АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК, 2013, том 47, № 2, с. 112–121

УДК 521.13

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛАНЕТНЫХ ОРБИТ

© 2013 г. В. В. Чазов
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Поступила в редакцию 24.05.2011 г.

Выполнено разложение обратного расстояния между двумя материальными точками, обращающимися вокруг центрального тела и находящимися на непересекающихся орбитах. Разложение получено с точностью до десятого порядка относительно малых параметров – эксцентриситетов и синусов углов наклонений орбит объектов. Результат стал основой операции осреднения возмущающих функций в системе восьми больших планет Солнечной системы и численного интегрирования осредненных уравнений движения. В осредненный гамильтониан включены слагаемые, имеющие период изменения более 200 лет. Численное интегрирование 48 дифференциальных уравнений первого порядка было выполнено с шагом 100 лет на двух интервалах от момента начала нашей эры: 25 млн. лет вперед и 25 млн. лет назад по времени. Для представления результатов вычислений разработан Интернет-ресурс (URL: http://vadimchazov.narod.ru/secequat.htm). На странице в Интернете содержатся исходные тексты вычислительных процедур, выполняемые модули программ, результаты расчетов в графическом виде, текстовые наборы данных с начальными условиями, таблицами разложения обратного расстояния между двумя материальными точками и таблицами разложения осредненной возмущающей функции для 8 больших планет Солнечной системы.

DOI: 10.7868/S0320930X13010015

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Первая модель вековых возмущений планетных орбит была построена Лагранжем, оригинальный подход автора воспроизведен в пятом томе собрания сочинений (Lagrange, 1870). В разложении возмущающей функции задачи присутствует лишь вековая часть, в которой отброшены все слагаемые, пропорциональные эксцентриситетам и углам наклонений небесных тел, возведенным в третью и более высокие степени. Большие полуоси орбит являются постоянными величинами. В середине двадцатого века такой подход был дополнен решением (Brouwer, van Woerkom, 1950), учитывающим соизмеримость средних движений Юпитера и Сатурна. Анолик и др. в работе (1969) применили метод канонических преобразований и существенно улучшили этот результат: эмпирические соотношения были заменены аналитически обоснованными формулами. Выводы, сделанные Лагранжем, получили подтверждение: эксцентриситеты и углы наклонений планетных орбит изменяются периодическим образом и остаются малыми на любых интервалах времени. В статье (Cohen и др., 1973) модель Brouwer и Woerkom была представлена в графическом виде на интервале 10 млн. лет.

В статье (Laskar, 1990) были представлены результаты исследований вековой эволюции орбитальных элементов больших планет, исключая Плутон, на больших интервалах времени. В разложении исходной пертурбационной функции были оставлены члены, содержащие эксцентриситеты и синусы половинных углов наклонений до пятой степени включительно. Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию элементов планетных орбит, из возмущающей функции были исключены слагаемые, зависящие от средних аномалий орбит. В результате этой операции большие полуоси планетных орбит получили фиксированные значения. Система осредненных уравнений интегрировалась численным образом на интервалах времени, составляющих несколько миллиардов лет. Особенность метода исследований состояла в выполнении большого числа однотипных расчетов. Очередной вариант отличался от предыдущего малыми случайными поправками в начальные условия – числовые значения элементов планетных орбит. Результаты численных экспериментов вступают в противоречие с выводами классической модели вековых возмущений. На интервалах времени более 5 млн. лет эксцентриситет орбиты Меркурия неустойчив по отношению к начальным данным (Laskar, 1997). На рубеже 3 миллиардов лет эксцентриситет орбиты Меркурия может стать больше 0.5. Laskar (1994) подчеркивает, что вероятность развития событий по такому сценарию достаточно велика.

Кузнецов и Холшевников (2004) получили гамильтониан двупланетной задачи с точностью до второго порядка малости относительно малого параметра, отношения массы Юпитера к массе Солнца. Гамильтониан содержит члены, пропорциональные эксцентриситетам и синусам половинных углов наклонений, возведенных в степени, от первой до шестой. Модель была использована для исследования эволюции системы Солнце–Юпитер–Сатурн (Кузнецов, Холшевников, 2006). Было получено численное решение осредненной задачи на промежутке времени, равном десяти миллиардам лет. Основной вывод: в рассматриваемой модели эксцентриситеты и углы наклонений орбит планет сохраняют малые значения и не испытывают резких изменений.

В цитированных работах численным методом исследовалась эволюционная система дифференциальных уравнений. Преимущества такого подхода для решения ряда задач подчеркивает Лидов в обзорном докладе (1978). Правые части осредненных уравнений движения не содержат быстрых переменных. Численное интегрирование таких дифференциальных уравнений выполняют с большим шагом, порядка сотен лет. Вашковьяк (2005), Вашковьяк и Тесленко (2008а, 2008б) применили этот метод для исследования эволюции орбит далеких спутников планет.

Модель движения развивалась и в других направлениях: с одной стороны, проводилось численное интегрирование исходных уравнений движения небесных тел в прямоугольных координатах, и, с другой стороны, были построены аналитические теории движения планет.

Современные численные модели движения небесных тел Солнечной системы были представлены в отчете Standish и др. (1998) и в статье Питьевой (2005). Начальные параметры моделей получены на основе наблюдений. Важнейшим практическим результатом стало создание численных эфемерид в электронном виде. Наборы данных удобны в применении и доступны пользователям Интернета. На интервалах времени от 100 до 6000 лет эти модели являются эталоном для сравнения с результатами других исследований.

