr \exp(-i\beta t). \quad (5)$$

Для вычисления этого интеграла необходимо знать полюса подынтегральной функции, представляющие собою корни уравнения $\Delta(r) = 0$. Путь интегрирования необходимо деформировать в контур, идущий вдоль действительной оси и обходящий расположенные на ней полюса по малым полуокружностям так, чтобы выполнялось естественное условие излучения. Нас будут интересовать прежде всего вещественные корни этого уравнения, так как их вклад представит возмущения, затухающие с расстоянием как $1/\sqrt{R}$, в то время как вклад от комплексных корней — экспоненциально затухающие с ростом R возмущения. Распределение корней уравнения $\Delta(r) = 0$ существенно зависит от частоты колебаний β , параметра Кюриолеса 2ω , перепада плотности ϵ_1, ϵ_2 в верхнем и нижнем слоях соответственно.

Рассмотрим для $\beta > 2\omega$ следующие соотношения:

$$a) \beta \geq (\hat{\kappa} g)^{1/2}, \quad b) \beta < (\hat{\kappa} g)^{1/2},$$

где $\hat{\kappa} = \max(\kappa_1, \kappa_2)$. При выполнении неравенства (a) уравнение $\Delta(r) = 0$ имеет только два вещественных корня $\pm r_0$ ($r_0 > 0$). Вычисляя интеграл (5) в этом случае при больших R получаем

$$w = A(r_0, z) \cos \alpha_0, \quad \zeta_1 = -\frac{1}{\delta} A(r_0, 0) \sin \alpha_0, \quad (6)$$

$$\zeta_2 = -\frac{1}{\delta} A(r_0, -H_1) \sin \alpha_0, \quad \rho = -\frac{\delta}{\eta^2} \rho(z) A_2(r_0, z) \sin \alpha_0.$$

Здесь

$$A(r, z) = \frac{\alpha \sqrt{2\pi}}{\rho_0 \delta} \sqrt{r/R} \frac{\psi(r, z)}{\Delta'(r)} \bar{f}(r),$$

$$\alpha_0 = r_0 R - \delta t - \pi/4,$$

$\psi(r, z)$ и $\Delta(r)$ определяются формулами (3); штрих означает дифференцирование по r ; $\zeta_{1,2}$ - соответственно отклонения свободной поверхности и поверхности $z = -H_1$ от невозмущенного состояния.

Анализ этих выражений показывает, что при условии (а) периодические давления (1) генерируют в стратифицированной по закону (2) жидкости только поверхностные прогрессивные волны. Деформация элементов возникающих волн за счет неоднородности не превосходит для малых значений ξ_1, ξ_2 одного процента.

При условии (б) уравнение $\Delta(r) = 0$ имеет бесконечное число действительных корней $\pm r_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В этом случае находим

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} A(r_n, z) \cos \alpha_n, \quad \zeta_1 = -\frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} A(r_n, 0) \sin \alpha_n,$$

$$\zeta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A(r_n, -H_1) \sin \alpha_n, \quad \rho = -\delta \rho(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\eta^2} A_2(r_n, z) \sin \alpha_n, \quad (7)$$

$$\alpha_n = r_n R - \delta t - \pi/4, \quad \eta_n = \delta r_n / \sqrt{\delta^2 - 4\omega^2}.$$

Здесь $A(r, z)$ то же, что и в (6), а в $\psi(r, z)$ при $\tilde{\kappa}_i < 0$ гиперболические функции, содержащие в аргументе y_i ($i = 1, 2$), следует заменить на тригонометрические. Отсюда видно, что при $\delta \gg 2\omega$, $\kappa_1 < \kappa_2$ ($\kappa_1 \neq 0$) внутренние волны, генерируемые на частотах $(\kappa_1 g)^{1/2} \leq \delta < (\kappa_2 g)^{1/2}$, обусловлены

исключительно наличием стратификации нижнего слоя. Причем на частотах $2\omega < \bar{b} < (\kappa_2 g)^{1/2}$ внутренние волны генерируются и тогда, когда верхний слой однородный ($\kappa_1 = 0$).

