

© 2005 г. В. В. Терновский*, А. М. Хапаев*, М. М. Хапаев*

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛЕ СТОЯЧЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ И ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В статье анализируется взаимодействие релятивистской заряженной частицы с электромагнитным полем, являющимся суперпозицией стоячей волны и постоянного магнитного поля. Показатель преломления среды отличен от единицы. Исследование проводилось в приближении малого сигнала. Для тестирования результатов использовалось компьютерное моделирование исходной системы с учетом двухмасштабности скорости изменения переменных.

Ключевые слова: релятивизм, коэффициент преломления, резонанс.

Проблема взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными полями представляет значительный интерес для современной физики элементарных частиц. Движение релятивистских частиц и вопросы излучения изучались для бегущих волн различной поляризации. При этом взаимодействие с интенсивными полями обычно рассматривалось в рамках квантовой электродинамики [1]. Классическое описание процессов обмена энергии релятивистской частицы с волной возможно провести в приближении малой амплитуды электромагнитной волны, когда допустимо пренебречь процессами излучения. В настоящей работе исследуются эффекты взаимодействия заряженных частиц с полем стоячей волны, являющейся суперпозицией двух встречных бегущих волн.

1. Постановка задачи, интегралы движения. Пусть заряженная частица взаимодействует с полем стоячей электромагнитной волны с вектор-потенциалом

$$\vec{A} = A[(\sin(\omega\xi) + \sin(\omega\eta))\vec{i} - (\cos(\omega\xi) + \cos(\omega\eta))\vec{j}], \quad A = -\frac{cE_0}{\omega}, \quad (1)$$

где c – скорость света, ω – частота волны, E_0 – амплитуда электрического поля, ξ и η – аргументы прямой и вторичной волны:

$$\xi = t - \frac{z}{c\beta_f}, \quad \eta = t + \frac{z}{c\beta_f}, \quad \beta_f = \frac{1}{k}.$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: vladimir1961@hotmail.com

Здесь β_f – фазовая скорость волны, k – показатель преломления. В дальнейшем будем писать вектор-потенциал (1) в виде

$$\vec{A} = 2A \cos \frac{\omega z}{c\beta_f} [\sin(\omega t)\vec{i} - \cos(\omega t)\vec{j}]. \quad (2)$$

Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H} = H_0 \vec{n}$ направлен вдоль оси z .

Классическая ковариантная формулировка уравнений движения Максвелла–Лоренца в электромагнитном поле с вектор-потенциалом A_μ и интеграл энергии-импульса образуют замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений [2]:

$$\ddot{x}_\mu = \frac{e}{mc} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) \dot{x}_\nu, \quad \dot{x}_\mu^2 = -c^2. \quad (3)$$

Здесь m – масса, e – заряд частицы, точка означает дифференцирование по собственному времени τ , связанному с лабораторным временем t известным соотношением

$$\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta^2 = \beta_\perp^2 + \beta_\parallel^2, \quad \beta_\perp^2 = \left(\frac{1}{c} \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{dy}{dt} \right)^2, \quad \beta_\parallel = \frac{1}{c} \frac{dz}{dt},$$

где γ – безразмерная энергия заряда.

Представляется возможным для дальнейшего анализа сформулировать систему (3) в безразмерных переменных:

$$\varepsilon = \frac{eE_0}{m\omega c}, \quad \omega_0 = \frac{eH_0}{mc}, \quad \mu = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad t = \omega t, \quad \tau = \omega \tau,$$

$$x = \frac{\omega x}{c}, \quad z = \frac{\omega z}{c}, \quad \dot{x} = \frac{\dot{x}}{c}, \quad \dot{y} = \frac{\dot{y}}{c},$$

ε – амплитуда волны, ω_0 – частота ларморовского вращения электрона в магнитном поле величины H_0 . Ларморовская частота ω_0 и частота электромагнитного поля волны ω предполагаются величинами одного порядка, поэтому $\mu = O(1)$. Безразмерный параметр ε предполагается малым ($0 < \varepsilon \ll 1$), что означает малость амплитуды плоской волны E_0 . При этом возможно периодическое движение, которое переходит в хаотическое при больших E_0 . Смысл остальных переменных следует из обозначений.