Следует отметить статью (Quinn и др., 1991) и публикацию (Мельников, Смульский, 2004). В этих работах выполнено численное интегрирование уравнений движения планет Солнечной системы на промежутке времени несколько млн. лет. Основное внимание Мельников и Смульский (2004) сосредоточили на анализе эволюции орбитальных элементов Земли, а Quinn и др. (1991) изучают прецессию оси вращения Земли.

Ипатов (2000) применил специальный симплектический интегратор для численного интегрирования в прямоугольных координатах уравнений движения больших планет Солнечной системы на интервале 20 млн. лет и представил результаты расчетов в графическом виде.

Подробный обзор как методов построения моделей движения планет Солнечной системы, так и результатов расчетов, дан в статье (Холшевников, Кузнецов, 2007).

В работах (Laskar, 1990) и (Кузнецов, Холшевников, 2004) разложение возмущающей функции было выполнено на компьютере с помощью специальных процессоров для перевода математических формул в вычислительный код.

В статье (Герасимов и др., 2000) было найдено другое решение вычислительных проблем. В качестве основы представления возмущающей функции предложено использовать элементарное слагаемое, для которого определены алгоритмы сложения, умножения, интегрирования и дифференцирования. Показано, что в результате применения этих операций внешний вид элементарного слагаемого не меняется. Показано также, что для каждой планеты возмущающая функция, обусловленная действием остальных планет, функция преобразования для вычисления короткопериодических неравенств и осредненный гамильтониан являются суммой элементарных слагаемых. В предлагаемом исследовании на основе подхода, предложенного в работе (Герасимов и др., 2000), решены следующие задачи:

1. Получено разложение обратного расстояния между планетами в буквенном виде как функция кеплеровских элементов орбит.

2. Для каждой планеты получены осредненный гамильтониан и функция преобразования для определения короткопериодических неравенств.

3. Выполнено численное интегрирование системы 48 осредненных дифференциальных уравнений первого порядка на большом интервале времени.

4. Исходные тексты вычислительных процедур, выполняемые модули программ, текстовые наборы данных и результаты вычислений в графическом виде представлены на Интернет-ресурсе.

Таблица 1 содержит сведения о величине шага численного интегрирования, использованного в цитированных исследованиях и в данной работе.

ОБРАТНОЕ РАССТОЯНИЕ

Одно из отличий метода построения модели движения планет Солнечной системы, предложенного в работе (Герасимов и др., 2000), заключается в способе представления обратного расстояния между планетами. Последовательность математических операций, необходимых для со-

Таблица 1. Величина шага численного интегрирования

Автор	Тип уравнений	Интервал	Шаг
Berger, 1977	осредненные	10^6 лет	1000 лет
Laskar, 1994	осредненные	10^{11} лет	250 лет
Standish и др., 1998	исходные	6000 лет	0.08 суток
Quinn и др., 1991	исходные	3×10^6 лет	0.75 суток
Мельников и др., 2004	исходные	3×10^6 лет	0.75 суток
Кузнецов и др., 2004	осредненные	10^{10} лет	1000 лет
Данная статья	осредненные	50×10^6 лет	100 лет

ставления вычислительных процедур, дана в этом разделе.

Пусть x, y, z и x', y', z' – гелиоцентрические эклиптические положения двух планет, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ – гелиоцентрические расстояния, причем $r < r'$, а $\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ – расстояние между планетами.

Обратное расстояние можно записать в виде суммы (Брумберг, 1980)

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n\left(\frac{x}{r}\frac{x'}{r'} + \frac{y}{r}\frac{y'}{r'} + \frac{z}{r}\frac{z'}{r'}\right), \tag{1}$$

где $P_n(x)$ – полином Лежандра порядка n. Верхний предел суммы, равный бесконечности, следует заменить конечным числом J. Способ выбора J обоснован в статье (Герасимов и др., 2000). С большим запасом по точности можно положить $J = 27$.

Условие $r < r'$ является обязательным для разложения обратного расстояния. В случае $r' < r$ в формуле (1) надо поменять местами величины со штрихом и величины без штриха.

Кеплеровские элементы орбиты: большая полуось a, эксцентриситет e, угол наклонения i, средняя аномалия l – относятся к первой планете, штрих отличает аналогичные параметры для второй планеты, более удаленной от центрального тела. При разложении обратного расстояния вместо долготы восходящего узла Ω и аргумента перигелия ω будут использованы угловые переменные h и g, смещенные на четверть круга $h = \Omega - 90^\circ$, $g = \omega + 90^\circ$, а синус угла наклонения будет обозначен $s = \sin(i)$. Величины e и s, характеризующие орбиту каждой из планет, будем считать малыми параметрами. Разложение обратного расстояния будет получено с точностью до десятой степени относительно этих величин.

Рассмотрим элементарное слагаемое, в котором через A обозначено числовое значение амплитуды, показатели степени $i_1, \ldots, i_6$ и индексы $j_1, \ldots, j_6$ могут принимать целые положительные и отрицательные значения и нуль:

$$\begin{gathered} A a^{i_1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \times \\ \times (j_1 l + j_2 g + j_3 h + j_4 l' + j_5 g' + j_6 h'). \end{gathered} \tag{2}$$

Условие, ограничивающее точность вычислений относительно малых величин целым положительным числом I, принимает вид

$$i_3 + i_4 + i_5 + i_6 \le I.$$

Следуя работе (Герасимов и др., 2000), выделим в формуле (1) начальные составляющие и представим их как сумму элементарных слагаемых. Далее, используя алгоритмы сложения и умножения элементарных слагаемых, найдем формулы для рекуррентного вычисления всего выражения (1).