Для $\bar{b} > 2\omega$, $\kappa_2 < \kappa_1$ ($\kappa_2 \neq 0$) генерация внутренних волн на частотах $(\kappa_2 g)^{1/2} \leq \bar{b} < (\kappa_1 g)^{1/2}$ обусловлена неоднородностью верхнего слоя, а при $2\omega < \bar{b} < (\kappa_1 g)^{1/2}$ внутренние волны возникают и в случае $\varepsilon_2 = 0$.

Если атмосферные возмущения имеют вид

$$p_0 = \alpha f(x) \cos \bar{b}t, \quad (8)$$

то для w , $l_{1,2}$, ρ при выполнении неравенства (а) справедливы выражения (6), а при выполнении неравенства (б) - выражения (7), где

$$\alpha_0 = r_0 x - \bar{b}t, \quad \alpha_n = r_n x - \bar{b}t,$$

$$A(r, z) = \frac{\alpha \sqrt{2\pi}}{g_0 \bar{b}} \frac{\psi(r, z)}{\Delta'(r)} \bar{f}(r), \quad \bar{f}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-urx) dx.$$

Горизонтальную составляющую скорости плоских волн находим соответственно по формуле

$$u = -\frac{1}{r_0} A_z(r_0, z) \sin \alpha_0 \quad (9)$$

или

$$u = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n} A_z(r_n, z) \sin \alpha_n$$

Для исследования влияния стратификации верхнего и нижнего слоев жидкости на элементы незатухающих с расстоянием волн, генерируемых давлениями (8), были проведены численные расчеты при

$$0 < \varepsilon_1 \leq 5 \cdot 10^{-3}, \quad 0 \leq \varepsilon_2 \leq 5 \cdot 10^{-3}, \quad 2\omega < \bar{b} \leq 10^{-1} \sqrt{g/2H_1},$$

$$H_1 = 80 \text{ м}, \quad H_2 = 2 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad 2\omega = 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}. \quad (10)$$

Расчеты показали, что увеличение стратификации как верхнего, так и нижнего слоев приводит к росту фазовых скоростей $v_n = \bar{b}/r_n$ и длин $\lambda_n = 2\pi/r_n$ внутренних волн-гармоник ($n = 1, 2, 3 \dots$). Причем чем больше ε_2 тем влияние изменения ε_1 уменьшается. Это иллюстрируется таблицей, где для каждого ε_1 верхняя строка - λ_1 , а нижняя - λ_2 при $\tau = 2\pi/\bar{b} = 6$ ч. Если для $\varepsilon_2 = 10^{-4}$ длины λ_1 и λ_2 первых двух внутренних волн-гармоник при изме-

Таблица
Влияние перепада плотности на длины волн
первых двух внутренних волн-гармоник

$\epsilon_1 \cdot 10^3 \backslash \epsilon_2 \cdot 10^3$	0	0,1	0,5	1	2	5
0	- -	9887,1 4721,8	22671 11835	32371 16185	45906 23003	72769 36511
1	12289 4158,9	12895 8820,2	23003 13165	32539 16746	46176 23259	73023 36511
2	17444 5924,5	17740 9022,9	23609 16927	32879 18690	46176 23877	72938 36725
5	25665 9331,3	27788 9617,1	29209 21073	34316 28058	46865 28416	73193 37831

нению ϵ_1 , от нуля до $5 \cdot 10^{-3}$ увеличились соответственно в три и два раза, то при $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ увеличение составило только 0,6 и 3,6%. При фиксированном ϵ_1 , даже слабая стратификация нижнего слоя может существенно увеличить фазовые скорости и длины внутренних волн-гармоник по сравнению со случаем $\epsilon_2 = 0$. Действительно, в жидкости, для которой $\epsilon_1 = 10^{-3}$, $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, длины волн λ_1 и λ_2 примерно в 1,8 и 3,2 раза больше, чем в жидкости с $\epsilon_1 = 10^{-3}$, $\epsilon_2 = 0$. Кроме того, вычислялись величины

$$\tilde{A} = \sum_{n=0}^{\infty} |A(r_n, z)|, \quad \tilde{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{r_n} A_2(r_n, z) \right|, \quad (11)$$

представляющие собою верхние границы значений вертикальной (\tilde{A}) и горизонтальной (\tilde{B}) составляющих скорости, справедливые на заданном горизонте при любом x . Эти расчеты проводились для

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \pi x / 2\ell & |x| \leq \ell \\ 0 & |x| > \ell, \end{cases}$$

где $\ell = 10^4$ м.

