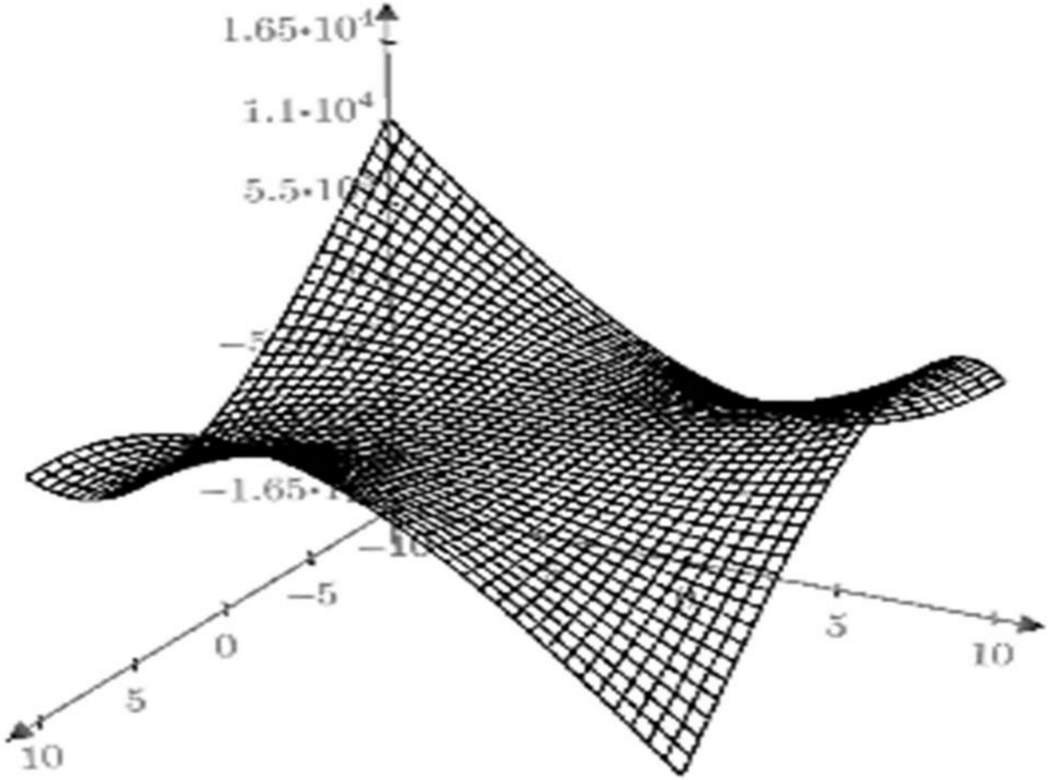
# Искаженная динамическая система с переменным седловым полем


*С.Т. Белякин* [1], *А.В. Степанов* [2]

[1] МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра общей физики

[2] МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра физики колебаний


«WAVES – 2023»

Уже давно установлено, что неустойчивые динамические системы могут приобретать устойчивые состояния при периодическом внешнем воздействии. Классическим примером является движение тяжелого тела по гладкой поверхности седлообразной формы, которая приводится во вращение [1-3]. Линеаризованные уравнения системы имеют вид:

$$x'' + x \cdot cos\omega t + y \cdot sin\omega t = 0,$$
$$y'' + x \cdot sin\omega t - y \cdot cos\omega t = 0. \quad (1)$$

Подобные, более сложные системы исследуются в нелинейной динамике (см., например, [4,5] и ссылки в этих работах). Основной интерес представляют задачи удержания заряженных частиц в переменном поле, ионных ловушках Пауля. Траектории движения в таких системах имеют сложный характер, однако устойчивость сохраняется в широком диапазоне частоты изменения поля.