Первые два уравнения системы (3) после подстановки вектор-потенциалов электромагнитного поля (1) и стационарного магнитного H_0 приводятся к виду

$$\ddot{X} = \mu \dot{Y} - \frac{d}{d\tau} (2\varepsilon \cos(kz) \sin t),$$

$$\ddot{Y} = -\mu \dot{X} + \frac{d}{d\tau} (2\varepsilon \cos(kz) \cos t).$$

Симметрия полей (1), (2) позволяет понизить порядок уравнений:

$$\dot{X} = \mu Y - 2\varepsilon \cos(kz) \sin t + c_x,$$

$$\dot{Y} = -\mu X + 2\varepsilon \cos(kz) \cos t + c_y.$$

Константы интегрирования, возникающие при переходе к уравнениям первого порядка по τ , определяются соотношениями

$$\begin{aligned} c_x &= \dot{X}_0 - \mu Y_0 + 2\varepsilon \cos z_0 \sin t_0, \\ c_y &= \dot{Y}_0 + \mu X_0 - 2\varepsilon \cos z_0 \cos t_0. \end{aligned}$$

Замена переменных типа сдвига, как и в статье [3]:

$$X = x - \frac{c_y}{\mu}, \quad Y = y + \frac{c_x}{\mu},$$

приводит систему (3) к следующей скалярной системе четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu y - 2\varepsilon \cos(kz) \sin t, \\ \dot{y} &= -\mu x + 2\varepsilon \cos(kz) \cos t, \\ \ddot{z} &= -2\varepsilon \mu k \sin(kz)(y \sin t + x \cos t) + 2\varepsilon^2 k \sin(2z), \\ \dot{\gamma} &= -2\varepsilon \mu \cos(kz)(y \cos t - x \sin t). \end{aligned} \tag{4}$$

Дальнейшее преобразование системы (4) приводит к интегралу движения, связывающему энергию и поперечные компоненты координат заряда, аналогично сделанному в статье [3]:

$$\gamma = -\frac{1}{2}\mu(x^2 + y^2) + R, \tag{5}$$

где R – константа интегрирования, определяемая начальными условиями.

Симметрия электромагнитных полей позволяет перейти к цилиндрической системе координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad \theta = t - \varphi$$

и получить систему, содержащую быстрые и медленные переменные [4], [5], где r и \dot{z} – медленные переменные, их производные $\sim O(\varepsilon)$, θ и z – быстрые переменные, их производные $\sim O(1)$:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon [\sin(\theta + kz) + \sin(-kz + \theta)], \\ \dot{\theta} &= \mu + \gamma - \frac{\varepsilon}{r} [\cos(\theta + kz) + \cos(-kz + \theta)], \\ \ddot{z} &= -\varepsilon \mu k r [\sin(\theta + kz) + \sin(-kz + \theta)] + 2\varepsilon^2 k \sin(2z), \\ \gamma &= -\frac{1}{2}\mu r^2 + R. \end{aligned} \tag{6}$$

Разделение системы на быстрые и медленные переменные связано с выбором параметров электромагнитного поля: амплитуды высокочастотного электромагнитного поля E_0 , его частоты ω , амплитуды стационарного магнитного поля H_0 , ларморовской частоты ω_0 . При этом, как говорилось, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\omega_0/\omega \sim O(1)$. При других условиях возможно только хаотическое движение, и такого деления не будет.

2. Резонансные соотношения. Используя теорию возмущений, получим формальное асимптотическое разложение по степеням ε задачи (6):

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \varepsilon r_1(\tau) + \varepsilon^2 r_2(\tau) + \dots, \\ \theta &= (\mu + \gamma_0)\tau + \varepsilon \theta_1(\tau) - \varphi + \varepsilon^2 \theta_2(\tau) + \dots, \\ z &= \dot{z}_0 \tau + \varepsilon z_1(\tau) + \varepsilon^2 z_2(\tau) + \dots. \end{aligned}$$

Для энергии γ в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= -\varepsilon \mu r_0 \left[\frac{\cos(\sigma_+ \tau - \varphi_0)}{\sigma_+} - \frac{\cos(\sigma_- \tau + \varphi_0)}{\sigma_-} \right] + \varepsilon^2(\dots) + \dots + \text{const}, \\ \sigma_+ &= \gamma_0 + \mu + k \dot{z}_0, \quad \sigma_- = -\gamma_0 - \mu + k \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично выписываются формулы для z и θ . Таким образом, изменение энергии с точностью до ε происходит по двухпериодическому закону с периодами $T_+ = 2\pi/\sigma_+$, $T_- = 2\pi/\sigma_-$. Очевидно, если частоты $\sigma_+ \approx 0$ или $\sigma_- \approx 0$, то асимптотическое разложение (7) будет расходиться. Это известная в механике проблема малых знаменателей. Классические методы теории возмущений не позволяют описывать резонансные режимы, поэтому для дальнейшего анализа введем следующие понятия.

