

# Применение конформных преобразований к краевым задачам расчёта токов в полосковых проводниках

**Т. Н. ГЕРАСИМЕНКО**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: gerasimenko\_tn@mail.ru*

**В. И. ИВАНОВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

**П. А. ПОЛЯКОВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: polyakovpa@mail.ru*

**В. Ю. ПОПОВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: masterlu@mail.ru*

УДК 51-73:537

**Ключевые слова:** конформное преобразование, краевая задача электродинамики, метод сопряжённых функций.

## Аннотация

При помощи метода конформных преобразований получены аналитические решения задач о распределении тока в полосковых проводниках различной конфигурации.

## Abstract

*T. N. Gerasimenko, V. I. Ivanov, P. A. Polyakov, Yu. V. Popov, Application of a conformal-map technique to a boundary-value problem of current distribution in plain conductors, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 6, pp. 3–14.*

Using the conformal-map technique, we have found analytical solutions of the current distribution problem for different configurations of plain conductors.

Расчёт распределения токов в полосковых проводниках является актуальной задачей современной схемотехники, однако даже для простейшей конфигурации проводника, представляющего собой длинную полосу с прямоугольным вырезом (дефектом), возникают существенные вычислительные трудности. Проблемы связаны прежде всего с плохой сходимостью разностной схемы на бесконечности и в угловых точках. В связи с этим несомненный интерес представляет разработка аналитических решений.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2009, том 15, № 6, с. 3–14.

© 2009 *Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»*

Известен ряд примеров точно решаемых нетривиальных задач электродинамики о распределении токов в двумерных проводящих средах [1]. В данной работе предлагаются методы аналитического решения задач о распределении токов в проводящих полосках различной конфигурации с использованием метода конформных преобразований.

Рассмотрим бесконечную проводящую ленту шириной  $h$  с прямоугольным вырезом (рис. 1), в которой течёт электрический ток. Форма линий тока в исследуемом проводнике совпадает с формой силовых линий стационарного электрического поля, которое создали бы в этом проводнике заряды, удалённые на  $\pm\infty$ , если бы диэлектрическая и магнитная проницаемости проводника были равны единице [4].

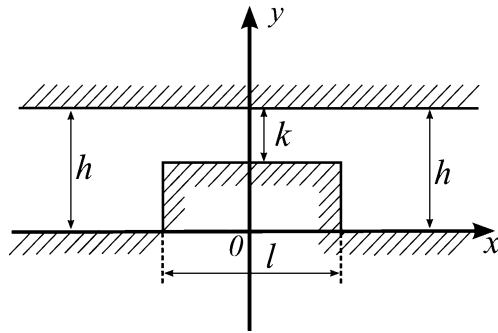


Рис. 1. Бесконечная проводящая лента шириной  $h$  с прямоугольным вырезом

Следуя [4], введём комплексный потенциал  $W(z) = U(z) + iV(z)$  и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где функция  $V(x, y)$  — скалярный потенциал,  $U(x, y)$  — функция потока [4]. Поскольку эти функции не являются независимыми, а связаны между собой условиями Коши—Римана, то граничные условия можно ставить только на одну из них. В рассматриваемом случае это условия регулярности на бесконечности и условия того, что силовые линии ( $U(x, y) = \text{const}$ ) не пересекают поверхность интересующей нас области, т. е. функция потока  $U(x, y)$  постоянна вдоль верхней и нижней границ проводника:

$$\begin{cases} V(x \rightarrow -\infty, y) = V_1 = \text{const}, \\ V(x \rightarrow +\infty, y) = V_2 = \text{const}, \\ U(x, h) = U_1 = \text{const}, \\ U(x, y)|_{(x,y) \in \Omega} = U_2 = \text{const}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\Omega$  — нижняя граница проводника.

Для того чтобы избежать нефизических особенностей вблизи вершин прямых углов, возникающих при численном решении уравнения (1), использовался метод конформных преобразований.

