

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Московский Государственный  
Университет имени М. В. Ломоносова»,  
Физический факультет, кафедра астрофизики и звёздной астрономии

на правах рукописи

УДК 524.4

Раздобурдин Дмитрий Николаевич

## **Транзиентная динамика возмущений в астрофизических дисках**

Диссертация

на соискание учёной степени

«кандидат физико-математических наук»

по специальности 01.03.02

«Астрофизика и звёздная астрономия»

Научные руководители:  
д. ф.-м. н., проф. Шакура Н.И.  
к. ф.-м. н. Журавлёв В.В.

Москва

2017 г.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
Литературный обзор . . . . .	4
Актуальность темы . . . . .	18
Цель работы . . . . .	20
Научная и практическая ценность работы . . . . .	21
Основные результаты, выносимые на защиту . . . . .	21
Личный вклад автора . . . . .	22
Апробация результатов . . . . .	22
Публикации . . . . .	23
Структура диссертации . . . . .	24
<b>1. Математический аппарат</b>	<b>25</b>
1.1 Типы линейных операторов. От частного к общему . . . . .	26
1.2 Эффект неортогональности собственных векторов на простом геометрическом примере . . . . .	28
1.3 Свойства динамического оператора . . . . .	31
1.4 Сингулярные векторы . . . . .	32
1.5 Поиск оптимальных возмущений. Матричный метод . . . . .	35
1.6 Поиск оптимальных возмущений. Вариационный метод . . . . .	38
1.6.1 Линейные автономные операторы . . . . .	39
1.6.2 Линейные неавтономные операторы . . . . .	42
1.6.3 Вычисление старших сингулярных векторов . . . . .	43
1.6.4 Обобщение на нелинейный случай . . . . .	44
<b>2. Транзиентный рост возмущений в тонком торе</b>	<b>48</b>
2.1 Динамические уравнения . . . . .	49
2.2 Фоновый поток . . . . .	49
2.3 Моды . . . . .	51
2.4 Оптимальный рост . . . . .	57
2.5 Поток удельного момента импульса . . . . .	59
2.6 Параметрическое исследование . . . . .	62

2.7	Заключение . . . . .	65
<b>3.</b>	<b>Транзиентный рост возмущений в диске с пренебрежимо малой вязкостью</b>	<b>66</b>
3.1	Прямые и сопряжённые уравнения . . . . .	67
3.2	Условие ненормальности динамического оператора . . . . .	74
3.3	Проверка расчёта оптимального роста . . . . .	76
3.4	Оптимальный рост возмущений . . . . .	80
3.5	Заключение . . . . .	92
<b>4.</b>	<b>Транзиентный рост возмущений в диске с учётом вязкости</b>	<b>93</b>
4.1	Введение . . . . .	93
4.2	Фоновый поток . . . . .	94
4.2.1	Ламинарный вязкий диск . . . . .	94
4.2.2	Однородный поток . . . . .	99
4.3	Уравнения для линейных возмущений . . . . .	100
4.4	Сопряжённая система . . . . .	102
4.5	Граничные условия . . . . .	103
4.5.1	Модели N1 и P1 . . . . .	103
4.5.2	Модели N2 и P2 . . . . .	106
4.6	Численный метод . . . . .	106
4.7	Результаты . . . . .	110
4.7.1	Оптимальный рост в Ньютоновском потенциале . . . . .	112
4.7.2	Оптимальный рост в потенциале Пачинского-Виита . . . . .	122
4.8	Заключение . . . . .	129
	<b>Заключение</b>	<b>131</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>134</b>

# Введение

## Литературный обзор

Вопрос переноса момента импульса в аккреционных дисках является одним из актуальных вопросов современной астрофизики. Без эффективного механизма оттока момента на периферию диска невозможно падение вещества на гравитирующий центр и, как следствие, высвобождение его гравитационной энергии.

Аккреция вещества возможна и в ламинарном диске за счёт молекулярной вязкости. Однако в реальных астрофизических дисках молекулярная вязкость настолько мала, что она не в состоянии объяснить наблюдения. Например, для протопланетных дисков характерное время аккреции для ламинарного диска на несколько порядков превышает возраст Вселенной, тогда как из наблюдений известно, что оно не превышает несколько миллионов лет. Таким образом, встаёт вопрос о причинах перехода потока в турбулентное состояние.

В 70-х годах XX века Шакурой Н.И. и Сюняевым Р.А. в работах [1] и [2] была разработана простая феноменологическая модель, позволяющая количественно описывать турбулентные диски. Основным параметром турбулентности в этой модели является коэффициент, связывающий компоненту тензора напряжений и давление:  $t_{r\varphi} = \alpha p$  (модель часто называют «альфа моделью»). Однако вопрос о происхождении и структуре турбулентности в дисках остался за рамками этих работ. В то же самое время сравнение параметра  $\alpha$ , полученного из интерпретации наблюдательных данных, со значениями, полученными из первых принципов в различных моделях турбулизации, является одним из важных критериев верификации последних.

В начале XX века Ричардсон Л.Ф. [3] предложил концепцию дробления вихрей (о проблемах, с которыми сталкивается эта концепция, а так же об альтернативах ей можно узнать из обзора [4]), на основе которой в 1941 году Колмогоровым А.Н. [5] (статья была также перепечатана журналом УФН [6]), [7] и Обуховым А.М. [8] была разработана теория

однородной и изотропной турбулентности.

Модель разделяет все масштабы, на которых происходят турбулентные движения жидкости на три интервала: энергетический, инерционный и диссипативный. На энергетическом интервале происходит передача энергии от фонового потока к турбулентным движениям за счёт линейной неустойчивости. На инерционном интервале энергия передаётся от крупномасштабных движений к мелкомасштабным с сохранением потока энергии между масштабами. При этом для однородной и изотропной турбулентности можно получить простое соотношение, связывающее кинетическую энергию  $E_k dk$ , заключённую в пульсациях с характерными волновыми числами от  $k$  до  $k + dk$  и само волновое число  $k$  на инерционном интервале:  $E_k \sim k^{-5/3}$ . Это соотношение называется законом Колмогорова-Обухова, или законом «пяти третей», его вывод из размерных соображений можно найти, например, в учебнике Ландау и Лившица [9]. На диссипативном интервале происходит диссипация энергии молекулярной вязкостью.

Описанный механизм получил название прямого турбулентного каскада. Отметим, что представления о турбулентном каскаде применимы только в т. наз. слабо нелинейном приближении. В этом приближении динамику жидкости можно описать как нелинейное взаимодействие линейных волн (более подробно об этом приближении см. книгу [10] и обзор [11]).

Необходимым условием существования прямого турбулентного каскада является линейная неустойчивость фонового потока. По этой причине поиск линейных неустойчивостей в аккрецирующих потоках уже много лет является одной из важнейших задач теории дисковой аккреции.

Исторически первым исследовался вопрос линейной устойчивости в приближении идеальной жидкости. Для осесимметричного нестратифицированного потока критерием линейной устойчивости является возрастание удельного момента импульса на периферию диска. Этот критерий был впервые сформулирован более века назад Рэлеем в работе [12].

Устойчивость аккреционных дисков по отношению к неосесимметрич-

ным возмущениям впервые была исследована в серии работ Папалойзу Дж. и Прингла Дж. [13, 14, 15]. В первой работе [13] была обнаружена глобальная линейная неустойчивость в изомоментных торах с постоянной энтропией. Позднее в работах [14] и [15] существование этой неустойчивости было показано также и в торах с отличным от изомоментного законом вращения.

Открытие неустойчивости Паплойзу-Прингла стимулировало активные исследования в этой области. Так, в работе [16] с помощью метода ВКБ была исследована устойчивость дисков в зависимости от профиля угловой скорости, азимутального числа, а также радиального и вертикального масштабов. В статье [17] были получены инкременты неустойчивости в изомоментном торе в двумерном приближении (позднее в работе [18] было показано, что учёт трёхмерной структуры потока слабо влияет на обсуждаемую неустойчивость). Устойчивость тонкого тора со степенным законом вращения была исследована в [19]. Было также показано, что это течение эквивалентно течению между цилиндрами малой радиальной протяжённости (впервые этот результат был получен ранее в работе [20]). Обобщение на случай торов произвольной радиальной протяжённости было выполнено в [21]. В работе [18] была исследована зависимость инкремента неустойчивости от профиля угловой скорости и азимутального числа возмущений. Учёт влияния эффектов ОТО на неустойчивость был выполнен в работе [22].

Обмен энергией между фоновым потоком и растущим возмущением происходит на т. наз. коротационном радиусе, т. е. таком радиусе, на котором отношение угловой скорости твердотельного вращения узора линейного возмущения к скорости вращения диска в точности равно азимутальному числу (более подробно этот механизм описан в [23], см. также [24, 25, 26, 27, 28, 29] для подробного описания этого механизма в контексте устойчивости газовых торов).

В работах [30] и [31] с помощью нелинейного анализа было показано, что развитие неустойчивости в изомоментном торе приводит к изменению закона вращения: тор эволюционирует от закона вращения  $\Omega \sim r^{-2}$  к закону  $\Omega \sim r^{-1.75}$ .

Обзор вопроса был проведён в [32], где рассмотрено множество разнообразных конфигураций, в том числе с учётом релятивистских эффектов, стратификации и вязкости (см. так же [33, 34]).

Неустойчивость Папалойзу-Прингла важна для толстых торов с околоизомоментным законом вращения, однако при приближении закона вращения к кеплеровскому инкремент неустойчивости быстро падает (см., например, [18]) и для тонких дисков описанная неустойчивость уже не играет заметной роли и не может быть ответственна за переход к турбулентности в них.

Следующей важной неустойчивостью, существующей в астрофизических дисках, является т. наз. магниторотационная неустойчивость (MRI). Для её возникновения достаточно падения угловой скорости на периферию потока и внешнего вертикального магнитного поля. На сегодняшний день турбулизация под действием MRI является наиболее разработанным механизмом перехода ламинарного астрофизического потока в турбулентное состояние.

Эта неустойчивость впервые была обнаружена в течении Тэйлора-Куэтта и описана в работах Велихова Е.П. [35] и Чандрасекара С. [36] (иногда эту неустойчивость также называют неустойчивостью Велихова-Чандрасекара). В контексте аккреционных дисков эта неустойчивость была описана в серии работ Балбуса С.А. и Хаули Дж.Ф. [37, 38, 39] (см. также обзор [40]). Помимо исследования собственно линейной неустойчивости, в этих работах численным моделированием в локальном приближении (подробнее о локальном приближении можно прочитать в работе [41]) было показано, что MRI приводит к турбулизации потока с кеплеровским градиентном угловой скорости и внешним вертикальным магнитным полем.

В дальнейшем MRI-турбулентность была исследована во многих работах. В зависимости от постановки задачи эти работы можно разделить на несколько групп. По начальному магнитному потоку симуляции можно разделить на симуляции с начальным магнитным потоком и симуляции без начального магнитного потока (т. наз. zero-net-flux симуляции). Вторым важным признаком является учёт вертикальной стратификации по-

тока (под отсутствием стратификации в данном случае подразумевается игнорирование вертикальной компоненты силы притяжения). Симуляции проводились как в вертикально стратифицированных, так и в нестратифицированных потоках.

Первые детальные исследования MRI-турбулентности с внешним магнитным полем в потоке без вертикальной стратификации были выполнены в работе [42]. Авторами было показано, что при наличии начального вертикального магнитного поля в пространственно локальном кеплеровском потоке развивается турбулентность, обеспечивающая эффективную вязкость с параметром  $\alpha$  вплоть до нескольких десятых. При начальном тороидальном поле характерные значения  $\alpha$  падают до нескольких сотых (отметим, что случай начального тороидального поля, по всей видимости, лучше описывает замагниченные астрофизические диски. Этот вывод позволяют сделать наблюдения за галактическими дисками [43] и результаты глобального МГД-моделирования [44, 45]). В этой же работе проявилась одна из основных проблем MRI-турбулентности – проблема начального магнитного потока. Выяснилось, что параметр  $\alpha$  сильно зависит от начального магнитного поля и быстро стремится к нулю при его ослаблении.

Позднее в работе [46] был проведён анализ зависимости  $\alpha$  от разрешения в симуляциях с начальным тороидальным полем. Обнаружилась сходимость симуляций к уровню  $\alpha \sim 0.02$  при разрешении в несколько сотен узлов на каждое измерение. В более поздней работе [47] этот результат был подтверждён в симуляциях с большим разрешением. В работе [48] исследовалась зависимость MRI-турбулентности с начальным тороидальным полем от вязкости и электрического сопротивления газа. Было продемонстрировано эффективное подавление турбулентности электрическим сопротивлением среды, что делает MRI-механизм неприменимым в слабо ионизованных областях газовых потоков, таких как «мёртвые зоны» протопланетных дисков.

В работе [49] впервые с помощью МГД-симуляций был исследован вопрос динамо в аккреционном диске. Были проведены МГД-симуляции с нулевым начальным магнитным потоком (т. наз. zero-net-flux симуляции).



Значение параметра  $\alpha$  оказалось сравнимым с результатами, полученными с начальным тороидальным полем:  $\alpha \sim 0.01$ . Однако в последующих работах [50, 51] выяснилось, что в случае идеальной жидкости отсутствует сходимость по разрешению: при росте количества узлов  $\alpha$  уменьшается. Также в работах [50, 51] было показано, что сходимости по численному разрешению можно добиться, если отказаться от приближения идеальной жидкости и учесть вязкость и электрическое сопротивление.

Вопрос генерации магнитного поля в симуляциях нулевым начальным магнитным потоком был исследован в работах [52, 53, 54]. Показано, что ключевым элементом турбулизации сдвиговых потоков с нулевым начальным магнитным полем является докритическая (subcritical) генерация тороидального магнитного поля из слабого полоидального поля (т. наз. омега-эффект). Этот процесс подобен докритической турбулизации сдвиговых потоков за счёт механизма подхватывания (lift-up), о котором речь пойдёт ниже.

Как было отмечено выше, MRI-турбулентность эффективно подавляется электрическим сопротивлением, что делает невозможным её существование в слабо ионизованных областях, таких как «мёртвые зоны» протопланетных дисков. Одним из механизмов, который может обеспечивать перенос момента импульса в таких зонах, является неустойчивость, возникающая в потоках с градиентом энтропии. Первые указания на её существования были получены в работе [55] с помощью глобальных симуляций диска с радиальным градиентом энтропии. Эта неустойчивость была названа глобальной бароклиной неустойчивостью (GBI). Однако последующие исследования, описанные в работах [56] и [57], не обнаружили никакой линейной неустойчивости в приближении идеальной жидкости. Позднее в работе [58] с помощью нелинейных симуляций было показано отсутствие неустойчивости в локальном приближении.

Интерес к бароклиным неустойчивостям возродился после работ [59] и [60], в которых была учтена неидеальность жидкости (а именно, была введена функция охлаждения). В этих работах было обнаружено спонтанное формирование долгоживущих вихрей, которые производили волны плотности. Позднее в работе [61] эта неустойчивость была обнаружена

в локальном приближении. Поток момента, который обеспечивают волны плотности, соответствует эффективному альфа-параметру порядка одной тысячной  $\alpha \sim 10^{-3}$ . Выяснилось также, что эта неустойчивость является докритической, т. е. её возникновение зависит от амплитуды начальных возмущений. По этой причине в литературе эту неустойчивость называют докритической бароклиной неустойчивостью (SBI). Вопрос генерации возмущений конечной амплитуды, которые дают начало SBI, был рассмотрен в работах [62] и [63].

Другим механизмом является так называемая «зомби неустойчивость» (ZVI), описанная в работах [64], [65] и [66]. Она возникает в стратифицированных потоках в присутствии критического слоя. Критический слой порождает вихри, которые развиваются в новые критические слои, порождающие в свою очередь новые вихри. Неустойчивость порождает поток момента с эффективным альфа-параметром порядка одной тысячной  $\alpha \sim 10^{-3}$ .

Другим механизмом переноса момента является турбулизация бароклиных потоков <sup>1</sup> Подобные потоки являются наиболее общим видом гидродинамических потоков. В отличие от более частного случая баротропных потоков, в бароклиных давление нельзя представить как функцию только плотности. Это означает, что векторное произведение градиентов давления и плотности отлично от нуля  $\nabla p \times \nabla \rho \neq 0$ . В соответствии с теоремой Пуанкаре-Вавра бароклиными являются те и только те потоки, в которых угловая скорость вращения вещества  $\Omega$  зависит от вертикальной координаты (см. [67]).

В бароклиных потоках развивается т. наз. вертикальносдвиговая неустойчивость, или неустойчивость Голдрайха-Шуберта-Фрайка (GSF-неустойчивость). Она была обнаружена независимо в работах [68] и [69] для вращающихся звёзд. Для возникновения этой неустойчивости по-

---

<sup>1</sup> Следует иметь в виду, что в терминологии существует некоторая путаница. Докритическая бароклиная неустойчивость (SBI) может развиваться не только в бароклиных потоках, но и в более частном классе потоков без вертикального градиента скорости вращения, но с градиентом энтропии. При этом бароклиной эта неустойчивость называется потому, что бароклиным является возмущённый поток.

мимо градиента угловой скорости необходим также перенос тепла. Линейный и нелинейный режимы её развития в приложении к астрофизическим дискам были исследованы в работах [70], [71] и [72]. Однако лишь в статье [73] были приведены ясные свидетельства турбулизации течения под действием этой неустойчивости. Было показано, что турбулентность, возникающая под действием GSF-неустойчивости, обеспечивает поток момента, близкий к вызываемому докритической бароклинной и зомби-неустойчивостями  $\alpha \sim 10^{-3}$ .

Как уже упоминалось выше, сравнение значения параметра  $\alpha$ , полученного с помощью компьютерных симуляций с наблюдательными данными, является важным способом верификации сценариев турбулизации.

На сегодняшний день известно несколько способов оценки параметра Шакуры-Сюняева. Краткий обзор методов можно найти в работе [74] (см. также [75], [76]). Современные оценки указывают на значения параметра альфа вплоть до  $\alpha \sim 0.4$ .

Можно резюмировать, что модели турбулизации дисков, построенные на магниторотационной неустойчивости, позволяют получить подобные значения параметра  $\alpha$  лишь в случае наличия вертикального магнитного поля, т. е. в случае, который, по всей видимости, не реализуется в природе. Симуляции с более реалистичной конфигурацией начального поля: с начальным тороидальным полем, либо с нулевым начальным магнитным потоком позволяют уверенно получать значения  $\alpha$  на порядок меньше, чем даёт интерпретация наблюдения.

Кроме того, MRI-турбулентность не может работать в таких областях, как «мёртвые зоны» протопланетных дисков. Разработанные механизмы турбулизации подобных областей обеспечивают эффективное  $\alpha \sim 10^{-3}$ , что более чем на порядок ниже, чем результат, полученный интерпретацией наблюдений в работе [76].

Таким образом, остаётся заключить, что на сегодняшний день механизмы турбулизации астрофизических дисков с помощью линейных неустойчивостей не позволяет описать всей полноты наблюдательных данных. При этом альтернативой описанным выше сценариям может стать т. наз. докритическая (subcritical) турбулизация кеплеровского по-

тока (под докритической турбулентностью мы, вслед за [77], будем понимать турбулентность, возникающую в линейно устойчивых течениях). И хотя нелинейная устойчивость кеплеровского потока была проверена как в численных ([78], [79], [80]), так и в лабораторных ([81], [82]) экспериментах вплоть до числа Рейнольдса  $R \sim 10^6$ , экстремально большие числа Рейнольдса в астрофизических дисках (вплоть до  $R = 10^{10}$ ) оставляют возможность для существования турбулентности в подобном потоке.

Докритическая турбулизация известна по исследованиям лабораторных сдвиговых течений: течения между пластинами (течения Куэтта), между вращающимися цилиндрами (течение Тейлора-Куэтта) и течения Пуазейля. Для этих течений турбулентность наблюдается при таких числах Рейнольдса, при которых потоки являются линейно устойчивыми (см., например, [83], [84], [85], [86], [87], [88]). Механизм турбулизации подобных потоков получил название «обходного» (bypass) сценария.

При этом механизм, питающий энергией турбулентность, должен быть линейным (см. [89] и [90]). О существовании растущих линейных возмущений в спектрально устойчивых потоках известно давно (см. работу Кельвина 1887 года [91], работы Орра 1907 года [92, 93], а также работы [41] и [94], где подобные возмущения были впервые исследованы в астрофизической задаче). Эти возмущения, в отличие от экспоненциально растущих (мод), демонстрируют рост лишь до определённого момента времени, после чего их амплитуда начинает падать. Из-за этой особенности подобный рост возмущений получил название «транзиентный рост» (transient growth), а динамика подобных возмущений – немодальная динамика (что подчёркивает отличие транзиентно растущих возмущений от традиционных мод).

Метод немодального анализа возмущений был строго сформулирован в работах по динамике возмущений в сдвиговых течениях [95], [96], [97], [98], [99]). Было показано, что в сдвиговом потоке (т. е. в потоке с градиентом скорости) моды возмущений перестают быть ортогональными друг другу (связь градиента скорости с ортогональностью мод для невязкого случая строго показана в разделе 3.2 настоящей диссертации). Неортогональность мод приводит к тому, что даже в ситуации линейно

устойчивого потока, т. е. при отсутствии растущих мод, некоторые линейные комбинации мод способны демонстрировать рост амплитуды. На простом геометрическом примере это будет проиллюстрировано в разделе 1.2.

При этом общепринятым подходом в исследовании немодальной динамики является поиск оптимальных возмущений, т. е. таких возмущений, которые демонстрируют максимально возможный рост к заданному моменту времени. Существует корреляция между оптимальным ростом и числом Рейнольдса, при котором происходит потеря нелинейной устойчивости течения (см. [100]).

Поскольку линейный рост возмущений играет определяющую роль в турбулизации лабораторных сдвиговых течений, он был детально исследован в большом числе работ. Так, в работах [101], [96], [97] в приближении несжимаемой жидкости был исследован транзитный рост возмущений в течении Пуазейля. В [96] был также исследован оптимальный рост в течении Куэтта. В работах [102] и [103] было исследовано влияние сжимаемости на оптимальный рост в течении Куэтта, в [104] было описано излучение вихрем волн плотности в сдвиговых течениях. В [105] была дана физическая интерпретация усиления возмущений на языке пространственных фурье-гармоник (ПФГ) в течении Куэтта, исследована зависимость фактора линейного усиления от вертикального волнового числа (см. так же [106]). Оптимальный рост в течении Тейлора-Куэтта в различных режимах был исследован в работах [107], [100], [108].

Нелинейные исследования турбулентности в течении Куэтта были проведены в работе [109] (см. также [110]). Было показано, что оптимальными возмущениями являются т. наз. роллы (streamwise rolls) – возмущения, в начальный момент времени не имеющие компоненты скорости параллельной скорости фонового потока. Подобные структуры под действием сдвига превращаются в прожилки (streamwise streaks), которые, напротив, содержат только компоненту скорости, параллельную фоновой. При этом происходит рост энергии, заключённой в линейных возмущениях. Этот механизм усиления называется механизмом подхватывания (lift-up). Прожилки подвержены вторичной неустойчивости, которая

благодаря нелинейному взаимодействию между прожилками приводит к образованию новых ролюв. Самоподдерживающийся процесс существует за счёт баланса между диссипацией энергии за счёт вязкости и перекачкой энергии от фонового потока за счёт транзистентного роста возмущений. В работе [111] была дана каскадная интерпретация турбулентности в течении Куэтта. В отличие от описанного ранее прямого каскада, нелинейное взаимодействие происходит не между возмущениями различных масштабов, а между возмущениями с разным направлением волнового вектора. Подобный каскад получил название нелинейного поперечного каскада (nonlinear transverse cascade).

Таким образом, мы видим, что для исследования возможности докритической турбулизации потока необходимо в первую очередь детально исследовать транзистентный рост возмущений в нём. Поэтому первым шагом в изучении гипотетической турбулентности в кеплеровском потоке является поиск и исследование возмущений, способных демонстрировать существенный рост. Для этого, как и в случае лабораторных течений, используется аппарат поиска оптимальных начальных возмущений.

Первой работой, в которой был исследован транзистентный рост возмущений в кеплеровском потоке, была статья 1988 года [112]. В ней с помощью локального приближения рассматривалась эволюция мелкомасштабных двумерных возмущений в виде пространственных фурье-гармоник (ПФГ). Было показано, что характер эволюции возмущения определяется направлением волнового вектора, т. е. соотношением  $k_x/k_y$ . Если это соотношение отрицательно (возмущение является лидирующей спиралью), то амплитуда возмущения растёт, если положительно (возмущение является отстающей спиралью) – падает. При этом под действием сдвига фоновой скорости радиальное волновое число увеличивается. Это приводит к тому, что лидирующие в начальный момент времени спирали в некоторый момент, называемый моментом свинга, превращаются в отстающие, а их амплитуда начинает падать. Годом позже в работе [113] было получено точное аналитическое решение для мелкомасштабных двумерных возмущений. Было установлено, что полученный в этих работах транзистентный рост связан с сохранением завихренности в двумерном потоке. Также бы-

ло установлено, что вязкость вносит дополнительное ограничение на время роста возмущения и, как следствие, ограничивает максимально возможный фактор транзитного усиления.

Следующий шаг был сделан в работе [114], в которой транзитный рост был исследован уже в глобальной постановке с учётом вязкости (как и ранее, исследовалась лишь двумерная динамика). При этом для поиска пространственной структуры возмущения использовалась процедура оптимизации, т. е. было найдено такое начальное условие, которое демонстрирует максимально возможный рост энергии к заданному моменту времени (времени оптимизации). Если время оптимизации не велико (много меньше вязкого времени), то его увеличение приводит к усилению оптимального роста. Однако если момент оптимизации будет выбран слишком большим, транзитный рост будет уменьшаться за счёт вязкости, т. е. вязкость приводит к образованию максимума транзитного роста по времени оптимизации. Для числа Рейнольдса  $R = 10^4$  величина оптимального роста превысила сотню. Отметим, что в указанной работе рассматривался лишь фоновый поток с постоянным сдвигом, т. е. частота вращения считалась линейной по координате. Учёт точного закона вращения в рамках применяемого в статье математического метода связан с большими техническими сложностями ввиду возникновения резонансов в потоке (см. [115]). Транзитный рост с учётом точного закона вращения и реалистичного распределения плотности был впервые исследован для осесимметричных возмущений в работе [116], для неосесимметричных – в работе [117] и позднее в работе [118]. Процедура оптимизации для возмущений в потоке сжимаемой жидкости с кеплеровским законом вращения была проведена в работе [119].

В работе [120] транзитный рост был исследован уже в трёхмерном случае в локальном приближении для несжимаемой жидкости с учётом вязкости. В отличие от двумерной динамики, для трёхмерного случая несжимаемой жидкости начальное условие не фиксируется выбором волнового вектора. Также в работе была выполнена оптимизация по компонентам волнового вектора, в результате было показано, что даже в трёхмерном потоке оптимальным является двумерное возмущение. Кроме то-

го, было показано, что оптимальный рост зависит от числа Рейнольдса как  $\sim R^{2/3}$ . Это говорит о том, что в реальных дисках, где число Рейнольдса может превышать несколько миллиардов, оптимальный рост может достигать сотен тысяч.

Транзиентный рост в более реалистичной модели был исследован в работах [121] и [122]. Кроме трёхмерной структуры была также учтена сжимаемость и вертикальная неоднородность фонового потока. Основное внимание было уделено излучению вихревым возмущением волны плотности в момент свинга (подробное излучение волн плотности было исследовано в двумерном случае в работе [123]). Было показано, что в отсутствие вязкости излучённая в вертикальном направлении волна плотности не затухает, что приводит к тому, что энергия возмущения при больших временах стремится к некой отличной от нуля величине.

Для более детального понимания свойств оптимального роста в кеплеровском потоке в работах [124, 125, 126] и [127] было проведено их сравнение с оптимальным ростом в потоках с изомоментным законом вращения и в потоках с законами вращения, промежуточными между кеплеровским и изомоментным. Поскольку потоки с близкими к изомоментному законами вращения демонстрируют переход к турбулентности в численных экспериментах (см., например, [79, 77, 127]), подобное сравнение может пролить свет на причину нелинейной устойчивости кеплеровского потока. Было установлено, что в изомоментном потоке оптимальными возмущениями являются осесимметричные прожилки возмущения азимутальной скорости, которые за счёт силы Кориолиса порождают роллы (streamwise rolls), что сопровождается ростом энергии возмущений. Однако даже при небольшом отклонении закона вращения от изомоментного, возникающие в потоке эпициклические движения эффективно подавляют рост подобных роллов. При этом оптимальное возмущение теряет вертикальную структуру и приобретает азимутальную, что сопровождается резким уменьшением величины оптимального роста. В работе [124] было показано, что при одинаковых числах Рейнольдса величина оптимального роста в кеплеровском потоке более чем на полтора порядка меньше, чем в изомоментном. Здесь стоит отметить, что в [124] расчёт проводился в



пространственно ограниченной области, вследствие чего оказались ограничены и возможные длины волн. При этом увеличение размеров области и допустимых длин волн возмущений приводит в изомоментном потоке к дополнительному увеличению оптимального роста за счёт снижения влияния вязкости. В пределе бесконечной области оптимальный рост в изомоментном потоке вообще обращается в бесконечность даже при конечных числах Рейнольдса, тогда как оптимальный рост в кеплеровском потоке остаётся конечным. Именно на подавленный в кеплеровском потоке по сравнению с изомоментным оптимальный рост авторы указали как на вероятную причину его наблюдающейся нелинейной устойчивости.

Таким образом, можно заключить, что в кеплеровском потоке механизм транзитного роста, отвечающий за турбулентность в течении Куэтта, подавлен силой Кориолиса, за турбулентность в изомоментном потоке – эциклическими движениями. Однако, несмотря на это, в потоке всё равно существуют возмущения, способные к значительному транзитному росту. При этом подавленность оптимального роста в кеплеровском потоке не говорит о невозможности турбулизации этого течения, а лишь о большей сложности в обнаружении турбулентности (см. [128]).

Также отличия в механизме оптимального роста возмущений указывают и на различия в устройстве предполагаемого турбулентного каскада. Впервые вопрос о возможной структуре турбулентного каскада в кеплеровском потоке обсуждался в работе [129]. Авторы заключили, что для возникновения самоподдерживающегося процесса необходим нелинейный механизм, генерирующий лидирующие спирали из отстающих.

