О приведении систем к виду с относительным порядком динамическим методом

Фомичев Василий Владимирович [1] Краев Андрей Владимирович [2]
Роговский Александр Игоревич [3]

[1] д. ф.-м. н., проф., кафедра НДСиПУ, ВМК, МГУ

[2] к. ф.-м. н., м.н.с., кафедра НДСиПУ, ВМК, МГУ

[3] аспирант, кафедра НДСиПУ, ВМК, МГУ

24.04.2017

Рассматривается линейная стационарная векторная динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $y, u \in \mathbb{R}^l$ — выход и вход, A, B, C — постоянные матрицы соответствующих размеров. Далее мы будем предполагать, что полином

$$\beta(s) = \det \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

ненулевой.

Важную роль в теории управления играет определение относительного порядка (ОП), введенное в [1]. Приведем здесь это определение, учитывая линейность системы (см. [2]).

Определение 1

Вектор $r \in \mathbb{N}^l$ называется вектором ОП системы (1), если

1. $C_i A^{j-1} B = 0, \; j = \overline{1, r_i - 1}, \; C_i A^{r_i - 1} B \neq 0.$
2. Строки $C_i A^{r_i - 1} B, \; i = \overline{1, l}$, линейно независимы.

Для некоторых систем условия ОП могут быть несовместны. Например, рассмотрим систему со следующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для этой системы

$$\begin{array}{ll} C_1B = (0,0) & C_1AB = (1,0) \\ C_2B = (1,0), & \end{array}$$

т. е., согласно первому условию ОП, $r = (2,1)$. Однако, строки C_1AB, C_2B линейно зависимы, следовательно, условие 2 определения 1 не выполнено.

Приведение к виду с ОП

В некоторых случаях возможно добиться выполнения условий ОП с помощью, например, преобразования выходов. Существуют следующие методы:

1. "Статическое" преобразование выходов: замена $\tilde{y} = Ty$, где $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ — невырожденная постоянная матрица (см. [3]). К преимуществам метода можно отнести его простоту. Однако, не любая система (1) может быть приведена к виду с ОП указанным образом (см. [4]).
2. Преобразование вида $\tilde{y} = P(\partial)y$, где $P(\partial)$ — невырожденная полиномиальная матрица, $\partial = \frac{d}{dt}$. Согласно [5], любая система (1) может быть приведена к виду с ОП с помощью такого преобразования. Однако, дифференцирование сигналов затруднительно реализовать на практике.
3. "Динамическое" преобразование вида $\tilde{y} = \frac{B(\partial)}{\alpha(\partial)}$, где $\alpha(\partial)$ — ненулевой полином, $B(\partial)$ — невырожденная полиномиальная матрица. Данный метод позволяет привести систему вида (1) к виду с ОП, не используя при этом дифференцирования сигналов.

Далее речь пойдет о методе 3.

Постановка задачи

Дана система (1), для которой полином $\beta(s)$ ненулевой. Требуется найти систему $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ вида

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}y \\ \bar{y} = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}y, \end{cases} \tag{2}$$

где

- $\det \bar{D} \neq 0$;
- матрица $\bar{A}$ устойчива.

При этом требуется, чтобы система, являющаяся композицией систем (1) и (2), имела вектор ОП.

Систему (2), удовлетворяющую этим условиям, назовем *корректирующей*.

Легко показать, что если система $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ является композицией систем (1) и (2), то ее матрицы имеют вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \bar{B}C & \bar{A} \end{pmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{C} = \begin{pmatrix} \bar{D}C & \bar{C} \end{pmatrix}.$$

Также можно показать, что строки $\tilde{C}_i \tilde{A}^j \tilde{B}$, участвующие в определении ОП, для указанной системы определяются соотношениями

$$\tilde{C}_i \tilde{B} = \bar{D}_i (CB), \ \ \tilde{C}_i \tilde{A}^q \tilde{B} = \bar{D}_i (CA^q B) + \sum_{j=0}^{q-1} (\bar{C}_i \bar{A}^{q-1-j} \bar{B})(CA^j B), \ q = 1, 2, \ldots.$$

Далее мы будем строить корректирующую систему в два этапа: сначала найдем такие векторы $V_i^j \in \mathbb{R}^{1 \times l}$, что

$$\begin{gathered} \sum_{j=0}^{q} V_{q-j}^i (CA^j B) = 0, \ q = 1, 2, \ldots \tilde{r}_i - 1; \\ \text{строки } \sum_{j=0}^{\tilde{r}_i} V_{q-j}^i (CA^j B), \ i = \overline{1, l} \ \text{ линейно независимы.} \end{gathered} \tag{3}$$

Затем построим систему $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$, для которой $\bar{D}_i = V_i^0, \ \bar{C}_i \bar{A}^j \bar{B} = V_{j+1}^i$.