Член суммы (1), имеющий порядок n, запишем следующим образом:

$$\frac{1}{r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\Phi),$$

где

$$\cos\Phi = \frac{x}{r}\frac{x'}{r'} + \frac{y}{r}\frac{y'}{r'} + \frac{z}{r}\frac{z'}{r'}.$$

Обозначая

$$B_n = \frac{1}{r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^n,$$

получим начальные выражения

$$B_0 = \frac{1}{r'}, \quad B_1 = \left(\frac{r}{r'}\right)B_0,$$

и рекуррентную формулу

$$B_n = \left(\frac{r}{r'}\right)B_{n-1}. \tag{3}$$

Начальные выражения и рекуррентная формула для полиномов Лежандра имеют вид (Бронштейн, Семендяев, 1981)

$$\begin{gathered} P_0(\cos\Phi) = 1, \quad P_1(\cos\Phi) = \cos\Phi, \\ P_n(\cos\Phi) = \frac{2n-1}{n}\cos\Phi P_{n-1}(\cos\Phi) - \\ - \frac{n-1}{n}P_{n-2}(\cos\Phi). \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть ν – истинная аномалия. С помощью функций Бесселя $J_k(x)$ с точностью до десятой степени относительно параметра e выполним разложения (Дубошин, 1975):

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} &= 1 + \frac{1}{2}e^2 + e\sum_{k=1}^{10}\frac{J_{k+1}(ke) - J_{k-1}(ke)}{k}\cos(kl),\\ \frac{a}{r} &= 1 + 2\sum_{k=1}^{10} J_k(ke)\cos(kl),\\ \cos\nu &= -e + 2(1-e^2)\sum_{k=1}^{11}\frac{J_k(ke)}{e}\cos(kl),\\ \sin\nu &= \sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{10}\left[J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)\right]\sin(kl).\end{aligned} \tag{5}$$

Для функций Бесселя справедливо разложение (Дубошин, 1975):

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}.$$

Начальные выражения (5) представляют собой ряды, состоящие из элементарных слагаемых вида (2).

На основе формул кеплеровского движения (Дубошин, 1975) получим

$$\begin{aligned}\frac{x}{r} &= \cos(\nu+g+h) - \frac{1}{2}(1-\cos i)\cos(\nu+g-h) -\\ &\quad - \frac{1}{2}(1-\cos i)\cos(\nu+g+h),\\ \frac{y}{r} &= \sin(\nu+g+h) + \frac{1}{2}(1-\cos i)\sin(\nu+g-h) -\\ &\quad - \frac{1}{2}(1-\cos i)\sin(\nu+g+h),\\ \frac{z}{r} &= -s\cos(\nu+g).\end{aligned} \tag{6}$$

С точностью до десятой степени относительно параметров e и s запишем

$$\begin{aligned}\sqrt{1-e^2} &= 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 - \frac{7}{256}e^{10},\\ 1-\cos i &= \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4 + \frac{1}{16}s^6 + \frac{5}{128}s^8 + \frac{7}{256}s^{10}.\end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя в (6) разложения $\cos\nu$, $\sin\nu$ из (5) и разложения (7), вычислим начальные выражения (x/r), (y/r), (z/r). После этого с помощью операций умножения и сложения составим сумму $\cos\Phi$. Начальные выражения, необходимые для проведения рекурсии по формулам (3) и (4), являются рядами, состоящими из слагаемых вида (2) (см. табл. 2).

В формуле (1) каждый член порядка n образован произведением двух рядов, составляющих соответственно функции B_n и $P_n(\cos\Phi)$. С ростом n число слагаемых увеличивается. Для ограничения числа слагаемых в алгоритме использован следующий прием: с ростом n значение числа I, регулирующего точность вычислений, убывает. Табл. 3 содержит сведения о количестве слагаемых для некоторых значений числа n.

Таблица 2. Количество слагаемых в начальных выражениях

I	r/a	a/r	$\cos\nu$	$\sin\nu$	x/r	y/r	z/r	$\cos\Phi$
4	7	8	10	9	98	98	14	162
8	21	22	26	25	462	462	42	2248
10	31	32	37	36	682	682	62	5955

Таблица 3. Количество слагаемых в разложении обратного расстояния

n	2	4	6	12	16	27
I	10	8	8	6	4	4
B_n	481	250	254	110	38	38
P_n	7216	8171	14853	8572	2015	3487
$B_n \times P_n$	13746	11318	18871	8855	2052	3487

Следует заметить, что начальные выражения, а также ряды для величин B_n, $P_n(\cos\Phi)$ и произведения $B_n \times P_n(\cos\Phi)$, справедливы для любой пары планет при выполнении следующих условий: расстояние одной из планет от центрального тела всегда меньше аналогичного расстояния другой планеты, эксцентриситеты и синусы углов наклонений орбит планет являются малыми параметрами.

В результате расчетов на основе алгоритма были получены разложения функций

$$\frac{1}{r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\Phi)$$

для всех значений индекса от $n = 0$ до $n = 27$. Функции являются суммами элементарных слагаемых и зависят от шести кеплеровских элементов первой планеты и шести кеплеровских элементов второй планеты. Полученные ряды были использованы при разложении пертурбационных функций каждой из восьми больших планет Солнечной системы. В следующих разделах величины без штриха и со штрихом заменены на величины с индексами i и j, индексы принимают целые значения от 1 до 8.

ПЕРТУРБАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

В относительной системе отсчета (начало координат в центре Солнца с массой m_0) для каждой возмущаемой планеты с номером i и массой m_i пертурбационную функцию запишем в виде

$$R_i = f\sum_{j=1}^{8} m_j \left[\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{1}{r_j}\frac{r_i}{r_j}\cos\Phi_{ij}\right] - f\sum_{j=1}^{i-1} m_j \frac{1}{r_i}, \quad (8)$$

где f — гравитационная постоянная, m_j — масса возмущающей планеты, r_j — расстояние от центрального тела, $r_i < r_j$ при $i < j$, Δ_{ij} — расстояние между планетами, причем $j \neq i$.