Дополнительную информацию о возможной турбулизации кеплеровского потока даёт также моделирование двумерной турбулентности [130, 131], несмотря на то, что эти результаты не могут быть прямо перенесены на трёхмерный случай. Так, в работе [132] показано, что роль требуемого нелинейного механизма может играть взаимодействие отстающей спирали с осесимметричной модой (см. так же [133]). Показано, что подобное взаимодействие в двумерном потоке приводит к генерации лидирующих спиралей. При этом наиболее эффективно этот механизм генерирует крупномасштабные возмущения, т. е. возмущения с азимутальной

длиной волны, превышающей эффективную толщину диска. Подобный класс транзиентно растущих возмущений плохо исследован в литературе.

Также стоит упомянуть о важности транзиентной динамики линейных возмущений не только в контексте перехода к турбулентности начального ламинарного кеплеровского потока, но и для объяснения свойств уже турбулентных дисков. Так, в работе [114] исследовалась транзиентная динамика возмущений в турбулентных дисках. В данной работе турбулентность с малым значением  $\alpha$  рассматривалась как источник стохастического возбуждения транзиентно растущих возмущений, которые усиливали отток момента импульса на периферию. В работах [134, 135, 136] было показано, что генерируемые турбулентностью вихри порождают волны плотности дополнительно отводящие момент импульса на периферию диска.

В этой связи в работах [137, 138, 139, 140] транзиентный рост возмущений также исследовался и в кеплеровском потоке с внешним вертикальным магнитным полем. Было показано, что на малых временах транзиентный рост возмущений более эффективен, чем рост даже наиболее неустойчивой MRI-моды.

## **Актуальность темы**

На сегодняшний день нахождение аккреционных дисков в турбулентном состоянии не вызывает сомнений, поскольку ламинарный поток не обеспечивал бы наблюдаемых темпов отвода удельного момента импульса на периферию диска.

Аккреционные диски относятся к т. наз. квазикеплеровским потокам, т. е. потокам с растущим на периферию удельным моментом импульса, но падающей угловой скоростью вращения. Наиболее разработанным к сегодняшнему дню механизмом турбулизации квазикеплеровских потоков является турбулизация под действием магниторотационной неустойчивости (MRI). Для её возникновения достаточно падения угловой скорости на периферию потока и внешнего вертикального магнитного поля.

Однако предсказанное моделью MRI-турбулентности значение параметра Шакуры–Сюняева  $\alpha$  (см. работу [2]) либо меньше оценок, полученных из интерпретации наблюдений, более чем на порядок, либо требует специальной конфигурации внешнего магнитного поля. Кроме того, MRI крайне эффективно подавляется электрическим сопротивлением плазмы, что затрудняет работу этого механизма в областях дисков с низкой ионизацией, таких, как, например, «мёртвые зоны» протопланетных дисков.

Возможным альтернативным вариантом турбулизации аккреционных дисков является докритическая турбулизация немагнитного квазикеплеровского потока. Докритический характер турбулентности определяется отсутствием в потоке экспоненциально растущих линейных возмущений (в силу линейной устойчивости квазикеплеровского потока турбулентность в нём может носить только докритический характер). Однако для возникновения и поддержки турбулентности необходимо наличие растущих линейных возмущений. В квазикеплеровском потоке подобные растущие линейные возмущения существуют, однако их рост носит транзитный характер, т. е. любое возмущение затухает по прошествии достаточно большого отрезка времени. Сочетание линейной устойчивости и одновременно наличие линейных транзитно растущих возмущений роднит квазикеплеровский поток с прочими сдвиговыми потоками (т. е. потоками с поперечным градиентом скорости). Подобные потоки хорошо изучены в рамках лабораторной гидродинамики. Все исследованные в лаборатории сдвиговые потоки демонстрируют переход к турбулентности за счёт т. наз. «обходного» механизма. В рамках этого механизма транзитно растущие линейные возмущения вызывают нелинейный отклик потока, который приводит к образованию новых возмущений, способных к транзитному росту.

Таким образом, транзитный рост возмущений играет определяющую роль в возникновении и поддержании турбулентности в сдвиговых течениях. В квазикеплеровских потоках величина транзитного роста значительно меньше, чем в сдвиговых потоках с обнаруженной турбулентностью, при сопоставимых числах Рейнольдса. Вероятно, именно в этом кроется причина феноменальной нелинейной устойчивости кеплеровского

потока: на сегодняшний день нелинейная устойчивость квазикеплеровского потока проверена вплоть до чисел Рейнольдса порядка миллиона. При этом говорить о невозможности докритической турбулизации квазикеплеровских потоков нельзя, поскольку в реальных дисках число Рейнольдса может достигать десятков миллиардов.

Таким образом, детальное исследование транзиентного роста линейных возмущений является необходимым шагом для ответа на вопрос о возможности перехода кеплеровского потока в турбулентное состояние. Адекватным методом исследования транзиентно растущих возмущений является вычисление оптимального роста, т. е. максимально возможного фактора усиления линейных возмущений. Предыдущие исследования касались в первую очередь мелкомасштабных возмущений, т. е. возмущений с азимутальной длиной волны, намного меньшей, чем толщина диска. Однако недавние исследования показали, что в возникновении самоподдерживающегося турбулентного каскада основную роль могут играть крупномасштабные возмущения, т. е. возмущения с азимутальной длиной волны порядка или больше толщины диска. При этом рассмотрение возмущений с большой по сравнению с толщиной диска длиной волны требует учёта реальной пространственной структуры течения, поскольку характерный масштаб изменения фоновых величин становится сравнимым с длиной волны возмущения.

## **Цель работы**

Настоящая диссертация посвящена исследованию оптимального роста линейных возмущений в глобальной постановке задачи. При этом исследовались различные конфигурации фонового течения: квазикеплеровский геометрически тонкий тор, тонкий кеплеровский диск, тонкий диск в квазирелятивистском гравитационном потенциале.

Механизм, отвечающий за оптимальный рост, в подобных потоках является двумерным по своей природе, поскольку определяется динамикой возмущений в плоскости диска. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением возмущений с нулевой вертикальной компонентой скорости,

что в случае баротропного потока позволяет свести задачу к двумерной модели, что и было сделано в данной работе. Особое внимание уделено выявлению зависимости оптимального роста от азимутального масштаба возмущений.

При этом для вычисления оптимального роста в тонком диске использовался математический аппарат, ранее не применявшийся в астрофизических работах. Его подробное описание и обоснование приведены в тексте диссертации.

### **Научная и практическая ценность работы**

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Так, впервые был исследован оптимальный рост линейных возмущений произвольных масштабов в глобальной постановке задачи. Было показано, что возмущения с азимутальной длиной волны, сравнимой с толщиной диска, усиливаются потоком более эффективно, чем исследованные ранее мелкомасштабные возмущения. При этом были учтены диссипативные эффекты в диске, а также его радиальная структура.

### **Основные результаты, выносимые на защиту**

1. Исследована линейная динамика волновых пакетов, состоящих из глобальных звуковых мод в геометрически тонком квазикеплеровском газовом торе. Показано, что максимально возможный фактор роста их амплитуды имеет квазипериодическую форму и достигает значительной величины, которая обратно пропорциональна отношению протяженности диска к его толщине.
2. С использованием вариационного метода оптимизации проанализирована линейная динамика глобальных транзиентных адиабатических возмущений в геометрически тонком кеплеровском диске с внутренней границей. Показано, что и на азимутальном масштабе, значительно превышающем геометрическую толщину диска, максимально

возможным фактором роста обладают сдвиговые вихри в форме лидирующих спиралей. Энергия этих крупномасштабных вихрей усиливается в десятки раз за период времени, соответствующий нескольким оборотам вещества на внутренней границе диска.

3. Впервые получено необходимое и достаточное условие существования транзитно растущих линейных возмущений для двумерного вращательного потока идеальной жидкости.
4. Получена кривая оптимального роста крупномасштабных сдвиговых вихрей с учетом диссипативных эффектов, а также релятивистских эффектов отклонения орбитальной и эпициклической частот от их ньютоновских значений. Показано, что в релятивистских областях газовых дисков рост крупномасштабных вихрей усиливается обратно пропорционально четвертой степени эпициклической частоты и может значительно превосходить рост аналогичных вихрей с азимутальным масштабom, много меньшим толщины диска. Дана интерпретация кривой оптимального роста глобальных сдвиговых вихрей на языке локальной модели транзитной динамики возмущений во вращательном сдвиговом потоке.

### **Личный вклад автора**

Пять работ из шести (номера 1-5) публикаций, перечисленных в списке публикаций по теме диссертации, выполнены в соавторстве. В совместных публикациях автор участвовал на равноправной основе на всех этапах работы. Автором разработаны программные коды для поиска оптимальной линейной комбинации собственных функций, для расчёта эволюции линейных возмущений как в невязком случае, так и с учётом кинематической и объёмной вязкости, получены системы сопряжённых уравнений для вязкой и невязкой задач, доказано необходимое и достаточное условие существования транзитно растущих линейных возмущений для двумерного вращательного потока идеальной жидкости, проведены вычисления кривых оптимального роста.

## Апробация результатов

Результаты, изложенные в настоящей диссертации, были представлены на следующих конференциях:

1. Международная конференция «European Week of Astronomy and Space Science (JENAM)», Санкт-Петербург (2011).
2. Всероссийская конференция «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра (HEA)», Москва (2011).
3. Всероссийская конференция «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра (HEA)», Москва (2012).
4. Международная конференция «Planet Formation and Evolution», Киль, Германия (2014).
5. Всероссийская конференция «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра (HEA)», Москва (2014).
6. Международная конференция «Астрономия от ближнего космоса до космологических далей», Москва (2015).
7. Всероссийская конференция «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра (HEA)», Москва (2015).
8. Всероссийская конференция «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра (HEA)», Москва (2016).

## Публикации

Основные результаты диссертации нашли отражение в следующих публикациях:

1. Zhuravlev, V. V., Razdoburdin, D. N. «A study of the transient dynamics of perturbations in Keplerian discs using a variational approach», **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 442, p. 870–890 (2014)

2. Razdoburdin, D. N., Zhuravlev, V. V. «Transient growth of perturbations on scales beyond the accretion disc thickness», **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 467, p. 849–872 (2017)
3. Раздобурдин, Д.Н., Журавлев, В.В. «Транзиентная динамика возмущений в астрофизических дисках» **Успехи физических наук**, т. 185, с. 1129–1161 (2015)
4. Раздобурдин Д.Н., Журавлёв В.В. «Оптимальный рост малых возмущений в тонких газовых дисках», **Письма в Астрономический журнал**, т. 38, с. 1–11 (2012)
5. Шакура Н.И., Постнов К.А., Липунова Г.В., Маланчев К.Л., Журавлев В.В., Раздобурдин Д.Н., Кочеткова А.Ю., Ялмарсдоттер Л., Аболмасов П.К., Чашкина А.А. «Аккреционные процессы в астрофизике», **Физматлит**, Москва (2015)
6. Razdoburdin D. N. «Transient dynamics of large scale vortices in Keplerian disk», **Astronomical and Astrophysical Transactions**, vol. 29, p. 353–362 (2016)

## Структура диссертации

В первой главе диссертации будет описан математический аппарат, применяемый при поиске оптимальных линейных возмущений. Во второй главе будет произведён расчёт оптимального роста глобальных звуковых возмущений в геометрически тонком торе с квазикеплеровским законом вращения. Расчёт будет произведён с помощью ВКБ-приближения, что позволит получить собственные функции аналитически. В третьей главе будет вычислен оптимальный рост адиабатических возмущений в геометрически тонком кеплеровском диске с внутренней границей. Внешняя граница формально находится на бесконечном удалении. Расчёт будет выполнен для двух различных норм: нормы, совпадающей с акустической энергией возмущения, и нормы, совпадающей с канонической энергией



осесимметричных возмущений. Также будет доказано, что для существования в двумерном вращательном потоке идеальной жидкости транзитивно растущих возмущений необходимо и достаточно отлнчия профиля вращения от твёрдотельного. В четвёртой главе будут учтены кинематическая и объёмная вязкости.

# 1. Математический аппарат<sup>2</sup>

Исследование транзиентного роста линейных возмущений удобно проводить, пользуясь абстрактными понятиями функционального пространства т. наз. векторов состояния системы, а также линейных операторов, действующих на эти вектора.

В данной диссертации под вектором состояния будет подразумеваться только вектор, чьими компонентами являются радиальные распределения радиальной и азимутальной скоростей, а также энтальпии линейных возмущений  $\mathbf{q}(t) \equiv \{\delta v_r(r), \delta v_\varphi(r), \delta h(r)\}$ . Однако описанный ниже формализм может быть применён для описания гораздо более сложных задач, в том числе трёхмерных задач магнитной гидродинамики.

Эволюцию малых возмущений будем описывать с помощью линейного оператора  $\mathbf{Z}$ , действующего в гильбертовом<sup>3</sup> пространстве векторов  $\mathbf{q}$ . Этот оператор переводит начальный вектор возмущения  $\mathbf{q}(0)$  в последующий вектор  $\mathbf{q}(t)$ :

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Z}\mathbf{q}(0). \quad (1)$$

Поскольку оператор  $\mathbf{Z}$  управляет динамикой линейных возмущений в потоке, его часто называют «управляющим» или «динамическим». Ниже для важного в астрофизическом контексте частного случая будет показано, что оператор  $\mathbf{Z}$  обладает набором важных свойств, наиболее значимым в контексте настоящей работы является его вполне непрерывность (компактность). Но сначала напомним читателю некоторые понятия теории линейных операторов и функционального анализа.

---

<sup>2</sup>Содержание данной главы с незначительными изменениями было изложено автором в разделе 3 работы [141] и параграфе 3 главы 6 книги [142]

<sup>3</sup> Некоторые из приведённых ниже утверждений остаются верными и для более общего случая банаховых пространств. Однако мы всегда будем подразумевать, что для любой пары векторов состояния задано скалярное произведение, ограничиваясь таким образом рассмотрением лишь гильбертовых пространств.

## 1.1 Типы линейных операторов. От частного к общему

Линейные операторы могут быть разных видов в зависимости от своих свойств.

Прежде чем говорить о видах линейных операторов, определим с помощью тождества Лагранжа сопряжённый оператор  $\mathbf{Z}^\dagger$  для произвольных векторов  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ . (подробнее о сопряжённых операторах см., например, в [143]):

$$(\mathbf{Z}\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{g}), \quad (2)$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Теперь перечислим те виды линейных операторов, которые встретятся нам ниже, причем специально будем двигаться от более частного случая к более общему. В первую очередь упомянем положительно определённые операторы, т. е. такие, что для любого вектора  $\mathbf{q}$  скалярное произведение  $(\mathbf{Z}\mathbf{q}, \mathbf{q}) > 0$ . Из определения следует, что собственные значения положительно определённого оператора положительны. Действительно, если в уравнении  $\mathbf{Z}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}$  умножить обе части справа на  $\mathbf{q}$ , то в его левой части будет стоять положительная величина, а в правой – произведение собственного значения на положительную величину, откуда следует, что собственное значение оператора положительно.

Более общим видом линейных операторов, которые встречаются наиболее часто в различных физических задачах, являются самосопряжённые (эрмитовы) операторы – те, которые тождественны своему сопряжённому оператору  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^\dagger$  [144]. Собственные значения самосопряжённого оператора действительны [144].

В свою очередь, самосопряжённые операторы являются частным случаем нормальных операторов.  $\mathbf{Z}$  называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряжённым:  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger = \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$  [144]. Все собственные значения нормального оператора являются комплексно сопряжёнными собственным значениям сопряжённого к нему оператора. Собственные функции  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Z}^\dagger$  совпадают. Кроме того, собственные векторы нормального оператора, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны [144]. По этой причине для данного типа операторов информации о соб-

ственных значениях достаточно для вычисления операторной нормы. Напомним, что нормой оператора  $\mathbf{Z}$ , отображающего гильбертово пространство  $H$  в себя, называется число, равное  $\|\mathbf{Z}\| = \sup_{\mathbf{x} \in H} \frac{\|\mathbf{Z}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  [143]. Знание нормы оператора  $\mathbf{Z}$  для нас крайне полезно, поскольку оно позволяет выяснить предел роста нормы вектора под действием этого оператора.

В случае нормального оператора эта задача решается достаточно просто: чтобы это проиллюстрировать, мы (по примеру [145]) рассмотрим важный частный случай, в котором оператор  $\mathbf{Z}$  представим в виде операторной экспоненты:  $\mathbf{Z} = e^{\mathbf{A}t}$  (подробнее о подобных операторах будет рассказано в параграфе 1.6.1). Оператор  $\mathbf{A}$  не зависит от времени, а его собственные значения по традиции обозначаются  $\{-i\omega_1, -i\omega_2, \dots, -i\omega_N\}$ , причём  $\omega$  могут быть как вещественными, так и комплексными. В этом случае собственные значения оператора  $\mathbf{Z}$  равны  $\{e^{-i\omega_1 t}, e^{-i\omega_2 t}, \dots, e^{-i\omega_N t}\}$ . Теперь воспользуемся определением собственных векторов и собственных значений оператора, переписав его в матричной форме:

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{P}, \quad (3)$$

где матрица  $\mathbf{P}$  – диагональная, с собственными значениями  $\mathbf{Z}$  на диагонали, столбцы матрицы  $\mathbf{X}$  являются собственными векторами  $\mathbf{Z}$ , расположенными в соответствии с порядком их собственных значений в  $\mathbf{P}$ .

Из (3) имеем спектральное разложение оператора  $\mathbf{Z}$ :  $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{X}^{-1}$ . Далее воспользуемся свойством субмультипликативности операторной нормы [144]:  $\|\mathbf{Z}\| \leq \|\mathbf{X}\| \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{X}^{-1}\|$ . В случае ортонормированных собственных векторов матрица  $\mathbf{X}$  становится унитарной,  $\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger = \mathbf{I}$ , следовательно, её норма в этом случае равна единице  $\|\mathbf{X}\| = 1$ , а норма  $\|\mathbf{Z}\| \leq \|\mathbf{P}\| = e^{\omega_{max} t}$ , где  $\omega_{max} = \max_{j \leq N} (\text{Im} [\omega_j])$ .

Наконец, наиболее общим видом линейных операторов являются ненормальные операторы, т. е. такие, которые не коммутируют со своим сопряжённым:  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger \neq \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ . Собственные значения таких операторов могут быть как чисто вещественными, так и комплексными, а собственные векторы – неортогональны друг другу. Из-за неортогональности собственных векторов вычисление нормы подобных операторов является уже

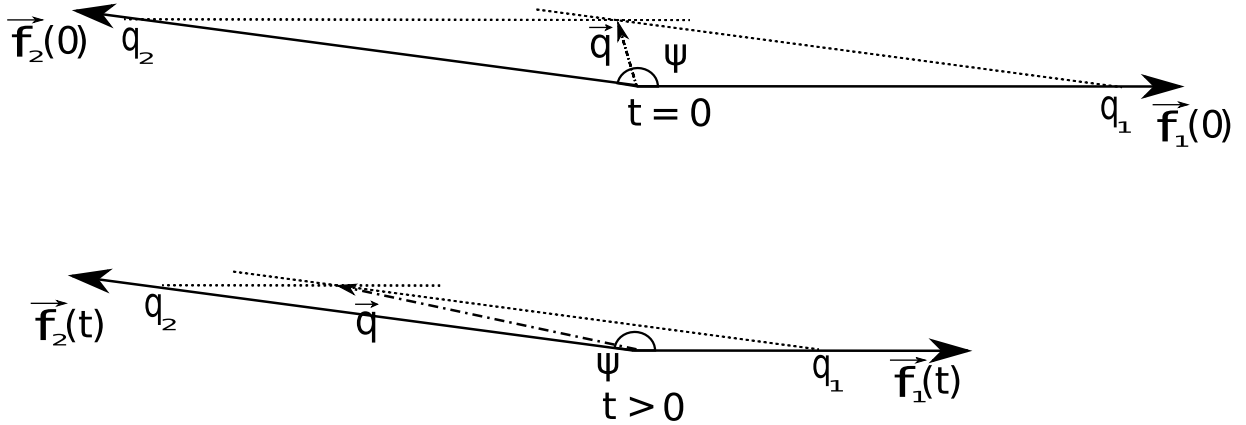


Рис. 1: Рост длины суммы двух неортогональных между собой векторов,  $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ , при сокращении их длин, но постоянном угле между ними. Принято, что  $q_1 = q_2 = 1$ .

более сложной задачей, поскольку матрица  $\mathbf{X}$ , введенная выше, уже не является унитарной. По этой же причине энергия комбинации мод не равна сумме энергий каждой из этих мод, т. е. не действует правило Парсеваля, а появляются ненулевые перекрестные члены. Иными словами, благодаря интерференции во времени между неортогональными модами возмущения, описываемые подобным оператором, могут демонстрировать рост даже в тех случаях, когда не существует растущих мод. Подобное изменение энергии возмущения, математически связанное с ненормальностью динамического оператора, и получило название транзientного роста возмущения. О свойствах ненормальных операторов в контексте гидродинамической устойчивости течений см. работу [146] и примеры в ней, а также разделы 3 и 4 книги [90].

## 1.2 Эффект неортогональности собственных векторов на простом геометрическом примере

Проиллюстрируем механизм транзientного роста на простом геометрическом примере. На плоскости  $(x, y)$  введем два вектора, символизирующих две моды возмущений. Запишем их в виде двух комплексных чисел,  $\mathbf{f}_1 = f_0 e^{-i\omega_1 t}$ ,  $\mathbf{f}_2 = f_0 e^{-i\omega_2 t + i\psi}$ , причем числа  $\omega_{1,2}$  могут быть тоже комплексными. В таком виде будет более очевидна аналогия  $\mathbf{f}_{1,2}$  с

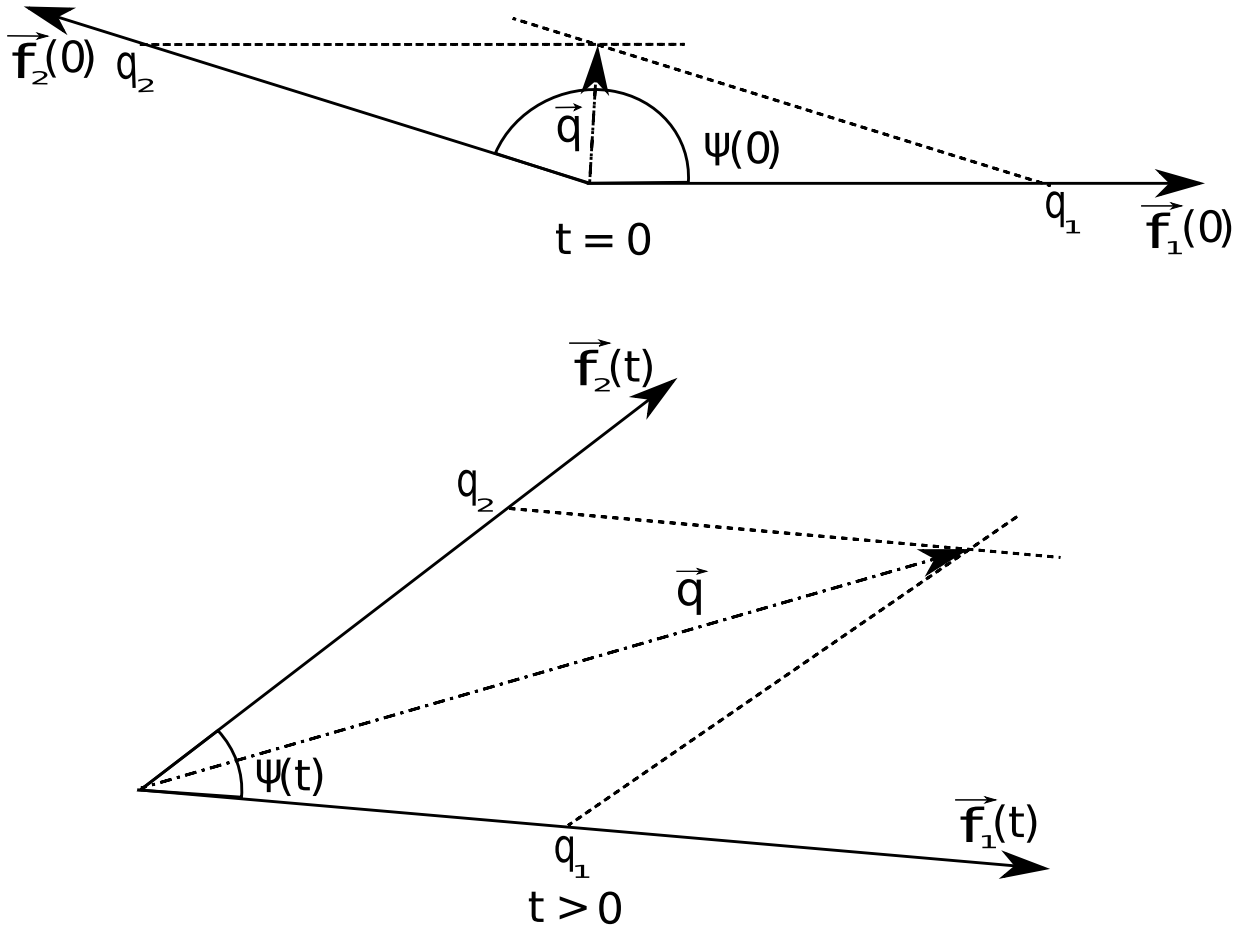


Рис. 2: Рост длины суммы двух неортогональных между собой векторов,  $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$ , при сохранении их длин, но изменении угла между ними. Принято, что  $q_1 = q_2 = 1$ .

модами возмущений. Реальная часть каждого из  $\mathbf{f}_{1,2}$  дает  $x$ -компоненту соответствующего вектора, мнимая – его  $y$ -компоненту. При этом  $\text{Re}[\omega_{1,2}]$  есть угловые скорости, с которыми оба вектора вращаются в плоскости, а  $\text{Im}[\omega_{1,2}]$  – темп, с которым меняются их длины. Ниже будем считать, что мнимые части  $\omega_{1,2}$  – отрицательны, что соответствует сокращению длин  $\mathbf{f}_{1,2}$ . Напомним, что в случае мод первые величины дают угловые скорости твердотельного вращения узора, а вторые – темп их затухания, по аналогии со спектрально устойчивым течением. Кроме того, будем считать, что в момент  $t = 0$  вектора имеют одинаковые длины,  $f_0$ , а угол между ними равен  $\psi$ .

Теперь возьмем вектор  $\mathbf{q} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$  и определим для него величину,

которая даёт фактор изменения квадрата длины  $\mathbf{q}$  со временем. Получим:

$$g = \frac{e^{2\text{Im}[\omega_1]t} + e^{2\text{Im}[\omega_2]t} + 2e^{\text{Im}[\omega_1 + \omega_2]t} \cos(\text{Re}[\omega_1 - \omega_2]t + \psi)}{2(1 + \cos \psi)}. \quad (4)$$

Уже отсюда видно, что при угле  $\psi$ , близком к  $\pi$ , знаменатель (4) мал, и сколько-нибудь незначительный рост выражения в числителе приведет к большому росту величины  $g$ . Рассмотрим это на двух частных примерах. В первом случае примем, что  $\text{Re}[\omega_{1,2}] = 0$ , во втором – что  $\text{Im}[\omega_{1,2}] = 0$ . Для простоты будем считать, что  $\cos \psi \approx -1 + \epsilon$ , где  $\epsilon \ll 1$ .

Тогда для случая  $\text{Re}[\omega_{1,2}] = 0$  видим, что если дополнительно допустить большую разницу в декрементах,  $|\text{Im}[\omega_1]| \gg |\text{Im}[\omega_2]|$ , то через достаточное количество времени  $g$  будет даваться выражением:

$$g \approx \frac{e^{2\text{Im}[\omega_2]t}}{2\epsilon}, \quad (5)$$

что соответствует  $g \gg 1$  в таком диапазоне длительностей, что  $|\text{Im}[\omega_1]t| \gg 1$ , но в то же время  $|\text{Im}[\omega_2]t| \ll 1$ . Это означает, что несмотря на сокращение длин обеих векторов по отдельности, в случае их сильной неортогональности (характеризуемой большим отличием  $\epsilon$  от единицы) их сумма испытывает транзитный рост длины до значений  $\sim \epsilon^{-1}$ , см. рис. 1. И только на ещё больших интервалах времени  $g$  возвращается к падению в темпе, определяемом наиболее медленно сокращающимся вектором. Аналогичный эффект происходит и с транзитными возмущениями, которые могут быть представлены как суперпозиция затухающих мод, имеющих нулевую фазовую скорость.

В обратном случае  $\text{Im}[\omega_{1,2}] = 0$  из (4) можно получить такое приближенное выражение:

$$g \approx \frac{1 - \cos(\text{Re}[\omega_1 - \omega_2]t)}{\epsilon}, \quad (6)$$

справедливое, когда значение косинуса, входящего здесь в числитель, не слишком близко к единице. Как видим, в отличие от примера с суммой неортогональных векторов, сокращающих свои длины (когда длина  $\mathbf{q}$  сначала возрастает до максимума, а потом монотонно спадает до нуля с

$t \rightarrow \infty$ ), длина суммы вращающихся векторов испытывает осциллирующий рост, многократно возвращаясь к своим большим значениям  $\sim \epsilon^{-1}$  через одинаковые промежутки времени  $\sim |\operatorname{Re}[\omega_1] - \operatorname{Re}[\omega_2]|^{-1}$ , что очевидно из иллюстрации на рис. 2. Один из примеров реализации такого случая транзиентного роста суперпозиции нейтральных мод с ненулевыми фазовыми скоростями будет рассмотрен в разделе 2 и исследовался в работе [147].

### 1.3 Свойства динамического оператора

Настоящая диссертация посвящена динамике линейных возмущений. Поэтому далее мы отойдём от рассмотрения общих свойств линейных операторов и сосредоточимся на интересующем нас частном случае оператора, определяющего динамику линейных возмущений в потоке. В общем виде сказать, к какому из типов упомянутых в 1.1 относится динамический оператор  $\mathbf{Z}$ , нельзя, поскольку тип определяется параметрами задачи. Так, в параграфе 3.2 будет показано, что оператор является нормальным при твердотельном вращении фонового потока, и ненормальным для всех прочих законов вращения.