Алгоритм построения искомой системы

Введем обозначения:

- $$P_k = \begin{pmatrix} (CB)^T & 0 & \dots & 0 \\ (CAB)^T & (CB)^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (CA^{k-1}B)^T & (CA^{k-2}B)^T & \dots & (CB)^T \end{pmatrix};$$
- пусть $e \in \mathbb{R}^{kl}$

$$\mathcal{P}_i e = (e_{(i-1)l+1}, e_{(i-1)l+2}, \dots, e_{il})^T \in \mathbb{R}^l.$$

Если, например, $e \in \ker P_2,\ e \neq 0$ то

$$(CB)^T \mathcal{P}_1 e = 0,\ (CAB)^T \mathcal{P}_1 e + (CB)^T \mathcal{P}_2 e = 0,$$

т. е. существуют строки V_0^i, V_1^i такие, что $\tilde{r}_i > 2$.
Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1

Пусть $\beta(s) \not\equiv 0$. Тогда $\exists\, k \in \mathbb{N}: \ \dim\ker P_k = \dim\ker P_j,\ j \in \mathbb{N},\ j \geqslant k.$

Рассмотрим алгоритм построения вспомогательного множества векторов $\mathcal{S}$.

1. Согласно утверждению 2, существует номер $k_1: \ \dim\ker P_{k_1} = \dim\ker P_{k_1+1}$. Рассмотрим базис пространства P_{k_1} — векторы $e^1_1, \ldots, e^1_{q_1}$. Пусть $\mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^1_{q_1}) = n_1$, и столбцы $\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^1_{n_1}$ линейно независимы. Добавим ко множеству $\mathcal{S}$ векторы $e^1_1, \ldots, e^1_{n_1}$.
2. Выберем номер $k_2 < k_1$, удовлетворяющий условиям
   - $\exists e \in \ker P_{k_2}: \ \mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^1_{n_1}, \mathcal{P}_1 e) = n_1 + 1.$
   - $\forall i: \ k_1 < i < k_2, \ \forall f \in \ker P_i, \ \mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^1_{n_1}, \mathcal{P}_1 f) = n_1.$

   Пусть $e^2_1, \ldots, e^2_{q_2}$ — базис $\ker P_{k_2}$, и $\mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^1_{n_1}, \mathcal{P}_1 e^2_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^2_{q_2}) = n_1 + n_2$, причем векторы $\mathcal{P}_1 e^2_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^2_{n_2}$ линейно независимы. Добавим векторы $e^2_1, \ldots, e^2_{n_2}$ ко множеству $\mathcal{S}$.
3. Выберем номер $k_3 < k_2$, удовлетворяющий условиям
   - $\exists e \in \ker P_{k_3}: \ \mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^2_{n_2}, \mathcal{P}_1 e) = n_1 + n_2 + 1.$
   - $\forall i: \ k_2 < i < k_3 \ \forall f \in \ker P_i: \ \mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^2_{n_2}, \mathcal{P}_1 f) = n_1 + n_2.$

   Пусть $e^3_1, \ldots, e^3_{q_3}$ — базис $\ker P_{k_3}$, и $\mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e^1_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^2_{n_2}, \mathcal{P}_1 e^3_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^3_{q_3}) = n_1 + n_2 + n_3$, причем векторы $\mathcal{P}_1 e^3_1, \ldots, \mathcal{P}_1 e^3_{n_3}$ линейно независимы. Добавим векторы $e^3_1, \ldots, e^3_{n_3}$ к $\mathcal{S}$.

Последующие шаги делаются аналогично. Алгоритм останавливается, если $n_1 + \ldots + n_m = \dim\ker P_1$.

Добавим ко множеству $\mathcal{S}$, построенному по описанному выше алгоритму, столбцы $f_1, \ldots, f_d$ так, чтобы $\mathrm{rg}(\mathcal{P}_1 e_1^1, \ldots, \mathcal{P}_1 e_{n_m}^m, f_1, \ldots, f_d) = l$ (здесь $d = l - \dim\ker P_1$). При этом если
Введем обозначения:

$$\begin{array}{llll} V_0^1 = (\mathcal{P}_1 e_1^1)^T & V_1^1 = (\mathcal{P}_2 e_1^1)^T & \ldots & V_{k_1-1}^1 = (\mathcal{P}_{k_1} e_1^1)^T \\ V_0^2 = (\mathcal{P}_1 e_1^1)^T & V_1^2 = (\mathcal{P}_2 e_1^1)^T & \ldots & V_{k_1-1}^2 = (\mathcal{P}_{k_1} e_1^1)^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_0^{l-d} = (\mathcal{P}_1 e_{n_m}^m)^T & V_1^{l-d} = (\mathcal{P}_2 e_{n_m}^m)^T & \ldots & V_{k_m-1}^{l-d} = (\mathcal{P}_{k_m} e_{n_m}^m)^T \\ V_0^{l-d+1} = f_1^T & V_0^{l-d+2} = f_2^T & \ldots & V_0^l = f_d^T. \end{array} \tag{4}$$

Утверждение 2

Система строк (4) удовлетворяет условиям (3).