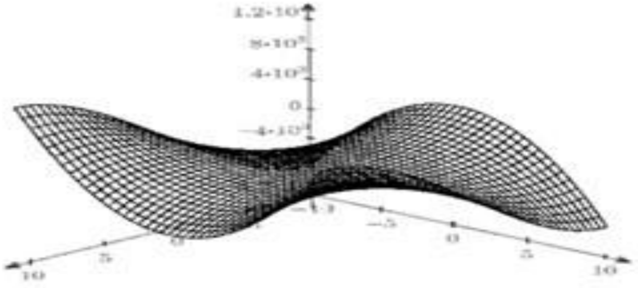
Представляет интерес вопрос о том, насколько характер кривизны поля и вид периодического воздействия критичны для динамической устойчивости. С этой целью на основе (1), без рассмотрения ее физической реализуемости, рассмотрена искаженная модель системы. Во-первых, сделана кубическая кривизна поля ускорений. Поверхности кубического типа обычно используются в теории бифуркаций [6-8]. Во-вторых, в одном из уравнений исключена одна из квадратурных компонент переменного воздействия. Общий вид получившейся системы:

$$x'' = -a_1 x(x^2 - 3y^2) \cdot cos2\pi nt + b_1 y(y^2 - 3x^2) \cdot sin2\pi nt,$$
$$y'' = y\{(3b_2 - a_2)y^2 + (3a_2 - b_2)x^2\} \cdot cos2\pi nt. \qquad (2)$$

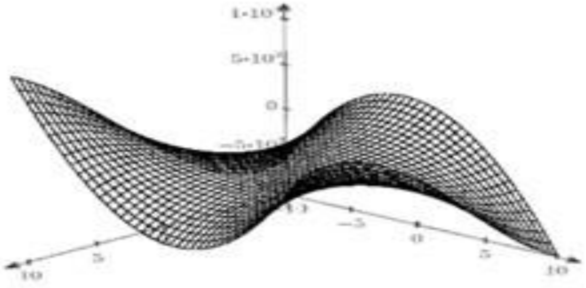
Здесь a и b - параметры кривизны поля, *n* – определяет частоту изменения поля во времени: $\omega = 2\pi n$.

Далее представлены результаты моделирования для:

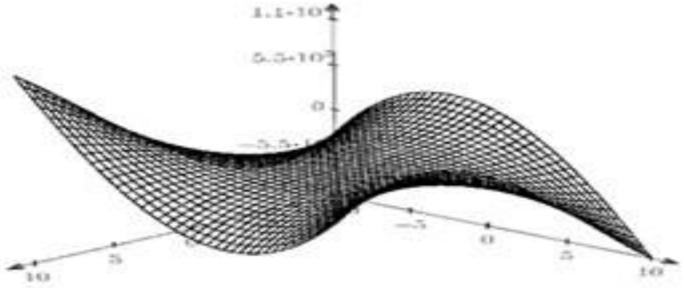
$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 4.$