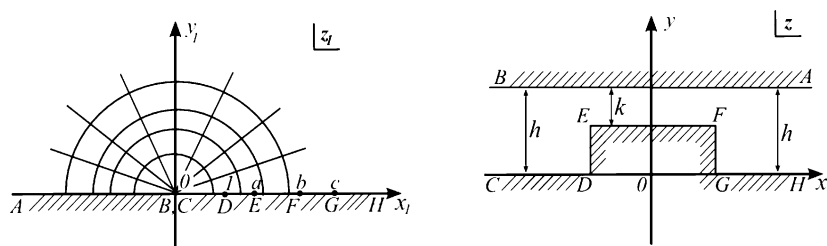


Рис. 2. Соответствие между верхней полуплоскостью и полосой с прямоугольным вырезом

Запишем уравнение Лапласа для бесконечной полуплоскости с граничными условиями, соответствующими заряду, расположенному в начале координат. Решение такого уравнения хорошо известно, ему соответствуют силовые линии в виде радиальных прямых и эквипотенциальные кривые в виде концентрических полуокружностей с центром в начале координат (рис. 2). Конформно отобразим верхнюю полуплоскость на рассматриваемую полосу с помощью интеграла Кристоффеля—Шварца [2]:

$$z = C \int_0^{z_1} \frac{1}{z_1} \sqrt{\frac{(z_1 - a)(z_1 - b)}{(z_1 - 1)(z_1 - c)}} dz_1. \quad (3)$$

Параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $C$  определяются из условий соответствия границ:

$$\int_0^{ih} dy \Big|_{x \rightarrow -\infty} = iC \int_0^\pi \sqrt{\frac{(r_1 e^{i\varphi_1} - a)(r_1 e^{i\varphi_1} - b)}{(r_1 e^{i\varphi_1} - 1)(r_1 e^{i\varphi_1} - c)}} \Big|_{r_1 \rightarrow 0} d\varphi_1 = iC\pi \sqrt{\frac{ab}{c}},$$

$$\int_0^{ih} dy \Big|_{x \rightarrow +\infty} = iC \int_0^\pi \sqrt{\frac{(1 - \frac{a}{r_1 e^{i\varphi_1}})(1 - \frac{b}{r_1 e^{i\varphi_1}})}{(1 - \frac{1}{r_1 e^{i\varphi_1}})(1 - \frac{c}{r_1 e^{i\varphi_1}})}} \Big|_{r_1 \rightarrow \infty} d\varphi_1 = iC\pi,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \Big|_{y=h-k} = l = C \int_a^b \sqrt{\frac{(r_1 - a)(r_1 - b)}{(r_1 - 1)(r_1 - c)}} \frac{1}{r_1} dr_1, \quad (4)$$

$$\int_0^{i(h-k)} dy \Big|_{y=h-k} = l = C \int_1^a \sqrt{\frac{(r_1 - a)(r_1 - b)}{(r_1 - 1)(r_1 - c)}} \frac{1}{r_1} dr_1. \quad (5)$$

Из этих условий следует, что  $c = ab$  и  $C = \frac{l}{\pi}$ . Параметры  $a$  и  $b$  определяются как решения (4) и (5). Поскольку для практического применения метода необходимо

эффективно вычислять интеграл (3), то задачу удобно свести к вычислению эллиптического интеграла третьего рода.

Для этого рассмотрим конформное отображение верхней полуплоскости на пятиугольник (рис. 3) с последующим его отражением относительно вещественной оси. Приведём таблицу соответствия образов граничных точек и углов пятиугольника:

$$\begin{aligned} a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{m}, \quad a_4 = \infty, \quad a_5 = \frac{1}{n}, \\ \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_5 = 0. \end{aligned}$$

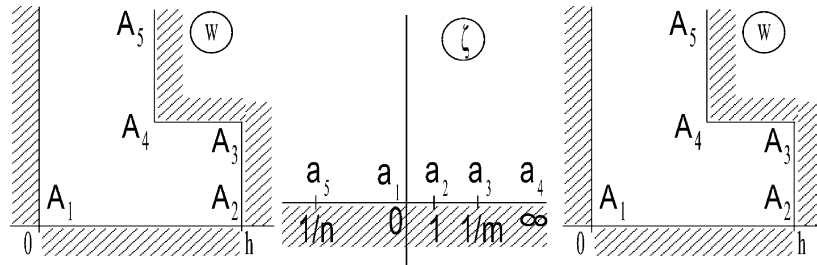


Рис. 3. Соответствие между верхней полуплоскостью и пятиугольником

Функция, осуществляющая обратное отображение верхней полуплоскости на рассматриваемый пятиугольник, выражается интегралом Кристоффеля—Шварца:

$$w = \bar{C} \int_0^{\zeta} \zeta^{-1/2} (\zeta - 1)^{-1/2} \left( \zeta - \frac{1}{m} \right)^{-1/2} \left( \zeta - \frac{1}{n} \right)^{-1} d\zeta. \quad (6)$$