Однако ряд важных свойств можно установить, если определить некоторые особенности оператора и его области определения. Естественно ограничить область определения непрерывными векторами  $\mathbf{q}(0)$  с единичной нормой  $\|\mathbf{q}(0)\| = 1$ . Отметим, что последнее допущение никак не ограничивает общность рассмотрения в силу линейности задачи. Сам оператор  $\mathbf{Z}$  будем считать непрерывным, а значит он является ограниченным на ограниченных множествах (см, например, [148], гл. 4). Из вышесказанного следует, что вектора его области значений  $\mathbf{q}(t)$  являются непрерывными и ограниченными, а значит равномерно ограниченными.

Также для любого момента  $t$  все функции, входящие в  $\mathbf{q}(t)$ , будем считать бесконечно гладкими и имеющими равномерно ограниченную производную в области определения. Условия на гладкость и ограниченность производной являются совершенно естественными, но равномерную ограниченность производных стоит обосновать отдельно. Для простран-



ственно ограниченных потоков равномерная ограниченность естественным образом следует из простой ограниченности производных. Однако для пространственно неограниченных потоков это уже не так. Возможна ситуация, при которой производная неограниченно возрастает с удалением от начала координат, в подобной системе производные уже не будут равномерно ограничены. Однако эта ситуация выглядит физически нереализуемой, поэтому мы исключим её из рассмотрения. В дальнейших рассуждениях нам понадобится тот факт, что из равномерной ограниченности производных семейства дифференцируемых функций следует равностепенная непрерывность этих функций (см., например, [149], гл. 2).

Таким образом, область значений оператора  $\mathbf{Z}$  составляют функции, которые являются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными. Согласно теореме Арцелла, это является необходимым и достаточным условием относительной компактности этого семейства функций ([148], гл. 4). А значит, оператор  $\mathbf{Z}$  переводит каждое ограниченное множество в относительно компактное, что является определением вполне непрерывного оператора ([148], гл. 4). Эта особенность нам понадобится в следующем параграфе. Пока же напомним, что если оператор  $\mathbf{Z}$  вполне непрерывен, то вполне непрерывным будут так же сопряжённый оператор  $\mathbf{Z}^\dagger$  и самосопряжённые составные операторы  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$  и  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$  [148].

## 1.4 Сингулярные векторы

В параграфе 1.2 было показано, как неортогональность мод приводит к существованию транзиентно растущих возмущений. Во многих физических и астрофизических задачах эволюция линейных возмущений определяется именно ненормальными операторами, имеющими неортогональные собственные векторы. При этом ненормальность  $\mathbf{Z}$  обеспечивается присутствием сдвига в фоновом потоке. Мы сможем убедиться в этом, когда получим вид операторов  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Z}^\dagger$  явно, см. параграф 3.2.

Таким образом, одного знания набора собственных значений ненормального оператора недостаточно, чтобы полностью описать возможный (транзиентный) рост возмущений в системе. Дополнительно как минимум

становится необходимым знание их собственных векторов, а точнее – попарных скалярных произведений («углов») между собственными векторами по выбранной норме возмущений. Еще одним потенциальным усложнением задачи с ненормальным динамическим оператором является то, что уже нельзя гарантировать полноту системы его собственных векторов, а значит – гарантировать адекватность решения задачи с использованием собственных векторов в виде базиса для разложения произвольного возмущения.

По совокупности этих причин для вычисления максимальной величины транзитного роста, которую могут продемонстрировать возмущения, мы в дальнейшем будем использовать аппарат сингулярных чисел и векторов. Как будет показано ниже, сингулярные векторы образуют полную ортонормированную систему, что позволяет использовать их в качестве базиса для описания эволюции возмущений. Более того, сингулярные значения, в отличие от собственных, позволяют узнать величину роста энергии возмущения к любому моменту времени даже для ненормальных операторов.

Неотрицательное вещественное число  $\sigma$  называется сингулярным числом линейного оператора  $\mathbf{Z}$ , если существуют такие векторы единичной длины  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , что:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}\mathbf{v} &= \sigma\mathbf{u} \\ \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u} &= \sigma\mathbf{v}\end{aligned}\tag{7}$$

Векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  называются левым и правым сингулярными векторами, соответствующими сингулярному числу  $\sigma$ .

Заметим, что сингулярные числа и векторы связаны с собственными числами и векторами составных самосопряжённых операторов  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$  и  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ . Для того чтобы в этом убедиться, подействуем оператором  $\mathbf{Z}^\dagger$  на вектор  $\mathbf{Z}\mathbf{v}$ , а оператором  $\mathbf{Z}$  – на вектор  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u}$ , после чего воспользуемся определением:

$$\mathbf{Z}^\dagger(\mathbf{Z}\mathbf{v}) = \mathbf{Z}^\dagger(\sigma\mathbf{u}) = \sigma\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u} = \sigma^2\mathbf{v}\tag{8}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{u}) = \mathbf{Z}(\sigma\mathbf{v}) = \sigma\mathbf{Z}\mathbf{v} = \sigma^2\mathbf{u}\tag{9}$$

Таким образом, векторы  $\mathbf{v}$  являются собственными векторами опе-

ратора  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ , а  $\mathbf{u}$  – оператора  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$ . Квадраты сингулярных значений являются собственными значениями составных операторов.

Операторы  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$  и  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$  являются положительно определёнными, поскольку для любого вектора  $\mathbf{f}$  выполняются неравенства  $(\mathbf{f}, \mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}) = (\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{f}) > 0$  и  $(\mathbf{f}, \mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}\mathbf{f}) = (\mathbf{Z}\mathbf{f}, \mathbf{Z}\mathbf{f}) > 0$ . Поскольку все собственные значения положительно определённого оператора положительны, то сингулярные значения вещественны.

Поскольку операторы  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$  и  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$  являются самосопряжёнными и вполне непрерывными, то их предельный спектр состоит из одной точки, равной 0 [143]. Далее, в силу того, что предельный спектр оператора – это объединение всех точек непрерывного спектра, предельных точек дискретного спектра, а также собственных значений бесконечной кратности, то вполне непрерывность составных операторов приводит к тому, что для любого малого  $\epsilon > 0$  набор собственных чисел, превосходящих  $\epsilon$  дискретен.

Таким образом, набор сингулярных значений ограничен сверху в силу ограниченности оператора  $\mathbf{Z}$ , дискретен и имеет предельную точку  $\sigma = 0$ . Поскольку сингулярные векторы принято нумеровать в порядке уменьшения их величины [150], то рост нормы возмущения к моменту времени  $t$  ограничен первым сингулярным значением в этот момент времени, а возмущением, демонстрирующим подобный рост, является первый правый сингулярный вектор.

Из всего, что было сказано выше, следует, что для вычисления максимально возможной величины роста возмущения достаточно вычислить первое сингулярное значение, называемое в литературе оптимальным ростом, а соответствующий этому значению правый сингулярный вектор будет тем самым (оптимальным) возмущением, которое демонстрирует максимально возможный рост. Ниже будут приведены два метода, позволяющие вычислять набор сингулярных значений и соответствующий им набор сингулярных векторов.

Не менее важным следствием вполне непрерывности динамического оператора  $\mathbf{Z}$  является выполнение теоремы Гильберта – Шмидта для операторов  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$  и  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ . В ней утверждается, что для любого самосопряжённого

ного вполне непрерывного линейного оператора существует ортонормированная система  $\{\varphi_n\}$  собственных векторов, отвечающих собственным значениям  $\{\lambda_n\}$ , такая, что каждый элемент  $\xi$  записывается единственным образом в следующем виде:

$$\xi = \sum c_k \varphi_k + \xi',$$

где вектор  $\xi'$  удовлетворяет условию  $\mathbf{U}\xi' = 0$ ; при этом

$$\mathbf{U}\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

Из этого следует, что система сингулярных функций ортогональна и полна, как система собственных векторов самосопряжённого оператора, и может использоваться в качестве базиса для разложения произвольного возмущения.

В последующих параграфах будут описаны два метода поиска сингулярных чисел и векторов оператора  $\mathbf{Z}$ .

## 1.5 Поиск оптимальных возмущений. Матричный метод

Первый метод расчёта сингулярных векторов условно назовём здесь матричным. Он основан на сингулярном разложении матрицы динамического оператора. Как правило, в качестве базиса для вычисления матрицы оператора используется система его собственных векторов.

Заметим, что возможен и другой вариант, применявшийся, например, в работе [114], когда пространство покрывается сеткой точек, а затем каждому возмущению ставится в соответствие столбец чисел, соответствующий значениям возмущения в этих точках. Динамическому оператору ставится в соответствие матрица, полученная с помощью разностной аппроксимации производных в динамических уравнениях. Сингулярное разложение этой матрицы позволяет вычислить сингулярные векторы в узлах сетки. Недостатком такого подхода является большой размер

матрицы оператора, что приводит к увеличению времени расчёта SVD-разложения, преимуществом – отсутствие необходимости вычислять собственные векторы оператора. В данном разделе мы дадим описание матричного метода в базисе собственных векторов.

Задача формулируется как вычисление такой линейной комбинации мод динамического оператора, которая демонстрирует наибольший рост нормы к заданному моменту времени. Будем считать, что известен набор собственных векторов  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \dots \mathbf{f}_N\}$  оператора  $\mathbf{Z}$  и соответствующий набор собственных значений  $\{e^{-i\omega_1 t}, e^{-i\omega_2 t}, e^{-i\omega_3 t} \dots e^{-i\omega_N t}\}$ . В пространстве линейных комбинаций собственных векторов представление произвольного вектора возмущений имеет вид (более подробно см. параграф 4.3.2 и раздел 4.4 в книге [90]):

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^N \kappa^j \hat{f}_j, \quad (10)$$

где числа  $\{\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3 \dots \kappa^N\}$  являются координатами вектора  $\mathbf{q}$  в базисе собственных векторов. Обратим внимание, что вся зависимость  $\mathbf{q}$  от времени заложена в его координатах.

Скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{g}$  в этом представлении можно вычислить по известным координатам с помощью метрической матрицы  $\mathbf{M}$ :

$$(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = (\mathbf{q}^\dagger)^i M_{ij} \mathbf{g}^j, \quad (11)$$

где элементы метрической матрицы равны соответствующему скалярному произведению собственных векторов:

$$M_{ij} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) \quad (12)$$

Матрица  $\mathbf{M}$ , таким образом, является положительно определённой, поскольку норма ненулевого вектора всегда положительна.

Задача вычисления максимально возможного роста возмущений при этом сводится к нахождению таких значений  $\kappa^j$ , при которых рост нормы возмущения, определяемого с их помощью по формуле (10), был бы максимальным к заданному моменту времени.

Представление оператора  $\mathbf{Z}$  в базисе собственных векторов можно легко вычислить, подействовав этим оператором на базисный элемент:

$$\mathbf{Z}\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_j(\tau) = e^{-i\omega_j\tau}\mathbf{f}_j, \quad (13)$$

следовательно, в базисе собственных векторов оператор представляется диагональной матрицей  $\mathbf{P}$  с комплексными экспонентами на главной диагонали:  $\mathbf{P} = \text{diag}\{e^{-i\omega_1\tau}, e^{-i\omega_2\tau}, e^{-i\omega_3\tau} \dots e^{-i\omega_N\tau}\}$ .

Далее воспользуемся первым равенством из определения сингулярных векторов (7):  $\mathbf{Z}\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}$  и перепишем его в матричном виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{-1} \quad (14)$$

Матрица  $\mathbf{\Sigma}$  – это диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят сингулярные значения  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_N\}$ . Столбцы матриц  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  представляют собой, соответственно, правые и левые сингулярные векторы.

Теперь запишем скалярное произведение для двух произвольных сингулярных векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{g}$  следующим образом:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = (\mathbf{q}^\dagger)^i M_{ij} \mathbf{g}^j = ((\mathbf{F}\mathbf{q})^\dagger)^i (\mathbf{F}\mathbf{g})^j, \quad (15)$$

где матрица  $\mathbf{F}$  – это разложение Холецкого метрической матрицы  $\mathbf{M} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ . Поскольку  $\mathbf{M}$  является положительно определённой, её разложение Холецкого существует всегда и является единственным.

Системы сингулярных векторов ортонормированны, следовательно, для матриц  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$  верны следующие соотношения:

$$\mathbf{V}^\dagger\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (16)$$

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Поэтому обратные к  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$  матрицы выражаются через эрмитово сопряжённые следующим образом:

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\dagger\mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad (18)$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (19)$$

Используя эти выражения в (14), получаем:

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^\dagger \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (20)$$

Последнее равенство перезапишем в следующей форме:

$$\mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F} \mathbf{U}) \mathbf{\Sigma} (\mathbf{F} \mathbf{V})^\dagger \equiv \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^\dagger. \quad (21)$$

Теперь видим, что правая часть этого равенства совпадает с т. наз. SVD-разложением матрицы  $\mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^{-1}$ . Напомним читателю, что SVD-разложением называется представление матрицы в виде произведения  $\tilde{\mathbf{U}} \mathbf{\Sigma} \tilde{\mathbf{V}}^\dagger$ , где  $\tilde{\mathbf{U}}$  и  $\tilde{\mathbf{V}}$  являются ортогональными, а  $\mathbf{\Sigma}$  – диагональной с положительными числами на главной диагонали [151]. Это разложение существует для любой вещественной матрицы и является единственным. Нетрудно убедиться, что матрицы  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}$  и  $\mathbf{\Sigma}$  удовлетворяют условиям SVD-разложения, следовательно, для вычисления сингулярных чисел и векторов достаточно выполнить такое разложение для матрицы  $\mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^{-1}$ . Процедура SVD-разложения входит в состав большинства программных математических пакетов по матричной алгебре.

Исходные матрицы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  вычисляются с помощью  $\mathbf{F}^{-1}$ :  $\mathbf{U} = \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}$ . Наибольшее из чисел, формирующих главную диагональ матрицы  $\mathbf{\Sigma}$ , является первым сингулярным значением в момент времени  $t$ , а соответствующий столбец матрицы  $\mathbf{V}$  – первым сингулярным вектором в базисе собственных векторов.

Матричный метод поиска оптимальных возмущений использовался во многих работах по устойчивости лабораторных течений, см., к примеру, [96, 98, 152, 100, 103, 108], и в астрофизических работах [120, 124, 119]. В данной диссертации метод будет применён в главе 2.

## 1.6 Поиск оптимальных возмущений. Вариационный метод

Другим способом нахождения сингулярных векторов является вариационный метод. Он представляет собой обобщение метода прямых итераций для нахождения собственных значений и векторов матриц конечной

размерности, см., например, монографию [151]. Вариационный метод менее требователен к вычислительным ресурсам, чем матричный [153], и, что важно, может быть распространён на исследование нестационарных фоновых потоков, а также на решение нелинейной задачи по транзитной динамике возмущений с конечной амплитудой. В отличие от матричного метода, он не требует дискретного представления динамического оператора, т. е., к примеру, разложения возмущений по его собственным векторам, вычисление которых в сдвиговом потоке сопряжено с известными трудностями обхода коротационного и линдбладовских резонансов, см. [115].

Поскольку для линейной динамики вариационный метод оказывается эквивалентен решению более простой задачи на поиск наибольшего собственного значения оператора  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ , см. параграф 1.4, а также, например, работу [154], начнем с описания именно такой задачи, а вывод вариационного метода непосредственно из вариационного принципа изложим позже в рамках обобщения на нелинейный случай.

### 1.6.1 Линейные автономные операторы

В параграфе 1.4 после введения понятия сингулярных значений обсуждалось, что первое сингулярное значение одновременно является наибольшим собственным значением составного оператора  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ , а первый правый сингулярный вектор – соответствующим собственным вектором этого оператора. Сперва попробуем понять, чему эквивалентно действие  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$  на начальный вектор состояния  $\mathbf{q}(0)$ . При этом действие первой (правой) части составного оператора нам известно из его определения (1) и заключается в интегрировании уравнений динамики возмущений, которую запишем здесь в символическом виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{A} \mathbf{q}, \quad (22)$$

до момента времени  $t$  с начальным условием  $\mathbf{q}(0)$ . Заметим, что в силу линейности задачи оператор  $\mathbf{A}$  в (22) не зависит от самого  $\mathbf{q}$ .



Проще всего понять, чему эквивалентно последующее действие оператора  $\mathbf{Z}^\dagger$  на  $\mathbf{q}(t)$ , в случае, когда оператор  $\mathbf{A}$  является автономным, т. е. не зависящим от времени [146].

Тогда решение уравнения (22) можно записать в операторном виде:  $\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0)$ , т. е.  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{Z}$  связаны соотношением:

$$\mathbf{Z} = e^{\mathbf{A}t}. \quad (23)$$

Правая часть (23) называется операторной экспонентой и под ней надо понимать формально записанный бесконечный ряд:  $\mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}t)^2/2 + \dots$

Сопряжённый к  $\mathbf{Z}$  оператор также можно записать через операторную экспоненту  $\mathbf{Z}^\dagger = e^{\mathbf{A}^\dagger t}$ , где  $\mathbf{A}^\dagger$  является оператором, сопряжённым к  $\mathbf{A}$ , и определяющимся соотношением Лагранжа  $(\mathbf{A}\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}, \mathbf{A}^\dagger\tilde{\mathbf{q}})$ , где  $\mathbf{q}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}$  – произвольные векторы. Данное выражение для  $\mathbf{Z}^\dagger$  следует из применения операции сопряжения к бесконечному операторному ряду, приведенному чуть выше.

Теперь рассмотрим скалярное произведение:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{q}}\right) = (\mathbf{A}\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}, \mathbf{A}^\dagger\tilde{\mathbf{q}}). \quad (24)$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{q}}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) - \left(\mathbf{q}, \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0), \tilde{\mathbf{q}}) - \left(\mathbf{q}, \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial t}\right) = \\ &= \left(\mathbf{q}(0), \frac{\partial}{\partial t}(e^{\mathbf{A}^\dagger t}\tilde{\mathbf{q}})\right) - \left(\mathbf{q}, \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

После объединения (24) и (25) получаем следующее тождество:

$$\left(\mathbf{q}(0), \frac{\partial}{\partial t}(e^{\mathbf{A}^\dagger t}\tilde{\mathbf{q}})\right) - \left(\mathbf{q}, \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial t}\right) = (\mathbf{q}, \mathbf{A}^\dagger\tilde{\mathbf{q}}) \quad (26)$$

Нетрудно заметить, что если  $\tilde{\mathbf{q}}$  и  $\partial\tilde{\mathbf{q}}/\partial t$  связаны соотношением:

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} = -\mathbf{A}^\dagger\tilde{\mathbf{q}}, \quad (27)$$

то  $\tilde{\mathbf{q}}(t) = e^{-\mathbf{A}^\dagger t} \tilde{\mathbf{q}}(0)$ , и тождество (26) выполняется для любого  $\mathbf{q}$ .

Таким образом, действие оператора  $\mathbf{Z}^\dagger = e^{\mathbf{A}^\dagger t}$  эквивалентно интегрированию уравнения (27) назад по времени от момента  $t$  с начальным условием  $\mathbf{q}(t)$  до момента  $t = 0$ . Уравнение (27) называется сопряженным.

Дополнительно отметим, что несмотря на то, что оператор  $\mathbf{Z}$  можно представить в виде  $\mathbf{Z} = e^{\mathbf{A}t}$ , а  $\mathbf{Z}^\dagger$  - в виде  $\mathbf{Z}^\dagger = e^{\mathbf{A}^\dagger t}$ , составной оператор  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$  не представим в виде  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} = e^{(\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})t}$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно использовать разложение операторных экспонент в бесконечные ряды.

Итак, действие составного оператора  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$  на начальный вектор  $\mathbf{q}(0)$  эквивалентно интегрированию вперед во времени исходного уравнения (22) с начальным условием  $\mathbf{q}(0)$  до момента  $t$ , а затем – интегрированию сопряженного уравнения (27) назад во времени обратно до начального момента, с начальным условием в виде вектора  $\mathbf{q}(t)$ , с которым мы пришли до этого к моменту времени  $t$ , интегрируя (22).

Любой вектор, для которого действие составного оператора  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$  эквивалентно умножению на константу, будет являться правым сингулярным вектором динамического оператора, а константа – квадратом соответствующего сингулярного значения:  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{v} = \sigma^2 \mathbf{v}$ . Однако нам нужен именно первый, т. е. наибольший, правый сингулярный вектор. Для его вычисления рассмотрим итерационную процедуру, один такт которой соответствует воздействию составного оператора  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$  с последующей нормировкой результата воздействия на единицу. Чтобы показать сходимость итераций к первому сингулярному вектору, рассмотрим разложение произвольного вектора состояния по сингулярным векторам  $\mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \mathbf{v}_k(0)$  и по-

действуем на него итерационным оператором  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 q_k \mathbf{v}_k(0)$ .

Как нетрудно заметить, итерационный оператор увеличивает вес каждого сингулярного вектора пропорционально квадрату соответствующего сингулярного значения. Таким образом, предел  $(\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z})^{p \rightarrow \infty} \mathbf{q}(0)$ , где  $p$  – натуральное число, для произвольного начального вектора состояния  $\mathbf{q}(0)$  равен первому правому сингулярному вектору, поскольку он соответству-

ет наибольшему сингулярному значению. При этом скорость сходимости зависит от разницы между сингулярными векторами. Заметим, что для сходимости именно к первому сингулярному вектору необходимо, чтобы начальное приближение не было ортогонально первому сингулярному вектору, поскольку если в разложении вектора  $\mathbf{q}(0)$  вес первого сингулярного вектора будет равен нулю,  $q_1 = 0$ , то воздействие итерационного оператора не приведёт к увеличению этого веса:  $\sigma_1^2 q_1 = 0$ . Итерационная схема в этом случае сойдётся к сингулярному вектору с максимальным сингулярным значением из всех тех, что обладают ненулевым весом в разложении начального приближения.

Таким образом, для нахождения первого правого сингулярного вектора необходимо применить итерационную процедуру, каждый такт которой состоит из интегрирования исходного уравнения (22) вперёд во времени и сопряженного уравнения (27) назад во времени с последующей нормировкой на единицу после каждого такта итераций.

### 1.6.2 Линейные неавтономные операторы

Увидеть, что действие оператора  $Z^\dagger$  для случая, зависящего от времени оператора  $\mathbf{A}$  (т. наз. неавтономный оператор, см. [155]), точно так же соответствует интегрированию назад во времени уравнения (27), можно следующим образом.

Оказывается, что для неавтономного  $\mathbf{A}$  действие оператора  $\mathbf{Z}$  можно разбить на произведение бесконечно малых операторов:

$$\mathbf{Z}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n e^{\mathbf{A}(t_j)\delta t}, \quad (28)$$

где  $\delta t = \tau/n$ ;  $(j-1)\delta t < t_j < j\delta t$ , см. [155]).

Отсюда по правилу поиска сопряжения от произведения операторов получаем:

$$\mathbf{Z}^\dagger(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^1 e^{\mathbf{A}^\dagger(t_j)\delta t}. \quad (29)$$

Видим, что поскольку на каждом отрезке  $\delta t$  интегрирование идёт назад во времени, а сами эти отрезки расположены в порядке убывания  $j$ , то в результате действие  $\mathbf{Z}^\dagger$  снова эквивалентно интегрированию уравнения (27) назад во времени.

Таким образом, как и в случае автономных операторов, действие  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$  эквивалентно последовательному интегрированию (22) вперёд во времени, и (27) – назад во времени.

Соответственно, итерационная процедура поиска первого сингулярного вектора, описанная выше, применима и в случае неавтономных операторов.

### 1.6.3 Вычисление старших сингулярных векторов

Поскольку сингулярные векторы образуют ортогональную систему функций, то они могут служить базисом для разложения любого линейного возмущения. Таким образом, может оказаться полезным вычисление не только первого, но и более старших сингулярных векторов, поэтому ниже мы приведём краткое описание способа вычисления этих векторов с помощью вариационного метода.

Для того чтобы итерации, описанные выше, сошлись не к первому сингулярному вектору, а к вектору номер  $N$ , достаточно, чтобы область определения итерационного оператора являлась дополнением подпространства линейных комбинаций предыдущих  $N - 1$  векторов до полного множества, или, что эквивалентно, начальное приближение должно быть ортогонально уже посчитанным сингулярным векторам, т. е. должно выполняться условие  $(\mathbf{q}(0), \mathbf{v}_j(0)) = 0$ , для  $j < N$ . В этом случае и результат воздействия итерационного оператора будет ортогонален посчитанным сингулярным векторам:

$$(\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \mathbf{q}(0), \mathbf{v}_j(0)) = \left( \mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z} \sum_{k=N}^{\infty} q^k \mathbf{v}_k(0), \mathbf{v}_j(0) \right) = \left( \sum_{k=N}^{\infty} \sigma_k^2 q^k \mathbf{v}_k(0), \mathbf{v}_j(0) \right) = 0 \quad (30)$$

Итак, если представить разложение некоторого вектора по сингуляр-

ным векторам в виде:

$$\mathbf{q}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \mathbf{v}_k(0), \quad (31)$$

то замена начального условия в итерационной процедуре на  $\mathbf{q}(0) - \sum_{k=1}^{N-1} q^k \mathbf{v}_k(0)$  обеспечит сходимость прямых итераций к искомому сингулярному вектору номер  $N$ . Таким образом, по известным  $N - 1$  сингулярным векторам всегда можно вычислить следующий.

#### 1.6.4 Обобщение на нелинейный случай

В случае нелинейной динамики изложенное в предыдущих двух пунктах обоснование итеративного поиска оптимального роста возмущений перестаёт работать, однако в несколько обобщенном виде это обоснование можно дать, исходя из вариационного принципа, что мы сейчас и покажем.

Задача формулируется как поиск начального условия, демонстрирующего наибольший рост нормы к заданному моменту времени, т. е. необходимо найти такой вектор  $\mathbf{q}(0)$ , на котором функционал

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \quad (32)$$

достигает максимума при условии удовлетворения вектора  $\mathbf{q}$  динамическим уравнениям, которые у нас записаны в виде операторного уравнения (22). Для этого используется техника, подобная методу неопределённых множителей Лагранжа нахождения условного экстремума функции, известного из курса математического анализа.

Лагранжиан, необходимый для нахождения условного экстремума, состоит в данном случае из двух слагаемых: функционала, максимум которого необходимо отыскать, и так называемого «штрафного» слагаемого, которое отлично от нуля только тогда, когда  $\mathbf{q}$  перестаёт удовлетворять

динамическим уравнениям (22) (см. так же [156], [157] и обзор [145]):

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \int_0^t (\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}) d\tau. \quad (33)$$

Как видим, штрафное слагаемое в (33) записано в виде дополнительно проинтегрированного по времени скалярного произведения множителей Лагранжа, входящих в  $\tilde{\mathbf{q}}$ , с (22). В отличие от известной задачи на поиск условного экстремума функции, в данном случае лагранжиан является уже функционалом, определённым на множестве всех возможных значений  $\mathbf{q}$ , а множители Лагранжа сами становятся функциями.

Экстремум (32) достигается при одновременном обращении в нуль вариации лагранжиана по величинам  $\mathbf{q}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}$ . Эти вариации мы определим следующим образом (см. книгу [158]):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{q} + \epsilon \delta \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})}{\epsilon} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}} + \epsilon \delta \tilde{\mathbf{q}}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}})}{\epsilon}, \quad (35)$$

где  $\delta \mathbf{q}$  и  $\delta \tilde{\mathbf{q}}$  произвольные в любой момент времени функции.

Вариация по неопределённым множителям, очевидным образом, равна:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \delta \tilde{\mathbf{q}} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t (\epsilon \delta \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}) d\tau = - \int_0^t (\delta \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{q}) d\tau \quad (36)$$

Приравнивая (36) к нулю, получаем, в силу произвольности  $\delta \tilde{\mathbf{q}}$ , уравнение (22). Для вычисления вариации по векторам состояния воспользуемся тождеством Лагранжа:  $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\mathbf{q}) = (\mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$  (подробнее о сопряжённых операторах в нелинейных задачах см., например, [159]) и проинтегрируем штрафное слагаемое по частям, после чего перезапишем лагранжиан в следующей форме:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{G}(\mathbf{q}) - (\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \Big|_0^t + \int_0^t (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}^\dagger(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) d\tau \quad (37)$$

Воспользовавшись малостью  $\epsilon$  и вещественностью скалярного произведения<sup>4</sup>, вычислим вариацию по векторам состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\|\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0) + \epsilon \delta \mathbf{q}(0)\|^2} - \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - (\tilde{\mathbf{q}}(t), \epsilon \delta \mathbf{q}(t)) + \right. \\ \left. + (\tilde{\mathbf{q}}(0), \epsilon \delta \mathbf{q}(0)) + \int_0^t \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}^\dagger(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}, \epsilon \delta \mathbf{q} \right) d\tau \right], \end{aligned} \quad (38)$$

при этом первое слагаемое можно переписать следующим образом:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{\|\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0) + \epsilon \delta \mathbf{q}(0)\|^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2 + \epsilon(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) + \epsilon(\mathbf{q}(t), \delta \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2 + \epsilon(\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0)) + \epsilon(\mathbf{q}(0), \delta \mathbf{q}(0))} \quad (39)$$

Поскольку скалярное произведение вещественно, то  $(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t)) = (\mathbf{q}(t), \delta \mathbf{q}(t))$ , поэтому преобразование можно продолжить:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\|\mathbf{q}(t) + \epsilon \delta \mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0) + \epsilon \delta \mathbf{q}(0)\|^2} - \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2 + 2\epsilon(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2 + 2\epsilon(\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0))} - \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{2\epsilon(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - \frac{2\epsilon(\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0))\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^4} \right] = \\ &= \frac{2(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - 2(\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0)) \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^4}, \end{aligned} \quad (40)$$

что приводит к окончательному выражению для вариации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} = \frac{2(\delta \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} - 2(\delta \mathbf{q}(0), \mathbf{q}(0)) \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^4} - (\tilde{\mathbf{q}}(t), \delta \mathbf{q}(t)) + \\ + (\tilde{\mathbf{q}}(0), \delta \mathbf{q}(0)) + \int_0^t \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}^\dagger(\tilde{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{q} \right) d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

Поскольку варьирование  $\delta \mathbf{q}$  независимо для разных моментов времени, приравнивание (41) к нулю в одно и то же время приводит к уравнению на неопределённые множители (27), которое обеспечивает равенство

---

<sup>4</sup>Вещественность скалярного произведения нам дополнительно необходима только в этом пункте, чтобы получить в простом виде условия связи (42) и (43), см. далее.