Зависимость \tilde{A} и \tilde{B} от z приведена для $\tau = 6$ ч на рис. 1, где $A = 10^4 \alpha \tilde{A} / \rho_0 g$ (сплошные линии), $B = 10^4 \alpha \tilde{B} / \rho_0 g$ (пунктирные линии). Верхняя шкала отвечает \tilde{B} , а нижняя - \tilde{A} . Рис. 1,а соответствует значению $\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, а

рис. 1,б - значению $\epsilon_1 = 0$. Отсюда видно, что при $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 > 0$ (рис. 1,б) функция $\hat{A}(z)$ линейно возрастает с глубиной в верхнем слое. Основные изменения этой функции происходят в нижнем стратифицированном слое, где достигается ее максимальное значение. Увеличение ϵ_2 ($\epsilon_1 = 0$) сказывается на $A(z)$ не только при $-H \leq z \leq -H_1$, но и при $-H_1 \leq z < 0$. В частности, при изменении ϵ_2 от 10^{-4} до $5 \cdot 10^{-3}$ величина $A(-H_1)$ возросла в 14 раз. Однако влияние изменения стратификации нижнего слоя на поведение $A(z)$

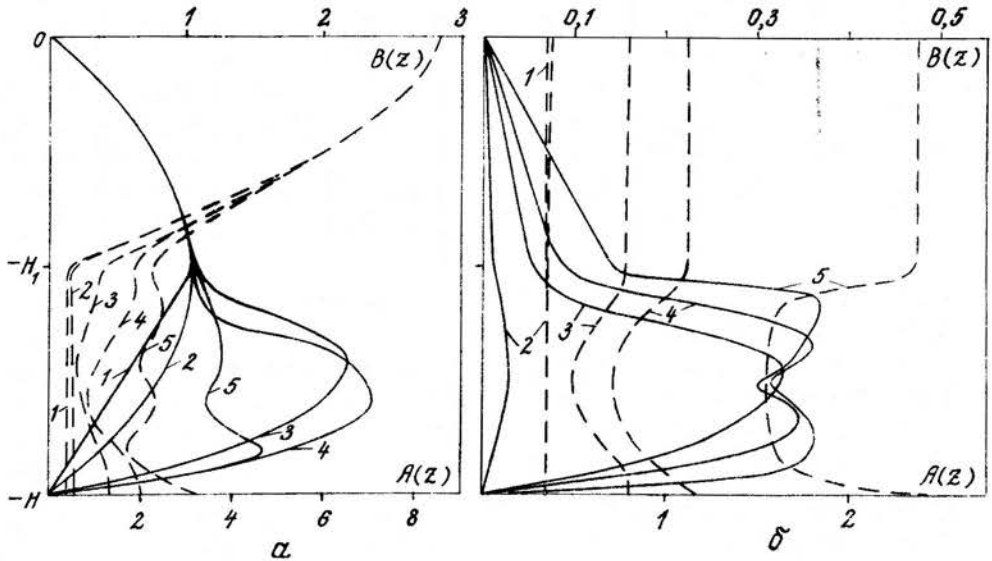


Рис. 1. Распределение $A(z)$ и $B(z)$ по глубине жидкости. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 отвечают значениям $\epsilon_2 \cdot 10^3$, равным соответственно 0; 0,1; 0,5; 1; 5