Выделяя ветвь подынтегральной функции, имеющую вещественные значения на отрезке вещественной оси  $(0, 1)$ , и вводя вместо  $\bar{C}$  новую константу, запишем (6) в виде

$$w = \frac{C}{2} \int_0^{\zeta} \zeta^{-1/2} (1 - \zeta)^{-1/2} (1 - m\zeta)^{-1/2} (1 - n\zeta)^{-1} d\zeta, \quad (7)$$

где  $C$  — вещественная константа ( $C > 0$ ). Заменой переменной интегрирования

$$z = \sqrt{\zeta} \quad (8)$$

интеграл (7) приводится к виду

$$w = C \int_0^z \frac{dz}{(1 - nz^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - mz^2)}}. \quad (9)$$

Функция (8) отображает полуплоскость  $\text{Im } \zeta > 0$  на первый квадрант плоскости  $z$  (см. рис. 3).

Для определения константы  $C$  используем условие  $w(1) = h$ . Получаем

$$C = \frac{h}{\Pi_1(n, m)}.$$

Таким образом, функция

$$w(z) = \frac{h}{\Pi_1(n, m)} \Pi(z, n, m)$$

осуществляет конформное отображение первого квадранта плоскости  $z$  на рассматриваемый пятиугольник. При его зеркальном отражении относительно вещественной оси получается шестиугольная полоса. Шестиугольную полосу можно зеркально отразить относительно мнимой оси, получив симметричную десятиугольную полосу.

Для непосредственного расчёта удобно сделать стандартную замену  $s = \sin \varphi$  и использовать обозначение  $m \equiv \sin^2 \alpha$ . Тогда интеграл (9) будет иметь вид

$$\Pi(\varphi, n, \alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}. \quad (10)$$

Рассматриваемому случаю полоскового провода с прямоугольным вырезом соответствуют значения параметров  $m < n < 1$ . В этом случае для вычисления интеграла (10) используем стандартное разложение [5]

$$\Pi(\varphi, n, \alpha) = \delta_2(\lambda - 4\mu\nu),$$

где

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \sqrt{\frac{n}{(1-n)(n-\sin^2 \alpha)}}, \\ \lambda &= \text{arctg}(\text{th } \beta \text{tg } \nu) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \frac{q^{2s}}{(1-q^{2s})} \sin(2s\nu) \text{sh}(2s\beta), \\ \mu &= \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s q^{s^2} \text{sh}(2s\beta)}{1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} q^{s^2} \text{ch}(2s\beta)}, \quad \nu = \frac{\pi}{2} \frac{F(\varphi, \alpha)}{K(\alpha)}, \\ \beta &= \frac{\pi}{2} \frac{F(\varepsilon, 90^\circ - \alpha)}{K(\alpha)}, \quad \varepsilon = \arcsin \sqrt{\frac{1-n}{\cos^2 \alpha}}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$q$  — основной параметр Якоби:

$$q = q(\alpha) = \frac{\alpha}{16} + 8 \left(\frac{\alpha}{16}\right)^2 + 84 \left(\frac{\alpha}{16}\right)^3 + 992 \left(\frac{\alpha}{16}\right)^4 + \dots,$$

$K(\alpha)$  и  $F(\varphi, \alpha)$  — полный и неполный эллиптические интегралы 1-го рода соответственно:

$$F(\varphi, \alpha) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}, \quad K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}.$$

В результате была построена картина линий тока для провода с прямоугольным вырезом (рис. 4).