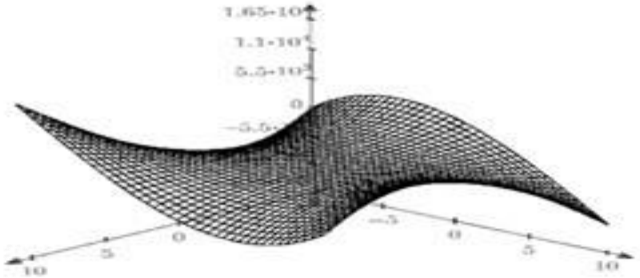
$dxU(x,y)$



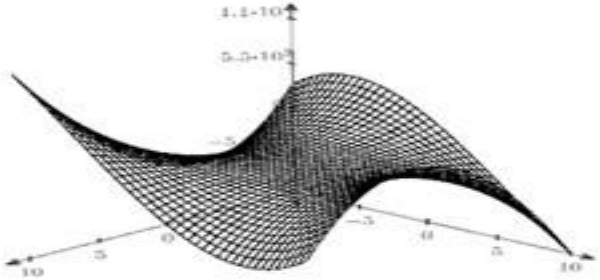
$dxU(x,y)$



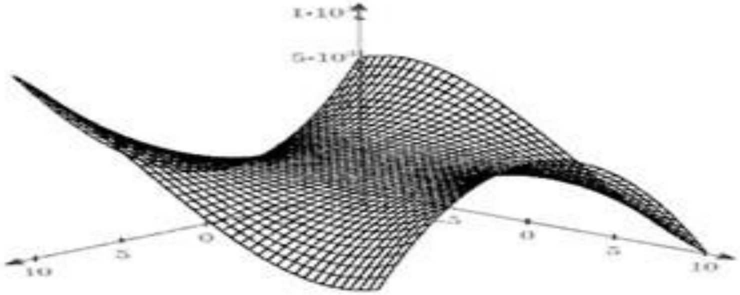
$dxU(x,y)$



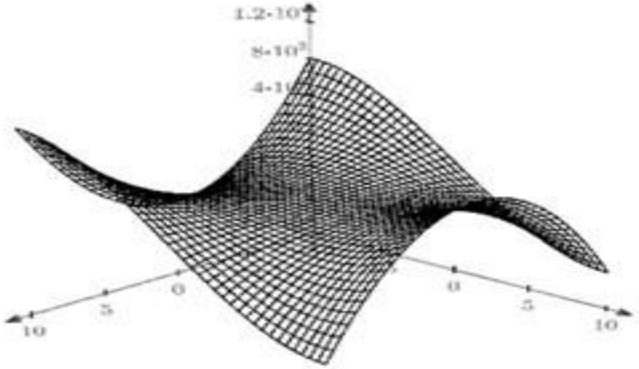
$dxU(x,y)$