Если $r_i < r_j$, то первое слагаемое в разложении обратного расстояния (1) не принимается во внимание, а второй член ряда (1) взаимно уничтожается с косвенным слагаемым в (8).

При выполнении условия $r_j < r_i$ разложение обратного расстояния выполняется относительно величины r_j/r_i, косвенная часть в (8) по абсолютной величине превосходит второе слагаемое разложения (1), а первое слагаемое ряда (1) для всех $j < i$ учитывают прибавлением к выражению $f(m_0 + m_i)/r_i$ величины fm_j/r_i и вычитанием этой величины в выражении (8). С учетом этого обстоятельства промежуточный потенциал планеты с номером i в относительной системе отсчета имеет вид:

$$U_i = \frac{f\left(m_0 + \sum_{j=1}^{i} m_j\right)}{r_i}. \quad (9)$$

Промежуточному потенциалу соответствует промежуточная кеплеровская орбита. Среднее движение n_i промежуточной орбиты связано с большой полуосью a_i формулой

$$n_i^2 a_i^3 = f\left(m_0 + \sum_{j=1}^{i} m_j\right). \quad (10)$$

Зависимость канонических элементов L_i, G_i, H_i от большой полуоси, эксцентриситета e_i и угла наклонения i_i орбиты определена соотношениями

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{f\left(m_0 + \sum_{j=1}^{i} m_j\right) a_i}, \\ G_i &= L_i\sqrt{1 - e_i^2}, \\ H_i &= G_i \cos i_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Гамильтониан промежуточной орбиты K_i и частная производная от этой величины по переменной действия L_i имеют вид:

$$K_i = \frac{\left[f\left(m_0 + \sum_{j=1}^{i} m_j\right)\right]^2}{2L_i^2}, \quad n_i = -\frac{\partial K_i}{\partial L_i}. \quad (12)$$

Промежуточная орбита характеризуется постоянными значениями параметров (11) и угловых величин g_i, h_i. Средняя аномалия l_i изменяется с частотой n_i.

В возмущенном движении все параметры становятся оскулирующими. Канонические уравнения возмущенного движения планет для значений индекса $i = 1, \ldots, 8$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R_i}{\partial l_i}, \quad \frac{dl_i}{dt} = n_i - \frac{\partial R_i}{\partial L_i}, \\ \frac{dG_i}{dt} &= \frac{\partial R_i}{\partial g_i}, \quad \frac{dg_i}{dt} = -\frac{\partial R_i}{\partial G_i}, \\ \frac{dH_i}{dt} &= \frac{\partial R_i}{\partial h_i}, \quad \frac{dh_i}{dt} = -\frac{\partial R_i}{\partial H_i}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R_i &= f\sum_{j=1}^{i-1} m_j \frac{1}{r_i}\sum_{n=2}^{J}\left(\frac{r_j}{r_i}\right)^n P_n(\cos\Phi_{ij}) + \\ &+ f\sum_{j=i+1}^{8} m_j \frac{1}{r_j}\sum_{n=2}^{J}\left(\frac{r_i}{r_j}\right)^n P_n(\cos\Phi_{ij}) + \\ &+ f\sum_{j=1}^{i-1} m_j \left[\frac{r_j}{r_i^2}\cos\Phi_{ij} - \frac{r_i}{r_j^2}\cos\Phi_{ij}\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В табл. 4 представлены результаты разложения пертурбационной функции в ряды, представляющие собой суммы элементарных слагаемых (2). Буквенное разложение R_i, $i = 1, \ldots, 8$, получено на основе результатов применения алгоритма, описанного в предыдущем разделе. Значения возмущающих масс планет m_j в единицах массы Солнца и средние значения больших полуосей орбит планет a_i и a_j, измеряемые в астрономических единицах, были использованы только для оценки амплитуды каждого члена ряда (14). Слагаемые, амплитуда которых после умножения на соответствующий фактор превысила бы по модулю 10^{-16}, были включены в разложение. В табл. 4 даны число членов ряда для всех возможных пар планет и общая сумма слагаемых для каждой планеты.

ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

При решении уравнений возмущенного движения (13) в первом приближении достаточно выделить в каждом из рядов, полученных для пертурбационных функций R_i, вековые и долгопериодические слагаемые F_i, а оставшуюся часть, равную $R_i - F_i$, проинтегрировать по времени (Лидов, 1978). Величина F_i называется осредненной пертурбационной функцией. Интеграл по времени

Таблица 4. Количество слагаемых в разложении пертурбационной функции

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	–	146964	122576	87049	70757	38746	11601	6812	**484505**
2	150136	–	148809	126316	94843	61527	20549	12526	**614706**
3	122088	159592	–	147613	108398	73565	28544	16947	**656747**
4	90699	147152	159502	–	120412	92604	43764	25811	**679944**
5	20394	66375	87042	96861	–	148561	106544	78664	**604441**
6	13395	34196	48550	45622	159539	–	142116	111768	**555186**
7	11283	17881	22815	18327	125859	157375	–	148584	**502124**
8	10904	13932	16223	13499	108278	127433	159344	–	**449613**

