Вопросы приводимости MIMO-систем 4 порядка к виду с относительным порядком

м.н.с. Краев А.В.

Постановка задачи

Линейная стационарная дискретная система управления порядка n с l входами и l выходами (все основные результаты могут быть применены и для непрерывных систем):

$$\begin{cases} x^{t+1} = Ax^t + Bu^t \\ y^t = Cx^t, \qquad t = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{1}$$

Известно классическое определение относительного порядка (ОП):

Определение 1. Вектор $r = (r_1, ..., r_l)$ назовём вектором ОП для системы (1), если:

1. $C_i A^{j-1} B = 0, j = 1, ..., r_i - 1; C_i A^{r_i - 1} B \neq 0$, для каждого $i = 1, ..., l$.

2. $det H(r) \neq 0$, где $H(r) = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1 - 1} B \\ \cdots \\ C_l A^{r_l - 1} B \end{pmatrix}$.

Постановка задачи

В одной из работ автором введено определение столбцового ОП:

Определение 2. Вектор $r = (r_1, ..., r_l)$ назовём вектором столбцового ОП для системы (1), если:

1. $CA^{j-1}B_i = 0, j = 1, ..., r_i - 1; CA^{r_i - 1}B_i \neq 0$, для каждого $i = 1, ..., l$.

2. $det\bar{H}(r) \neq 0$, где $\bar{H}(r) = \left(CA^{r_1-1}B_1 | \cdots | CA^{r_l-1}B_l\right)$.

По аналогии со случаем системы 3 порядка исследована возможность приводимости системы 4 порядка с 2 входами и 2 выходами к виду с одним из ОП. Для каждой структуры ступенчатого вида матрицы C получены условия приводимости системы 4 порядка к виду с каждым из ОП. Выделены случаи приводимости системы только к виду со столбцовым ОП.

Приведение к каноническому виду

Вторая каноническая форма управляемости, в зависимости от размера клеток, может принимать один из двух видов:

Первый случай:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Второй случай (с точностью до перестановок клеток управляемости):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 1 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Рассмотрим поочерёдно все возможные структуры ступенчатого вида матрицы C для каждого из двух случаев.

Ступенчатый вид матрицы выходов

Для каждого из этих случаев матрица выходов линейным невырожденным преобразованием приводится к ступенчатому виду, имеющему одну из следующих 6 структур:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & 0 & 1 & c_{24} \end{pmatrix}; \tag{4}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & c_{14} \\ 0 & 0 & 1 & c_{24} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матрица Розенброка

Определение 3. Матрицей Розенброка для системы (1) называется следующая блочная матрица, зависящая от параметра z:

$$R(z) = \begin{pmatrix} zI - A & | & -B \\ ------- & - & ------- \\ C & | & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Известные теоретические сведения показывают, что с точки зрения приводимости к виду с ОП интерес представляют только те системы, для которых определитель Розенброка отличен от тождественного нуля

$$|R(z)| \not\equiv 0. \tag{8}$$

Это учитывается в дальнейших рассмотрениях.

Случай 1-1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$$\alpha = 0 => \quad C_1 B = [1 \;\; c_{13}]; \quad C_2 B = [0 \;\; c_{23}]; \quad C_2 AB = [1 \;\; c_{24}]; \tag{10}$$

$$H^{11} = \begin{pmatrix} 1 & c_{13} \\ 0 & c_{23} \end{pmatrix}; \quad H^{12} = \begin{pmatrix} 1 & c_{13} \\ 1 & c_{24} \end{pmatrix} \quad => \begin{cases} c_{23} = 0 \\ c_{24} = c_{13} \end{cases}$$

$$CB_1 = [1 \;\; 0]^T; \;\; CB_2 = [\alpha + c_{13} \;\; c_{23}]^T = [\beta \;\; 0]^T; \;\; CAB_2 = [c_{14} \;\; \alpha + c_{24}]^T; \tag{11}$$

$$\bar{H}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{H}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & c_{14} \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_{14} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad => c_{14} \neq 0$$

Условия НОП: $\begin{cases} c_{23} = 0 \\ c_{24} = c_{13} \\ \left[\begin{array}{l} c_{14} \neq 0 \\ a_{24} + a_{44} c_{13} = 0 \end{array} \right. \end{cases}$ так как $\bar{H}^{13} = \begin{pmatrix} 1 & a_{14} + a_{34} c_{13} \\ 0 & a_{24} + a_{44} c_{13} \end{pmatrix}$ (12)

Случай 1-2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & 0 & 1 & c_{24} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$CB = H^{11} = \bar{H}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

ОП существует всегда, как классический, так и столбцовый

Случай 1-3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

$$C_1 B = [1 \quad c_{13}]; \quad C_2 B = [0 \quad 0]; \quad C_2 A B = [0 \quad 1] \tag{16}$$

$$H^{12} = \begin{pmatrix} 1 & c_{13} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Классический ОП существует всегда

Случай 1-4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & c_{14} \\ 0 & 0 & 1 & c_{24} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

$$C_1 B = [0 \quad 0]; \quad C_1 A B = [1 \quad c_{14}]; \quad C_2 B = [0 \quad 1]; \tag{19}$$

$$H^{21} = \begin{pmatrix} 1 & c_{14} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Классический ОП существует всегда