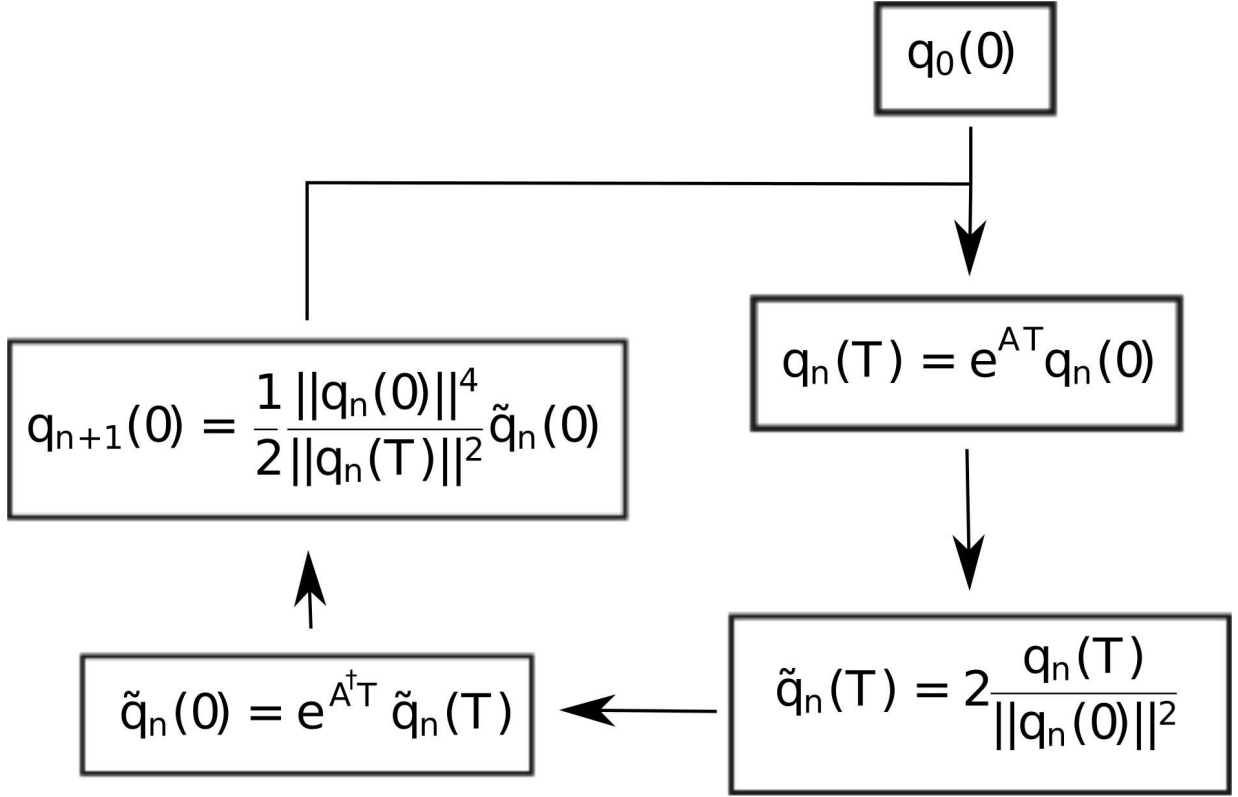


Рис. 3: Схема итерационного цикла поиска оптимального возмущения для момента времени  $T$ , удовлетворяющего системе общего вида (22), см. обзор [145].

нулю вариации лагранжиана (41) в интервале  $0 < \tau < t$ , и к дополнительным соотношениям между  $\mathbf{q}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}$ , которые необходимы для обращения в нуль вариации лагранжиана в моменты  $\tau = 0$  и  $\tau = t$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \frac{2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2} \mathbf{q}(t) \quad (42)$$

$$\mathbf{q}(0) = \frac{\|\mathbf{q}(0)\|^4}{2\|\mathbf{q}(t)\|^2} \tilde{\mathbf{q}}(0) \quad (43)$$

Векторы  $\mathbf{q}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}$ , которые удовлетворяют уравнениям (22), (27) и условиям связи (42), (43), обращают в нуль вариации лагранжиана, а значит, именно для них целевой функционал (32) достигает экстремума.

Как и для случая линейных систем, совместное решение уравнений можно искать с помощью метода прямых итераций, что показано на рис.



3. Также по этому поводу см. серию работ [160, 161, 162].

Ещё раз отметим, что в случае линейных возмущений задача оптимизации функционала (32) превращается в задачу на поиск наибольшего собственного значения составного оператора  $\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z}$ .

## 2. Транзиентный рост возмущений в тонком торе<sup>5</sup>

В данной главе мы будем исследовать транзиентный рост линейных возмущений в геометрически тонком баротропном квазикеплеровском торе. Причём нас будет интересовать только рост комбинаций нейтральных мод, т. е. таких, энергия которых сохраняется, что эквивалентно рассмотрению только мод с действительными собственными частотами  $\omega$ . Достаточным условием действительности собственных частот является нахождение радиуса короторации всех рассматриваемых мод вне границ потока. Как было сказано в параграфе 1.2, транзиентный рост подобных возмущений вызван изменением «углов» между собственными функциями (см. рисунок 2 в главе 1).

Моды, которые мы ниже собираемся получить, физически соответствуют инерционно-акустическим волнам, образующим на диске твердо-тельно вращающийся узор, т. е. имеющим постоянную во времени и в пространстве проекцию волнового вектора на азимутальное направление. При этом, как будет видно из ВКБ-решения, их характерная длина волны в радиальном направлении близка к толщине диска  $H$ . Что же касается их характерного масштаба в азимутальном направлении,  $\lambda_\varphi$ , он может быть как больше, так и меньше  $H$ . Результаты, касающиеся оптимального роста возмущений, будут представлены для случая  $\lambda_\varphi \gg H$ , см. рис. 5.

Мы увидим, что в данном случае оптимальное возмущение представляет собой волновой пакет, первоначально находящийся у внешней границы тора и затем распространяющийся в направлении его внутренней границы. В момент отражения от внутренней границы его полная аку-

---

<sup>5</sup>Содержание данной главы было изложено в статьях [147] и [141], а так же в книге [142]

стическая энергия достигает максимума и дальше спадает, пока волновой пакет уходит обратно на периферию течения. После отражения от внешней границы описанный процесс повторяется. Таким образом, транзитный рост носит в данном случае осциллирующий характер, как и должно быть согласно аналогии на рис. 2.

Для количественного описания такого роста естественным является использование матричного метода, описанного в параграфе 1.5).

## 2.1 Динамические уравнения

В первую очередь запишем полную систему нелинейных гидродинамических уравнений в цилиндрической системе координат в присутствии внешнего осесимметричного гравитационного потенциала  $\Phi$  (см. Appendix В в [163]).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (45)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (46)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (47)$$

Для замыкания системы (44) – (47) будем пользоваться политропным уравнением состояния  $p = \rho^{(n+1)/n}$ .

## 2.2 Фоновый поток

В качестве фонового потока, на который впоследствии будут наложены линейные возмущения, рассмотрим стационарное баротропное тороидальное течение конечной радиальной протяжённости. Не трудно заметить, что любой поток с  $v_r = 0$ ,  $v_\varphi = r\Omega$ ,  $v_z = 0$  будет является стаци-

онарным решением системы (44) – (47), если распределение энтальпии в нём подчиняется следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r} &= \Omega^2 r - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z},\end{aligned}\tag{48}$$

Для интегрирования системы (48) сначала зададим азимутальную компоненту скорости с соответствующим степенным профилем угловой скорости:

$$\Omega = \Omega_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-q},\tag{49}$$

где  $r_0$  - расстояние от центра тяготения до точки в экваториальной плоскости тора, в которой вращение происходит с кеплеровской частотой  $\Omega_0$ ,  $2 > q > 3/2$ . Будем считать, что вещество движется во внешнем ньютоновском гравитационном потенциале, создаваемом центральной точечной массой:

$$\Phi = -\frac{\Omega_0^2 r_0^3}{(r^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Как будет видно ниже, в этом случае параметр  $q$  характеризует толщину тора, которая стремится к нулю при приближении профиля угловой скорости к кеплеровскому.

Теперь проинтегрируем систему (48):

$$h(r, z) = \frac{\Omega_0^2 r_0^3}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{\Omega_0^2 r_0^{2q}}{2(1-q)} r^{2(1-q)} + C,$$

где константу интегрирования  $C$  определим из условия, что  $h(r_1, 0) = 0$  на внутренней границе тора  $r_1 < r_0$ .

Тогда в безразмерных координатах  $\hat{x} \equiv r/r_0$ ,  $\hat{y} \equiv z/r_0$  получаем:

$$h = (\Omega_0 r_0)^2 \left[ (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)^{-1/2} - \hat{x}_1^{-1} + \frac{1}{2(q-1)} \left( \hat{x}_1^{-2(q-1)} - \hat{x}^{-2(q-1)} \right) \right].\tag{50}$$

Здесь  $\hat{x}_1 \equiv r_1/r_0$ . Распределение энтальпии (50) даёт и внешнюю радиальную границу тора  $\hat{x}_2 > 1$ , где  $h(\hat{x}_2, 0) = 0$ . Величину  $\hat{x}_d = \hat{x}_2 - \hat{x}_1$  будем называть радиальной протяжённостью потока.

Теперь легко перейти к интересующему нас случаю квазикеплеровского, геометрически тонкого тора:  $q = \frac{3}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}$ ,  $\epsilon \ll 1$ . Используя это предположение, выражение для профиля энтальпии можно упростить следующим образом:

$$\frac{h}{\Omega_0^2 r_0^2} = \frac{\hat{H}^2}{2\hat{x}^3} \left[ 1 - \left( \frac{\hat{y}}{\hat{H}} \right)^2 \right], \quad (51)$$

где  $\hat{H}(x)$  – безразмерная полутолщина тора в единицах  $r_0$ , которая имеет вид:

$$\hat{H} = \delta \hat{x} \left[ \frac{\hat{x}_1(1 + \ln \hat{x}) - \hat{x}(1 + \ln \hat{x}_1)}{\hat{x}_1 - 1 - \ln \hat{x}_1} \right]^{1/2} \quad (52)$$

Здесь введён наглядный малый параметр

$$\delta \equiv \hat{H}(\hat{x} = 1) = 2^{1/2} \epsilon \left( 1 - \frac{1 + \ln \hat{x}_1}{\hat{x}_1} \right)^{1/2} \ll 1,$$

задающий характерный угол раскрытия дискообразного тора с  $\delta \ll \hat{x}_d$ .

Также в дальнейшем нам понадобится радиальный профиль поверхностной плотности:

$$\Sigma = \int_{-H}^H \rho dz \propto \hat{H} \left( \frac{\hat{H}^2}{\hat{x}^3} \right)^n \quad (53)$$

### 2.3 Моды

Моды есть нестационарные линейные возмущения с экспоненциальной зависимостью от времени  $\propto \exp(-i\omega t)$ . Они же являются решениями операторного уравнения (1), определяющего эволюцию линейных возмущений в нашем потоке. Это значит, что моды есть векторы состояния, которые мы получаем при воздействии оператором  $\mathbf{Z}$  на его собственные векторы,  $\mathbf{f}_i$ :

$$\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{Z}\mathbf{f}_i = e^{-i\omega t}\mathbf{f}_i.$$

Повторим, что числа  $\exp(-i\omega t)$  есть собственные значения  $\mathbf{Z}$ , которые нам предстоит найти наряду с его собственными векторами.

На практике мы не будем решать уравнение именно в виде (1), а выведем эквивалентное этой проблеме ОДУ 2го порядка по радиальной координате для эйлерова возмущения энтальпии. Будем считать, что в возмущенном потоке сохраняется вертикальное гидростатическое равновесие, т. е. что  $\delta v_z = 0$  (об обоснованности этого предположения см. параграф 2.1.1 в [141]).

Уравнение для эйлеровых возмущений получим линеаризацией системы (44) – (47). Причём уравнение непрерывности сразу запишем для возмущения энтальпии  $\delta h = \delta p / \rho$ .

$$\rho \frac{\partial \delta h}{\partial t} + \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho \delta v_r) + \frac{a^2}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \delta v_\varphi) + \rho \Omega \frac{\partial \delta h}{\partial \varphi} + a^2 \frac{\partial}{\partial z} (\rho \delta v_z) = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial \delta v_r}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \delta v_r}{\partial \varphi} - 2\Omega \delta v_\varphi = -\frac{\partial \delta h}{\partial r}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \delta v_\varphi}{\partial t} + \delta v_r \frac{\kappa^2}{2\Omega} + \Omega \frac{\partial \delta v_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \delta h}{\partial \varphi} \quad (56)$$

$$\frac{\partial \delta v_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \delta v_z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \delta h}{\partial z} \quad (57)$$

Здесь  $\kappa^2 = \frac{2\Omega}{r} \frac{d\Omega r^2}{dr}$  эпициклическая частота, а  $a^2 = (n+1)p/(n\rho)$  квадрат скорости звука.

Поскольку мы рассматриваем только возмущения с  $\delta v_z = 0$ , то из уравнения (57) следует, что  $\delta h$  не зависит от  $z$ , а из уравнений (55) и (56) – что от  $z$  не зависят так же и  $\delta v_r$  и  $\delta v_\varphi$ .

Коэффициенты в уравнении (54) зависят от  $z$ , тогда как искомые переменные – нет. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать проинтегрированное по  $z$  уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t} + \frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \delta v_r) + \frac{a_*^2}{r} \frac{\partial \delta v_\varphi}{\partial \varphi} + \Omega \frac{\partial \delta h}{\partial \varphi} = 0, \quad (58)$$

где  $\Sigma$  – поверхностная плотность,  $a_*^2 \equiv na_{eq}^2/(n+1/2)$ , а  $a_{eq}$  – фоновое значение скорости звука в экваториальной плоскости диска. Заметим, что

переход от трёхмерной задачи к эффективно двумерной осуществляется заменой плотности на поверхностную плотность, а индекс политропы на  $n + 1/2$ . Впервые этот факт был замечен в работе [20].

Переход к рассмотрению мод эквивалентен поиску решения системы (55), (56), (58) в виде ряда Фурье:

$$\begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \\ \delta h \end{pmatrix} = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{v}_r \\ \hat{v}_\varphi \\ W \end{pmatrix} \exp(-i\omega t + im\varphi) \quad (59)$$

Здесь фурье-амплитуды энтальпии и компонент скорости, обозначенные как  $W$ ,  $\hat{v}_r$  и  $\hat{v}_\varphi$ , являются функциями только радиальной координаты.

Подставляя преобразование (59) в компоненты уравнения Эйлера и переходя к безразмерной координате  $\hat{x}$ , найдём связь между фурье-амплитудами скоростей и энтальпии:

$$\hat{v}_r = \frac{i}{D} \left[ \bar{\omega} \frac{dW}{d\hat{x}} - \frac{2m\Omega W}{\hat{x}} \right], \quad (60)$$

$$\hat{v}_\varphi = \frac{1}{D} \left[ \frac{\kappa^2}{2\Omega} \frac{dW}{d\hat{x}} - \frac{m\bar{\omega}W}{\hat{x}} \right], \quad (61)$$

где  $D \equiv \kappa^2 - \bar{\omega}^2$ ,  $\kappa^2 = \frac{2\Omega}{x} \frac{d}{d\hat{x}} (\Omega \hat{x}^2)$  – как обычно, квадрат эпициклической частоты, а  $\bar{\omega} \equiv \omega - m\Omega$  – смещённая частота. Ниже в этом параграфе принято, что все частоты берутся в единицах частоты  $\Omega_0$ , а время – в единицах  $\Omega_0^{-1}$ .

Подставляя (60) и (61) в уравнение неразрывности (58), получаем такое уравнение относительно  $W$ :

$$\frac{D}{\hat{x}\Sigma} \frac{d}{d\hat{x}} \left( \frac{\hat{x}\Sigma}{D} \frac{dW}{d\hat{x}} \right) - \left[ \frac{2m}{\bar{\omega}} \frac{D}{\hat{x}\Sigma} \frac{d}{d\hat{x}} \left( \frac{\Omega\Sigma}{D} \right) + (n + 1/2) \frac{D}{h_*} + \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right] W = 0, \quad (62)$$

где

$$\Sigma(r) = \int_{-H}^H \rho dz \propto \hat{H} \left( \frac{\hat{H}^2}{\hat{x}^3} \right)^n \quad \text{и} \quad h_* = \frac{\hat{H}^2}{2\hat{x}^3}. \quad (63)$$

Здесь  $h_*$  – значение безразмерной фоновой энтальпии в экваториальной плоскости диска, см. (51). Уравнение (62), а также его более общий аналог для мод трёхмерных возмущений часто встречается в литературе. Их вывод и анализ можно найти, например, в [19], [27], [164], [18], [32].

Решение уравнения (62) осложнено резонансами: коротационным, на котором  $\bar{\omega} = 0$ , и линдбладовскими, на котором  $D = 0$ . Эти точки являются особыми для (62). Однако, поскольку нас интересует только рост комбинаций нейтральных мод, мы ограничимся расчётом только части мод, резонансы которых находятся за пределами внешней границы потока,  $\hat{x}_2$ . Условие того, что внутренний линдбладовский резонанс находится на  $\hat{x} > \hat{x}_2$ , означает

$$\omega < (m - 1)\Omega(\hat{x}_2), \quad (64)$$

где мы в условии  $D = 0$  положили  $\kappa \approx \Omega$ , поскольку для тонкого тора имеем дело с почти кеплеровским профилем угловой скорости. Также напомним, что  $\omega$  – действительное. Отметим, что в случае  $m = 1$  внутренний линдбладовский резонанс оказывается в точке  $\hat{x} = 0$ , а значит, не существует мод с  $m = 1$ , удовлетворяющих условию (64). По этой причине мы будем рассматривать только моды с  $m > 1$ . Итак, при сделанных ограничениях слагаемое  $\propto D/h_* \sim \delta^{-2}$  будет велико всюду в потоке, следовательно, решение уравнения можно искать с помощью ВКБ приближения.

ВКБ-решение уравнения (62) запишем в виде:

$$W = C_0 S_1 \cos(S_0 + \phi_0), \quad (65)$$

в котором  $S_0 \sim \delta^{-1}$ , а  $S_1 \sim \delta^0$ .

После подстановки (65) в уравнение (62) получаем его в виде разложения по  $\delta$ . Группируя слагаемые при одинаковых, главных степенях  $\delta$ , а именно при  $\delta^{-2}$  и при  $\delta^{-1}$ , найдем явный вид функций  $S_0$  и  $S_1$ :

$$S_0 = \int_{\hat{x}_1}^{\hat{x}} \left( (n + 1/2) \frac{-D}{h_*} - \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right)^{1/2} d\hat{x},$$

$$S_1 = \left( \frac{-D}{\hat{x}\Sigma} \right)^{1/2} \left( (n + 1/2) \frac{-D}{h_*} - \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right)^{-1/4}$$

Фаза  $\phi_0$  фиксируется граничными условиями.

ВКБ-решение (65) нерегулярно в граничных точках  $\hat{x}_1$  и  $\hat{x}_2$ , в которых  $h_* \rightarrow 0$ . В рамках метода ВКБ возможно найти решение, регулярное на границах (см. [165]), но в данном случае воспользуемся традиционной сшивкой (65) с приближённым регулярным решением исходного уравнения (62) вблизи  $\hat{x}_1$  и  $\hat{x}_2$ . Эта сшивка и должна дать дискретный набор собственных частот,  $\omega$ , а также значение  $\phi_0$ .

Для того чтобы найти регулярное решение в окрестностях  $\hat{x}_1$  и  $\hat{x}_2$ , перейдем к новой радиальной координате  $\tilde{x} \equiv |\hat{x} - \hat{x}_{1,2}|$  и запишем разложение уравнения (62) в главном порядке по переменной  $\tilde{x} \ll 1$ . Технически это означает, что всем, не равным в  $\hat{x}_{1,2}$  нулю величинам из (62), приписываются их значения строго в  $\hat{x}_{1,2}$ . Полутолщина диска, обращаясь на границах в ноль, аппроксимируется как  $\hat{H} = \hat{H}_{1,2} \tilde{x}^{1/2}$ . Здесь константа  $\hat{H}_{1,2}$  равна:

$$\hat{H}_{1,2} = \delta \hat{x}_{1,2} \left| \frac{\ln \hat{x}_{1,2}}{1 + \ln \hat{x}_{1,2} - \hat{x}_{1,2}} \right|^{1/2}$$

Получим такое приграничное уравнение:

$$\tilde{x} \frac{d^2 W}{d\tilde{x}^2} + (n + 1/2) \frac{dW}{d\tilde{x}} + E_{1,2} W = 0, \quad (66)$$

$$\text{где } E_{1,2} = \frac{(2n + 1)(-D_{1,2}) \hat{x}_{1,2}^3}{H_{1,2}^2}, \quad D_{1,2} - \text{значения } D \text{ в } \hat{x}_{1,2}.$$

Регулярное в  $\tilde{x} = 0$  решение (66) выражается через функцию Бесселя:

$$W = C_{1,2} \tilde{x}^{-(2n-1)/4} J_{n-1/2}(\tilde{z}), \quad (67)$$

где  $\tilde{z} = 2E_{1,2}^{1/2} \tilde{x}^{1/2}$ .



Заметим, что уравнение (66) при  $\tilde{x} \rightarrow 0$  эквивалентно граничному условию на возмущение энтальпии на свободной границе потока, которое заключается в равенстве нулю в граничных точках  $\hat{x}_{1,2}$  лагранжева возмущения энтальпии,  $\Delta h|_{x_{1,2}} = 0$ , см., например, [21].

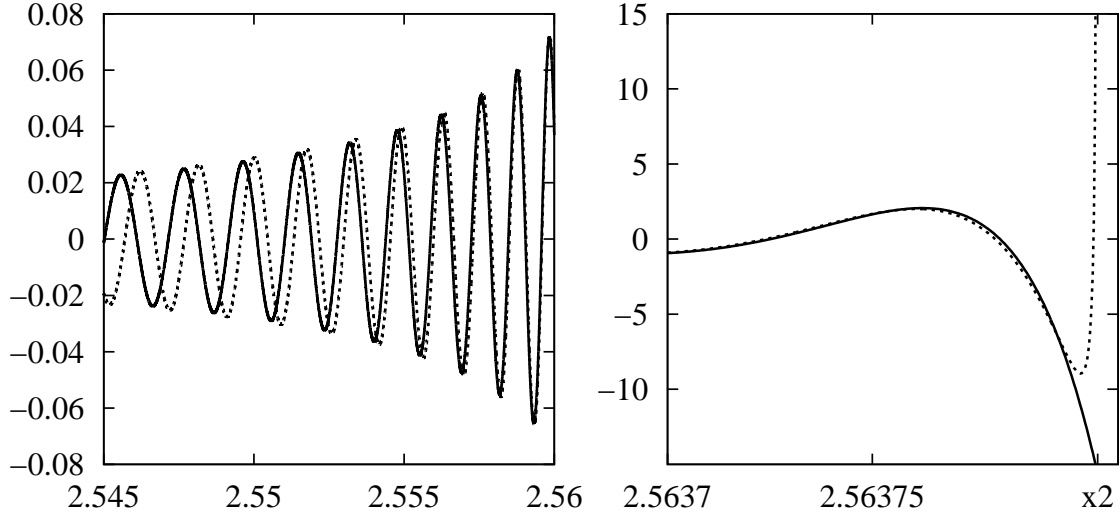


Рис. 4: На рисунке показано поведение найденных решений в различных областях тора. Сплошной линией обозначено решение, найденное в окрестностях границ, пунктирной – ВКБ-решение. На правой панели показана окрестность правой граничной точки. ВКБ-решение имеет бесконечную производную в  $x_2$ , тогда как точное решение имеет финитную производную в этой области. На левой панели – область, удалённая от правой границы на некоторое расстояние. С удалением от  $x_2$  возрастает различие между решениями. Однако существует область, в которой оба приближённых решения совпадают. Использовались следующие параметры:  $\delta = 0.003$ ,  $n = 1.5$ ,  $m = 10$ ,  $x_d = 2.0$ .

В силу того, что знаменатель  $\tilde{z}$  содержит малое  $\delta$ , на некотором расстоянии от граничных точек  $\tilde{z} \gg 1$  при сохранении условия  $\tilde{x} \ll 1$ . В этой области  $\mathbf{W}$  даётся асимптотикой (67) для большого аргумента:

$$W \approx C_{1,2} \tilde{x}^{-n/2} (4\pi^2 E_{1,2})^{-1/4} \cos \left( 2E_{1,2}^{1/2} \tilde{x}^{1/2} - n\pi/2 \right) \quad (68)$$

Сшивка (68) с разложением ВКБ-решения вблизи  $\hat{x}_1$  и  $\hat{x}_2$  даёт нулевую фазу  $\phi_0 = -n\pi/2$  в выражении (65) и следующее дисперсионное уравнение:

$$\int_{\hat{x}_1}^{\hat{x}_2} \left( (2n+1) \frac{-D\hat{x}^3}{\hat{H}^2} - \frac{m^2}{\hat{x}^2} \right)^{1/2} d\hat{x} = \pi(n+p), \quad (69)$$

где  $p$  – целое число. Решая (69) для разных значений  $p$ , получаем дискретный набор значений  $\omega$ , которое входит в величину  $D$ . Это и есть набор собственных частот,  $\omega_i$ , которыми обладают интересующие нас нейтральные моды.

Сами профили мод даются выражениями (65) и (67) с учетом соотношений между соответствующими константами:

$$\frac{C_0}{C_1} = \left( \frac{\hat{H}_1^{2n+1}}{2\pi\hat{x}_1^{3n-1}(-D_1)} \right)^{1/2}, \quad \frac{C_2}{C_1} = (-1)^p \left[ \left( \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1} \right)^{3n-1} \frac{D_2}{D_1} \left( \frac{\hat{H}_1}{\hat{H}_2} \right)^{2n+1} \right]^{1/2} \quad (70)$$

Получив профиль  $W(\hat{x})$  для выбранного нами  $\omega_i$ , соответствующие ему комплексные фурье-амплитуды эйлеровых возмущений скоростей  $\hat{v}_r(\hat{x})$  и  $\hat{v}_\varphi(\hat{x})$  вычисляем по формулам (60) и (61) – и, таким образом, имеем весь собственный вектор:

$$\mathbf{f}_j \equiv \begin{pmatrix} \hat{v}_r \\ \hat{v}_\varphi \\ W \end{pmatrix} \exp(im\varphi) \quad (71)$$

оператора  $\mathbf{Z}$ , соответствующий его собственному значению  $\exp(-i\omega_j t)$ .

## 2.4 Оптимальный рост

Имея собственные вектора динамического оператора, можно приступить к вычислению оптимального роста, т. е. нахождению такой их линейной комбинации, которая демонстрирует наибольший рост нормы к заданному моменту времени. Оптимальный рост на момент времени  $t$  есть:

$$G(t) = \max_{\mathbf{q}(0)} \frac{\|\mathbf{q}(t)\|^2}{\|\mathbf{q}(0)\|^2}. \quad (72)$$

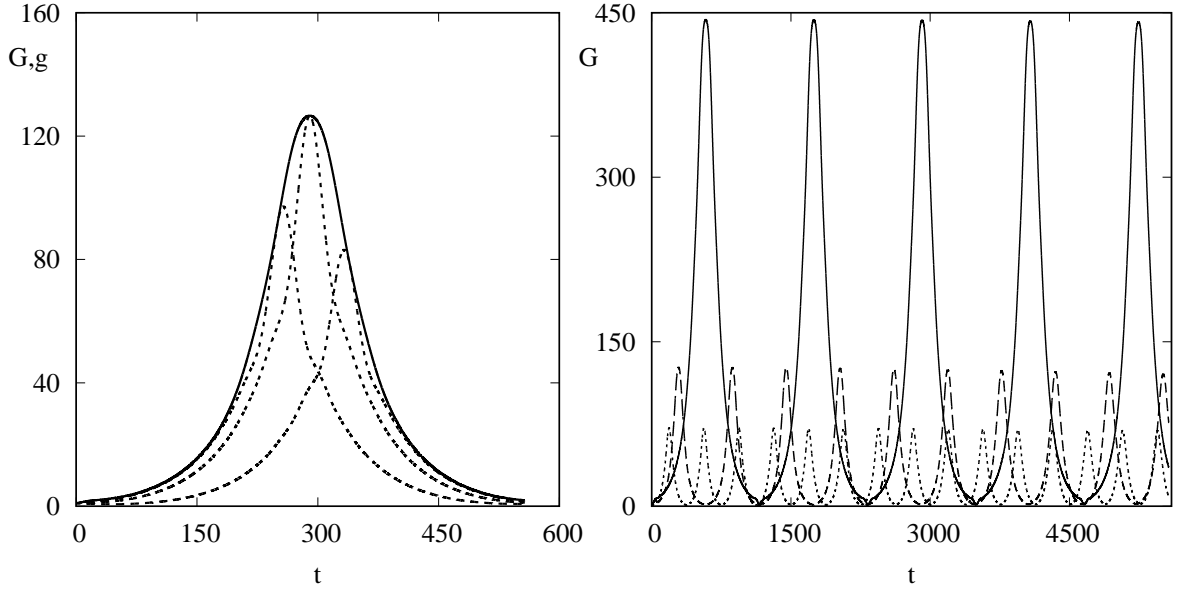


Рис. 5: На левой панели сплошной линией нанесена кривая оптимального роста  $G(t)$  линейной комбинации медленных мод тонкого диска для  $\delta = 0.002$ . Штриховыми линиями нанесены факторы роста полной акустической энергии  $g(t)$  отдельно взятых оптимальных возмущений от времени. Эти возмущения являются оптимальными для моментов времени  $t = 250, 290, 390$ , выраженного в единицах характерного кеплеровского периода  $2\pi\Omega_0^{-1}$ . На правой панели нанесены только кривые  $G(t)$ . Сплошная, штриховая и пунктирные линии соответствуют значениям  $\delta = 0.001, 0.002, 0.003$ . На обоих графиках размерность линейной комбинации  $N = 20$ , параметры  $x_d = 1.0$ ,  $m = 25$ ,  $n = 3/2$ .