Таблица 5. Количество слагаемых осредненной пертурбационной функции

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	–	1729	1729	1729	1729	1729	1729	1729	**12103**
2	1729	–	1755	1729	1729	1729	1729	1729	**12129**
3	1729	1755	–	1729	1729	1729	1729	1729	**12129**
4	1729	1729	1729	–	1729	1729	1729	1729	**12103**
5	1729	1729	1729	1729	–	2775	2147	1729	**13567**
6	1729	1729	1729	1729	2827	–	5745	3559	**19047**
7	1729	1729	1729	1729	2199	6169	–	8110	**23394**
8	1729	1729	1729	1729	1729	3767	8652	–	**21064**

от слагаемого (2) в силу уравнений промежуточного движения имеет вид:

$$\frac{1}{j_1 n + j_4 n'} A a^{i_1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \begin{Bmatrix} +\sin \\ -\cos \end{Bmatrix} \times \\ \times (j_1 l + j_2 g + j_3 h + j_4 l' + j_5 g' + j_6 h'). \tag{15}$$

Период изменения в годах для значений $j_1 \neq 0$ или $j_4 \neq 0$ равен

$$p = \frac{2\pi}{365.25(j_1 n + j_4 n')}.$$

Осредненную функцию F_i составляют слагаемые, для которых выполняется одно из условий: значения индексов $j_1 = j_4 = 0$ или величина периода p превышает 200 лет. В первом случае слагаемое называется вековым, а во втором – долгопериодическим. Предельный период для короткопериодических членов, равный 200 годам, выбран так, чтобы его значение превышало период обращения самой дальней планеты Нептун. При таком выборе, например, члены, удовлетворяющие так называемому большому неравенству Венеры, попадают в осредненный гамильтониан.

Таблица 5 содержит данные о количестве слагаемых, составляющих осредненную пертурбационную функцию для всех возможных пар планет, и общую сумму слагаемых для каждой планеты.

Для каждой пары планет с точностью до десятого порядка относительно малых параметров условие $j_1 = j_4 = 0$ выполняется для 1729 вековых членов. Для остальных слагаемых обязательно $j_1 \neq 0$ и $j_4 \neq 0$.

В случае Меркурия и Марса осредненные функции, обусловленные возмущающим действием других планет, содержат только вековые слагаемые.

Для пары Венера и Земля, например, осредненная возмущающая функция кроме вековых членов содержит 26 долгопериодических слагаемых. В этих слагаемых значение индекса $j_1 = 8$ относится к планете Венера, для планеты Земля индекс $j_4 = -13$.

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Юпитер и Сатурн зависит от аргументов вида $2l_5 + j_2 g_5 + j_3 h_5 - 5l_6 + j_5 g_6 + j_6 h_6$.

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Юпитер и Уран зависит от аргументов вида $l_5 + j_2 g_5 + j_3 h_5 - 7l_7 + j_5 g_7 + j_6 h_7$.

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Сатурн и Уран зависит от аргументов вида $l_6 + j_2g_6 + j_3h_6 - 3l_7 + j_5g_7 + j_6h_7$.

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Сатурн и Нептун зависит от аргументов вида $l_6 + j_2g_6 + j_3h_6 + j_4l_8 + j_5g_8 + j_6h_8$, где $j_4 = -5$ или $j_4 = -6$.

Индексы j_1 и j_4 долгопериодических слагаемых осредненной пертурбационной функции для пары планет-гигантов Уран и Нептун принимают значения $j_1 = 1$ и $j_4 = -2$, $j_1 = 2$ и $j_4 = -4$ или $j_1 = 3$ и $j_4 = -6$.

Величина R_i является функцией оскулирующих параметров орбиты, а функция F_i с точностью до первого порядка относительно малого параметра зависит от сглаженных элементов орбиты. Сглаженные параметры отличаются от оскулирующих на величину короткопериодических неравенств. Термин "сглаженные элементы" не является общепринятым. В обзоре Холшевникова и Кузнецова (2007) и во многих других публикациях было использовано название "средние элементы" орбиты. Определение "сглаженные" в данной статье подчеркивает тот факт, что осредненные возмущающие функции кроме вековых членов содержат долгопериодические слагаемые, обусловленные соизмеримостями средних движений планет-гигантов, а также пары планета Венера и планета Земля.

Заменим в (13) R_i на F_i, а оскулирующие элементы орбиты на сглаженные, тогда уравнения в первом приближении сохраняют каноническую форму (Лидов, 1978). Численное интегрирование осредненных уравнений позволяет получить эволюцию сглаженных параметров движения.

Эксцентриситеты и углы наклонения орбит некоторых планет могут достигать очень малых значений (Brouwer, van Woerkom, 1950). По этой причине численное интегрирование осредненных уравнений движения следует выполнять на основе несингулярных параметров движения:

$$\begin{gathered} a_i(t), \\ l_i(t) + g_i(t) + h_i(t), \\ e_i(t)\cos[g_i(t) + h_i(t)], \\ e_i(t)\sin[g_i(t) + h_i(t)], \\ s_i(t)\cos[h_i(t)], \\ s_i(t)\sin[h_i(t)]. \end{gathered} \tag{16}$$