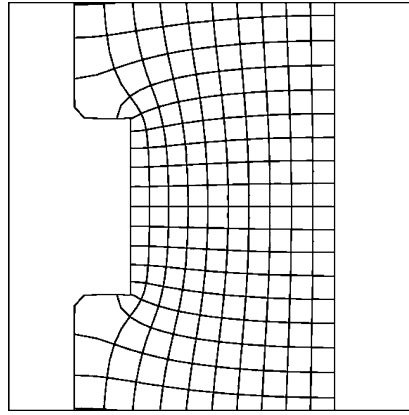


Рис. 4. Картина линий тока в проводнике с прямоугольным вырезом

Прикладной результат можно получить и при других значениях параметров  $m$  и  $n$ . Так, проводнику с прямоугольным выступом соответствует случай  $n < 0$ . Для вычисления (10) воспользуемся подстановкой, которая позволяет свести вычисления к предыдущему случаю [5]:

$$N = \frac{\sin^2 \alpha - n}{1 - n}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{-n(\sin^2 \alpha - n)}{1 - n}},$$

$$\sqrt{(1 - n) \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n}\right)} \Pi(\varphi, n, \alpha) =$$

$$= \sqrt{(1 - N) \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{N}\right)} \Pi(\varphi, N, \alpha) + \frac{\sin^2 \alpha}{p_2} F(\varphi, \alpha) + \arctg \left[ \frac{p_2 \sin 2\varphi}{2 \Delta(\varphi)} \right],$$

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \text{ — дельта-амплитуда.}$$

Картина линий тока, соответствующая этому случаю, представлена на рис. 5.

Значения параметров  $0 < n < m$  соответствуют П-образному проводнику. В этом случае для вычисления интеграла (10) также удобно использовать стандартное разложение [5]:

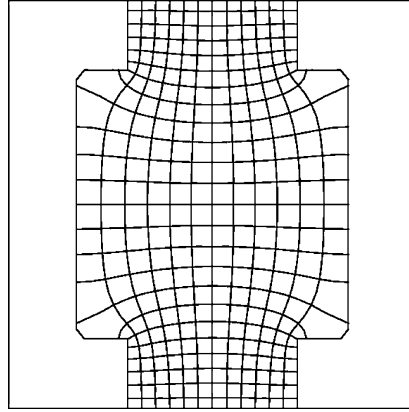


Рис. 5. Картина линий тока в проводнике с симметричными прямоугольными выступами

$$\Pi(\varphi, n, \alpha) = \delta_1 \left[ -\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_4(\nu + \beta)}{\vartheta_4(\nu - \beta)} + \nu \frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} \right],$$

где

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{n}{(1-n)(\sin^2 \alpha - n)}}, \quad \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_4(\nu + \beta)}{\vartheta_4(\nu - \beta)} = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^s \sin(2s\nu) \sin(2s\beta)}{s(1 - q^{2s})},$$

$$\frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} = \operatorname{ctg} \beta + 4 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{2s} \sin 2\beta}{1 - 2q^{2s} \cos 2\beta + q^{4s}}.$$

Картина линий тока, соответствующая  $\Pi$ -образному проводнику, представлена на рис. 6.

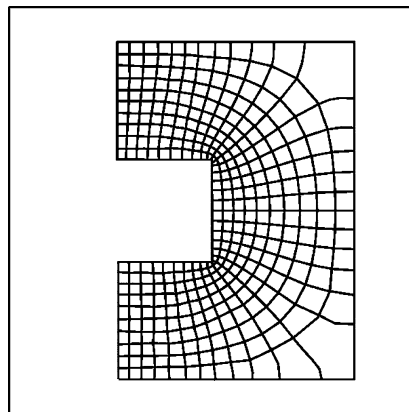


Рис. 6. Картина линий тока в  $\Pi$ -образном проводнике

Наряду с этими методами был разработан альтернативный способ решения, который является приближённым, однако позволяет получить ответ в элементарных функциях. Этот способ проиллюстрирован на примере проводника с прямоугольным вырезом.

Рассмотрим отображение верхней полуплоскости на полосу  $0 < y < h$  с уступом  $0 \leq y \leq h - k$  в начале координат (рис. 7) и отразим полученную картину симметрично относительно выбранной точки  $x = -\frac{l}{2}$ .