Таким образом, первый этап построения корректирующей системы выполнен.

Алгоритм построения искомой системы

Осталось построить систему $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$, для которой выполняются равенства

$$\begin{array}{l} \bar{D}_i = V_0^i \\ \bar{C}_i \bar{A}^j \bar{B} = V_{j-1}^i, \quad i = \overline{1, l-d},\ j = \overline{1, k_i - 1}. \end{array}$$

Рассмотрим систему $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ со следующими матрицами

$$\bar{A} = \mathrm{diag}(\bar{A}^1, \ldots, \bar{A}^{l-d}),\ \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{B}^1 \\ \vdots \\ \bar{B}^{l-d} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \bar{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\bar{C}^1, \ldots, \bar{C}^{l-d}) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{D}^T = ((V_0^1)^T, \ldots, (V_0^l)^T), \end{array} \qquad (5)$$

где

$$\bar{A}^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ * & * & * & \ldots & * \end{pmatrix},\ \bar{B}^i = \begin{pmatrix} V_1^i \\ V_2^i \\ \vdots \\ V_{k_i-1}^i \end{pmatrix}, \bar{C}^i = (1, 0, \ldots, 0), \quad i = \overline{1, l-d}.$$

Система (5) является корректирующей. Заметим, что, выбирая коэффициенты матрицы $\bar{A}$, можно сделать ее устойчивой.

Пример

Приведем к виду с ОП систему из предыдущего примера, где

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы P_k :

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \dim\ker P_1=1;\quad P_2=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&0&0\\0&0&0&0\\\hline 1&0&0&1\\0&1&0&0\end{array}\right),\ \dim\ker P_2=2;$$

$$P_3=\left(\begin{array}{cc|cc|cc}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\\hline 1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\hline 0&1&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\end{array}\right),\ \dim\ker P_3=2.$$

Поскольку $\dim\ker P_2=\dim\ker P_3,\ k_1=2.$

Пример

Рассмотрим базис пространства $\ker P_2$:

$$e_1^1 = (1, 0 \,|\, 0, -1)^T, e_2^1 = (0, 0 \,|\, 1, 0)^T.$$

Поскольку $\mathcal{P}_1 e_1^1 \neq 0$ и $\mathcal{P}_1 e_2^1 = 0$, то $\mathcal{S} = \{e_1^1\}$. Добавим ко множеству $\mathcal{S}$ вектор $f_1 = (0, 1)^T$. Тогда

$$V_0^1 = (\mathcal{P}_1 e_1^1)^T = (1, 0), \quad V_1^1 = (\mathcal{P}_2 e_1^1)^T = (0, -1), \quad V_0^2 = f_1^T = (0, 1).$$

Рассмотрим систему $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$, где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \; \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \bar{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $C_1 B = V_1^1$, $D_1 = V_0^1$, $D_2 = V_0^2$. Рассмотрим композицию систем $\{A, B, C\}$ и $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ — систему $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$, матрицы которой имеют вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right), \; \tilde{B} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right), \; \tilde{C} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Для системы $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ выполнены условия ОП, поскольку

$$\begin{array}{lll} \tilde{C}_1\tilde{B} = (0,0) & \tilde{C}_1\tilde{A}\tilde{B} = (0,0) & \tilde{C}_1\tilde{A}^2\tilde{B} = (0,-1) \\ \tilde{C}_2\tilde{B} = (1,0). & & \end{array}$$

Таким образом, система приведена к виду с относительным порядком.

Литература

- Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995.
- Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Методы робастного обращения динамических систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- Краев А. В., Фомичев В. В., Роговский А. И. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1128-1132.
- Краев А. В. Об аналоге относительного порядка для линейных динамических MIMO-систем // Доклады Академии наук. 2014. Т. 454. № 2. С. 152-157.
- Краев А. В., Фомичев В. В., Роговский А. И. О приведении векторной системы к виду с относительным порядком. // Вестник Московского ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. 2015. № 3. С.20-26.

Спасибо за внимание!