в области $-H_1 \leq z < 0$ уменьшается с ростом ϵ_1 . На рис. 1,а изображен именно тот случай ($\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}$), когда это влияние уже фактически отсутствует. Функция $A(z)$ при таком ϵ_1 и различных ϵ_2 ведет себя в верхнем слое так же, как и в случае однородного нижнего слоя [5]. В нижнем же слое поведение $A(z)$ для $\epsilon_2 > 0$ (рис. 1,а, кривые 2-5) принципиально иное, чем при $\epsilon_2 = 0$. В жидкости с $\epsilon_2 = 0$ и $\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ зависимость $A(z)$ в области $-H \leq z \leq -H_1$ близка к линейной, а $\max A(z) = A$ достигается на границе слоев. Если $\epsilon_2 > 0$ и $\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, то $A(z)$ принимает максимальное значение внутри нижнего слоя на глубине h^* . При этом величина A^* в случае $\epsilon \neq 0$ значительно больше, чем при $\epsilon_2 = 0$. В частности для $\epsilon_2 = 10^{-3}$

значение A^* в 2,2 раза больше, чем для $\epsilon_2 = 0$.

Если $\epsilon_2 > 0$, а $\epsilon_1 = 0$, то функция $B(z)$ в верхнем слое (рис. 1, б, пунктирные линии) не меняется с глубиной. Внутри же нижнего слоя ($-H < z < -H_1$) величина $B(z)$ меньше, чем $B(-H_1)$. Минимальное значение $B(z)$ в этом случае достигается в окрестности глубины $z = (H_1 - H)/2$, а $B(0) \approx B(-H_1) \approx B(-H)$. Если $\epsilon_1 \neq 0$ (рис. 1, а), то $B(z)$ убывает с глубиной в верхнем слое. В нижнем слое поведение $B(z)$ определяется перепадом плотности ϵ_2 . На заданном горизонте большему ϵ_2 (ϵ_1 фиксировано) отвечает большее значение B . Отметим, что в рассматриваемом случае ($\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, $0 \leq \epsilon_2 \leq 5 \cdot 10^{-3}$) выполняется неравенство $B(0) > B(-H)$.

Влияние изменения ϵ_2 на поведение $B(z)$ в области $-H_1 \leq z < 0$ аналогично влиянию на $A(z)$. Зависимость $B^* = \max B(z)$ (правая шкала) и $A^* = \max A(z)$ (левая шкала) от ϵ_2 изображена для $\tau = 6$ ч на рис. 2.

Отсюда видно, что наиболее резкие изменения функции $A^*(\epsilon_2)$ (сплошные линии) имеют место в области малых значений ϵ_2 . Кроме того, эти изменения существенно зависят от ϵ_1 . Например, для $\epsilon_1 = 10^{-3}$ функция $A^*(\epsilon_2)$ имеет максимум при $\epsilon_2 = 9 \cdot 10^{-4}$, а для $\epsilon_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ при $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$. В первом случае $\max A^*(\epsilon_2)$ в 1,8 раза больше, чем во втором. Величины этих максимумов превосходят $A^*(0)$ соответственно в 2,8 и 2,1 раза.

Функция $B^*(\epsilon_2)$ при изменении ϵ_2 от нуля до $5 \cdot 10^{-3}$ возрастает для $\epsilon_1 = 0$ и $\epsilon_1 = 10^{-3}$ соответственно в 6 и 1,9 раза, а для $\epsilon_1 \geq 2 \cdot 10^{-3}$ фактически остается постоянной.

Следует отметить, что если $\epsilon_1 > 0$ и $\epsilon_2 \geq 0$, то $\max B(z) = B^*$ достигается на свободной поверхности, а $\max A(z)$ - внутри жидкости на глубине h^* .

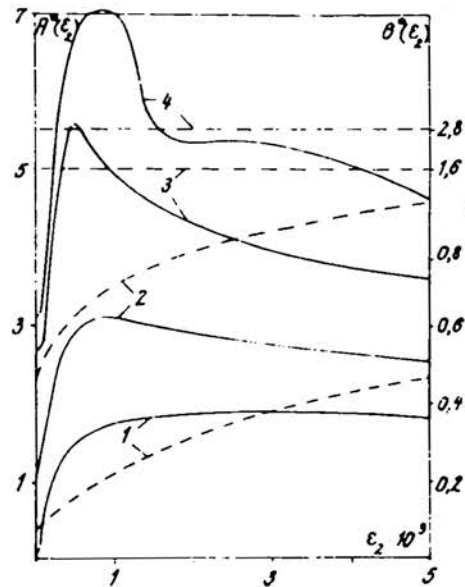


Рис. 2. Зависимость глубины залегания максимального значения вертикальной составляющей скорости от перепада плотности. Кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям $\epsilon_1 \cdot 10^{-3}$, равным соответственно 0, 1, 2, 5