Случай 1-5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

$$\alpha = 0 => C_1 B = [0 \;\; c_{13}]; \quad C_1 AB = [1 \;\; 0]; \quad C_2 B = [0 \;\; 0]; \quad C_2 AB = [0 \;\; 1]$$

$$H^{12} = \begin{pmatrix} 0 & c_{13} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad => \quad c_{13} \neq 0 \tag{22}$$

$$CB_1 = [\alpha c_{13} \;\; 0]^T; \quad CAB_1 = [1 \;\; 0]^T; \quad CB_2 = [c_{13} \;\; 0]^T; \quad CAB_2 = [\alpha \;\; 1]^T \tag{23}$$

$$\bar{H}^{11} = \begin{pmatrix} \alpha c_{13} & c_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{H}^{21} = \begin{pmatrix} 1 & c_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{H}^{22} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad => \quad c_{13} \neq 0$$

$$\text{При } c_{13} a_{42} = 1 \;\; |R(z)| = 0 => \text{Условия НОП: } \begin{cases} c_{13} \neq 0 \\ c_{13} a_{42} \neq 1 \end{cases} \tag{24}$$

Случай 1-6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 1 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

$$C_1 B = [0 \quad 1]; \quad C_2 B = [0 \quad 0]; \quad C_2 AB = [0 \quad 1]$$

$$H^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \text{всегда НОП} \tag{26}$$

$$CB_1 = [0 \quad 0]^T; \quad CAB_1 = [0 \quad 0]^T; \quad CA^2B_1 = [a_{32} \quad a_{42}]^T; \quad CB_2 = [1 \quad 0]^T \tag{27}$$

$$\bar{H}^{31} = \begin{pmatrix} a_{32} & 1 \\ a_{42} & 0 \end{pmatrix}; \quad |\bar{H}^{31}| = -a_{42} => a_{42} = 0$$

Так как $|R(z)| = |\bar{H}| = -a_{42}$, то при $|R(z)| \neq 0$ СтОП существует всегда

(28)

Случай 2-1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 1 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}. \qquad (29)$$

$$CB = H^{11} = \bar{H}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (30)$$

ОП существует всегда, как классический, так и столбцовый

Случай 2-2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 1 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & 0 & 1 & c_{24} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

$$\alpha = 0 \;\;=>\;\; C_1B = [1 \;\; c_{12}]; \quad C_2B = [0 \;\; 0]; \quad C_2AB = [a_{31} + a_{41}c_{24} \;\; 1]$$

$$H^{12} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ a_{31} + a_{41}c_{24} & 1 \end{pmatrix} \quad => \quad c_{12}(a_{31} + a_{41}c_{24}) = 1 \tag{32}$$

$$CB_1 = [1 \;\; 0]^T; \quad CB_2 = [\alpha + c_{12} \;\; 0]^T; \quad CAB_2 = [\beta \;\; 1 - c_{12} * (a_{31} + a_{41} * c_{24})]^T$$

$$\bar{H}^{11} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + c_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{H}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -c_{12} * (a_{11} + a_{21} * c_{12} + a_{41} * c_{14}) \\ 0 & 1 - c_{12} * (a_{31} + a_{41} * c_{24}) \end{pmatrix} \tag{33}$$

Условия НОП: $\begin{cases} c_{12}(a_{31} + a_{41}c_{24}) = 1 \\ a_{11} + a_{21} * c_{12} + a_{41} * c_{14} \neq 0 \end{cases}$ так как $|\bar{H}^{13}| = |R(z)|$

(34)

Случай 2-3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 1 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

$$\text{Условия НОП:} \quad \begin{cases} c_{12} = 0 \\ c_{13} \neq 0 \\ a_{41} \neq 0 \\ a_{41}c_{13} \neq 1 \end{cases} \tag{36}$$

Случай 2-4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 1 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & c_{14} \\ 0 & 0 & 1 & c_{24} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

$$C_1B = [0 \quad 1]; \quad C_2B = [0 \quad 0]; \quad C_2AB = [a_{31} + a_{41}c_{24} \quad 1]$$

$$H^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{31} + a_{41}c_{24} & 1 \end{pmatrix} \quad => \quad a_{31} + a_{41}c_{24} = 0 \tag{38}$$

$$CB_1 = [0 \quad 0]^T; \quad CB_2 = [1 \quad 0]^T; \quad CAB_1 = [a_{21} + c_{14}a_{41} \quad a_{31} + a_{41}c_{24}]^T$$

$$\bar{H}^{21} = \begin{pmatrix} a_{21} + c_{14}a_{41} & 1 \\ a_{31} + a_{41}c_{24} & 0 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{cases} a_{31} + a_{41}c_{24} = 0 \\ a_{21} + c_{14}a_{41} \neq 0 \end{cases} \tag{39}$$

$$\text{Условия НОП:} \quad \begin{cases} a_{31} + c_{24}a_{41} = 0 \\ a_{21} + c_{14}a_{41} \neq 0 \end{cases} \tag{40}$$

Случай 2-5

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 1 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & c_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

$$C_1B = [0\ \ 1];\ \ C_2B = [0\ \ 0];\ \ C_2AB = [a_{41}\ \ 0];\ \ C_2A^2B = [a_{11}a_{41} + a_{31} + a_{44}a_{41}\ \ 1];$$

$$H^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{41} & 0 \end{pmatrix}; \quad H^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{31} & 1 \end{pmatrix} => \begin{cases} a_{41} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{cases} => R(z) = 0 \tag{42}$$

$$\text{При } R(z) \neq 0 \text{ условия НОП несовместны} \tag{43}$$

Случай 2-6

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 1 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 1 & a_{44} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

$$C_1 B = [0 \;\; 0]; \;\; C_2 B = [0 \;\; 0]; \;\; C_1 AB = [a_{31} \;\; 1]; C_2 AB = [a_{41} \;\; 0]; \;\; C_2 A^2 B = [a_{31} \;\; 1];$$

$$H^{22} = \begin{pmatrix} a_{31} & 1 \\ a_{41} & 0 \end{pmatrix}; \quad => a_{41} = 0 => R(z) = 0 \tag{45}$$

$$\text{При } R(z) \neq 0 \text{ условия НОП несовместны} \tag{46}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