Скалярное произведение двух векторов из линейной оболочки  $N$  собственных векторов оператора  $\mathbf{Z}$  введём таким образом, чтобы квадрат соответствующей нормы совпадал с акустической энергией возмущения.

$$(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = \pi \int_{r_1}^{r_2} \Sigma \left( (\hat{v}_r)_q (\hat{v}_r)_g^* + (\hat{v}_\varphi)_q (\hat{v}_\varphi)_g^* + (n + 1/2) \frac{(W)_q (W)_g^*}{h_*} \right) r dr, \quad (73)$$

где индексами « $q$ » или « $g$ » мы обозначаем принадлежность той или иной физической величины вектору  $\mathbf{q}$  или  $\mathbf{g}$  соответственно. Под величинами  $\hat{v}_r$ ,  $\hat{v}_\varphi$  и  $W$  в данном случае следует понимать компоненты соответствующего вектора состояния, вычисленные по формуле (10). В формуле 73 проведено интегрирование по азимутальной координате.

Теперь воспользуемся процедурой вычисления оптимальной комбинации собственных векторов, описанной выше в параграфе 1.5. Благодаря

тому, что мы имеем собственные вектора в аналитическом виде, матрицу  $\mathbf{M}$  можно получить простым численным интегрированием комбинации элементарных функций по формуле скалярного произведения (73):

$$M_{ij} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) \quad (74)$$

Далее выполняется разложение Холецкого  $\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ , а затем и SVD-разложение матрицы  $\mathbf{F} \mathbf{P} \mathbf{F}^{-1}$ . Обе эти процедуры являются стандартными в численных методах матричной алгебры.

На левой панели рисунка 5 приведен пример зависимости максимально возможного роста энергии,  $G(t)$ , среди всех суперпозиций 20 нейтральных мод к моменту времени  $t$  на временах порядка звукового  $t_s \sim (\delta\Omega_0)^{-1}$ , а на правой панели рисунка 5 – на временах  $\sim 10t_s$ . На первом из этих рисунков также отображён рост энергии оптимальных комбинаций мод –  $g(t)$ . Видно, что кривые  $g(t)$  касаются общей кривой оптимального роста  $G(t)$ , как и должно быть, каждая – в свой момент оптимизации. Что касается самого оптимального роста, то он имеет в данной модели квазипериодическую форму, достигая максимумов на временах  $\sim t_s$ , причём чем тоньше тор, тем больших значений  $g$  могут достичь суперпозиции мод.

## 2.5 Поток удельного момента импульса

Только что было показано, что некоторые комбинации мод способны демонстрировать существенный рост акустической энергии. Узнаем подробнее, что собой представляет оптимальное возмущение.

Рост амплитуды возмущений говорит о том, что основное течение передаёт им энергию. Выражение для плотности потока энергии от фонового потока к возмущениям можно найти, например, в работе [29]. После интегрирования этот поток даёт изменение энергии возмущения со временем:

$$\frac{dE_{ak}}{dt} = -2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\Omega}{dr} r \Sigma \Re [\hat{v}_r \hat{v}_\varphi] r dr \equiv -2\pi \int_{r_1}^{r_2} F_R r dr \quad (75)$$

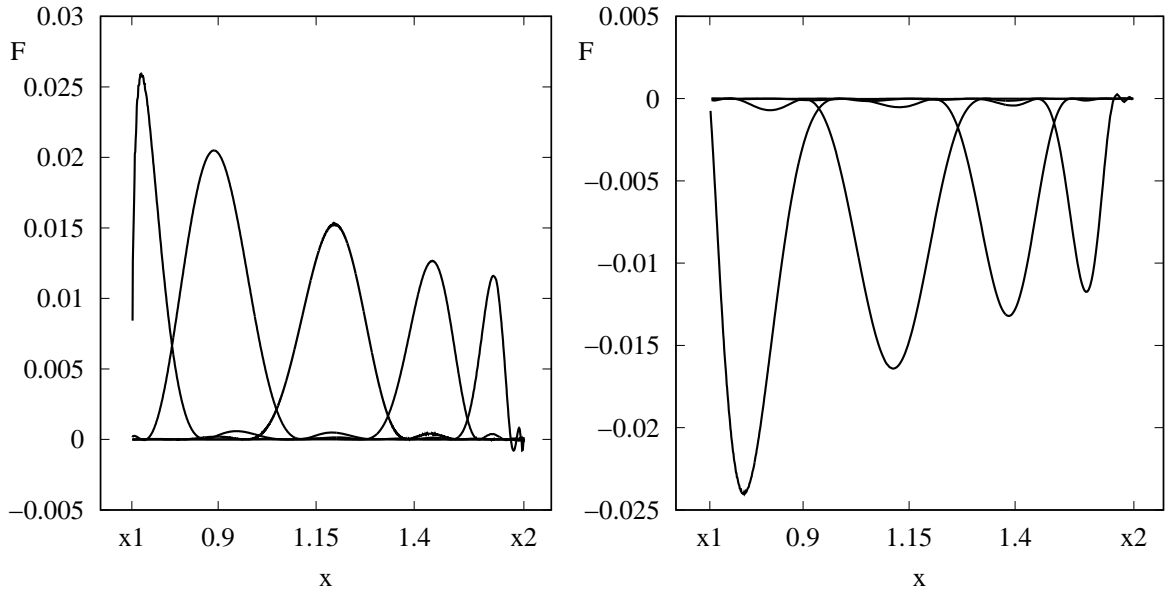


Рис. 6: Отображены радиальные профили усредненной по азимутальному направлению плотности потока углового момента  $F$  оптимального возмущения, соответствующего кривой  $g(t)$  на графике (а), рис. 5, для времени оптимизации  $t = 290$ . На графике (а) профили  $F$  взяты в моменты времени  $t = 50, 100, 150, 200, 240$  до достижения максимума  $g(t)$ , каждый профиль имеет по одному большому максимуму, положение которого сдвигается от внешней границы диска  $x_2$  к внутренней границе  $x_1$  по мере возрастания  $t$ . На графике (б) профили  $F$  взяты в моменты времени  $t = 290, 350, 400, 450$  после максимума  $g(t)$ , каждый профиль имеет аналогично по одному большому минимуму, положение которого сдвигается от внутренней границы диска  $x_1$  к внешней  $x_2$  по мере дальнейшего возрастания  $t$ . На обоих графиках размерность линейной комбинации  $N = 20$ , параметры  $\delta = 0.002$ ,  $x_d = 1.0$ ,  $m = 25$ ,  $n = 3/2$ .

Величина  $F_R$  называется мощностью сил Рейнольдса (см. работу [18]). Оказывается, что  $F_R$  просто соотносится с плотностью потока удельного углового момента, связанного с возмущениями,  $F$ :  $F_R = -\frac{d\Omega}{dx}F$ , см. разделы 2.3 и 4 работы [29]. Не трудно заметить, что для кеплеровского вращения  $F_R$  и  $F$  имеют один и тот же знак: при росте энергии возмущений  $F > 0$ , и происходит отток углового момента на периферию тора, тогда как при уменьшении энергии возмущений – всё наоборот.

Итак, воспользуемся выражением для  $F$ ,

$$F = \hat{x}\Sigma < \hat{v}_r \hat{v}_\varphi >, \quad (76)$$

и рассчитаем эволюцию профиля  $F$  для оптимальной суперпозиции мод, которая представлена кривой  $g(t)$  для  $t = 290$  на левой панели рисунка 5. На рис. 6 показано, как меняется со временем радиальное распределение  $F$  на интервале  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . Во-первых, видим, что  $F$  локализовано в радиальном направлении, и область его локализации с течением времени смещается: в фазе роста амплитуды возмущения – ко внутренней границе тора, а в фазе падения амплитуды – обратно ко внешней границе. Следовательно, мы можем говорить, что транзиентно растущее возмущение представляет собой в данном случае волновой пакет, состоящий из набора нейтральных мод (каждая из которых, напомним, вращается твердотельно с угловой скоростью, меньшей скорости вращения самого потока). В начальный момент этот волновой пакет расположен у внешней границы тора и движется в направлении внутренней границы. При этом он вызывает отток углового момента на периферию диска, так как  $F > 0$ , а его акустическая энергия растёт. В момент отражения от внутренней границы знак  $F$  и направление движения волнового пакета изменяются на противоположные, что далее ведет к уменьшению его акустической энергии, а угловой момент втекает обратно во внутренние части тора. Поскольку отсутствует какая-либо вязкая диссипация, а фоновый поток стационарен, очевидно, что если продолжить дальше следить за эволюцией оптимальной суперпозиции мод, картина повторится: волновой пакет, отразившись теперь от внешней границы, вновь направится в сторону внутренней. Обратим еще внимание на то, что полученный нами

вид  $G(t)$  говорит о том, что в эволюции этого частного типа возмущений существуют «эпохи» (интервалы времени, отсчитываемые от условного начала эволюции возмущений), на которых невозможно усиление никаких комбинаций мод. Эти «эпохи» соответствуют локальным минимумам в кривой  $G(t)$ , см. правую панель рисунка 5. Это вызвано тем, что значительное усиление могут испытывать лишь волновые пакеты, изначально располагающиеся у внешней границы тора. В то же время скорость их радиального смещения определяется звуковой скоростью в потоке, а значит, интервалы времени, «благоприятные» для транзитного усиления, всегда составляют  $\sim \hat{x}_d/\delta$ .

Если далее на плоскости  $(r, \varphi)$  отобразить линии постоянной фазы возмущений, соответствующих обсуждаемому волновому пакету, то оказывается, что в то же самое время на стадии роста он соответствует отстающей спирали. Она максимально раскрыта в начальный момент времени, но по мере своего распространения в сторону внутренней границы диска закручивается всё сильнее. Напротив, после отражения от внутренней границы она трансформируется в туго закрученную лидирующую спираль, и в процессе движения обратно к внешней границе степень закрутки, наоборот, падает. Такое поведение оптимального возмущения аналогично процессу усиления / ослабления волн плотности сдвиговым потоком (см. параграф 2 обзора [141]).

## 2.6 Параметрическое исследование

В этом параграфе рассмотрим зависимость величин оптимального роста  $G_{max}$  и момента первого максимума  $T_{max}$  от параметров модели: толщины тора  $\delta$ , азимутального волнового числа  $m$ , индекса политропы  $n$ , а также от размерности рассматриваемой линейной комбинации  $N$ . Под  $G_{max}$  здесь понимается величина первого максимума зависимости  $G(T)$  (см. правую панель рисунка 5), под  $T_{max}$  – соответствующее ему время оптимизации  $T$ .

На рисунке 7 показана зависимость величины оптимального роста от индекса политропы и размерности рассматриваемой линейной комби-

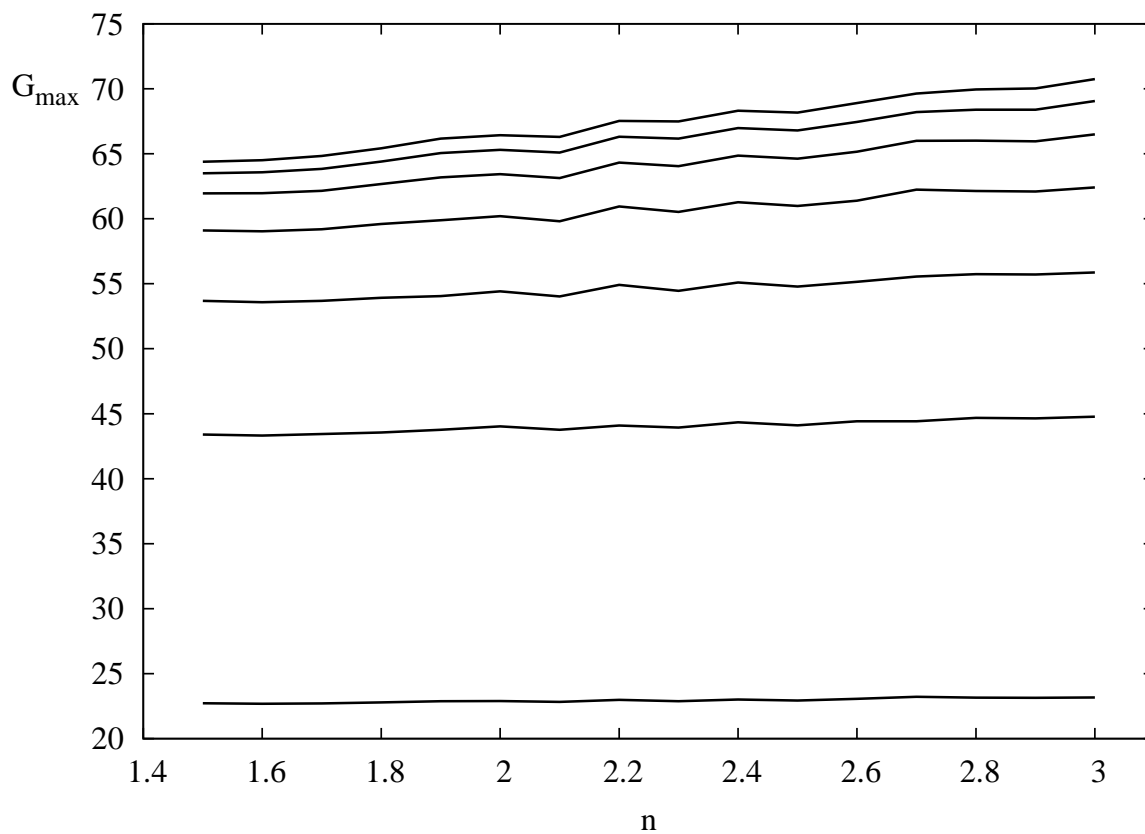


Рис. 7: Зависимость величины оптимального роста  $G_{max}$  от индекса политропы  $n$  для различных размерностей рассматриваемой линейной комбинации  $N$ . Значения  $N$  при переходе от самой нижней линии к самой верхней: 4, 8, 12, 16, 20, 24 и 28.  $\delta = 0.01$ ,  $x_d = 2$ ,  $m = 15$ .



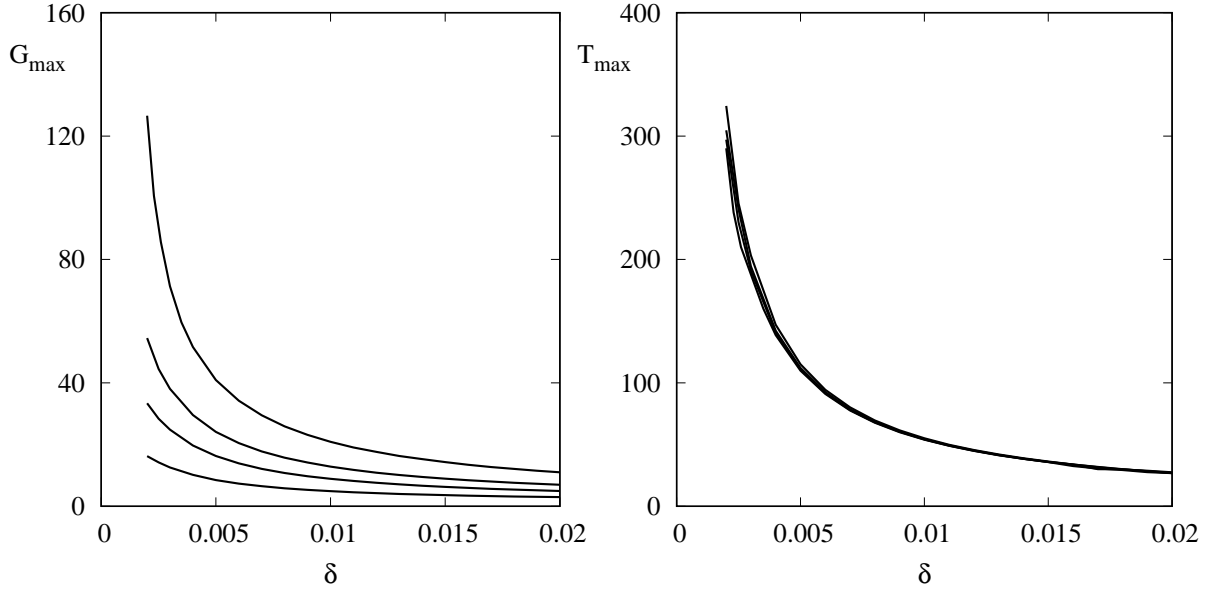


Рис. 8: На левой панели показана зависимость  $G_{max}$  от толщины тора  $\delta$  для различных азимутальных чисел  $m$ . На правой –  $T_{max}$  от  $\delta$  для тех же  $m$ . Значения  $m$  при переходе от самой нижней линии к самой верхней: 5, 10, 15, 25.  $N = 20$ ,  $x_d = 1$ ,  $n = 1.5$ .

нации. В данной работе моды нумеруются по удалению коротационного резонанса от правой границы потока, т. е. для первой моды область коротации всегда ближе к потоку, чем для всех последующих. Соответственно увеличение  $N$  означает добавление мод с более удалённым от потока резонансом. Подобная нумерация мод удобна, поскольку в этом случае наблюдается сходимость величины  $G_{max}(N)$ , что ясно отражено на рисунке.

Индекс политропы  $n$  варьировался от  $n = 1.5$ , что соответствует не релятивистскому газу, до  $n = 3$  для релятивистского газа. Существенной зависимости от  $G_{max}(n)$  не обнаружено. Небольшие отклонения от прямых на рисунке 7 объясняются изменением набора рассматриваемых мод при изменении  $n$ .

На левой панели рисунка 8 показана зависимость фактора усиления возмущений  $G_{max}$  от толщины тора  $\delta$  для различных азимутальных волновых чисел  $m$ . Наиболее эффективно усиливаются возмущения с наименьшей азимутальной длиной волны, т. е. с наибольшим  $m$ . При этом фактор роста линейных возмущений уменьшается с увеличением толщи-

ны потока.

Поскольку увеличение  $\delta$  приводит к увеличению скорости звука в фоновом потоке, время, за которое возмущение перемещается от внешней границы к внутренней, уменьшается при переходе к более толстым торам при фиксированном  $x_d$ . Этот факт нашёл отражение на правой панели рисунка 8. При этом  $T_{max}$  не зависит от азимутального волнового числа.

## 2.7 Заключение

Выше была рассмотрена достаточно простая конфигурация, допускающая аналитическое нахождение собственных мод: тор считался невязким и баротропным, возмущения, наложенные на фоновый поток, не зависели от вертикальной координаты, а среди всего набора собственных мод выбирались лишь те, которые не имеют резонансов в потоке. При сделанных предположениях все собственные функции динамического оператора являются нейтральными, т. е. соответствующие собственные частоты являются действительными, а энергия каждой отдельной моды не зависит от времени. Однако в силу неортогональности собственных функций энергия линейной комбинации мод уже является функцией времени из-за изменения «углов» между модами (см. рисунок 2).

Было показано, что вызванный этим транзиентный рост акустической энергии может достигать значительных величин. Причём фактор усиления растёт при переходе к более тонким торам, что соответствует приближению закона вращения к кеплеровскому.

Рост акустической энергии возмущений сопровождается оттоком момента импульса на периферию диска, а последующее падение – оттоком к центральной части. Хотя, как и в случае с энергией, каждая мода по отдельности не переносит момент импульса.

Физически оптимальное возмущение в данной постановке представляет собой сдвиговую волну плотности. В начальный момент времени эта волна плотности является отстающей и локализована у внешней границы тора. С течением времени волна перемещается к внутренней границе. При этом происходит её дальнейшая закрутка. Закрутка отстающей вол-

ны плотности сопровождается ростом акустической энергии волны (см., например, [123]). При отражении от внутренней границы тора волна из отстающей превращается в лидирующую; закрутка лидирующей волны плотности приводит к падению энергии возмущения. После отражения от внешней границы волна снова становится отстающей. По этой причине описанный в данной главе оптимальный рост возмущений имеет квазипериодический характер, что может иметь отношение к наблюдаемым квазипериодическим осцилляциям в дисках. При этом период осцилляций определяется временем, за которое звуковая волна преодолевает расстояние от внешней границы до внутренней, т. е. отношением радиальной протяжённости тора к скорости звука в нём. Таким образом, по периоду осцилляций можно оценивать соотношение толщины тора и его радиальной протяжённости в дисках конечного размера (например, в дисках в двойных системах).

Анализ же оптимального роста возмущений более общего класса будет проведён в главе 3.

### **3. Транзиентный рост возмущений в диске с пренебрежимо малой вязкостью<sup>6</sup>**

В этой главе мы обобщим результаты, полученные в главе 2. На этот раз задачей будет нахождение оптимального линейного возмущения среди всех возможных, без ограничений на составляющие его моды. При этом основное внимание будет уделено исследованию зависимости фактора оптимального роста возмущений от их азимутального масштаба в полубесконечном диске. Решение этой задачи матричным методом представляет значительную трудность, поскольку нахождение полного набора собственных функций динамического оператора осложнено наличием резонансов в потоке. По этой причине для решения задачи будет использоваться вариационный метод, описанный в параграфе 1.6. Как и в преды-

---

<sup>6</sup>Содержание данной главы было изложено в статьях [166], [141], [167] а так же в книге [142]

дущей главе, рассмотрение будет ограничено только возмущениями, сохраняющими вертикальное гидростатическое равновесие.

Поскольку данный метод требует нахождения явного вида сопряжённого оператора, становится возможным вычисление коммутатора  $[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^\dagger]$  и выявление связи ненормальности оператора с дифференциальным вращением потока (см. параграф 3.2).

Данный метод позволяет получить первый правый сингулярный вектор и соответствующее сингулярное значение динамического оператора, т. е. такое возмущение, рост нормы которого максимально возможен к данному моменту времени  $T$ . При этом, в силу отсутствия вязкости в задаче, фактор роста монотонно растёт с увеличением времени оптимизации (учёт вязкости будет произведён позже в главе 4).

В спектрально неустойчивых потоках данный метод позволяет находить и моду, обладающую наибольшим инкрементом. Это позволит нам найти и сравнить эволюцию моды и эволюцию транзитивно растущего возмущения. Будет показано, что в отличие от твердотельно вращающейся моды, транзитивно растущее возмущение в начальный момент представляет собой лидирующую спираль, которая раскручивается дифференциально вращающимся потоком.

### 3.1 Прямые и сопряжённые уравнения

Для вывода уравнений, описывающих динамику линейных возмущений, воспользуемся системой (55), (56), (58) полученной в главе 2. Однако, в отличие от предыдущей главы, мы выполним разложение возмущения в ряд Фурье только по азимутальной координате, но не по времени:

$$\begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \\ \delta h \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{v}_r \\ \hat{v}_\varphi \\ W \end{pmatrix} \exp(im\varphi) \quad (77)$$

Здесь, как и в выражении (59), фурье-амплитуды энтальпии и компонент скорости обозначены как  $W$ ,  $\hat{v}_r$  и  $\hat{v}_\varphi$ . Однако, в отличие от предыдущей

главы, эти величины являются функциями не только радиуса, но и времени.

Подставляя преобразование (77) в систему (55), (56), (58), получаем уравнения на фурье-амплитуды:

$$\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial t} = -im\Omega \hat{v}_r + 2\Omega \hat{v}_\varphi - \frac{\partial W}{\partial r} \quad (78)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\kappa^2}{2\Omega} \hat{v}_r - im\Omega \hat{v}_\varphi - \frac{imW}{r} \quad (79)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma \hat{v}_r) - \frac{ima_*^2}{r} \hat{v}_\varphi - im\Omega W, \quad (80)$$

здесь, как и в (58),  $\Sigma$  – это поверхностная плотность,  $a_*^2 \equiv na_{eq}^2/(n+1/2)$ , а  $a_{eq}$  – фоновое значение скорости звука в экваториальной плоскости диска. В этой главе все длины выражаются в единицах внутреннего радиуса  $r_{in}$ , все частоты – в единицах  $\Omega_0 = \Omega(r_{in})$ , а все времена – в единицах  $\Omega_0^{-1}$ .

Для решения системы (78) – (80) необходимо задать радиальные зависимости  $\Sigma$ ,  $a_{eq}^2$  и  $\Omega$  в невозмущённом потоке. Для исследования влияния свойств фонового потока на величину оптимального роста мы рассмотрим две модели невозмущённого течения.

В качестве первой модели воспользуемся стандартным диском Шакуры – Сюняева [2] в пределе малой вязкости для случая доминирования газового давления над давлением излучения (т.наз «зона b») <sup>7</sup>. Профили поверхностной плотности, скорости звука в экваториальной плоскости принимают вид:

$$\Sigma \propto r^{-3/5}(1 - r^{-1/2})^{3/5} \quad (81)$$

$$a_{eq}^2 = \frac{\delta^2}{2n} \Omega r^{21/20} (1 - r^{-1/2})^{1/5} \quad (82)$$

Здесь параметр  $\delta$ , как и в предыдущей главе, определяет толщину потока. При этом константа пропорциональности в профиле поверхностной плотности не важна в силу линейности задачи.

---

<sup>7</sup> Отметим, что выражения фоновых величин полученные в статье [2] можно уточнить, если учесть роль конвекции. Для случая доминирования давления излучения над газовым давлением (т.наз «зона a») эта задача была решена в работах [168] и [169].

Второй моделью невозмущённого течения мы будем использовать пространственно однородный поток с постоянными по радиусу  $\Sigma$  и  $a_{eq}$ .

$$\Sigma = const \quad (83)$$

$$a_{eq}^2 = \frac{\delta^2}{2n} \quad (84)$$

Для обеих моделей будет рассматриваться только кеплеровский закон вращения:

$$\Omega = r^{-3/2} \quad (85)$$

Отклонения от кеплеровского вращения, связанные с релятивистскими поправками в гравитационный потенциал, будут рассмотрены далее в главе 4.

Для нахождения явного вида сопряжённого оператора необходимо задать скалярное произведение векторов состояния. В предыдущей главе в качестве нормы возмущения была выбрана его акустическая энергия. В этой главе, помимо вышеупомянутой, мы рассмотрим более сложную норму. Это позволит не только прояснить влияние выбора скалярного произведения на величину оптимального роста, но и поможет в интерпретации полученных результатов.

Итак, прежде всего запишем скалярное произведение, которое порождает норму, равную акустической энергии возмущения. Для двух произвольных векторов состояния  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{g}$ :

$$(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = \pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma \left( (\hat{v}_r)_q (\hat{v}_r)_g^* + (\hat{v}_\varphi)_q (\hat{v}_\varphi)_g^* + \frac{(W)_q (W)_g^*}{a_*^2} \right) r dr, \quad (86)$$

где индексами « $q$ » или « $g$ » мы обозначаем принадлежность той или иной физической величины вектору  $\mathbf{q}$  или  $\mathbf{g}$  соответственно. Как и в формуле (??) главы 2, в формуле (86) проведено интегрирование по азимутальной координате.

Это скалярное произведение порождает следующую норму:

$$E_{ak} = \pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma \left( |\hat{v}_r|^2 + |\hat{v}_\varphi|^2 + \frac{|W|^2}{a_*^2} \right) r dr \quad (87)$$

Использование данного скалярного произведения физически мотивированно, кроме того, порождённая им норма сохраняется при отсутствии сдвига в потоке (см. формулу (75)). Однако такое скалярное произведение допускает рост нормы осесимметричных ( $m = 0$ ) возмущений (см. [166]).

Прямым дифференцированием по времени и подстановкой не трудно убедиться, что в случае  $m = 0$  в возмущённом потоке сохраняется следующая величина:

$$E_c = \pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma \left( |\hat{v}_r|^2 + \frac{4\Omega^2}{\kappa^2} |\hat{v}_\varphi|^2 + \frac{|W|^2}{a_*^2} \right) r dr \quad (88)$$

Именно её мы и будем использовать в качестве второй нормы в данной главе.

Соответствующее (88) скалярное произведение имеет следующий вид:

$$(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = \pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma \left( (\hat{v}_r)_q (\hat{v}_r)_g^* + \frac{4\Omega^2}{\kappa^2} (\hat{v}_\varphi)_q (\hat{v}_\varphi)_g^* + \frac{(W)_q (W)_g^*}{a_*^2} \right) r dr \quad (89)$$

Применение второй нормы позволит нам отделить рост осесимметричных и неосесимметричных возмущений при интерпретации результатов вычислений.

Сначала получим явный вид уравнений, сопряжённых к (78-80), с помощью нормы (87).

В первую очередь распишем скалярное произведение  $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\mathbf{q})$ :

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\mathbf{q}) &= \pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma \left[ \tilde{v}_r \left( im\Omega \hat{v}_r^* + 2\Omega \hat{v}_\varphi^* - \frac{\partial W^*}{\partial r} \right) + \tilde{v}_\varphi \left( -\frac{\kappa^2}{2\Omega} \hat{v}_r^* + im\Omega \hat{v}_\varphi^* + \frac{imW^*}{r} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{h}}{a_*^2} \left( -\frac{a_*^2}{\Sigma r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \hat{v}_r^*) + \frac{ima_*^2}{r} \hat{v}_\varphi^* + im\Omega W^* \right) \right] r dr
\end{aligned} \tag{90}$$

Теперь в левой части равенства воспользуемся тождеством Лагранжа  $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\mathbf{q}) = (\mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$  и равенством (27) и распишем полученное скалярное произведение по формуле (86). Правую преобразуем таким образом, чтобы выделить зависимость от компонент  $\mathbf{q}$  в виде множителей. При этом пространственные производные будем раскрывать с помощью интегрирования по частям. Получим:

$$\begin{aligned}
&\pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma r dr \left[ -\hat{v}_r^* \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} - \hat{v}_\varphi^* \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} - W^* \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} \right] = \\
&= \pi \int_{r_{in}}^{r_{out}} \Sigma r dr \left[ \hat{v}_r^* \left( im\Omega \tilde{v}_r - \frac{\kappa^2}{2\Omega} \tilde{v}_\varphi + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} \right) + \hat{v}_\varphi^* \left( 2\Omega \tilde{v}_r + im\Omega \tilde{v}_\varphi + \frac{im}{r} \tilde{W} \right) + \right. \\
&\quad \left. + W^* \left( \frac{1}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \tilde{v}_r) + \frac{im}{r} \tilde{v}_\varphi + \frac{im\Omega}{a_*^2} \tilde{W} \right) \right] - \pi r \Sigma \tilde{W} \hat{v}_r^* \Big|_{r_{in}}^{r_{out}} - \pi r \Sigma \tilde{v}_r W^* \Big|_{r_{in}}^{r_{out}}
\end{aligned} \tag{91}$$

Равенство нулю подстановок в правой части (91) определяет граничное условие для сопряжённых величин (см. [158]). Вопрос граничных условий будет рассмотрен ниже.