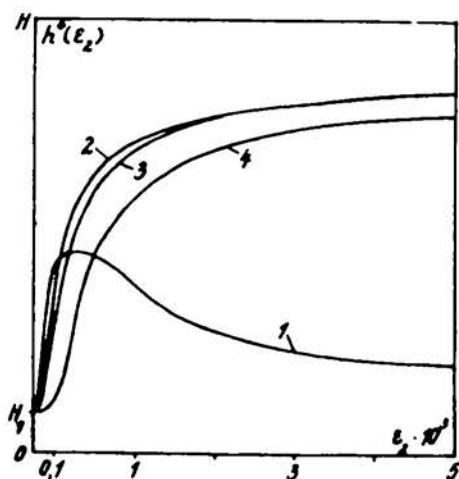


Рис. 3. Зависимость A^* и B^* от перепада плотности

Зависимость $h^*(\epsilon_2)$ для $\tau = 6$ ч. приведена на рис. 8, где кривые 1-4 отвечают тем же ϵ_1 , что и на рис. 2. Видно, что в однородной жидкости ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$) функция $A(z)$ достигает максимального значения на свободной поверхности. В двухслойной жидкости с однородным верхним и стратифицированным нижним слоями $h^*(\epsilon_2)$ возрастает от $h^* = 0$ до $h^* = 900$ м при изменении ϵ_2 от нуля до $5 \cdot 10^{-4}$. В области $5 \cdot 10^{-4} < \epsilon_2 < 5 \cdot 10^{-3}$ эта функция убывает, оста-

ваясь, однако, больше толщины верхнего слоя H_1 ($h^* = 320$ м для $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-3}$). В жидкости со стратифицированным верхним и однородным нижним слоями ($\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 = 0$) максимум $A(z)$ достигается на глубине $h^* = H_1$, т.е. на границе слоев. Если оба слоя стратифицированы ($\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 \neq 0$), то $h^* > H_1$, т.е. $\max A(z)$ достигается в нижнем слое. В этом случае при фиксированном $\epsilon_1 > 0$ увеличение ϵ_2 приведет к смещению положения максимального значения $A(z)$ в придонную область. Например, $h^* = 1,7 \cdot 10^3$ м при $\epsilon_1 = 10^{-3}$ и $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, даже слабая стратификация нижнего слоя может существенно изменить характер распределения полей скорости по глубине. Что касается распределения A^* и B^* по частотному спектру, то оно при учете стратификации нижнего слоя также существенно отличается от распределения в случае, когда этот слой однородный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М., ОНТИ, 1936.
2. Войт С.С. Волны на свободной поверхности и поверхности раздела от периодически действующего источника. - Труды МГИ АН СССР. Т. 24. М., 1960.
3. Черкасгов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. Киев, "Наукова думка", 1973.

4. Абрашина Н.Н., Черкесов Л.В. Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью. - В кн.: "Морские гидрофизические исследования", № 2(48). Севастополь, изд. МГИ АН УССР, 1970.
5. Букатов А.Е. О внутренних волнах в непрерывно стратифицированном океане. - В кн.: "Морские гидрофизические исследования", № 6(56). Севастополь, изд. МГИ АН УССР, 1971.
6. Fjeldstad I.E. Interne Wellen. Geofys. Publ., vol.10, No. 6, 1933.

A.E.BUKATOV, L.V.CHERKESOV

THE EFFECT OF DEEP STRATIFICATION ON INTERNAL WAVES

Internal waves generated by periodic atmospheric disturbances in a non-uniform sea are investigated. Density of sea water varies continually with depth according to the law corresponding to a two-layer density model. Both layers are exponentially stratified but coefficients of their stratification are different.

An analogous problem for a sea with the linear change in density over the whole depth is discussed in work [4] and for a two-layer sea with a uniform lower layer - in work [5].

Статья поступила в редакцию 27.06.1974 г.