Пусть $\sigma = -\gamma(\tau) - \mu + k \dot{z}(\tau)$ – комбинационная частота, обычно называемая расстройкой, $\psi = kz(\tau) - \theta(\tau)$ – комбинационная фаза. Резонансом условимся называть такое соотношение параметров, при котором величина расстройки мала на асимптотически большом отрезке времени $\tau \sim 1/\varepsilon$.

В комбинационную частоту σ (расстройку) через $\gamma(\tau)$ входит ларморовский радиус, а следовательно, и формирующее его внешнее поле H_0 , скорость продольного движения \dot{z} , а также коэффициент преломления k . Таким образом, все физические величины, характеризующие процесс, оказываются связанными резонансными соотношениями. Если σ сохраняется вблизи нуля, она представляет баланс скоростей продольного и ларморовского движения. Как известно из эксперимента, если такого баланса нет, то движение становится хаотическим. В правых частях задачи (6) имеются слагаемые с малыми (резонансными) частотами и быстроосциллирующие слагаемые $\cos(kz + \theta)$, $\sin(kz + \theta)$, $\sin(2kz)$. Согласно принципу усреднения [5] решение системы с некоторыми начальными условиями близко на асимптотически большом отрезке времени к решению усредненной системы с теми же начальными условиями; в частности, к решению системы, в правых частях которой опущены быстроосциллирующие слагаемые.

Выясним вопрос устойчивости резонанса, используя метод исследования на устойчивость, основанный на объединении второго метода Ляпунова и метода усреднения и ориентированный на исследование многочастотных систем (см. монографию [4], гл. 4). В теоремах об устойчивости таких систем вводится условие изолированности резонанса, т.е. при удалении траектории от точки резонанса резонансное условие перестает действовать, и возможно опенить снизу резонансную частоту. В системе (6) медленные переменные – r и \dot{z} , быстрые – θ и z . Если усреднить (6) по быстрым переменным, исчезнут

слагаемые $\cos(kz + \theta)$, $\sin(kz + \theta)$, $\sin(2kz)$; положение резонанса $\sigma = 0$. Новая система для исследования резонанса имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon \sin \psi, \\ \dot{\sigma} &= \varepsilon \mu q \sin \psi, \\ r \dot{\psi} &= r \sigma + \varepsilon \cos \psi, \\ q \dot{\gamma} &= -\sigma + \text{const}, \quad q = 1 - k^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Изучим устойчивость и изолированность резонанса $\sigma = 0$. В качестве функции Ляпунова выберем величину $|\sigma|$. Зададим $\eta > 0$, $0 < \eta_1 < \eta$ и рассмотрим кольцевую область, состоящую из $[-\eta, -\eta_1]$, $[\eta_1, \eta]$. Устойчивость имеет место, если при начальных значениях расстройки σ_0 , удовлетворяющей условию $|\sigma_0| < \eta_1$, для последующих времен (на бесконечном или асимптотически большом отрезке) справедливо неравенство $|\sigma| < \eta$. Пока справедливо неравенство $|\sigma| < \eta_1$, тем более справедливо неравенство $|\sigma| < \eta$. Когда же $|\sigma|$ превысит η_1 , для σ как комбинационной частоты будет справедлива оценка снизу $|\sigma| > \eta_1$, и в системе (8) возможно усреднение по ψ [4], которое дает нуль справа. Это означает, что σ сохраняется на асимптотически большом отрезке $\tau \approx 1/\varepsilon$, и система работает в резонансном режиме. Заметим, что для условий вакуума ($k = \beta_f = 1$) утверждение очевидно, т.е. в этом случае расстройка – быстроосциллирующая функция с нулевым средним.

Следует подчеркнуть, что усредненная система (8) аналитически интегрируема и сводится к нелинейному уравнению второго порядка для расстройки

$$(\ddot{\sigma} - a)^2 = \sigma^2 \left(2a \left(\sigma - \sigma_0 + \frac{1}{2} \mu q r_0^2 \right) - \dot{\sigma}^2 \right), \quad (9)$$

где $a = \mu \varepsilon^2 q$. Аналитическое решение (9) неоднозначно:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 - \frac{1}{2} \mu q r_0^2 + \frac{1}{2} a (\tau^2 - 2c\tau + c_0^2), \\ \tau + c_2 &= \pm \int_0^{\sigma_2(\tau)} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^4 + 8a(\xi - \sigma_0 + \mu q r_0^2/2)2\xi^2 \sqrt{-c_1} + c_1}}, \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3 – константы интегрирования.