В силу того, что компоненты вариации  $\mathbf{q}$  произвольны и не зависят друг от друга, (91) преобразуется в три независимых равенства, каждое из которых соответствует одной из компонент  $\mathbf{q}$ . Эти равенства приводят к системе сопряженных уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = -im\Omega \tilde{v}_r + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \tilde{v}_\varphi - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r}, \tag{92}$$



$$\frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} = -2\Omega \tilde{v}_r - im\Omega \tilde{v}_\varphi - \frac{im}{r} \tilde{W}, \quad (93)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = -\frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \tilde{v}_r) - \frac{ima_*^2}{r} \tilde{v}_\varphi - im\Omega \tilde{W}, \quad (94)$$

Повторяя те же выкладки для скалярного произведения (89), получаем сопряжённую систему, порождённую этим произведением:

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = -im\Omega \tilde{v}_r + 2\Omega \tilde{v}_\varphi - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r}, \quad (95)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\kappa^2}{2\Omega} \tilde{v}_r - im\Omega \tilde{v}_\varphi - \frac{im}{r} \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} \tilde{W}, \quad (96)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} = -\frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \tilde{v}_r) - \frac{ima_*^2}{r} \frac{4\Omega^2}{\kappa^2} \tilde{v}_\varphi - im\Omega \tilde{W}, \quad (97)$$

Нетрудно убедиться, что при твердотельном вращении, т. е. при  $\kappa = 2\Omega$ , системы (78-80), (92-94), (95-97) совпадают.

В этом параграфе мы обсудим получение граничных условий для прямой и сопряжённых систем.

Граничное условие для прямой системы (78–80) получим из равенства нулю лагранжевой вариации тензора напряжений на границе потока:  $\Delta\sigma_{ij} = 0$ . Для невязкой жидкости это условие эквивалентно обращению в ноль лагранжевой вариации давления:

$$\Delta p = \delta p + \xi_r \frac{dp}{dr} = 0, \quad (98)$$

где  $\xi$  – вектор смещения.

Для пространственно однородного потока  $dp/dr = 0$ , поэтому в качестве граничного условия в этом случае мы будем использовать:

$$W = 0 \quad (99)$$

Для диска Шакуры–Сюняева  $dp/dr$ , напротив, нерегулярно на границе, поэтому для регулярности величин необходимо потребовать обращения в ноль на границе радиальной компоненты вектора смещения  $\xi_r = 0$ .

Теперь воспользуемся соотношением между  $\xi_r$  и эйлеровой вариацией радиальной скорости  $\delta v_r$  (см. например [170]):

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial t} = -\Omega \frac{\partial \xi_r}{\partial \varphi} + \delta v_r \quad (100)$$

Откуда следует обращение в ноль  $\delta v_r$  и, как следствие, соответствующей фурье-амплитуды  $\hat{v}_r$ . Далее из уравнения (78) получаем окончательный вид граничного условия для диска Шакуры-Сюняева:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = 2\Omega \hat{v}_\varphi \quad (101)$$

Граничные условия для сопряжённых уравнений должны обеспечивать обращение в ноль подстановок в выражении (91). Для однородного диска для обращения в ноль этих подстановок достаточно равенства нулю фурье-амплитуды энтальпии:

$$\tilde{W} = 0 \quad (102)$$

В случае диска Шакуры-Сюняева поверхностная плотность на границе равна нулю, что обеспечивает равенство нулю подстановок. В этом случае мы будем использовать для сопряжённых систем то же граничное условие, что и для прямой:  $\hat{v}_r = 0$ . В случае системы (92-94) это приводит к условию на  $W$  вида:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} = \frac{\kappa^2}{2\Omega} \tilde{v}_\varphi \quad (103)$$

А в случае системы (95-97) – к следующему условию:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} = 2\Omega \tilde{v}_\varphi \quad (104)$$

Для численного интегрирования системы уравнений (78–80) и сопряжённых систем (92–94) и (95–97) использовался метод лягушка (leap-frog) [171]. Данный метод является вариантом метода конечных разностей на смещённых сетках. Метод является явным, что обеспечивает простоту реализации и распараллеливания.

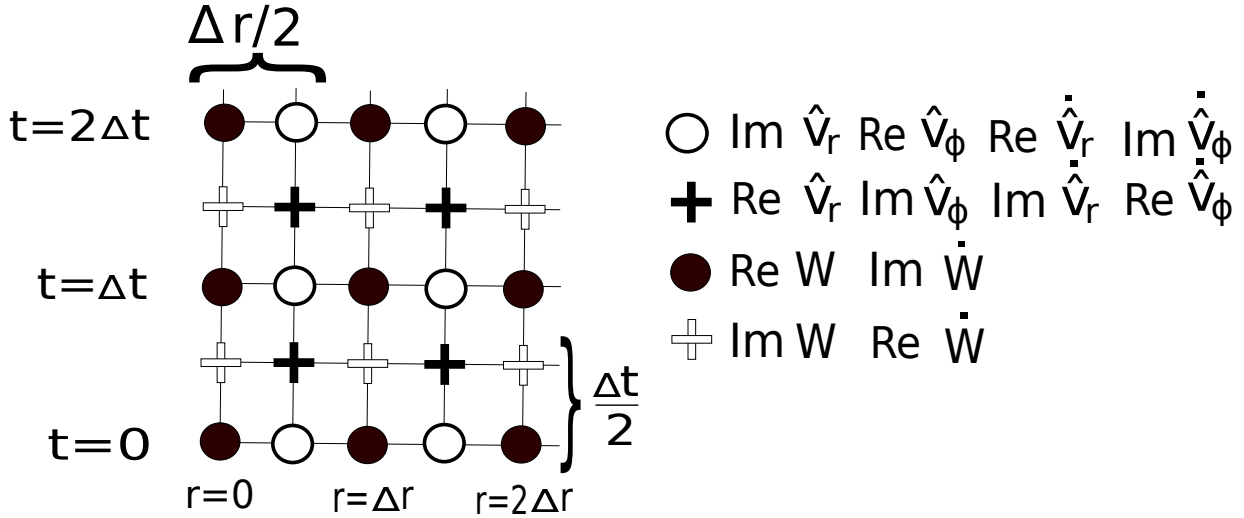


Рис. 9: Расположение величин на сетках разностной схемы.

Для реализации этого метода каждое интегрируемое уравнение делится на действительную и мнимую части (таким образом получается линейная система из шести дифференциальных уравнений в частных производных). Затем на плоскости  $(r, t)$  вводится 4 сетки, смещённые друг относительно друга на половину шага по времени и пространству. Компоненты вектора состояния распределяются по сеткам так, как показано на рисунке 9.

Данный метод позволяет использовать центральную разностную аппроксимацию производных по  $r$  и  $t$  (о различных типах разностных аппроксимаций см., например, [172]), что в свою очередь обеспечивает квадратичную точность по шагам сетки. Шаг по времени определяется из условия Куранта с помощью локального дисперсионного соотношения.

### 3.2 Условие ненормальности динамического оператора

В данном параграфе мы рассмотрим вопрос нормальности динамического оператора  $\mathbf{A}$ , определяемого системой уравнений (78–80). Речь об условиях его нормальности шла в параграфе 1.4, в пункте, посвященном введению понятия сингулярных векторов. Тогда мы упомянули, что опе-

ратор является ненормальным для любого закона вращения, отличного от твердотельного. Теперь мы можем показать это строго и в весьма общем случае, поскольку знаем явный вид  $\mathbf{A}^\dagger$ , заданный системой (92–94) либо системой (95–97).

Сначала вычислим коммутатор  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^\dagger$  для сопряжённой системы, порождённой скалярным произведением (86):

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] &= \\
&= \begin{pmatrix} \frac{16\Omega^4 - \kappa^4}{4\Omega^2} & 0 & \frac{im}{2r\Omega} (4\Omega^2 - \kappa^2) \\ 0 & \frac{\kappa^4 - 16\Omega^4}{4\Omega^2} & \frac{4\Omega^2 - \kappa^2}{2\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{ima_*^2}{2r\Omega} (\kappa^2 - 4\Omega^2) & \frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r\Sigma}{2\Omega} (\kappa^2 - 4\Omega^2) \right) + \frac{a_*^2}{2\Omega} (\kappa^2 - 4\Omega^2) \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{pmatrix} \quad (105)
\end{aligned}$$

Для системы, порождённой произведением (89):

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] &= \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ima_*^2}{r} \frac{\kappa^2 - 4\Omega^2}{\kappa^2} \right) + \frac{ima_*^2}{r} \frac{\kappa^2 - 4\Omega^2}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\kappa^2 - 4\Omega^2}{4\Omega^2} \frac{ima_*^2}{r^2\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma) + \frac{\kappa^2 - 4\Omega^2}{4\Omega^2} \frac{ima_*^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{ima_*^2}{2r\Omega} (4\Omega^2 - \kappa^2) & 0 & \frac{m^2 a_*^2}{r^2} \frac{\kappa^4 - 16\Omega^2}{4\Omega^2 \kappa^2} \end{pmatrix} \quad (106)
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что для обеих норм  $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]$  обращается в ноль при  $\kappa = 2\Omega$ , что соответствует твердотельному вращению. В этом случае коммутатор  $[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^\dagger] = [e^{\mathbf{A}t}, e^{\mathbf{A}^\dagger t}]$  легко вычисляется, поскольку для коммутирующих операторов произведение их операторных экспонент равно экспоненте от их суммы, в чём можно убедиться, записав операторные экспоненты в виде соответствующих бесконечных рядов,

$$[e^{\mathbf{A}t}, e^{\mathbf{A}^\dagger t}] = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}^\dagger t} - e^{\mathbf{A}^\dagger t} e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger)t} - e^{(\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A})t} = 0 \quad (107)$$

Таким образом, при твердотельном вращении оператор  $\mathbf{Z}$  становится нормальным.

Оказывается, что верно также и обратное утверждение: если  $\mathbf{Z}$  является нормальным для любого момента времени  $t$ , то движение твердотельно. Для того чтобы в этом убедиться, воспользуемся формулой Кэмпбелла-

Бэйкера-Хаусдорфа [173] для записи составных операторов  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\dagger$  и  $\mathbf{Z}^\dagger\mathbf{Z}$ :

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}^\dagger t} = \exp \left( (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\dagger) t + \frac{t^2}{2} [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] + \frac{t^3}{12} [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] - \frac{t^3}{12} [\mathbf{A}^\dagger, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] + \dots \right) \quad (108)$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}^\dagger t}e^{\mathbf{A}t} &= \\ &= \exp \left( (\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}) t + \frac{t^2}{2} [\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}] + \frac{t^3}{12} [\mathbf{A}^\dagger, [\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}]] - \frac{t^3}{12} [\mathbf{A}, [\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{A}]] + \dots \right) = \\ &= \exp \left( (\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{A}) t - \frac{t^2}{2} [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] + \frac{t^3}{12} [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] - \frac{t^3}{12} [\mathbf{A}^\dagger, [\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger]] + \dots \right) \end{aligned} \quad (109)$$

Поскольку равенство  $[e^{\mathbf{A}t}, e^{\mathbf{A}^\dagger t}] = 0$  выполняется для любого  $t$ , то должны быть независимо равны нулю слагаемые при одинаковых степенях  $t$ , что возможно, только если коммутатор  $[\mathbf{A}, \mathbf{A}^\dagger] = 0$ . Последнее же выполняется только в случае твердотельного вращения.

Из всего только что сказанного следует, что для того, чтобы динамический оператор  $\mathbf{Z}$  системы уравнений (78–80) был нормальным, необходимо и достаточно, чтобы вращение было твердотельным. Таким образом, любое отклонение от твердотельного вращения, т. е. – в случае астрофизических дисков – появление градиента угловой скорости в потоке, делает динамический оператор ненормальным, а моды возмущений – неортогональными друг другу. Иными словами, для существования транзиентно растущих возмущений необходимо и достаточно наличие градиента угловой скорости в фоновом потоке.

### 3.3 Проверка расчёта оптимального роста

В этом параграфе мы запишем системы прямых и сопряжённых уравнений для случая несжимаемой жидкости. Благодаря наличию аналитического выражения для фактора оптимального роста, полученного в работе [174], в этом приближении возможна проверка работы итерационной схемы. Поскольку целью рассмотрения этого случая является лишь

проверка корректности работы метода, мы ограничимся рассмотрением нормы, совпадающей с акустической энергией возмущения.

Система динамических уравнений для случая несжимаемой жидкости получается из системы (78 – 80) в пределе  $\delta\rho = 0$ .

$$\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial t} = -im\Omega \hat{v}_r + 2\Omega \hat{v}_\varphi - \frac{\partial W}{\partial r} \quad (110)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\kappa^2}{2\Omega} v_r - im\Omega \hat{v}_\varphi - \frac{imW}{r} \quad (111)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\hat{v}_r)}{\partial r} + \frac{im}{r} \hat{v}_\varphi = 0 \quad (112)$$

Для решения системы (110 – 112) удобно перейти к новым переменным: функции токи  $\Psi$ ,  $\hat{\mathbf{v}} = \text{rot}\Psi$  и завихрённости  $\varpi = \text{rot}\hat{\mathbf{v}}$ . Поскольку в рассматриваемом случае  $\hat{\mathbf{v}}_z = 0$ , вектора функции тока и завихрённости имеют только  $z$ -компоненты, поэтому в дальнейшем под  $\Psi$  и  $\varpi$  мы будем понимать именно  $z$ -компоненты соответствующих векторов. При этом из определения новых координат не трудно найти связь между  $\Psi$  и компонентами скоростей, а также между  $\Psi$  и  $\varpi$ :

$$\hat{v}_r = \frac{im}{r} \Psi \quad (113)$$

$$\hat{v}_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (114)$$

$$\varpi = \frac{m^2}{r^2} \Psi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \quad (115)$$

Дифференцируя уравнение (115) по времени и применяя равенства (110), (111), (112), (113) и (114), получаем уравнение, описывающее эволюцию завихрённости со временем:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = -im\Omega \varpi - \frac{im}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{\kappa^2}{2\Omega} \right) \Psi \quad (116)$$

Система уравнений (115), (116) полностью определяет динамику линейных возмущений несжимаемой жидкости.

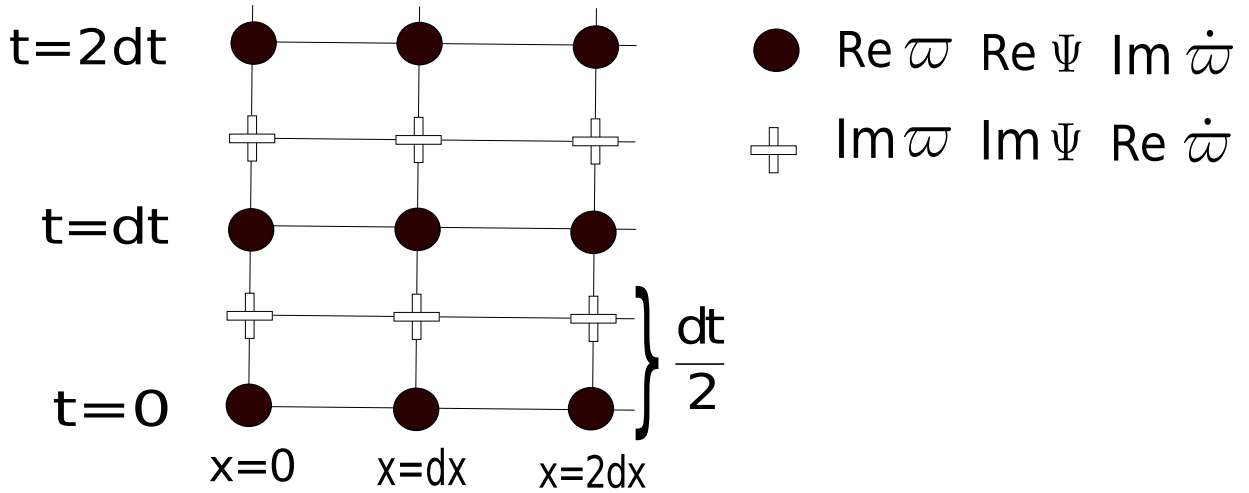


Рис. 10: Расположение величин на сетках разностной схемы в случае несжимаемой жидкости.

Повторяя эту процедуру для системы (92-94), получаем систему уравнений, сопряжённую к (115), (116):

$$\tilde{\omega} = \frac{m^2}{r^2} \tilde{\Psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} \right) \quad (117)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = -im\Omega \tilde{\omega} + 2im \frac{d\Omega}{dr} \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} - \frac{\tilde{\Psi}}{r} \right) \quad (118)$$

Для интегрирования систем (115–116) и (117–118), как и в сжимаемой задаче, используется схема на смещённых сетках. Распределение величин на сетке показано на рисунке 10. Сложность интегрирования систем уравнений для несжимаемой жидкости по сравнению с системами для сжимаемой состоит в необходимости вычислять профиль функции тока по известному профилю завихрённости на каждом временном слое с помощью уравнений (115) либо (116). Эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, в которой неизвестными выступают значения функции тока  $\Psi$  в узлах сетки. Решение данной СЛАУ с помощью стандартных пакетов линейной алгебры представляет значительную трудность из-за значительного размера входящей в неё матрицы, поиск решения требует большого количества оперативной памяти и

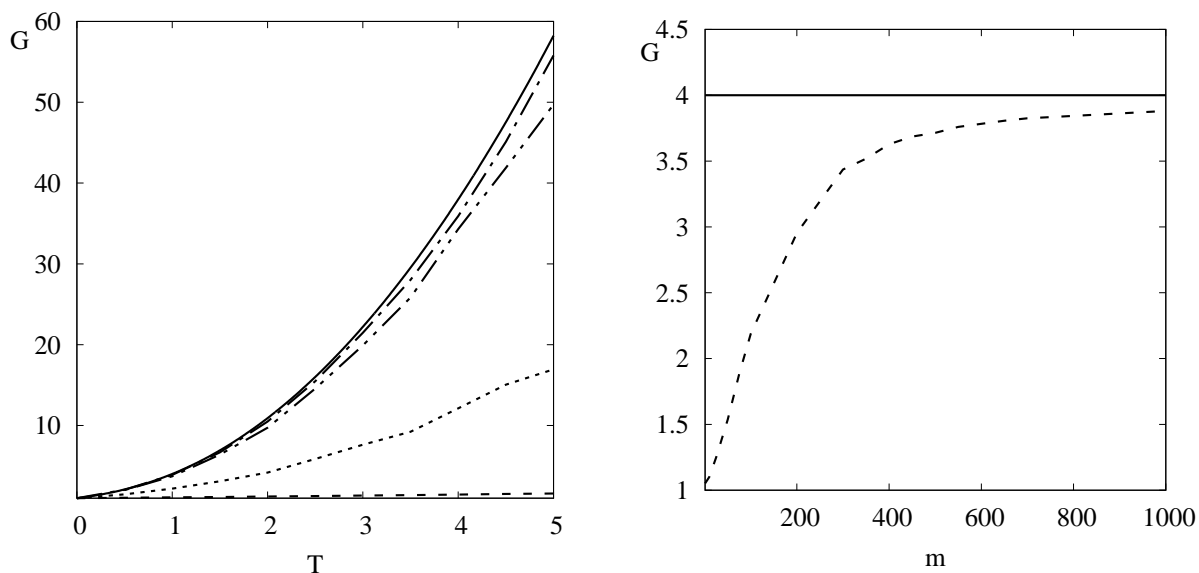


Рис. 11: Сравнение величины оптимального роста, полученного в рамках аналитического расчёта в локальном подходе с полученным численным расчётом. На левом графике сплошная кривая соответствует аналитическому решению. Ниже расположены кривые, соответствующие значениям  $m = 1000, 500, 100, 10$ . Большим  $m$  соответствует кривая, расположенная выше. На правом графике горизонтальная линия соответствует аналитическому решению для времени оптимизации  $T_{opt} = 1$ . Пунктирная кривая – значения оптимального роста в зависимости от азимутального числа для того же времени оптимизации. На обеих панелях радиальный размер диска  $x_d = 0.01$ .

вычислительного времени. Однако матрица уравнения является сильно разреженной, что позволяет разрешать систему уравнений, не прибегая к стандартным библиотечным функциям, а используя сведения о её структуре. Решение с помощью стандартных библиотек использовалось лишь для проверки результата.

Как уже было сказано выше, приближение несжимаемой жидкости допускает аналитическую проверку полученного результата. В локальном приближении начально-краевая задача для линейных возмущений в несжимаемой жидкости была решена в работе [174]. Воспользовавшись этим решением, запишем выражение для максимального фактора усиле-



ния линейных возмущений (см. Appendix B2 в работе [166]).

$$G(T) = \frac{(qT)^2 + qT\sqrt{(qT)^2 + 4} + 4}{(qT)^2 - qT\sqrt{(qT)^2 + 4} + 4}, \quad (119)$$

где величина  $q$  характеризует градиент угловой скорости в системе  $q = -r \left( \frac{d\Omega}{dr} \right)$ . Для кеплеровского вращения  $q = 3/2$ .

Для достижения условий локального приближения необходимо устремить радиальный размер диска к нулю, а азимутальное число – к бесконечности. На практике это означает, что размер диска должен быть намного меньше единицы  $x_d \ll 1$ , а азимутальное число – намного больше  $m \gg 1$ .

Таким образом, для сравнения результатов численного расчёта с предсказанием аналитической теории необходимо вычислить оптимальный рост в диске конечной радиальной протяжённости с радиальным размером  $x_d \ll 1$ . На левой панели рисунка 11 отображена как аналитическая зависимость  $G(T)$ , так и результаты расчёта с помощью итерационной схемы для различных азимутальных чисел  $m$ . При увеличении азимутального числа отличие между численным расчётом и аналитикой становятся всё менее заметными и, наконец, для  $m = 1000$  практически исчезают. Для более точной демонстрации процесса сходимости на правой панели рисунка 11 показана зависимость оптимального роста для различных  $m$  при фиксированном времени оптимизации.

Таким образом, мы показали, что вычисленный с помощью вариационного метода фактор оптимального роста находится в соответствии с предсказаниями аналитической теории.

### 3.4 Оптимальный рост возмущений

Перед тем как обсуждать результаты вычисления оптимального роста возмущений, продемонстрируем сходимость итерационной схемы. На рисунке 12 приведена иллюстрация сходимости итерационного цикла, описанного в параграфе 1.6, при использовании систем (78–80) и (92–

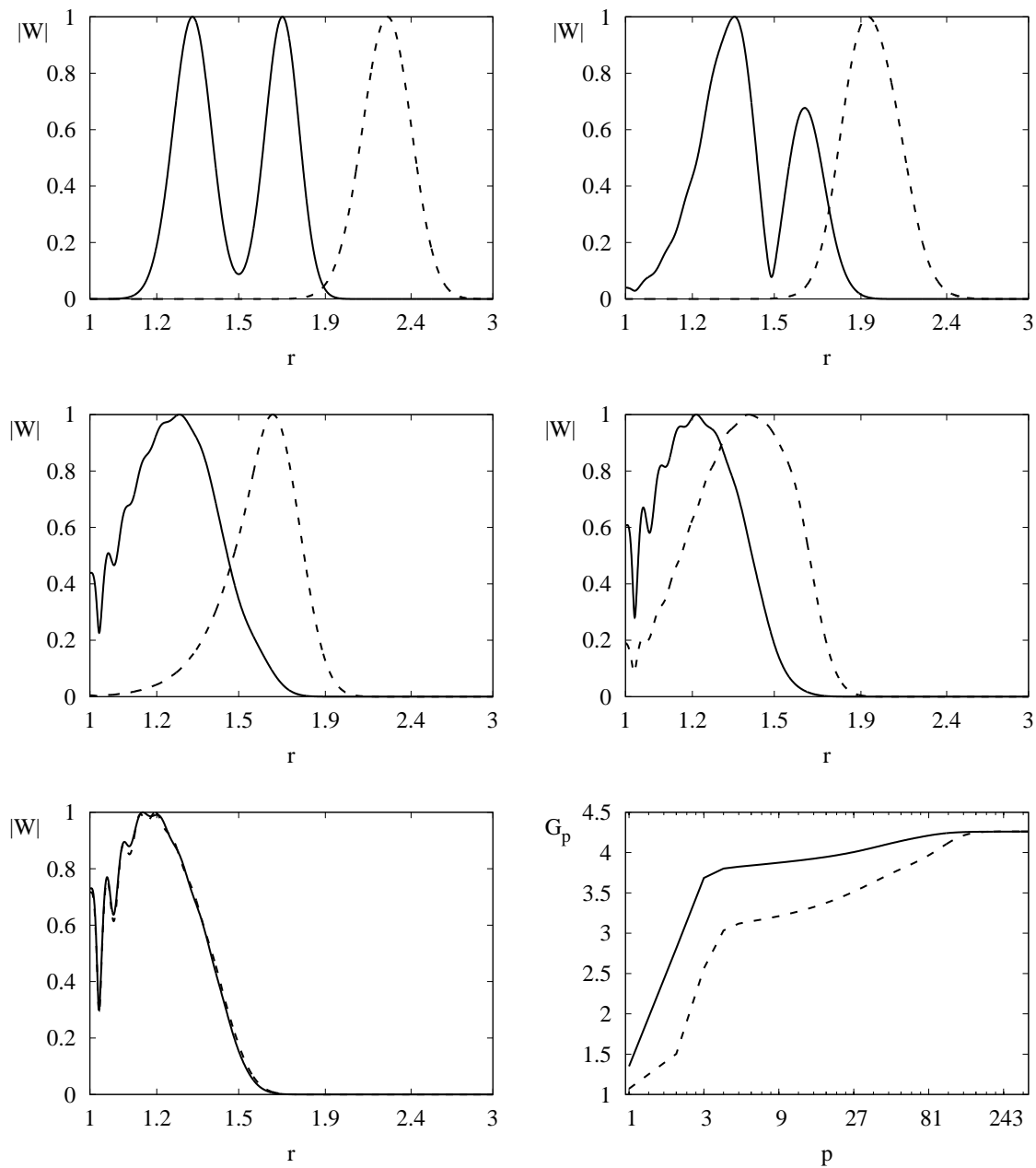


Рис. 12: Иллюстрация сходимости итерационной схемы для двух различных начальных условий. На верхней левой, верхней правой, средней левой, средней правой и нижней левой панелях показаны профили  $|W|$  перед началом итерационной процедуры, после 25, 80, 120 и 350 итераций соответственно. На нижней правой панели показан фактор усиления  $G_p$  в зависимости от номера итерации  $p$ . Сплошной линией обозначено радиальное распределение  $|W|$  для начального условия в виде «двугорбой гауссианы» (сумма двух гауссиан с различным средним). Пунктирной — в виде одиночной гауссианы. Для обоих начальных условий фурье-амплитуды скоростей перед запуском итерационного цикла равны нулю. Использовался диск Шакуры-Сюняева и норма, совпадающая с акустической энергией. Азимутальное число  $m = 5$ , индекс политропы  $n = 1.5$ , время оптимизации  $T = 3$ , полугулщина диска  $\delta = 0.05$ .

94). Как профиль, так и фактор усиления оптимального возмущения, не зависят от начального условия. При этом выбор начального условия существенно влияет на скорости сходимости схемы. Последний факт связан с различием в весах первого сингулярного вектора для различных начальных условий.

Теперь вычислим зависимость предельного фактора усиления линейных возмущений от времени. На верхней панели рисунка 13 сплошной кривой показана зависимость оптимального роста от времени оптимизации для скалярного произведения (86). Кривая оптимального роста имеет сложную форму, на которой явно выделяется несколько «эпох». В ходе первой «эпохи» возмущения растут до величины  $G = 4$ , после чего наступает временное насыщение, в ходе которого  $G$  практически не меняется со временем. Однако затем «плато» на кривой сменяется новым монотонным по  $T$  ростом. Эту стадию назовём второй «эпохой».

Для понимания причины такого поведения фактора оптимального роста вычислим также  $G(T)$  для осесимметричных возмущений (штриховая кривая на рисунке 13). Эта кривая совпадает с кривой для  $m = 5$  в первую «эпоху», но остаётся константой во вторую. Таким образом, можно сделать вывод, что механизм, обеспечивающий рост в первую «эпоху», работает и в осесимметричном случае. В Appendix A работы [166] обсуждался вопрос роста акустической энергии осесимметричных возмущений в локальном приближении. Было показано, что для возмущений, однородных по радиальному направлению, рост энергии обеспечивают эциклические движения жидкости в потоке, при этом максимальный фактор роста для кеплеровского потока  $G = \frac{4\Omega_0^2}{\kappa^2} = 4$ . В более общем случае радиально неоднородных возмущений на эциклические движения накладывается звуковая динамика. Таким образом, можно предположить, что в первую «эпоху» рост энергии, показанный сплошной кривой на рисунке 13, определяется эциклическими движениями.