Осредненные уравнения движения, записанные с помощью несингулярных элементов, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial L_i}\frac{\partial F_i}{\partial l_i}, \\ \frac{d(l_i + g_i + h_i)}{dt} = n_i - \frac{\partial F_i}{\partial L_i} - \frac{\partial F_i}{\partial G_i} - \frac{\partial F_i}{\partial H_i}, \\ \frac{d[e_i\cos(g_i + h_i)]}{dt} = \frac{de_i}{dt}\cos(g_i + h_i) + \\ + e_i\sin(g_i + h_i)\left[\frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i}\right], \\ \frac{d[e_i\sin(g_i + h_i)]}{dt} = \frac{de_i}{dt}\sin(g_i + h_i) - \\ - e_i\cos(g_i + h_i)\left[\frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i}\right], \\ \frac{d[s_i\cos(h_i)]}{dt} = \frac{ds_i}{dt}\cos(h_i) + s_i\sin(h_i)\frac{\partial F_i}{\partial H_i}, \\ \frac{d[s_i\sin(h_i)]}{dt} = \frac{ds_i}{dt}\sin(h_i) - s_i\cos(h_i)\frac{\partial F_i}{\partial H_i}, \end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered} \frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2e_i}\left(\frac{\partial e_i^2}{\partial L_i}\frac{\partial F_i}{\partial l_i} + \frac{\partial e_i^2}{\partial G_i}\frac{\partial F_i}{\partial g_i}\right), \\ \frac{ds_i}{dt} = \frac{1}{2s_i}\left(\frac{\partial s_i^2}{\partial G_i}\frac{\partial F_i}{\partial g_i} + \frac{\partial s_i^2}{\partial H_i}\frac{\partial F_i}{\partial h_i}\right), \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_i}{\partial L_i} + \frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i} = \frac{\partial a_i}{\partial L_i}\frac{\partial F_i}{\partial a_i} + \frac{1}{2e_i}\left(\frac{\partial e_i^2}{\partial L_i} + \frac{\partial e_i^2}{\partial G_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial e_i} + \\ + \frac{1}{2s_i}\left(\frac{\partial s_i^2}{\partial G_i} + \frac{\partial s_i^2}{\partial H_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial s_i}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i} = \frac{1}{2e_i}\frac{\partial e_i^2}{\partial G_i}\frac{\partial F_i}{\partial e_i} + \frac{1}{2s_i}\left(\frac{\partial s_i^2}{\partial G_i} + \frac{\partial s_i^2}{\partial H_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial s_i}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial H_i} = \frac{1}{2s_i}\frac{\partial s_i^2}{\partial H_i}\frac{\partial F_i}{\partial s_i}. \end{gathered} \tag{19}$$

По свойству характеристик Даламбера, присущих рядам, представляющих возмущающую функцию (Холшевников, Кузнецов, 2007), суммы слагаемых в круглых скобках двух равенств (18) содержат, по крайней мере, первые степени малых величин e_i и s_i соответственно. Для малых числовых значений эксцентриситета орбиты e_i и параметра s_i суммы двух слагаемых в круглых скобках в формулах (19) пропорциональны соответственно e_i^2 и s_i^2. Отсюда следует вывод, что правые части осредненных дифференциальных уравнений движения (17) при малых значениях параметров e_i и s_i не содержат вычислительных особенностей.

Таблица 6. Максимальные оценки относительных ошибок по положению

Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
1.23°	0.12°	0.06°	0.15°	0.37°	0.98°	0.33°	0.06°

Таблица 7. Границы изменения значений больших полуосей орбит

Значение	Венера	Земля	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Минимальное	0.723328	0.999996	5.202207	9.541492	19.178549	30.056335
Максимальное	0.723331	1.000001	5.202935	9.549862	19.208278	30.093509

Переход от несингулярных параметров движения (16) к кеплеровским элементам выполняется по формулам

$$\begin{gathered}
s_i = \sqrt{[s_i\cos(h_i)]^2 + [s_i\sin(h_i)]^2}, \\
\cos(h_i) = \frac{s_i\cos(h_i)}{s_i}, \quad \sin(h_i) = \frac{s_i\sin(h_i)}{s_i}, \\
e_i = \sqrt{[e_i\cos(g_i + h_i)]^2 + [e_i\sin(g_i + h_i)]^2}, \\
\cos(g_i + h_i) = \frac{e_i\cos(g_i + h_i)}{e_i}, \\
\sin(g_i + h_i) = \frac{e_i\sin(g_i + h_i)}{e_i}, \\
g_i = (g_i + h_i) - h_i, \; l_i = (l_i + g_i + h_i) - (g_i + h_i).
\end{gathered} \tag{20}$$

КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Величина

$$S_i = \int (R_i - F_i)dt \tag{21}$$

называется функцией преобразования для вычисления короткопериодических неравенств по формулам

$$\begin{gathered}
\Delta L_i = \frac{\partial S_i}{\partial l_i}, \quad \Delta G_i = \frac{\partial S_i}{\partial g_i}, \quad \Delta H_i = \frac{\partial S_i}{\partial h_i}, \\
\Delta l_i = -\frac{\partial S_i}{\partial L_i}, \quad \Delta g_i = -\frac{\partial S_i}{\partial G_i}, \quad \Delta h_i = -\frac{\partial S_i}{\partial H_i}.
\end{gathered}$$

Во избежание вычислительных особенностей, как и в случае дифференциальных уравнений движения, следует использовать несингулярные элементы (16). Формулы для расчета короткопериодических возмущений несингулярных параметров аналогичны выражениям (17), (18) и (19), в которых функция F_i заменена величиной S_i, а вместо оператора вычисления обыкновенных производных по времени поставлен символ Δ для обозначения вариации соответствующего параметра:

$$\begin{gathered}
\Delta a_i = \frac{\partial a_i}{\partial L_i}\frac{\partial S_i}{\partial l_i}, \\
\Delta(l_i + g_i + h_i) = -\frac{\partial S_i}{\partial L_i} - \frac{\partial S_i}{\partial G_i} - \frac{\partial S_i}{\partial H_i}, \\
\Delta[e_i\cos(g_i + h_i)] = \Delta e_i\cos(g_i + h_i) + \\
+ e_i\sin(g_i + h_i)\left[\frac{\partial S_i}{\partial G_i} + \frac{\partial S_i}{\partial H_i}\right], \\
\Delta[e_i\sin(g_i + h_i)] = \Delta e_i\sin(g_i + h_i) - \\
- e_i\cos(g_i + h_i)\left[\frac{\partial S_i}{\partial G_i} + \frac{\partial S_i}{\partial H_i}\right], \\
\Delta[s_i\cos(h_i)] = \Delta s_i\cos(h_i) + s_i\sin(h_i)\frac{\partial S_i}{\partial H_i}, \\
\Delta[s_i\sin(h_i)] = \Delta s_i\sin(h_i) - s_i\cos(h_i)\frac{\partial S_i}{\partial H_i}, \\
\Delta e_i = \frac{1}{2e_i}\left(\frac{\partial e_i^2}{\partial L_i}\frac{\partial S_i}{\partial l_i} + \frac{\partial e_i^2}{\partial G_i}\frac{\partial S_i}{\partial g_i}\right), \\
\Delta s_i = \frac{1}{2s_i}\left(\frac{\partial s_i^2}{\partial G_i}\frac{\partial S_i}{\partial g_i} + \frac{\partial s_i^2}{\partial H_i}\frac{\partial S_i}{\partial h_i}\right).
\end{gathered} \tag{22}$$

В результате интегрирования по времени (15) в функцию преобразования (21) входит среднее движение n_i, частная производная по переменной L_i имеет вид:

$$\frac{\partial S_i}{\partial L_i} = \left(\frac{\partial S_i}{\partial a_i} + \frac{\partial S_i}{\partial n_i}\frac{\partial n_i}{\partial a_i}\right)\frac{\partial a_i}{\partial L_i} + \frac{1}{2e_i}\frac{\partial S_i}{\partial e_i}\frac{\partial e_i^2}{\partial L_i}.$$

Оскулирующие элементы получаются в результате суммирования сглаженных параметров, определяемых путем численного интегрирования осредненных уравнений (17), и короткопериодических вариаций.

Таблица 8. Границы изменения значений элементов орбит внутренних планет

Элемент	Значение	Меркурий	Венера	Земля	Марс
Эксцентриситет	Минимальное	0.130883	0.000005	0.000023	0.000606
	Максимальное	0.285934	0.072001	0.062228	0.126020
Угол наклонения, град	Минимальное	0.00494	0.00100	0.00012	0.00230
	Максимальное	11.82557	4.93901	4.41871	8.87049

Таблица 9. Границы изменения значений элементов орбит планет-гигантов

Элемент	Значение	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Эксцентриситет	Минимальное	0.022529	0.012704	0.018582	0.000008
	Максимальное	0.060839	0.085422	0.100239	0.020141
Угол наклонения, град	Минимальное	1.09158	0.52720	0.07977	0.74609
	Максимальное	2.06279	2.63089	3.10761	2.41635
Долгота восходящего узла, град	Минимальное	116.3	92.3	63.7	101.6
	Максимальное	152.1	175.9	204.9	166.3

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Начальные условия для численного интегрирования осредненных уравнений движения были получены с помощью данных эфемериды DE406/LE406 (Standish и др., 1998). На момент 1721423.5 юлианских дней (полночь 1 января 1 года нашей эры) значения барицентрических координат и скоростей семи больших планет, Солнца и центра масс Земля–Луна, заданные в системе стандартного экватора эпохи J2000.0, были преобразованы в оскулирующие кеплеровские элементы орбиты. Оскулирующие элементы вычислены в гелиоцентрической эклиптической системе отсчета. Положения эклиптики и точки весеннего равноденствия соответствуют опорной системе отсчета J2000.0.

С помощью соотношений (22) оскулирующие элементы были преобразованы в совокупность сглаженных параметров. Сглаженные параметры послужили начальными условиями для численного интегрирования осредненных уравнений движения – системы 48 дифференциальных уравнений первого порядка (выражения (17), (18), (19)).

Численное интегрирование было выполнено методом Эверхарта 15 порядка (Everhart, 1974). Был выбран постоянный шаг интегрирования, равный 100 годам. Использование меньшего шага приводило к увеличению времени расчетов, а оценки сглаженных элементов орбит планет с точностью до 15 знаков после запятой были равны этим же величинам, вычисленным с шагом 100 лет.

На интервале времени от –3000 лет до +3000 лет для каждой планеты было выполнено сравнение с данными численной эфемериды DE406.

На выбранные моменты времени из указанного интервала вычислялись сглаженные элементы орбиты. На основе этих параметров вначале определялись гелиоцентрические эклиптические координаты планет, а затем барицентрические экваториальные координаты. Далее на каждый момент времени были найдены ошибки по положению. Таким термином здесь обозначен корень квадратный из суммы квадратов отклонений вычисленных координат от эфемеридных данных. Относительная ошибка образована делением полученных значений на величины гелиоцентрических расстояний. Оценки максимальных относительных ошибок по положению в градусах представлены в табл. 6.

Численное интегрирование осредненных уравнений движения в гелиоцентрической эклиптической системе отсчета было выполнено на интервале времени от момента 1721423.5, выраженного в юлианских днях, на 25 млн. лет назад и на 25 млн. лет вперед.

В табл. 7 представлены границы изменения сглаженных значений больших полуосей орбит планет на всем интервале численного интегрирования – 50 млн. лет. Единицей измерения является астрономическая единица (а. е.).

Как уже отмечалось, осредненные пертурбационные функции для планеты Меркурий и планеты Марс содержат только вековые члены. Для этих объектов индекс $j_1 = 0$ и, как следствие, функция F_1 не зависят от средней аномалии l_1, а функция F_4 не зависит от средней аномалии l_4. Сглаженные значения больших полуосей Меркурия a_1 и Марса a_4 в предлагаемом решении являются постоянными величинами.