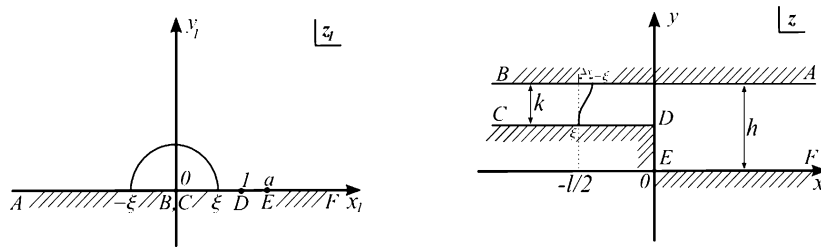


Рис. 7. Соответствие между верхней полуплоскостью и полосой с уступом

Конформно отобразим верхнюю полуплоскость на полосу с уступом с помощью интеграла Шварца—Кристоффеля [3]:

$$z = C \int_0^{z_1} \frac{1}{z_1} \sqrt{\frac{z_1 - 1}{z_1 - a}}. \quad (11)$$

Выпишем соответствующие друг другу точки областей  $z_1$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow -\infty, y_1 = 0 &\longleftrightarrow A_\infty, \\ x_1 \rightarrow +\infty, y_1 = 0 &\longleftrightarrow F_\infty, \\ x_1 = 0, y_1 = 0 &\longleftrightarrow B_\infty, C_\infty, \\ x_1 = 1, y_1 = 0 &\longleftrightarrow D, \\ x_1 = a, y_1 = 0 &\longleftrightarrow E. \end{aligned} \quad (12)$$

Условия, что полуокружности с центрами в начале координат и радиусами  $r_1 \rightarrow 0$ ,  $r_1 \rightarrow \infty$  плоскости  $z_1$  отображаются соответственно на отрезки  $y \in [h - k, h]$ ,  $x \rightarrow -\infty$  и  $y \in [0, h]$ ,  $x \rightarrow +\infty$  плоскости  $z$ , позволяют найти  $C$  и  $a$ :

$$\begin{cases} C = \frac{h}{\pi}, \\ a = \left(\frac{h}{k}\right)^2. \end{cases}$$

В отличие от (3), интеграл (11) берётся в элементарных функциях. Результат его вычисления имеет следующий вид [3]:



$$\begin{cases} z = \frac{h}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) - \frac{1}{b} \ln \left( \frac{b+1}{b-t} \right) \right], \\ t = \sqrt{\frac{z_1 - b^2}{z_1 - 1}}, \\ b = \frac{h}{k}. \end{cases} \quad (13)$$

Из соображений симметрии следует, что при точном решении задачи эквипотенциаль в точке  $-\frac{l}{2}$  должна представлять собой прямую линию, перпендикулярную верхней и нижней границам провода. При приближённом решении она будет отклоняться от перпендикуляра на некоторую величину  $\Delta x$ . Эту величину, разделённую на характерный размер в системе, обозначим  $\alpha$ ,  $\alpha = \frac{\Delta x}{h-k}$ , и будем использовать для оценки погрешности.

Используя формулы (13), получим выражение для погрешности  $\alpha$ . Как следует из (12), эквипотенциалам, находящимся в более узкой части рассматриваемой полосы, соответствуют полуокружности с центрами в начале координат и радиусами  $|z_1| \equiv \xi \leq 1$ , поэтому для того чтобы определить  $\Delta x$ , найдём точки плоскости  $z$ , которым соответствуют точки  $(\pm\xi, 0)$  плоскости  $z_1$ . Введём обозначения

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{\frac{b^2 - \xi}{1 - \xi}}, \\ t_2 = \sqrt{\frac{b^2 + \xi}{1 + \xi}}, \end{cases}$$

тогда из (13) следует, что

$$\begin{aligned} z(\xi) &= \frac{h}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1+t_1}{1-t_1} \right) - \frac{1}{b} \ln \left( \frac{b+t_1}{b-t_1} \right) \right], \\ z(-\xi) &= \frac{h}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{1+t_2}{1-t_2} \right) - \frac{1}{b} \ln \left( \frac{b+t_2}{b-t_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Выделяя вещественную часть в каждом из слагаемых, получим

$$\operatorname{Re}[z(\xi)] = \frac{h}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{1-\xi} + \sqrt{b^2-\xi}}{\sqrt{b^2-\xi} - \sqrt{1-\xi}} \right) - \frac{1}{b} \ln \left( \frac{b\sqrt{1-\xi} + \sqrt{b^2-\xi}}{\sqrt{b^2-\xi} - b\sqrt{1-\xi}} \right) \right], \quad (14)$$