Теперь рассмотрим оптимальный рост, инициированный скалярным произведением (89). Соответствующие ему зависимости  $G(T)$  изображены сплошной кривой для случая  $m = 5$  и штриховой – для  $m = 0$  на нижней панели рисунка 13. Поскольку норма, порождённая скалярным

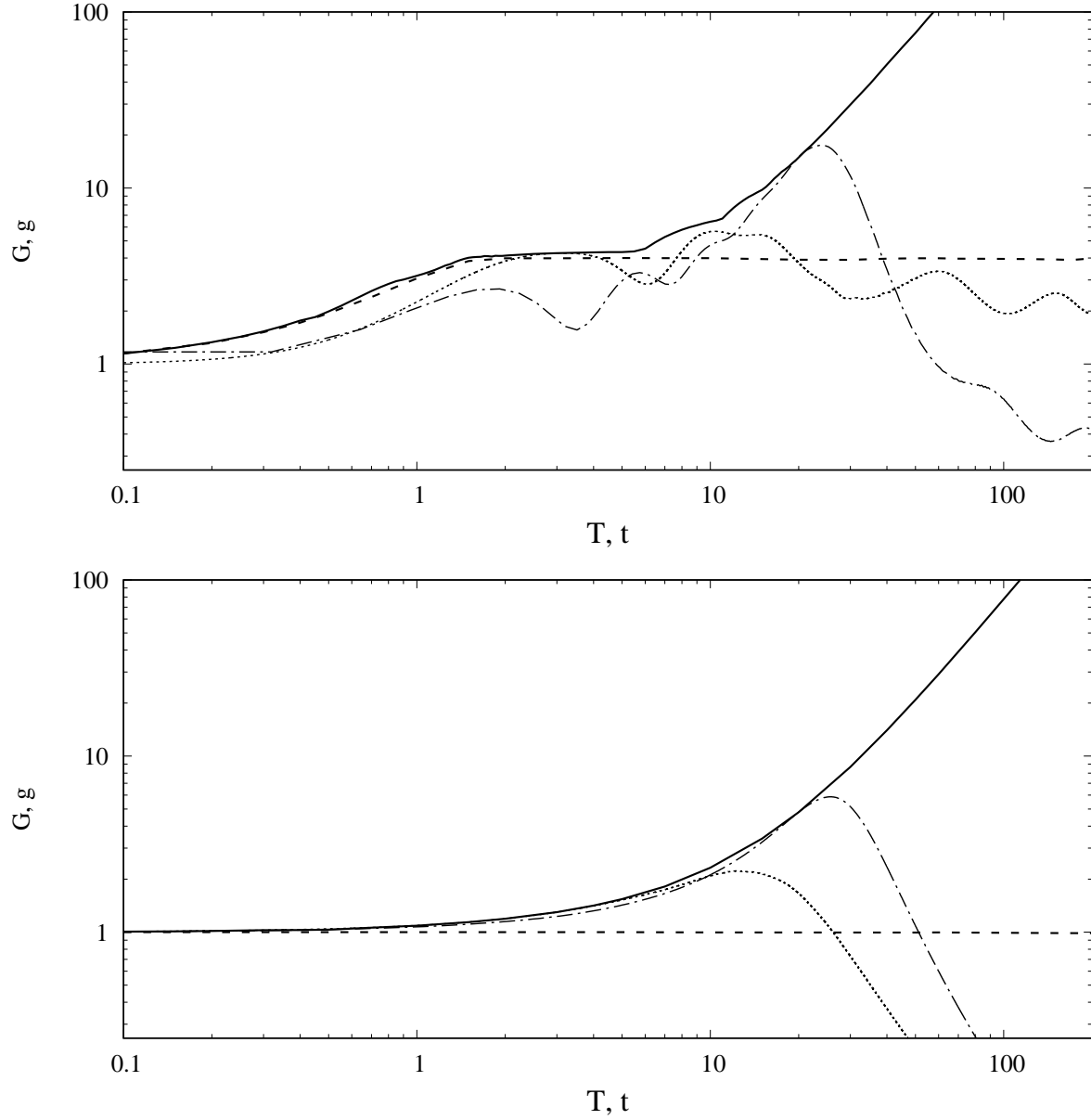


Рис. 13: На верхней панели показаны зависимости фактора оптимального роста и рост энергии оптимальных векторов при норме соответствующей акустической энергии возмущения (скалярное произведение (86)). На нижней – при норме соответствующей канонической энергии осесимметричного случая (скалярное произведение (89)). На обеих панелях сплошной кривой показана зависимость фактора оптимального роста  $G$  от времени оптимизации  $T$  для азимутального числа  $m = 5$ , штриховой кривой – для  $m = 0$ . Пунктирная и штрих-пунктирная линии показывают рост энергии индивидуального оптимального возмущения  $g(t)$  со временами оптимизации  $T_{opt} = 3$  и  $T_{opt} = 20$  соответственно. Возмущения развивались на фоне потока, определяемого выражениями (81) и (82) с параметрами  $\delta = 0.05$ ,  $n = 3/2$ .

произведением (89), является интегралом для симметричных движений газа, рост, соответствующий первой «эпохе», полностью пропал. Возмущения с  $m = 0$  вообще не демонстрируют роста нормы.

Кроме исчезновения роста на малых временах переход к другой норме также привёл к значительному уменьшению фактора роста во вторую «эпоху». Это означает, что эпициклические движения вносят свой вклад и в рост акустической энергии на больших временах. Таким образом, мы заключаем, что рост акустической энергии в первую «эпоху» обусловлен эпициклическими движениями жидкости, к которым во вторую добавляется некий дополнительный механизм усиления. Этот дополнительный механизм получил название свингового усиления (swing amplification). В пространственно локальном приближении этот механизм был подробно описан в параграфе 2 работы [141].

В дополнение к кривым оптимального роста  $G(T)$  на рисунке 13 также показана эволюция нормы индивидуального оптимального возмущения. Норма индивидуального возмущения в каждый момент времени строго меньше величины  $G$  – за исключением момента оптимизации, когда норма равна  $G$ .

Для того чтобы яснее увидеть различия в поведении оптимальных возмущений от произвольных возмущений на рисунках 14, 15 и 16 показана временная эволюция радиального профиля вещественной части возмущения энтальпии для разных начальных возмущений. На рисунке 14 в качестве начального условия взят радиальный профиль энтальпии, заданный с помощью функции Гаусса. В ходе эволюции это возмущение расплывается по диску, закручиваясь при этом потоком. Эволюция сопровождается уменьшением амплитуды возмущения.

На рисунке 15 в качестве начального условия выбрано оптимальное возмущение, порождённое скалярным произведением (86). Оптимальное возмущение представляет собой лидирующую спираль, которая раскручивается сдвиговым потоком. Раскрутка спирали сопровождается ростом амплитуды возмущения вплоть до полной раскрутки (т. н. момент свинга). После этого спираль превращается в отстающую и начинает закручиваться потоком, что, как и в случае, показанном на рисунке 14, приводит к

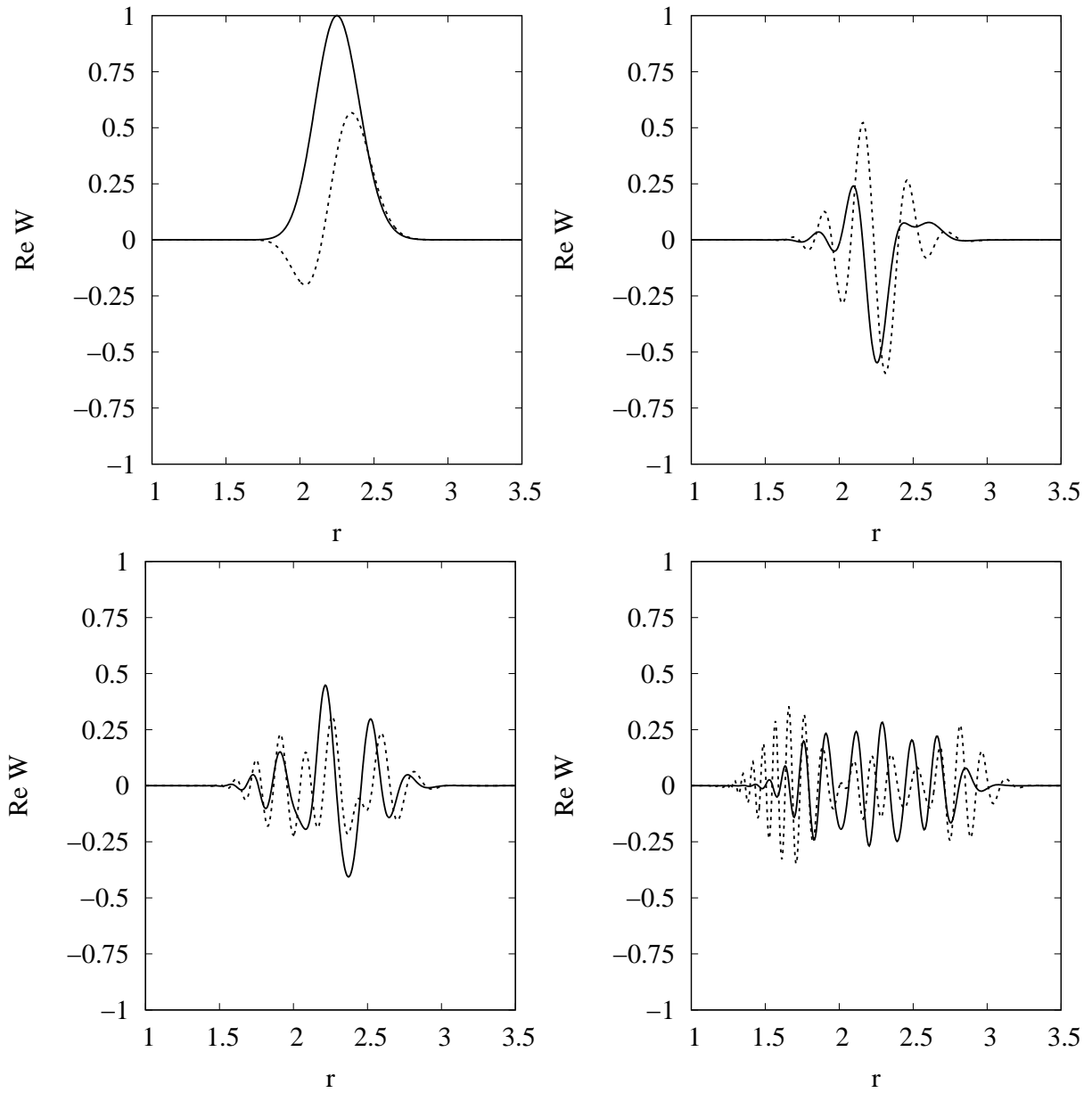


Рис. 14: Эволюция радиального распределения возмущения энтальпии  $Re W$  для неоптимизированного начального условия. Для простоты сопоставления начальное условие выбрано в виде «одиночной» гауссианы с рисунка 12. На верхней левой панели сплошной линией показаны профили в моменты времени  $t = 0$ , пунктирной –  $t = 5$ , на верхней правой –  $t = 15$  и  $t = 20$ , на нижней левой –  $t = 25$  и  $t = 30$ , на нижней правой –  $t = 35$  и  $t = 50$ . В качестве фонового потока использовался стандартный диск, определяемый уравнениями (81) и (82) с параметрами  $\delta = 0.05$ ,  $n = 3/2$ . Азимутальное число  $m = 5$ . Возмущение нормировано на единичную амплитуду в начальный момент времени.

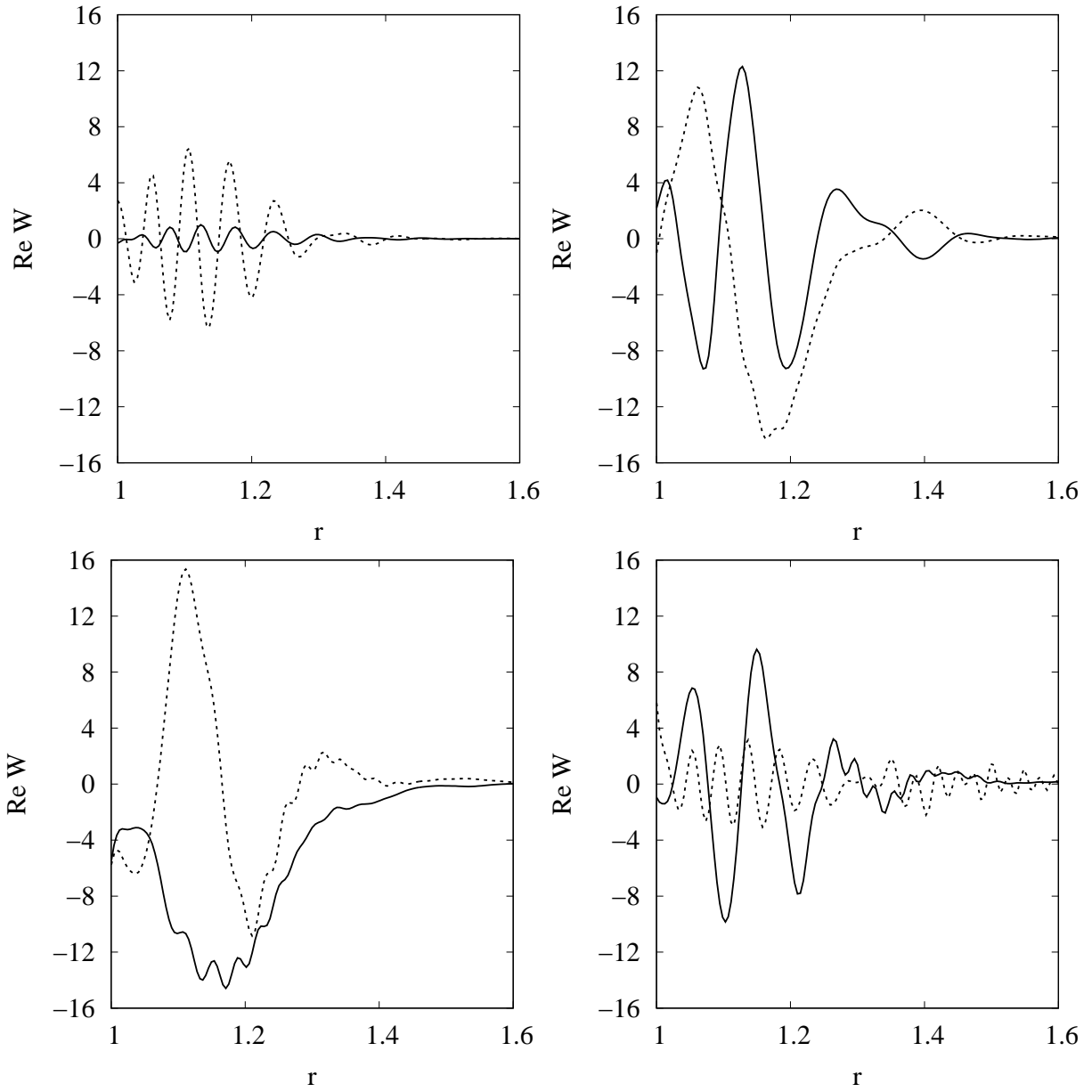


Рис. 15: То же, что и на рисунке 14, только в качестве начального условия использовалось оптимальное возмущение, вычисленное с помощью скалярного произведения (86) для времени оптимизации  $T_{opt} = 20$ .

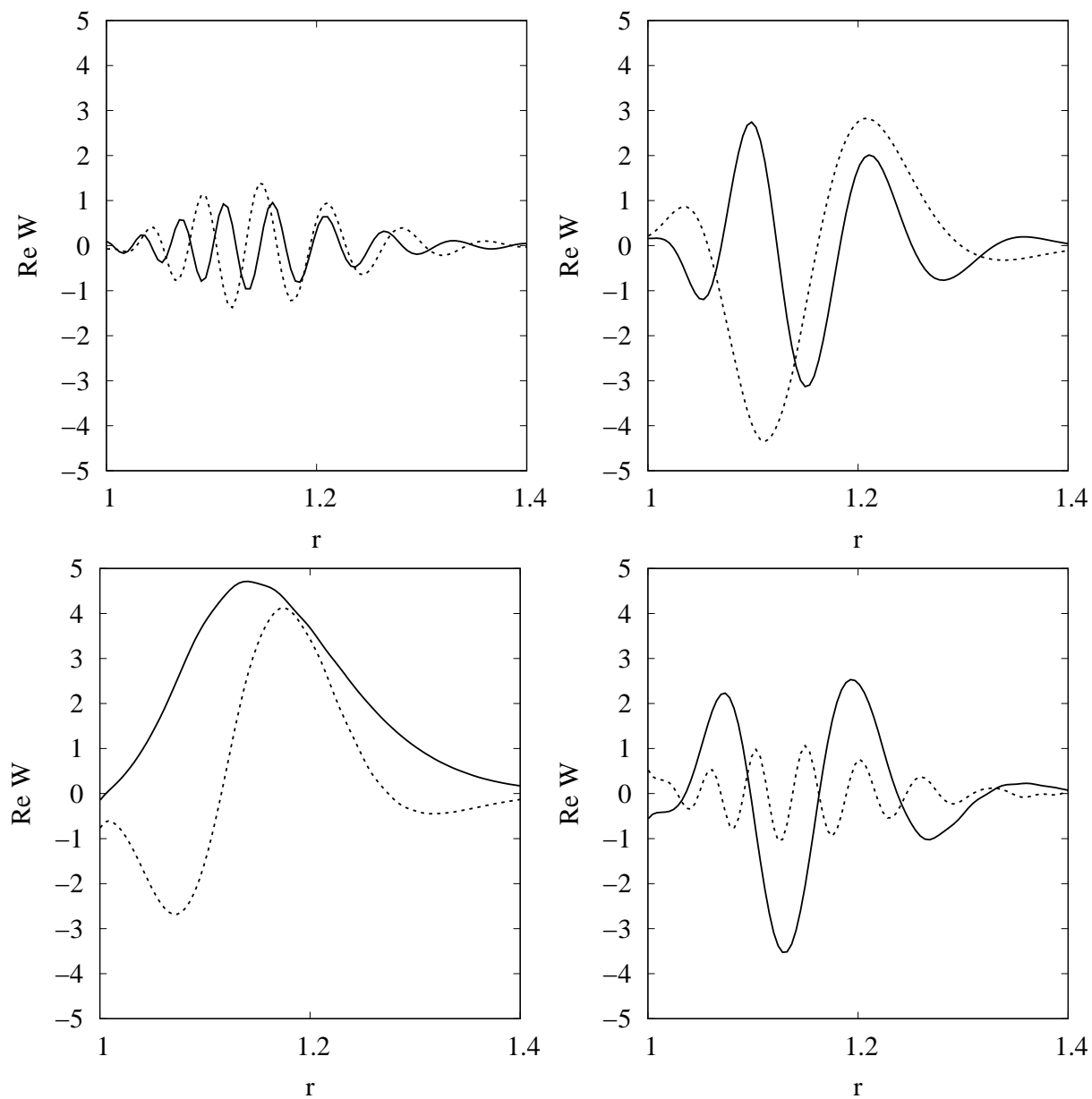


Рис. 16: То же, что и на рисунке 14, только в качестве начального условия использовалось оптимальное возмущение, вычисленное с помощью скалярного произведения (89) для времени оптимизации  $T_{opt} = 20$ .



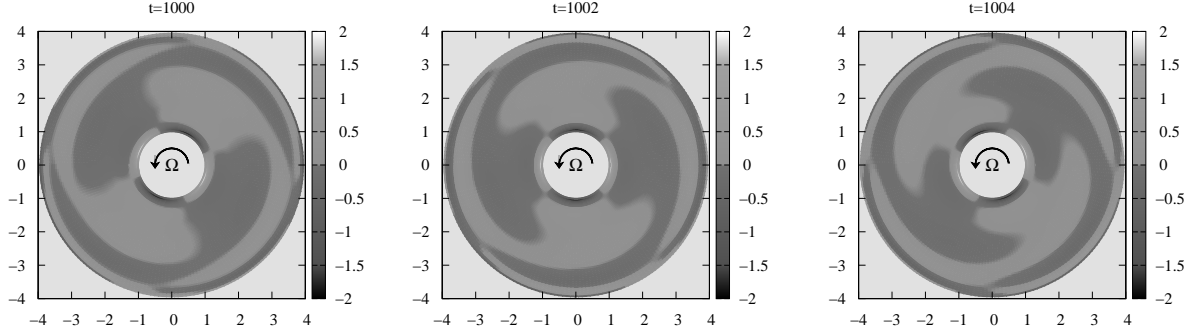


Рис. 17: Контурные наиболее неустойчивой моды возмущений с азимутальным волновым числом  $m = 2$  в модели квазикеплеровского тонкого тора конечной радиальной протяженности, описанного в параграфе 2.2. Параметры расчета: характерный угол раскрытия  $\delta = 0.3$ , радиус диска  $x_d = 3$  (на данном рисунке расстояния перенормированны на внутренний радиус тора), индекс политропы  $n = 3/2$ . Мода обладает инкрементом  $\text{Im } \omega \approx 0.001$  и фазовой скоростью  $\text{Re } \omega \approx 0.26$ . В единицах обратной кеплеровской частоты на внутреннем крае диска указано время, прошедшее от начального момента, в который мода обладает условно единичной амплитудой. Стрелкой показано направление вращения вещества в диске.

падению амплитуды. При этом в эволюции возмущения, помимо раскрутки потоком, принимают участие и эпициклические движения жидкости, что существенно осложняет картину.

Наконец, на рисунке 16 начальным условием является оптимальное возмущение, порождённое скалярным произведением (89). Поскольку в этом случае эпициклические движения не влияют на норму возмущения, оптимальное возмущение оказывается свободно от подобных движений жидкости. Это приводит к более простому виду профилей возмущения, а также к меньшему фактору усиления амплитуды возмущения.

Теперь посмотрим, что представляет собой оптимальное возмущение в плоскости  $r - \varphi$  и сравним его с наиболее неустойчивой модой. Фоновые потоки, описанные в этой главе, являются спектрально устойчивыми, поэтому мы воспользуемся тором, описанным в главе 2. Отметим, что рассчитанная вариационным методом величина оптимального роста в торе на несколько порядков превосходит результат, полученный в главе 2, поскольку на этот раз мы не ограничивали класс рассматриваемых возмущений.

Особенностью вариационного метода является то, что он позволяет

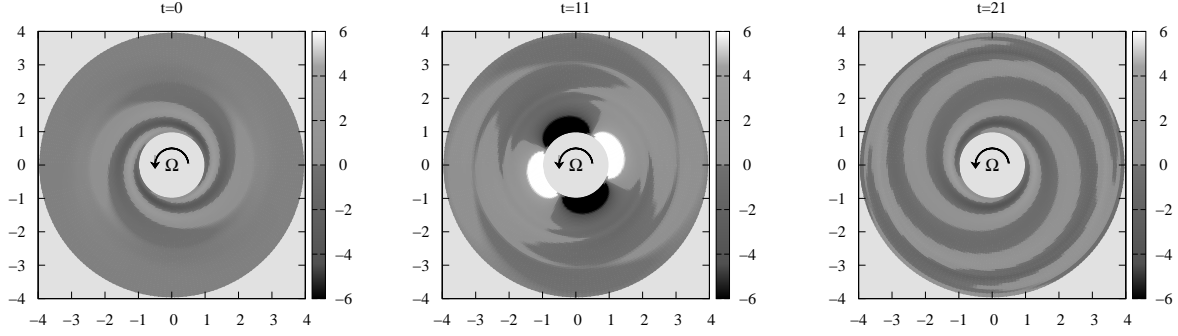


Рис. 18: Контуры возмущения  $m = 2$ , демонстрирующего максимально возможный транзитный рост полной акустической энергии в момент времени  $t_{opt} = 10$ , отсчитываемый от начала эволюции возмущения в единицах обратной кеплеровской частоты на внутреннем крае диска. Начальное возмущение обладает условно единичной амплитудой, модель потока взята та же самая, что и на рисунке 17.

находить наиболее неустойчивую моду. Для этого достаточно выполнить процедуру оптимизации для достаточно большого момента времени, чтобы экспоненциальный рост неустойчивой моды превосходил транзитный рост. Мы воспользуемся этой особенностью метода, чтобы наглядно продемонстрировать отличия в поведении моды и транзитно растущего возмущения.

Эволюция оптимального возмущения, посчитанная для нормы, совпадающей с акустической энергией для момента времени  $T = 1000$ , показана на рисунке 17. Найденный оптимальный профиль вращается твердотельно вместе с потоком. Оценённая по скорости вращения узора вещественная часть частоты соответствует коротационному радиусу, находящемуся внутри потока.

Оптимальное возмущение, посчитанное для момента  $T = 10$ , ведёт себя принципиально другим образом. Вместо твердотельно вращающегося узора в начальный момент времени имеем туго закрученную лидирующую спираль, которая постепенно раскручивается потоком. После полной раскрутки спираль превращается в отстающую и начинает закручиваться потоком (см. рисунок 18). При этом на стадии раскрутки энергия возмущения растёт, а на стадии закрутки падает.

Объяснение причинам транзитного усиления при раскрутке лиди-

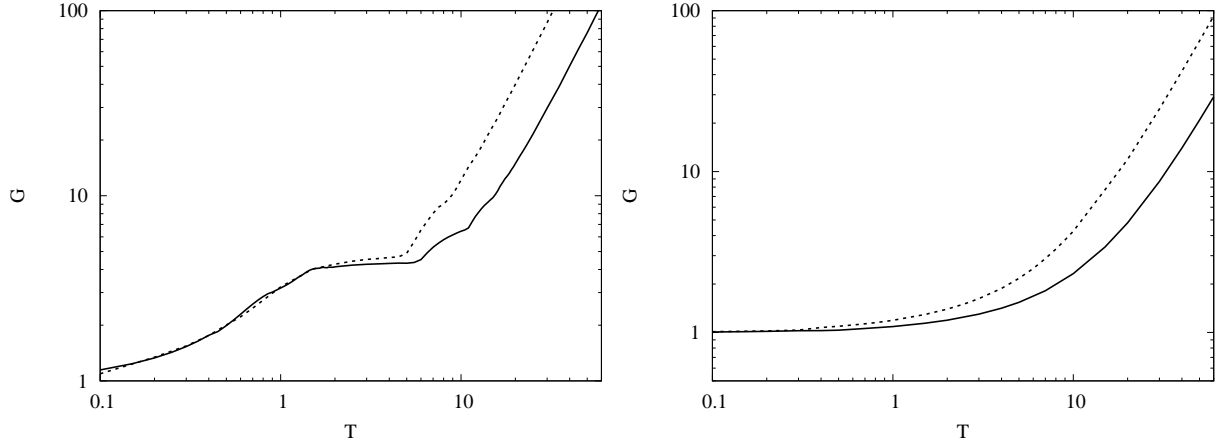


Рис. 19: Фактор усиления линейных возмущений как функция времени оптимизации для различных моделей фонового потока. На левой панели в качестве нормы использовалась акустическая энергия (скалярное произведение (86)), на правой панели – функция (88) (скалярное произведение (89)). На обеих панелях сплошной кривой показаны результаты расчёта, выполненные для диска Шакуры-Сюняева, определяемого уравнениями (81) и (82), пунктирной кривой – для однородного диска, определяемого уравнениями (83) и (84). Для всех кривых параметры модели  $\delta = 0.05$ ,  $m = 5$ ,  $n = 3/2$ .

рующей спирали даёт теорема Кельвина о циркуляции скорости в баротропной жидкости. Эта теорема гласит, что циркуляция скорости вдоль замкнутого контура идеальной баротропной жидкости остаётся постоянной. Если в качестве контура выбрать границы ветвей спирали, то раскрутка потоком будет приводить к уменьшению длины контура, что в свою очередь должно приводить к росту амплитуды скоростей, а значит и энергии. После полной раскрутки, однако, спираль начнёт закручиваться потоком, что приведёт к падению энергии возмущения. (Подробное описание механизма в пространственно локальном пределе дано в параграфе 2 работы [141]).

Для выяснения зависимости величины оптимального роста от фонового потока на рисунке 19 нанесены кривые оптимального роста, посчитанные для стационарного потока в виде диска Шакуры-Сюняева и в виде радиально однородного потока для обеих рассматриваемых норм. Максимальный фактор усиления линейных возмущений для простого однородного потока оказался лишь незначительно отличающимся от фактора, посчитанного для более реалистичного стационарного потока.

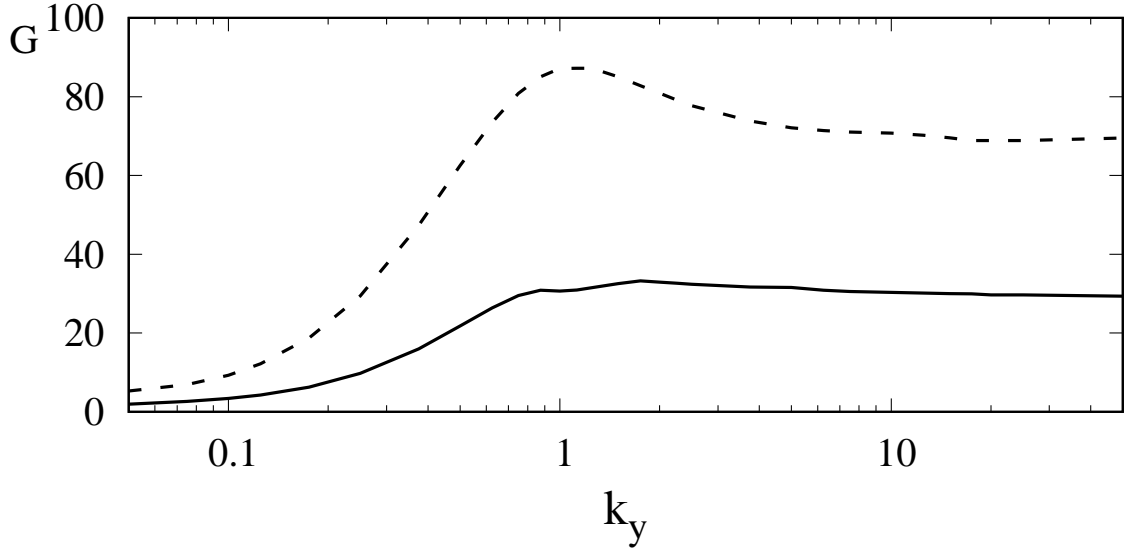


Рис. 20: Оптимальный рост возмущений в однородном диске в зависимости от их азимутального масштаба. Сплошная кривая соответствует скалярному произведению (86), пунктирная – (89). Время оптимизации  $T = 10$ , азимутальное число  $m = 5$ , индекс политропы  $n = 3/2$ .

Гораздо значительнее оказалась зависимость от параметров модели. Для характеристики азимутального масштаба возмущений удобно пользоваться азимутальным волновым числом на внутреннем краю потока, выраженном в единицах  $a_*/\Omega$ . Для однородного диска этот параметр связан с полутолщиной  $\delta$  и азимутальным числом  $m$  следующим соотношением:

$$k_y = \frac{m\delta}{\sqrt{2n+1}} \quad (120)$$

Зависимость величины роста в фиксированный момент времени от  $k_y$  для различных норм показана на рисунке 20. Наиболее эффективно способны усиливаться возмущения с азимутальной длиной волны порядка толщины диска. Этот результат связан с излучением вихрей в момент свинга волны плотности (описание этого процесса в ВКБ-приближении можно найти в [134]). Амплитуда излучённой волны плотности максимальна именно для возмущений с азимутальной длиной волны порядка толщины диска. Ранее этот эффект был известен только в пространственно локальной постановке задачи. Однако, как оказалось, этот же эффект

имеет место и для сдвиговых вихрей в глобальной постановке задачи.

### 3.5 Заключение

В этой главе мы детально проанализировали оптимальный рост глобальных адиабатических возмущений. При этом особое внимание было уделено исследованию зависимости фактора роста оптимальный возмущений от азимутального масштаба. Было показано, что и для возмущений с азимутальным масштабом превышающем геометрическую толщину диска, максимально возможным фактором роста обладают сдвиговые вихри в форме лидирующих спиралей. Энергия этих крупномасштабных вихрей может усиливается в десятки раз за период времени, соответствующий нескольким оборотам вещества на внутренней границе диска.