В табл. 8 и 9 представлены границы изменения сглаженных значений эксцентриситетов и углов наклонений орбит внутренних планет и планет-гигантов на всем интервале численного интегрирования – 50 млн. лет.

Исходные тексты вычислительных процедур, выполняемые модули программ, текстовые наборы данных и результаты вычислений в графическом виде представлены на Интернет-ресурсе (URL: http://vadimchazov.narod.ru/secequat.htm).

Все вычисления были выполнены с помощью компилятора Free Pascal, находящегося в свободном доступе (URL: http://www.freepascal.org).

Автор благодарен участникам и гостям семинара по небесной механике ГАИШ МГУ за многолетнее внимательное отношение к его докладам на заседаниях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Анолик М.В., Красинский Г.А., Пиус Л.Ю. Тригонометрическая теория вековых возмущений больших планет // Тр. ИТА АН СССР. 1969. Вып. 4. С. 3–47.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 720 с.

Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 206 с.

Вашковьяк М.А. Численно-аналитический метод исследования эволюции орбит далеких спутников планет // Письма в Астрон. журн. 2005. Т. 31. № 1. С. 66–75.

Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Юпитера // Астрон. вестн. 2008а. Т. 42. № 4. С. 301–316. (*Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M.* Evolution characteristics of Jupiter's outer satellites orbits // Sol. Syst. Res. 2008. V. 42. № 4. P. 291–295.)

Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Сатурна, Урана и Нептуна // Астрон. вестн. 2008б. Т. 42. № 6. С. 521–537. (*Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M.* Evolutionary characteristics of the orbits of outer Saturnian, Uranian, and Neptunian satellites // Sol. Syst. Res. 2008. V. 42. № 6. P. 488–504.)

Герасимов И.А., Чазов В.В., Рыхлова Л.В., Тагаева Д.А. Построение теории движения тел Солнечной системы, основанной на универсальном методе вычисления возмущающей функции // Астрон. вестн. 2000. Т. 34. № 6. С. 559–566. (*Gerasimov I.A., Chazov V.V., Rykhlova L.V., Tagaeva D.A.* Construction of the theory of motion for Solar-System bodies based on a universal method for perturbative function calculation // Sol. Syst. Res. 2000. V. 34. № 6. P. 509–516.)

Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 576 с.

Ипатов С.И. Изменения элементов орбит планет // Астрон. вестн. 2000. Т. 34. № 3. С. 195–201. (*Ipatov S.I.* Variations in orbital elements of planets // Sol. Syst. Res. 2000. V. 34. № 3. P. 179–185.)

Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Разложение гамильтониана двупланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: применение пуассоновского процессора // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 2. С. 171–179. (*Kuznetsov E.D., Kholshevnikov K.V.* Expansion of the Hamiltonian of the two-planetary problem into the Poisson series in all elements: Application of the Poisson series processor // Sol. Syst. Res. 2004. V. 38. № 2. P. 147–154.)

Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Динамическая эволюция слабовозмущенной двупланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце–Юпитер–Сатурн // Астрон. вестн. 2006. Т. 40. № 3. С. 263–275. (*Kuznetsov E.D., Kholshevnikov K.V.* Dynamical evolution of weakly disturbed two-planetary system on cosmogonic time scales: The Sun–Jupiter–Saturn system // Sol. Syst. Res. 2006. V. 40. № 3. P. 239–250.)

Лидов М.Л. Полуаналитические методы расчета движения спутников // Тр. ИТА АН СССР. 1978. Т. 17. С. 54–61.

Мельников В.П., Смульский И.И. Астрономические факторы воздействия на атмосферу Земли и проблемы их исследования // Криосфера Земли. 2004. Т. 8. № 1. С. 3–14.

Питьева Е.В. Высокоточные эфемериды планет EPM и определение некоторых астрономических постоянных // Астрон. вестн. 2005. Т. 39. № 3. С. 202–213. (*Pitjeva E.V.* High-precision ephemerides of planets – EPM and determination of some astronomical constants // Sol. Syst. Res. 2005. V. 39. № 3. P. 176–186.)

Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д. Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрон. вестн. 2007. Т. 41. № 4. С. 291–329. (*Kholshevnikov K.V., Kuznetsov E.D.* Review of the works on the orbital evolution of Solar System major planets // Sol. Syst. Res. 2007. V. 41. № 4. P. 265–300.)

Berger A. Long-term variations of the Earth's orbital elements // Celest. Mech. 1977. V. 15. P. 53–74.

Brouwer D., van Woerkom A.G. The secular variations of the orbital elements of the principal Planets // Astron. Papers. 1950. V. 13. P. 81–107.

Cohen G.J., Hubbard E.C., Oesterwinter C. Planetary elements for 10000000 years // Celest. Mech. 1973. V. 7. P. 438–448.

Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 35–56.

Lagrange G. Ouevres. Paris, 1870. V. 5. 720 p.

Laskar J. The chaotic motion of the Solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones // Icarus. 1990. V. 88. № 2. P. 266–291.

Laskar J. Large-scale chaos in the Solar system // Astron. and Astrophys. 1994. V. 287. № 1. P. L9–L12.

Laskar J. Large-scale chaos in the spacing of the inner planets // Astron. and Astrophys. 1997. V. 317. № 2. P. L75–L78.

Quinn T.R., Tremaine S., Duncan M. A three million year integration of the Earth's orbit // Astron. J. 1991. V. 101. P. 2287–2305.

Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G., Folkner W.F. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405. JPL Inter office Memorandum. 1998. № 312. F-98-048. P. 1–18.