$$\operatorname{Re}[z(-\xi)] = \frac{h}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{1+\xi} + \sqrt{b^2+\xi}}{\sqrt{b^2+\xi} - \sqrt{1+\xi}} \right) - \frac{1}{b} \ln \left( \frac{b\sqrt{1+\xi} + \sqrt{b^2+\xi}}{b\sqrt{1+\xi} - \sqrt{b^2+\xi}} \right) \right]. \quad (15)$$

Из (14) и (15) видно, что связь между шириной дефекта  $l$  и точкой  $(\xi, 0)$  плоскости  $z_1$  определяется как (см. рис. 7)

$$l = 2 \operatorname{Re}(z(\xi)) = 2 \frac{h}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{b^2-\xi} + \sqrt{1-\xi}}{\sqrt{b^2-\xi} - \sqrt{1-\xi}} \right) - \frac{1}{b} \ln \left( \frac{\sqrt{b^2-\xi} + b\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{b^2-\xi} - b\sqrt{1-\xi}} \right) \right].$$

На рис. 8 приведён график зависимости  $l$  от  $\xi$  для размеров  $h = 2$ ,  $k = 1$ . Так, например, величине  $l = 4$  соответствует  $\xi \approx 0,08$ . Из (14) и (15) было получено выражение для погрешности  $\alpha$ :

$$\alpha \equiv \frac{\Delta x}{h-k} = \frac{\operatorname{Re}(z(-\xi)) - \operatorname{Re}(z(\xi))}{h-k},$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \frac{b}{b-1} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{b^2 + \xi} + \sqrt{1 + \xi}}{\sqrt{b^2 + \xi} - \sqrt{1 + \xi}} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{b^2 - \xi} + \sqrt{1 - \xi}}{\sqrt{b^2 - \xi} - \sqrt{1 - \xi}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{b} \ln \left( \frac{\sqrt{b^2 - \xi} + b\sqrt{1 - \xi}}{\sqrt{b^2 - \xi} - b\sqrt{1 - \xi}} \right) - \frac{1}{b} \ln \left( \frac{b\sqrt{1 + \xi} + \sqrt{b^2 + \xi}}{b\sqrt{1 + \xi} - \sqrt{b^2 + \xi}} \right) \right].$$