Так как резонанс устойчив по времени, то первое неограниченное решение σ_1 нереализуемо. Второе решение $\sigma_2(\tau)$ описывает эллиптические колебания. Случай второго резонанса с расстройкой $\sigma(\tau) = kz + \gamma + \mu$ исследуется аналогично. Заметим, что те же резонансные явления имеют место и в лабораторной системе координат. Действительно, переход от τ к t связан с релятивистским множителем γ : $dt = \gamma d\tau$, а γ отличается от нуля.

3. Численное моделирование полученных результатов. Проведенное аналитическое исследование процесса взаимодействия релятивистского заряда со стоячей

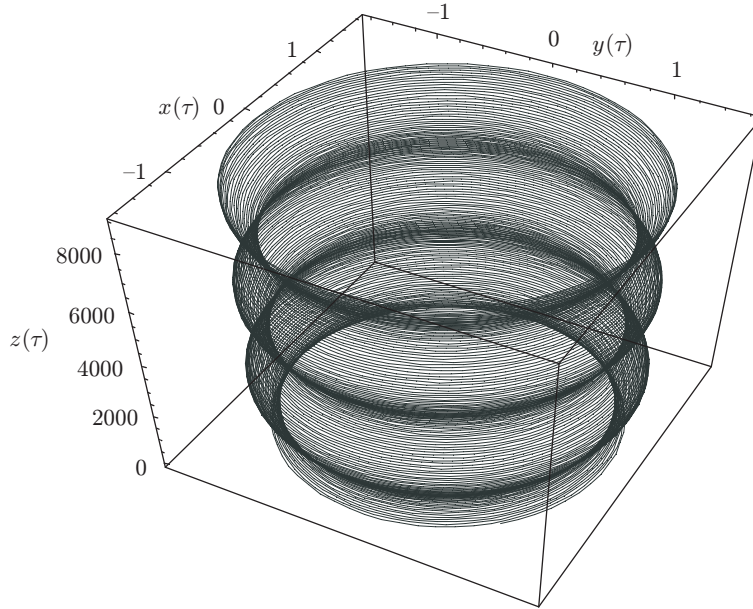


Рис. 1. Периодические траектории релятивистской частицы при резонансе $\beta_{x0} = \beta_{y0} = 0.1$, $\beta_{z0} = 0.95$, $\varepsilon = 0.001$, $\mu = -0.34$ в зависимости от собственного времени τ .

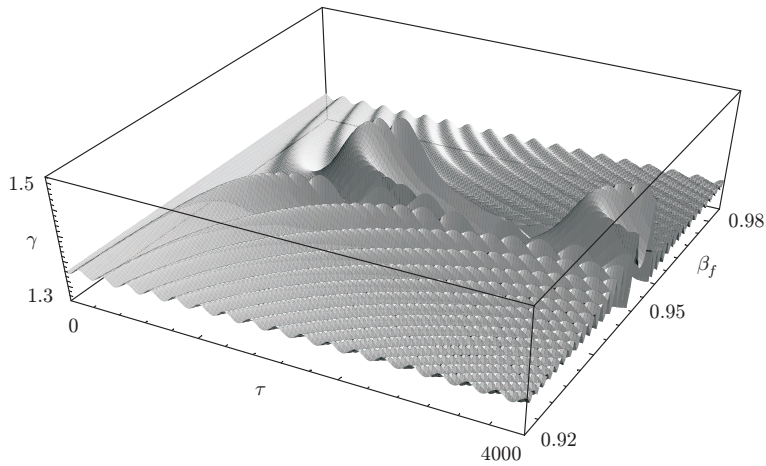


Рис. 2. Колебания энергии γ в окрестности резонанса $\beta_f = 0.95$ при $\beta_{x0} = \beta_{y0} = 0.1$, $\beta_{z0} = 0.7$, $\varepsilon = 0.001$, $\mu = -0.38$ в зависимости от собственного времени τ .

электромагнитной волной (1), как и ожидалось, оказалось чрезвычайно сложной задачей. В конечном итоге удалось установить существование параметров, при которых возможны резонансные режимы взаимодействия, и, главное, определить их устойчивость.