$dxU(x,y)$



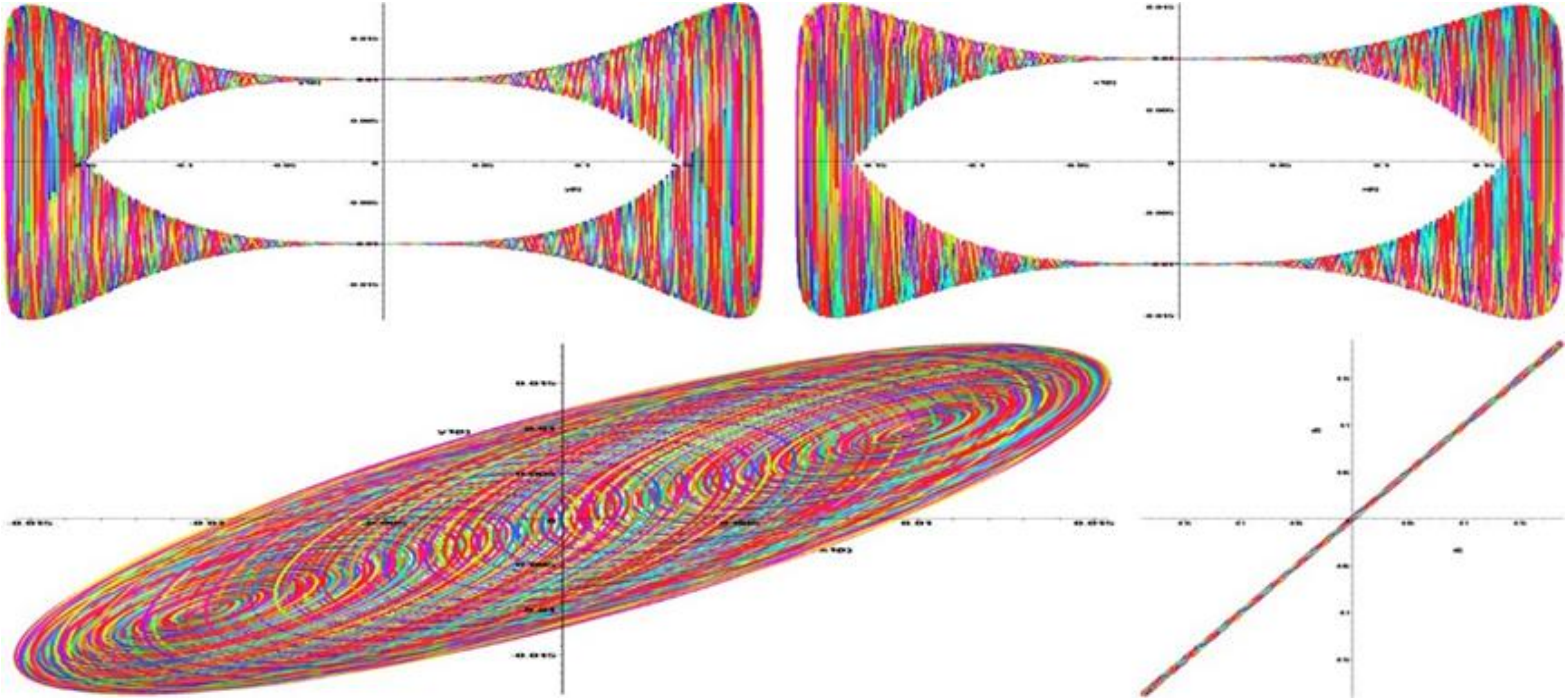
$dxU(x,y)$



$dxU(x,y)$

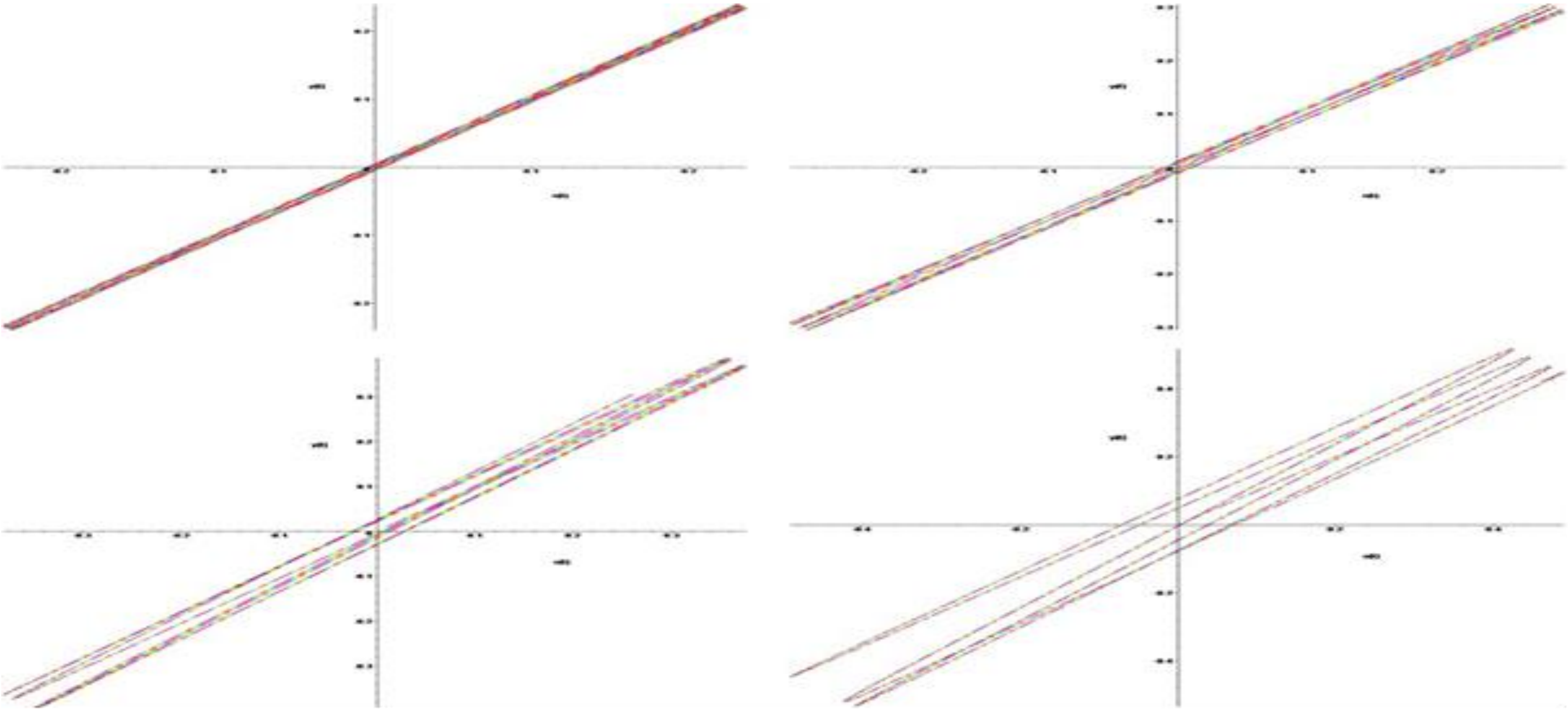
$\varphi = (0, 2\pi), \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi 5/12, \pi/2$