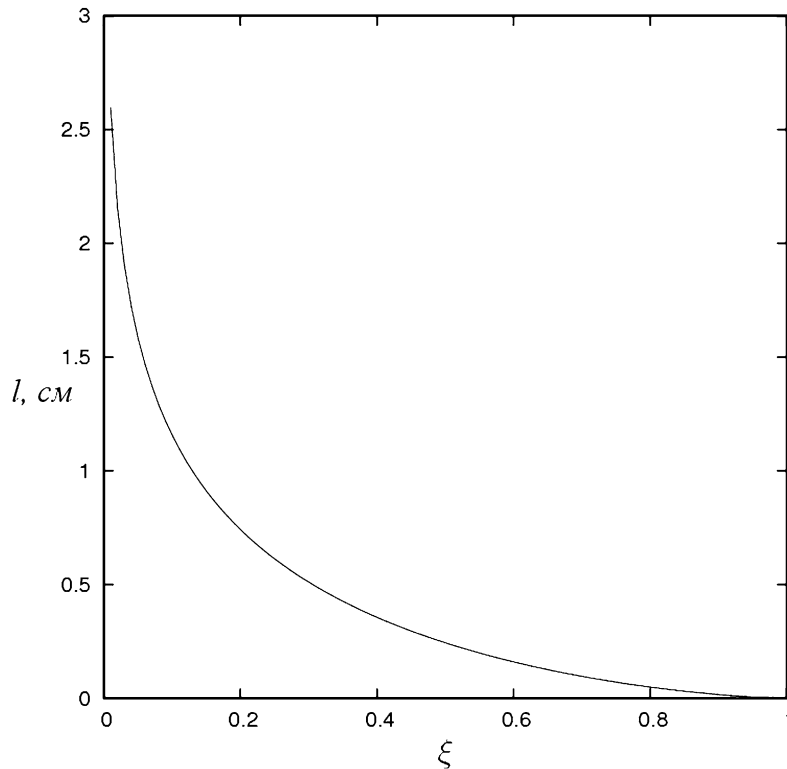


Рис. 8. График зависимости ширины выреза  $l$  от радиуса полуокружности  $\xi$

На рис. 9 представлены зависимости  $\alpha$  от  $\xi$  для  $b = 0,000001$  (а),  $b = 2$  (б) и  $b = 10$  (в). Как видно из графиков, для  $b \geq 2$  зависимость является практически линейной и максимальное значение  $\alpha$ , достигаемое при  $\xi = 1$ , не превышает 30 %.

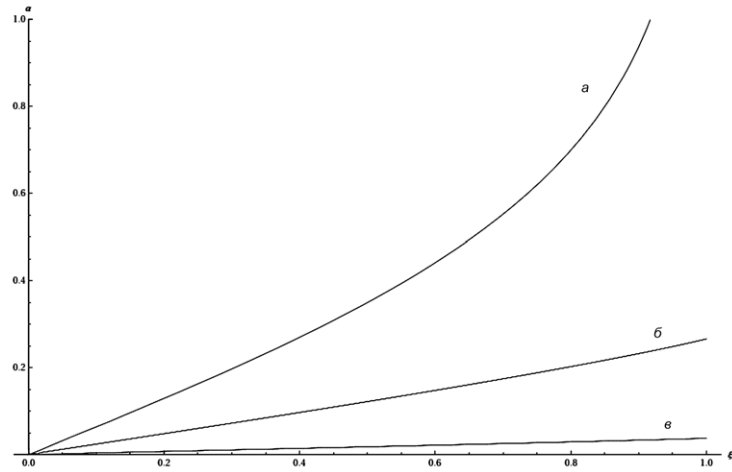


Рис. 9. Зависимость погрешности  $\alpha$  от радиуса полуокружности  $\xi$  для  $b = 1,000001$  (а),  $b = 2$  (б) и  $b = 10$  (в)

На рис. 10 изображена картина линий тока, построенная по формулам (13) для размеров  $h = 2$ ,  $k = 1$ ,  $l = 4$ , величина  $\alpha$  для таких размеров составляет порядка 2 %.

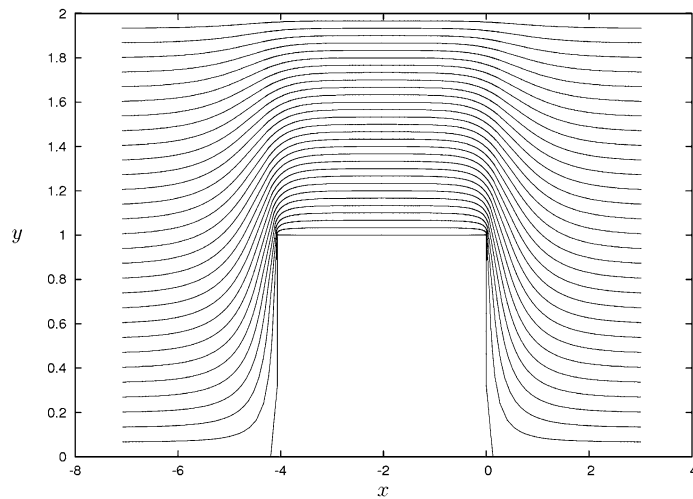


Рис. 10. Картина линий тока в проводнике с прямоугольным вырезом, построенная с помощью приближённого решения

Таким образом, при помощи метода конформных преобразований получены аналитические решения задачи (1), (2), позволяющие рассчитать распределение токов для различных конфигураций полосковых проводников микросхем. Построены картины линий тока для провода с прямоугольным дефектом, П-образного проводника и проводника с прямоугольным выступом. Полученные результаты могут быть использованы для исследования возмущений, вносимых прямоугольными дефектами в магнитное поле полосковых проводников печатных плат.

## Литература

- [1] Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
- [2] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
- [3] Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. — М.: Мир, 1964.
- [4] Смайт В. Электростатика и электродинамика. — М.: Изд. иностр. лит., 1954.
- [5] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Мир, 1979.