Курсовая работа "О приведении системы 3 порядка к виду со столбцовым относительным порядком"

Перцева Анастасия, гр. 314

Рассмотрим линейную векторную квадратную динамическую систему третьего порядка вида

$$\begin{cases} x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t \\ y^t = Cx^t \end{cases} \tag{1}$$
$$t = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x^t \in \mathbf{R}^n$, $y^t \in \mathbf{R}^l$, $\xi^t \in \mathbf{R}^l$ - переменные;

$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbf{R}^{l\times n}$ - постоянные матрицы.

Определение. **Столбцовым относительным порядком** системы (1) в смысле Исидори называется такой вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$, для которого выполнены условия:

1. $CA^j B_i = 0, \quad j = 1, \dots, r_i - 2$
   $CA^(r_i - 1)B_i \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, l$
2. $|H(r_1, \dots, r_l)| = \begin{vmatrix} CA^{r_1-1}B_1 & \cdots & CA^{r_l-1}B_l \end{vmatrix} \neq 0,$

где B_i - i-й столбец матрицы B.

Определение. **Матрицей Розенброка** системы (1) называется следующая блочная матрица, зависящая от параметра z:

$$R(z) = \begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. **Инвариантные нули** системы (1) - все значения z, при которых матрица Розенброка $R(z)$ имеет неполный ранг.

Критерием обратимости для квадратных систем является отсутствие неустойчивых инвариантных нулей системы. Проанализируем для таких систем вопрос обращения, т.е. восстановления неизвестного входа по ее измеряемому выходу. Обращаемыми являются те обратимые системы, для которых выполнено определение относительного порядка по

Исидори. Поэтому в общем виде попробуем привести систему (1) к виду со столбцовым относительным порядком. Заметим, что далее рассматриваются только обратимые системы вида (1) (т.е. для которых определитель матрицы Розенброка не равен нулю), являющиеся, как следствие, управляемыми и наблюдаемыми.

Такую систему возможно привести к канонической форме управляемости невырожденным преобразованием координат.

После приведения к каноническому виду получаем матрицы A и B блочной структуры:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Невырожденным преобразованием выходов приведем матрицу C к ступенчатому виду. Получаем три возможные структуры матрицы C.

<u>Случай 1.</u>

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \end{pmatrix}.$$

Проверим 1 условие в определении столбцового относительного порядка для вектора $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$r_1 = 1: \ CB_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 1: \ CB_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получили ненулевые матрицы. Поэтому если вектор относительного порядка существует для данной системы, то он равен $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверим теперь 2 условие для него:

$$|H(1,1)| = \begin{vmatrix} CAB_1 & CAB_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow r_{\text{ОП}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Случай 2.</u>

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим 1 условие в определении столбцового относительного порядка для вектора $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$:

$$r_1 = 1:\ CB_1 = \begin{pmatrix}1 & c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$r_2 = 1:\ CB_2 = \begin{pmatrix}1 & c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{12}\\0\end{pmatrix}$$

Для этих значений 2 условие не выполнено:

$$|H(1,1)| = \begin{vmatrix}1 & c_{12}\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0.$$

Невырожденным преобразованием приведем матрицу B к виду $\tilde{B} = \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, где α - некоторое число.

Тогда $C\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $C\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix}1 & c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{12}+\alpha\\0\end{pmatrix}$. Возьмем $\alpha = -c_{12}$, чтобы первый элемент вектора $C\tilde{B}_2$ обратился в нуль: $C\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Так как вектор получился нулевым, вычисляем следующий:

$$r_2 = 2:\ CA\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix}1 & c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & a_{13}\\ a_{21} & 0 & a_{23}\\ a_{31} & 1 & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-c_{12}\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}+a_{21}c_{12} & 0 & a_{13}+a_{23}c_{12}\\ a_{31} & 1 & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-c_{12}\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-c_{12}(a_{11}+a_{21}c_{12})\\ 1-a_{31}c_{12}\end{pmatrix}.$$

В интересующих нас случаях $1-a_{31}c_{12}\neq 0$ (пояснение представлено ниже), поэтому вектор $CA\tilde{B}_2$ ненулевой, и возможный вектор относительного порядка $r_{\text{ОП}} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$.
Проверим условие 2:

$$|H(1,2)| = \begin{vmatrix}1 & -c_{12}(a_{11}+a_{21}c_{12})\\ 0 & 1-a_{31}c_{12}\end{vmatrix} = 1-a_{31}c_{12}.$$

Покажем, что если $1-a_{31}c_{12} = 0$, то определитель матрицы Розенброка также равен нулю, а значит система необратима и не представляет интереса для исследования:

$$|R(z)| = \begin{vmatrix} z-a_{11} & 0 & -a_{13} & -1 & c_{12} \\ -a_{21} & z & -a_{23} & 0 & -1 \\ -a_{31} & -1 & z-a_{33} & 0 & 0 \\ 1 & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 - a_{31}c_{12} = |H(r)|\,.$$

<u>Случай 3.</u>

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим 1 условие в определении столбцового относительного порядка для вектора $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$r_1 = 1: \; CB_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = 2: \; CAB_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Ниже будет показано, что при $|R(z)| \neq 0$ этот вектор ненулевой.

$$r_2 = 1: \; CB_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Условие 2:

$$|H(2,1)| = \begin{vmatrix} a_{21} & 1 \\ a_{31} & 0 \end{vmatrix} = -a_{31}.$$

Теперь вычислим матрицу Розенброка для этого случая:

$$|R(z)| = \begin{vmatrix} z-a_{11} & 0 & -a_{13} & 1 & 0 \\ -a_{21} & z & -a_{23} & 0 & 1 \\ -a_{31} & -1 & z-a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{31} = |H(r)|.$$

Таким образом, $|H(r)|$ и $|R(z)|$ обращаются в нуль одновременно, что значит, что система необращаема только когда необратима.