Типичное время движения составляло: t = (0…750).
Исследовались фазовые траектории в координатах: (x,x’), (y,y’), (y’,x’) и (y,x), где ’ обозначает производную по времени при *n* = 1.

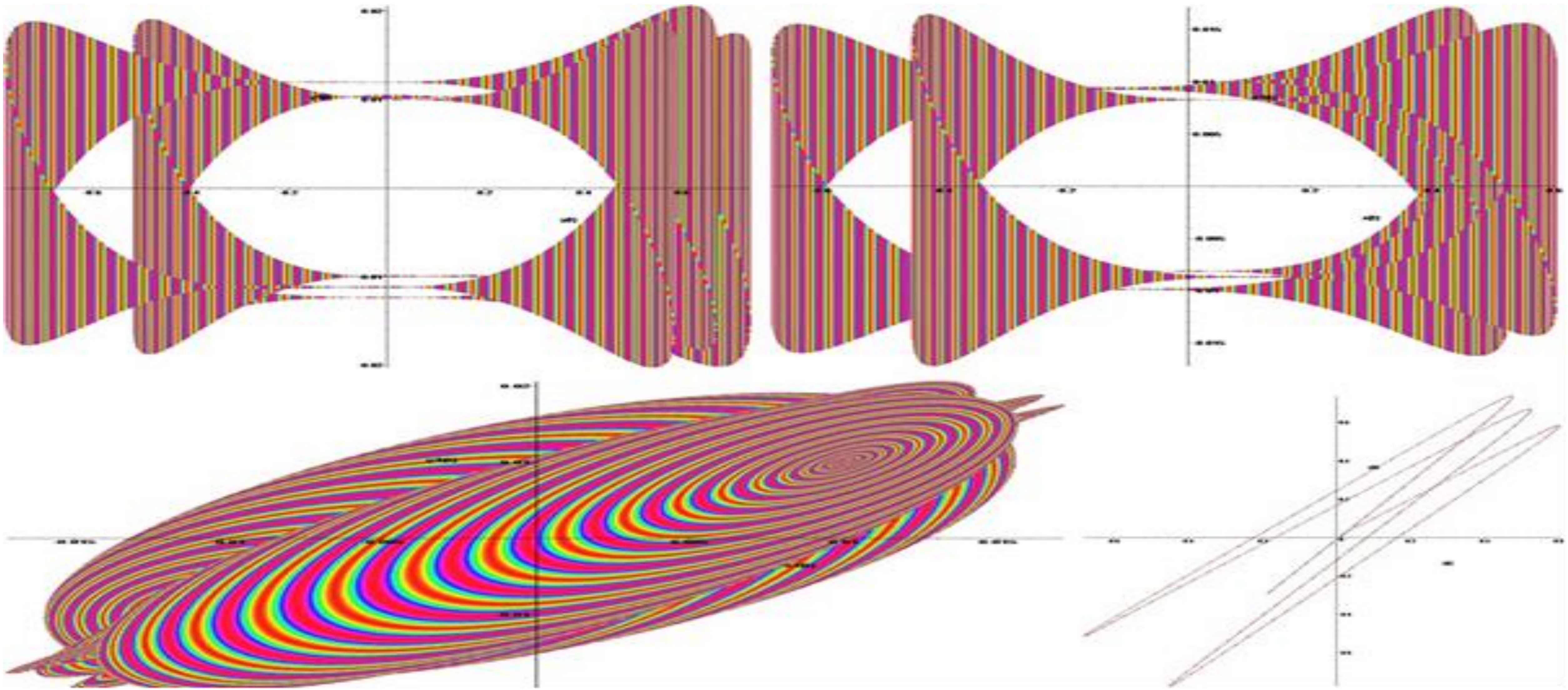


На рисунке показаны различные фазовые портреты системы при частоте $n$ = 1. Все фазовые портреты показывают, что движение системы устойчиво. Фазовый портрет (y,x) имеет наиболее простой вид: система движется сложным образом в относительно небольшой окрестности прямой линии. Другие фазовые портреты более ясно показывают сложный характер движения. Вместе с тем они демонстрируют