Энергетические состояния заряда и соответствующие им траектории приведены на рис. 1–4. Численное моделирование проводилось различными многошаговыми метода-

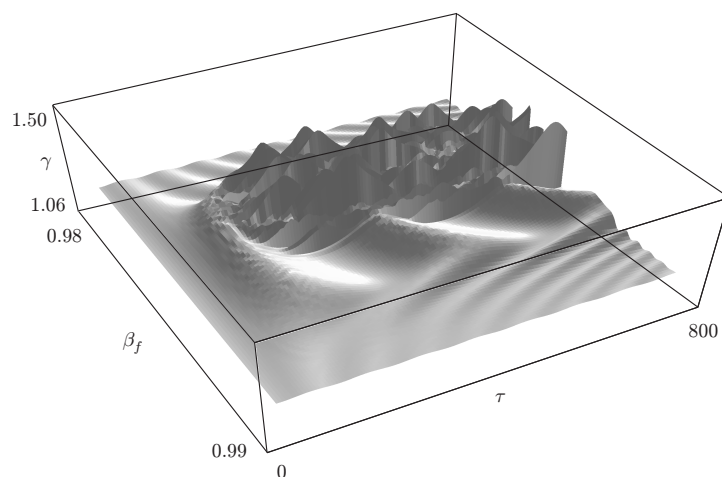


Рис. 3. Возникновение неперiodических режимов энергии γ при $\beta_{x0} = \beta_{y0} = 0.1$, $\beta_{z0} = 0.9$, $\varepsilon = 0.008$, $\mu = -4.59$ в зависимости от собственного времени τ .

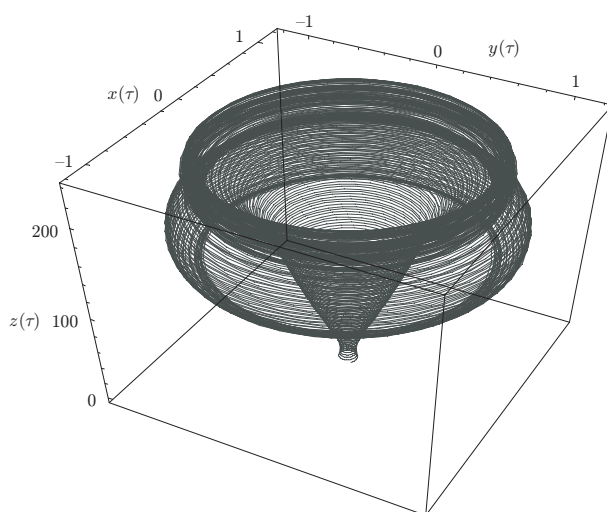


Рис. 4. Непериодические траектории релятивистской частицы при $\beta_f = 1.03$, $\beta_{x0} = \beta_{y0} = 0.1$, $\beta_{z0} = 0.9$, $\varepsilon = 0.008$, $\mu = -4.59$ в зависимости от собственного времени τ .

ми интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений системы (6) с контролем точности сохранения интеграла движения (5). Так как расчет хаотических режимов движения (рис. 3, 4) приводит к жесткому ограничению для шага интегрирования, то применялся метод Isode из пакета Maple фирмы Waterloo Maple Inc.

При выборе параметров задачи, удовлетворяющих условию существования резо-

нансного взаимодействия, $\beta_f = 0.95$ (рис. 1, 2), численное моделирование изменения энергии γ как функции от ωt показывает увеличение амплитуды и периода колебаний энергии в окрестности резонанса по сравнению с нерезонансным режимом (рис. 2). Причем движение происходит по гофрированной цилиндрической поверхности (рис. 1), по оси z отложена длина пролетного пространства в длинах волн.

Как удалось установить, система (6) отличается наличием неперидических решений при $\varepsilon \geq 10^{-3}$, что показано на рис. 3, 4. При этом движение происходит в замкнутом пространстве, а неперидический режим означает нерегулярное заполнение траекториями цилиндрической поверхности, изображенной на рис. 4.

4. Заключение. Так как резонансы устойчивы, на практике возможно обеспечить длительное взаимодействие релятивистского пучка заряженных частиц в поле стоячей волны. Однако возникновение хаотических режимов разрушает резонансное состояние и ограничивает применение стоячих волн большой амплитуды. В конфигурациях “продольное магнитное поле и бегущая электромагнитная волна” резонансы отсутствуют, и хаотических траекторий не наблюдается [3], [4]. Проведенный анализ может быть применен для системы взаимодействующих частиц и бегущих волн различной напряженности, в том числе переменной амплитуды.

Благодарности. Авторы благодарят В. Н. Родионова и В. Р. Халилова за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы

- [1] *И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов.* Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: МГУ, 1982.
- [2] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
- [3] *В. В. Терновский, А. М. Хапаев.* Фунд. прикл. матем. 2002. Т. 8. № 2. С. 547.
- [4] *М. М. Хапаев.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.
- [5] *Н. Н. Боголюбов, А. М. Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 1.IX.2003 г.,
после доработки 21.IV.2004 г.