вполне выраженную симметрию с двумя центрами движения. Спиральные фокусы с координатами $y'_0$. = 0.01, $x'_0$. = 0.01 хорошо видны на фазовом портрете (y',x'), а фазовые портреты (y',y) и (x',x) имеют аттрактор с двумя раздельными областями.

# Динамика фазового портрета (y,x) при увеличении частоты изменения поля n= (2,4,8,16)



Исследовались фазовые траектории в координатах: (x,x’), (y,y’), (y’,x’) и (y,x), где ’ обозначает производную по времени при n = 32.



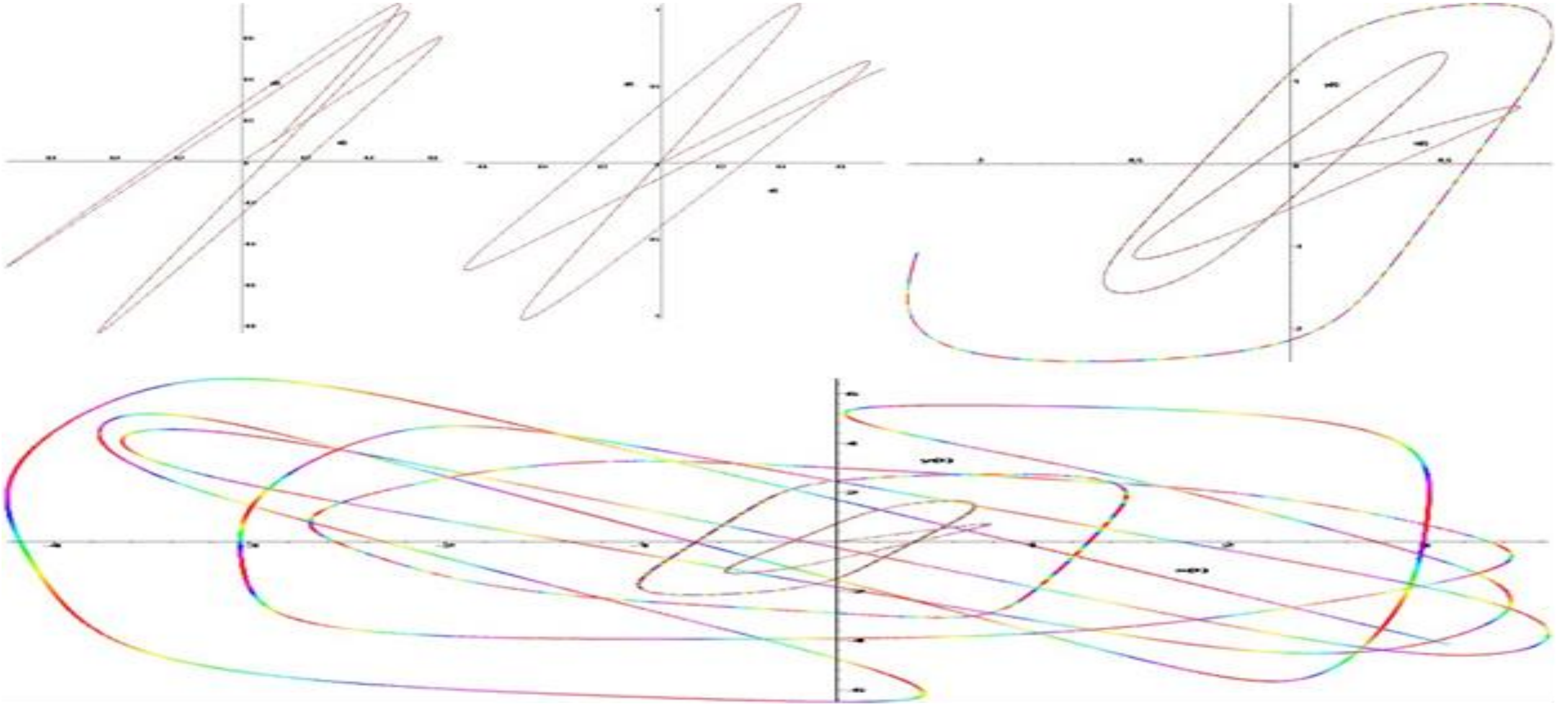
Устойчивые аттракторы существуют не для произвольных значений частоты изменения поля.

При частоте $n = 2$ сохраняется движение с фазовой траекторий, сложно «наплетенной» на прямой отрезок.

При частоте $n = 4$ становится заметной бифуркация на две области, а при увеличении частоты до значений $n = 8$ и $n = 16$ прослеживается разбиение на три и большее число областей.

При $n = 36$ и $n = 48$ еще сохраняется устойчивый фазовый цикл.

Динамика фазового портрета (y,x) при увеличении частоты изменения поля n = (36,48,56,64)



При увеличении частоты до $n = 56$ начинается потеря устойчивости, а при значении $n = 64$ происходит хаотическая потеря устойчивости системы. При еще большем увеличении частоты до значений $n = 72$, $n = 96$ система также является неустойчивой, и фазовые траектории довольно быстро уходят в бесконечность.

# Вывод

Результаты моделирования показывают, что достаточно сильно искаженная система седлообразного вида в определенном диапазоне частоты сохраняет динамическую устойчивость. С увеличением частоты происходят последовательные бифуркации, фазовые траектории становятся хаотическими, и наконец система теряет устойчивость. Выбор различных координат фазового пространства позволяет яснее рассмотреть отдельные детали динамики движения.

# ЛИТЕРАТУРА

1. L. E. J. Brouwer // N. Arch. v. Wisk. 1918, v.2, p.407.
2. L. E. J. Brouwer // in Collected Works, II, edited by H. Freudenthal. 1975, p.665.
3. O. Bottema //Z. Angew. Math. Phys. 1976, No 27, p.663.
4. O.N. Kirilov // Phys. Lett. A. 2011, No 375, p.1653.
5. O.N. Kirilov // American Journal of Physics. 2016. No 84, p.26.
6. I. Hoveijn, et al // J. Angew. Math. Phys. 1995. No 46, p.384.
7. F. Verhulst // J. Angew. Math. Phys. 2012. No 63, p.727.
8. С.П. Кузнецов // Детерминированный хаос. 2010, т.18, №5, стр. 80.

# Спасибо Вам большое за ваше внимание!

Авторы доклада благодарят Организаторов за прекрасную возможность посетить Вашу замечательную XXXIV  Всероссийскую школу-семинар «Волновые явления: физика и применения» имени А.П. Сухорукова («Волны-2023»).  И доложиться на секции • Нелинейная динамика и информационные системы.