Для достаточно общей модели двумерных возмущений были получены сопряжённые уравнения как для сжимаемого, так и для несжимаемого случая. Получение в явном виде сопряжённых уравнений позволило показать, что для существования в потоке возмущений, способных к транзиентному росту, необходимо и достаточно существования градиента скорости в потоке.

Для вычисления кривой оптимального роста использовался вариационный метод. Было показано, что, как и для исследованных в предыдущих работах мелкомасштабных возмущений, оптимальным крупномасштабным возмущением также является лидирующая спираль. Её раскрутка фоновым потоком так же приводит к значительному росту амплитуды возмущений. Причём наиболее эффективно усиливаются возмущения с длиной волны порядка толщины диска. Поскольку именно для возмущений таких азимутальных масштабов наиболее эффективно происходит излучение волн плотности в момент свинга.

Также, кроме широко применявшейся ранее нормы, совпадающей с акустической энергией возмущения, была исследована норма, совпадающая с канонической энергией в осесимметричном случае. Переход к другой норме эквивалентен исключению из рассмотрения эпициклических движений жидкости. Поэтому если для первой нормы эволюция опти-

мального возмущения состояла из сочетания раскрутки лидирующей спирали и эпициклических движений, то для второй нормы эволюция возмущений оказалась очищена от последних.

При этом в отличие от предыдущей главы, кривая оптимального роста монотонна по времени оптимизации. Это связано с тем, что при росте времени оптимизации происходит переход к оптимальным начальным возмущениям в виде более туго закрученных спиралей. В отсутствие вязкости процесс закрутки начального возмущения можно продолжать бесконечно долго, без потери эффективности транзитного усиления. Однако в реальных дисках всегда присутствует малая молекулярная вязкость. Для слишком большой начальной закрутки она будет подавлять транзитное усиление возмущений и приводить к появлению максимума на кривой оптимального роста. Подробно влияние вязкости будет исследовано в следующей главе.

## 4. Транзиентный рост возмущений в диске с учётом вязкости<sup>8</sup>

### 4.1 Введение

Как говорилось ранее, учёт вязкости крайне важен для расчёта оптимального роста, поскольку вязкость ограничивает максимально возможную закрутку лидирующей спирали. Поэтому в этой главе мы обобщим результаты, полученные в главе 3, на случай дисков с учтёнными диссипативными эффектами. Кроме кинематической вязкости мы учтём также вторую вязкость. Поскольку вторая вязкость не оказывает влияния на бездивергентные движения, с её помощью мы сможем отделить вихревую динамику возмущений и исследовать её отдельно.

В общем случае учёт вязкости требует изменения числа гидродинамических уравнений. Кроме компонент уравнения Навье-Стокса и уравнения непрерывности необходимо рассматривать ещё и уравнение энергии,

---

<sup>8</sup>Содержание данной главы было изложено в статье [175]

поскольку энтропия перестаёт быть лагранжевым инвариантом. Однако в данной главе мы будем пренебрегать генерацией энтропии в фоновом потоке и продолжим пользоваться политропным уравнением состояния. Как и в предыдущей главе, мы ограничим рассмотрение возмущениями, сохраняющими вертикальное гидростатическое равновесие, что, как и ранее, позволит свести трёхмерную задачу к двумерной.

Кроме кеплеровского диска также будет рассмотрен диск в псевдо-ньютоновском гравитационном потенциале. Подобный потенциал позволит учесть релятивистские эффекты отклонения орбитальной и эпициклической частот от их ньютоновских значений <sup>9</sup>.

Рассмотрение псевдо-ньютоновском потенциалов мы ограничим широко известным потенциалом Пачинского-Виите [177]. Менее известные потенциалы, описанные в [178] и [179], рассматриваться не будут (о качественных отличиях между псевдо-ньютоновскими потенциалами см. [180]).

## 4.2 ФОНОВЫЙ ПОТОК

В данном параграфе мы опишем модели фоновых потоков, которые будут использоваться для исследования транзиентного роста в вязком диске. В отличие от невязкого случая, который характеризовался распределением лишь трёх величин: закона вращения, поверхностной плотности и скорости звука, для определения вязкого невозмущённого потока необходимо определить также профили кинематической вязкости, второй вязкости и радиальной скорости. При этом рассмотрение будет ограничено только геометрически тонкими дисками бесконечной радиальной протяжённости.

---

<sup>9</sup> Рассмотрение более тонких релятивистских эффектов, таких как, например, формирование изгибного диска (см., например, [176]) выходит за рамки настоящей диссертации.

### 4.2.1 Ламинарный вязкий диск

Для исследования роли релятивистских эффектов в транзиентном росте линейных возмущений мы воспользуемся хорошо известным потенциалом Пачинского-Виита [177].

$$\Phi = -\frac{GM}{r - r_g}, \quad (121)$$

здесь  $r_g$  – это гравитационный радиус центрального тела.

Как и в предыдущих главах, мы будем выражать все координаты в единицах внутреннего радиуса диска  $r_0$ , а время – в единицах обратной кеплеровской частоты на внутреннем радиусе  $\Omega^{-1}(r_0)$ . Поскольку радиус последней устойчивой орбиты вокруг релятивистского объекта  $r = 3r_g$ , в системе единиц, нормированной на единичный радиус внутренней границы диска, получаем, что  $r_g$  может варьироваться от нуля до  $1/3$ . Причём  $r_g = 0$  соответствует классическому Ньютонскому, а  $r_g = 1/3$  предельно релятивистскому случаю <sup>10</sup>.

Соответствующие этому потенциалу частоты кеплеровская и эпициклическая частоты имеют следующую зависимость от радиуса:

$$\Omega^2 = \frac{(1 - r_g)^2}{r(r - r_g)^2}, \quad (122)$$

$$\kappa^2 = \frac{(1 - r_g)^2}{(r - r_g)^3} \left(1 - 3\frac{r_g}{r}\right) \quad (123)$$

Теперь определим скорость звука в экваториальной плоскости диска,  $a_{eq}$ . Для газа с политропным уравнением состояния  $a_{eq}$  связано с толщиной ( $\rho(z = H) = 0$ ) диска следующим образом:

$$a_{eq} = \frac{H\Omega}{(2n)^{1/2}}.$$

---

<sup>10</sup> Отметим, что учёт градиента давления в диске приводит к стабилизации потока в некоторой области внутри радиуса  $r = 3r_g$  (см. работу [181]), однако рассмотрение подобного случая находится вне рамок настоящей диссертации.



Поскольку, как и в двух предыдущих главах, мы здесь рассматриваем только двумерную задачу с возмущениями, проинтегрированными по вертикальной координате, вместо  $a_{eq}$  в динамические уравнения будет входить величина  $a_*^2 = na_{eq}^2/(n + 1/2)$  (см. параграф 3.1):

$$a_* = \frac{H\Omega}{(2n + 1)^{1/2}}. \quad (124)$$

Далее определим коэффициенты вязкости  $\nu$  и  $\nu_b$  вдоль потока. Коэффициент кинематической вязкости пропорционален произведению средней скорости частиц на среднюю длину свободного пробега

$$\nu \propto v_p l_p \quad (125)$$

За среднюю скорость частиц примем скорость звука  $a_*$ , средняя длина свободного пробега же обратно пропорциональна концентрации частиц и прямо пропорциональна отношению полутолщины к поверхностной плотности  $H/\Sigma$ . Таким образом, получаем следующий радиальный профиль кинематической вязкости:

$$\nu(r) = \nu_1 \frac{\Sigma_1}{H_1^2 \Omega_1} \frac{H^2(r)\Omega(r)}{\Sigma(r)}, \quad (126)$$

где индексом «1» обозначены значения величин в некоторой точке диска  $r_1$ .

Мы выберем значение  $r_1$  таким образом, чтобы  $\nu(r)$  имело в этой точке минимум. Величину этого минимума будем характеризовать числом Рейнольдса  $R$

$$R = \frac{q_0 a_{*1}^2}{\Omega_1 \nu_1} = \frac{q_0 H_1^2 \Omega_1}{\nu_1 (2n + 1)}, \quad (127)$$

здесь, как и в предыдущей главе, параметр  $q = -r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$  характеризует градиент угловой скорости в фоновом потоке. Однако в отличие от диска в Ньютоновском потенциале, поток в потенциале Пачинского-Виита обладает разными  $q$  на различных радиусах. В выражении (127) используется значение  $q$  на внутреннем радиусе  $q_0 = q(r_0)$ .

Объединяя выражения (126) и (127) получаем окончательное выражение для  $\nu(r)$ :

$$\nu = \frac{q_0 \Sigma_1}{(2n+1)R} \frac{H^2(r)\Omega(r)}{\Sigma(r)} \quad (128)$$

Точный профиль второй вязкости нас не будет интересовать, поэтому профиль  $\nu_b$  получим из условия постоянного локального второго числа Рейнольдса  $R_b$  вдоль потока.

$$\nu_b = \frac{q_0 a_*^2}{\Omega R_b}. \quad (129)$$

Далее получим выражение для фоновой радиальной скорости  $v_r$  и профиля полутолщины диска  $H$ . Для этого мы воспользуемся проинтегрированными по  $z$  азимутальной компонентой уравнения Навье-Стокса и уравнения непрерывности.

$$\Sigma v_r \frac{d}{dr}(\Omega r) + \Sigma v_r \Omega = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (\Sigma \nu r^3 \Omega') \quad (130)$$

$$v_r = -\frac{\dot{M}}{2\pi \Sigma r}, \quad (131)$$

где  $\dot{M}$  постоянна вдоль диска.

Сперва проинтегрируем (130) по  $r$  с помощью соотношения (131) с учётом того, что  $r\varphi$ -компонента тензора напряжений обращается в ноль на внутренней границе диска.

$$\dot{M} \Omega r^2 D = -2\pi \Sigma \nu r^3 \Omega'. \quad (132)$$

В уравнении (132) введено обозначение  $D = 1 - (\Omega_0 r_0^2) / (\Omega r^2) = 1 - 1/(\Omega r^2)$ . Для Ньютоновского потенциала ( $r_g = 0$ )  $D = 1 - (1/r)^{1/2}$ , для произвольного  $r_g$ ,  $D = 1 - (r - r_g)/(1 - r_g)r^{-3/2}$ .

Затем, объединив выражения (131) и (132), получаем профиль радиальной скорости:

$$v_r = \frac{\nu \Omega'}{\Omega D}, \quad (133)$$

а объединив (126) с (132), получаем зависимость полутолщины от радиуса:

$$H \propto \left( -\frac{D}{r\Omega'} \right)^{1/2}$$

Отметим, что фоновая радиальная скорость, определяемая выражением (133), обращается в ноль на внутренней границе при обращении в ноль поверхностной плотности. Это приводит к сложностям при численном интегрировании системы линеаризованных уравнений, в которые радиальная скорость входит как коэффициент (см. выражения (142), (143) и (144)). Для решения этой проблемы значение  $v_r$  приходилось «обрезать» в нескольких узлах вблизи границы потока. Прямой численной проверкой было установлено, что количество узлов, в которых производилось «обрезка» не влияет на итоговый результат.

Полутолщину параметризуем через отношение  $\delta \equiv (H/r)|_{r=r_2}$ , где  $r_2$  – радиус, на котором  $H/r$  достигает максимума. Окончательное выражение для профиля полутолщины принимает вид:

$$H = \delta r_2 \left( \frac{r_2 \Omega'_2}{r \Omega'} \right)^{1/2} \left( \frac{D}{D_2} \right)^{1/2}, \quad (134)$$

где индекс «2» означает, что величина берётся в точке  $r_2$ .

Последней величиной, которая необходима для задания фонового стационарного потока, является поверхностная плотность. Для нахождения её профиля мы повторим вычисления, проведённые в работе [2], и предположим, что диссипации в диске локально уравниваются потоком излучения с поверхности диска:

$$Q = \frac{1}{2} \Sigma \nu r^2 (\Omega')^2. \quad (135)$$

С другой стороны, перенос излучения в вертикальном направлении связан с соотношением между экваториальной и поверхностной температурами,  $T_{eff}$  и  $T_{eq}$ :

$$T_{eq}^4 / T_{eff}^4 \propto \tau = H / l_{ph},$$

здесь, как и ранее, длина свободного пробега фотонов  $l_{ph} \propto \rho^{-1}$  для случая доминирования электронного рассеяния. Таким образом, при доминировании давления газа над давлением излучения получаем:

$$T_{eq}^4 \propto a_{eq}^8 \propto Q\Sigma. \quad (136)$$

Объединяя (128), (134), (135) и (136) получаем выражения для радиального профиля поверхностной плотности:

$$\Sigma = C_\Sigma \frac{D^3 \Omega^7}{r^5 (-\Omega')^5}, \quad (137)$$

где  $C_\Sigma$  – некоторая размерная константа. В силу линейности задачи точное значение этой константы не важно.

Уравнения (122), (123), (124), (128), (129), (133), (134) и (137) полностью определяют стационарный фоновый поток. Численными параметрами модели являются гравитационный радиус центрального тела  $r_g$ , характерная толщина диска  $\delta$ , число Рейнольдса  $R$  и второе число Рейнольдса  $R_b$ .

Везде далее мы будем использовать обозначения «P1» для случая  $r_g = 1/3$  и «N1» для случая  $r_g = 0$  с профилями величин, определёнными выше.

#### 4.2.2 Однородный поток

Введённый выше стационарный поток описывает тонкий ламинарный аккреционный диск с лишь только микроскопической вязкостью. Однако подобный поток является нереалистичным, поскольку микроскопическая вязкость в астрофизических дисках крайне мала, что приводит к очень большим временам релаксации, превышающим даже возраст Вселенной. По этой причине данные модели могут рассматриваться лишь как предельный случай, который мы будем сравнивать с другим предельным случаем – случаем радиально однородного диска.

Как и ранее, частоты и скорость звука будем определять выражениями (122), (123), (124). Поверхностную плотность в этой модели будем

считать постоянной вдоль радиуса.

$$\Sigma = const. \quad (138)$$

Кинематическую и вторую вязкость будем определять из условия постоянства локальных чисел Рейнольдса вдоль потока. Профиль кинематической вязкости, таким образом, определяется следующим выражением:

$$\nu = \frac{qa_*^2}{\Omega R}. \quad (139)$$

Профиль второй вязкости, как и ранее, определяется выражением (129).

Зависимость полутолщины от радиуса выберем линейной:

$$H = \delta r \quad (140)$$

Отметим, что при таком задании полутолщины локальное безразмерное азимутальное волновое число не зависит от радиуса (см. уравнение 190) ниже по тексту. Наконец, фоновую радиальную скорость считаем равной нулю:

$$v_r = 0. \quad (141)$$

Таким образом, уравнения (122), (123), (124), (139), (129), (138), (140) и (141) определяют однородный фоновый поток. Как для первой модели фона, однородная модель характеризуется четырьмя параметрами:  $\delta$ ,  $r_g$ ,  $R$  и  $R_b$ . Всюду далее поток, описываемый этими уравнениями с гравитационным радиусом  $r_g = 1/3$ , будет обозначаться «P2», а с  $r_g = 0$  – «N2».

### 4.3 Уравнения для линейных возмущений

Для вывода уравнений, описывающих динамику линейных возмущений, мы воспользуемся системой уравнений Навье-Стокса. Эту систему в цилиндрических координатах  $\{r, \varphi, z\}$  можно найти, например, в Appendix В книги [163]:

Как было сказано выше, в данной работе не учитывается генерация энтропии в диске за счёт вязких сил, что позволяет использовать политропное уравнение состояния как для фонового, так и для возмущённого потоков. Как и в предыдущей главе, мы предполагаем вертикальное гидростатическое равновесие возмущённого потока, что означает равенство нулю возмущения вертикальной скорости  $\delta v_z = 0$  и независимость от  $z$  прочих неизвестных.

Как и в главе 3, осевая симметрия фонового потока позволяет перейти от уравнений на Эйлеровы возмущения к уравнениям на фурье-амплитуды с помощью преобразования (77). В силу большого объёма выкладок приведём сразу конечный результат линеаризации проинтегрированной по вертикали системы уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial t} + im\Omega \hat{v}_r = 2\Omega \hat{v}_\varphi - \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} (v_r \hat{v}_r) + N_r + B_r \quad (142)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_\varphi}{\partial t} + im\Omega \hat{v}_\varphi = -\frac{\kappa^2}{2\Omega} \hat{v}_r - \frac{imW}{r} - \frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}_\varphi) + N_\varphi + B_\varphi \quad (143)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + im\Omega W = -\frac{a_*^2}{\Sigma r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \Sigma \left( \hat{v}_r + \frac{v_r W}{a_*^2} \right) \right] - \frac{ima_*^2}{r} \hat{v}_\varphi \quad (144)$$

В системе (142–144) мы отделили вязкие слагаемые, пропорциональные возмущению дивергенции скорости, и обозначили их  $B_{r,\varphi}$ . Прочие вязкие слагаемые обозначены как  $N_{r,\varphi}$ . Такое разделение обусловлено физически. На вихревые возмущения, т. е. на движения с нулевой дивергенцией, действуют только вязкие слагаемые  $N_{r,\varphi}$ , тогда как на звук действуют слагаемые  $B_{r,\varphi}$ . Помимо этого в системе (142–144) присутствуют слагаемые, пропорциональные фоновой радиальной скорости  $v_r$ . Нетрудно заметить, что в невязком случае  $v_r = 0$ ,  $N_{r,\varphi} = B_{r,\varphi} = 0$  система (142–144) становится эквивалентна невязкой системе (78–80).

При вычислении явного вида вязких слагаемых  $N_{r,\varphi}$  и  $B_{r,\varphi}$  мы предполагали, что возмущения динамической и второй вязкости равны нулю  $\delta\eta = \delta\zeta = 0$ , поскольку в противном случае в потоке возникла бы

неустойчивость, порождённая вариациями коэффициентов вязкости (см. [32]), рассмотрение которой выходит за рамки данного исследования.

В итоге получаем следующий вид вязких слагаемых:

$$N_r = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} \right) - \frac{\nu (m^2 - 1)}{r^2} \hat{v}_r + \frac{2}{\Sigma r} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} \frac{d}{dr} (\nu \Sigma r), \quad (145)$$

$$N_\varphi = -\frac{\nu r \Omega'}{\Sigma a_*^2} r^{-\frac{2n}{n+1}} \frac{d}{dr} \left( \Sigma r^{\frac{2n}{n+1}} \right) W + \frac{1}{\Sigma r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma r^3 \frac{\partial \hat{v}_\varphi}{\partial r} \frac{1}{r} \right) + \frac{im}{\Sigma r^3} \frac{d}{dr} (\nu \Sigma r^2) \hat{v}_r - \frac{\nu m^2}{r^2} \hat{v}_\varphi, \quad (146)$$

$$B_r = \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma \left( \nu_b + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} \right) - \frac{1}{\Sigma r^2} \frac{d}{dr} (\nu \Sigma r^2) \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}, \quad (147)$$

$$B_\varphi = \frac{im}{r} \left( \nu_b + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}. \quad (148)$$

Отметим, что в слагаемые  $B_{r,\varphi}$  входит и кинематическая, и вторая вязкость, тогда как в  $N_{r,\varphi}$  – только кинематическая.

#### 4.4 Сопряжённая система

Теперь получим систему уравнений, сопряжённую к (142–148). В этой главе мы будем рассматривать оптимизацию по норме, эквивалентной акустической энергии возмущения, порождённой скалярным произведением (86).

Техника получения сопряжённых уравнений полностью аналогична описанной в предыдущей главе, однако сопровождается значительно большим объёмом выкладок. По этой причине мы запишем вид этой системы без подробного вывода:

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} + im \Omega \tilde{v}_r = \frac{\kappa^2}{2\Omega} \tilde{v}_\varphi - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} - \frac{v_r}{\Sigma r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma r \tilde{v}_r) + \tilde{N}_r + \tilde{B}_r \quad (149)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} + im \Omega \tilde{v}_\varphi = -2\Omega \tilde{v}_r - \frac{im \tilde{W}}{r} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (v_r \Sigma \tilde{v}_\varphi) + \tilde{N}_\varphi + \tilde{B}_\varphi \quad (150)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} + im\Omega \tilde{W} = -\frac{a_*^2}{r\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} (r\Sigma \tilde{v}_r) - \frac{ima_*^2}{r} \tilde{v}_\varphi - v_r \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + \tilde{N}_h \quad (151)$$

$$\tilde{N}_r = -\frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) + \frac{\nu(m^2 - 1)}{r^2} \tilde{v}_r - \frac{2}{\Sigma r} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \frac{d}{dr} (\nu \Sigma r) \quad (152)$$

$$\tilde{N}_\varphi = -\frac{1}{\Sigma r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma r^3 \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial r} \frac{1}{r} \right) - \frac{im}{\Sigma r^3} \frac{d}{dr} (\nu \Sigma r^2) \tilde{v}_r + \frac{\nu m^2}{r^2} \tilde{v}_\varphi \quad (153)$$

$$\tilde{N}_h = \frac{\nu r \Omega'}{\Sigma} r^{-\frac{2n}{n+1}} \frac{d}{dr} \left( \Sigma r^{\frac{2n}{n+1}} \right) \tilde{v}_\varphi \quad (154)$$

$$\tilde{B}_r = -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma \left( \nu_b + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \right) + \frac{1}{\Sigma r^2} \frac{d}{dr} (\nu \Sigma r^2) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \quad (155)$$

$$\tilde{B}_\varphi = -\frac{im}{r} \left( \nu_b + \frac{\nu}{3} \right) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} \quad (156)$$

Следует отметить, что подстановки, возникающие при интегрировании по частям, в выводе сопряжённой системы не обращаются в ноль автоматически, как это имело место для невязкой системы. В данном случае их равенство нулю будет использоваться в следующем параграфе для получения граничных условий для системы (149–156).

Также обратим внимание на то, что знаки вязких слагаемых в уравнениях (145), (146), (147) и (148) противоположны знакам в уравнениях (152), (153), (155) и (156). На первый взгляд может показаться, что отрицательные эффективные коэффициенты вязкости сделают невозможным интегрирование сопряжённой системы, однако благодаря тому, что эта система интегрируется назад во времени, именно отрицательные коэффициенты и позволяют провести интегрирование.



## 4.5 Граничные условия

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос граничных условий, необходимых для интегрирования прямой и сопряжённой систем. Поскольку мы рассматриваем только диски бесконечного радиального размера, нам необходимо только условие на внутреннем краю диска.

### 4.5.1 Модели N1 и P1

Перед тем как приступить к выводу собственно граничных условий, необходимо записать систему уравнений для векторов смещения  $\xi$ . Эта система может быть без труда получена с помощью общего соотношения между смещением и лагранжевым возмущением скорости (см. уравнение 16 в [170]):

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial t} + im\Omega \xi_r = \hat{v}_r + \frac{\partial}{\partial r} (v_r \xi_r) \quad (157)$$

$$\frac{\partial \xi_\varphi}{\partial t} + im\Omega \xi_\varphi = \hat{v}_\varphi + r\Omega' \xi_r + rv_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\xi_\varphi}{r} \right) \quad (158)$$

В уравнениях на вектора смещения мы сразу осуществили переход к фурье-амплитудам.

Поскольку  $v_r$  стремится к бесконечности при  $r \rightarrow 1$  (см. уравнение (131)), для регулярности решения на границе необходимо обращение в ноль на границе компонент вектора смещения  $\xi_r$  и  $\xi_\varphi$ . Это означает, что граница остаётся невозмущённой, а поскольку  $v_r \propto D^{-3}$  вблизи границы, то компоненты вектора смещения должны иметь как минимум следующую зависимость от  $D$  вблизи  $r = 1$ :

$$\xi_r \propto D^3, \quad (159)$$

$$\xi_\varphi \propto D^4 \quad (160)$$

Граничное условие для прямой системы (142)–(148) получим из обращения в ноль лагранжевой вариации силы, действующей на внутреннюю границу диска. Связь силы с тензором напряжений можно найти, например, в [182, §15].

Поскольку  $\xi_r = 0$ , лагранжево возмущение нормали к поверхности равно нулю. Таким образом, граничное условие превращается в два независимых условия на лагранжево возмущение двух компонент тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ :

$$\Delta\sigma_{rr} = 0, \quad (161)$$

$$\Delta\sigma_{r\varphi} = 0. \quad (162)$$

Проинтегрировав уравнение (162) по  $z$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma\nu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\hat{v}_\varphi}{r} \right) + \frac{im}{r} \hat{v}_r \right] + \xi_r \frac{d}{dr} (\Sigma\nu r \Omega') - \\ - 2\xi_r \frac{dH}{dr} \nu r \Omega' \rho \Big|_{z=H} = 0 \end{aligned} \quad (163)$$

В равенстве (163) все величины берутся на внутренней поверхности диска. Однако учёт выражения (132) и ограничений на вектор смещения (159) (160) позволяет установить, что уравнение (163) выполняется для любых  $\hat{v}_r$  и  $\hat{v}_\varphi$ . Таким образом, условие (163) не позволяет получить никакой информации о граничном условии.

При этом уравнение (161) приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned} 2\rho\nu \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} + \rho \left( \nu_b - \frac{2}{3}\nu \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{v}_r) + \frac{im}{r} \hat{v}_\varphi \right) - \\ - 2\rho\nu \Omega' \xi_\varphi - \hat{p} - \frac{\partial p}{\partial r} \xi_r = 0 \end{aligned} \quad (164)$$

Выше под  $\hat{p}$  понимается фурье-амплитуда возмущения давления. В уравнении (164) все величины также берутся на внешней границе диска. Уравнение (164) позволяет сформулировать достаточные требования на  $\delta v_r$  и  $\delta v_\varphi$  на границе диска, если его дополнить условием регулярности возмущения энтальпии  $W = \hat{p}/\rho$  на границе. После преобразования уравнение (164) принимает вид:

$$\begin{aligned} W = \frac{\hat{p}}{\rho} = \left( \nu_b + \frac{4}{3}\nu \right) \left( \frac{\nu_b - \frac{2}{3}\nu}{\nu_b + \frac{4}{3}\nu} \frac{\hat{v}_r}{r} + \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} \right) + \\ + \left( \nu_b - \frac{2}{3}\nu \right) \frac{im}{r} \hat{v}_\varphi - 2\nu \Omega' \xi_\varphi - \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\xi_r}{\rho}. \end{aligned} \quad (165)$$

Два последних слагаемых обращаются в ноль в силу ограничений (159), (160). Поскольку  $\nu$  обращается в бесконечность при  $r \rightarrow 1$ , для регулярности  $W$  в точке  $r = 1$  достаточно выполнения следующих равенств:

$$-\frac{1}{2} \frac{\hat{v}_r}{r} + \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} = 0, \quad (166)$$

$$\hat{v}_\varphi = 0. \quad (167)$$

В параграфе 4.4 мы упоминали, что граничными условиями для сопряжённой системы являются условия, независимо обращающие в ноль подстановки, возникающие при интегрировании по частям в ходе вывода сопряжённых уравнений. Это приводит к следующей системе сопряжённых граничных условий:

$$\tilde{v}_r = 0 \quad (168)$$

$$\tilde{v}_\varphi = 0 \quad (169)$$

$$\tilde{W} = 0 \quad (170)$$

#### 4.5.2 Модели N2 и P2

Для этих моделей мы будем использовать условие прилипания жидкости на границе:

$$\hat{v}_r = 0, \quad (171)$$

$$\hat{v}_\varphi = 0. \quad (172)$$

Сопряжённые граничные условия получаются тем же способом, что и в моделях N1 и P1:

$$\tilde{v}_r = 0, \quad (173)$$

$$\tilde{v}_\varphi = 0 \quad (174)$$

Отметим, что в этом случае в сопряжённое граничное условие не входит уравнение на  $W$ . Это связано с отсутствием слагаемых, в которые входила бы фоновая радиальная скорость. Как мы увидим в следующем параграфе, различное число граничных условий нисколько не усложняет численную реализацию интегрирования описываемых систем уравнений.

## 4.6 Численный метод

Для численного интегрирования систем уравнений (142)–(148) и (149)–(156), как и для интегрирования невязких систем, использовался метод лягушка (leap-frog). Расположение величин на сетках также аналогично невязкой задаче (см. рис. 9 в главе 3).

Однако в вязком случае реализация разностной схемы значительно усложнена. Первой причиной усложнения являются слагаемые, пропорциональные фоновой радиальной скорости. Если в этих слагаемых, как и во всей прочей схеме, аппроксимировать пространственные производные центральными разностями, численная схема окажется неустойчивой при любых шагах по времени и пространству (о типах конечных разностей см., например, [172]). Полный анализ устойчивости разностной схемы для систем (142)–(148) и (149)–(156) является крайне сложной задачей ввиду большого числа слагаемых. По этой причине мы сначала исследуем вопрос устойчивости для более простого уравнения, а затем перенесём результат на интересующие нас системы.

Итак, рассмотрим вопрос численной устойчивости следующего модельного уравнения:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -A(x) \frac{\partial}{\partial x} (B(x) f(x, t)) \quad (175)$$

, при этом коэффициент  $A(x)$  положителен, а коэффициент  $B(x)$  отрицателен и монотонно растёт с ростом  $x$ . Такой вид модельного уравнения выбран для соответствия слагаемым пропорциональных фоновой радиальной скорости.

Для исследования численной устойчивости модельного уравнения воспользуемся методом Фон-Неймана [183]. Суть метода состоит в на-

ложении высокочастотного шума в качестве начального условия, некоторой амплитуды. Разностная схема считается абсолютно устойчивой, если на следующем шаге работы схемы амплитуда высокочастотного шума не увеличивается вне зависимости от шагов по переменным  $x$  и  $t$ , условно устойчивой, если амплитуда шума не возрастает хотя бы при некоторых значениях шагов, и неустойчивой, если амплитуда шума растёт при любых шагах дискретизации.

Сначала запишем разностную схему для интегрирования уравнения (175) с помощью аппроксимации производной по переменной  $x$  с помощью центральной разности:

$$f_i^{t+\Delta t} = f_i^t - \frac{A_i \Delta t}{2\Delta x} (B_{i+1} f_{i+1}^t - B_{i-1} f_{i-1}^t), \quad (176)$$

здесь верхним индексом мы обозначили значение переменной  $t$ , а нижней – номер узла по переменной  $x$ .

Теперь на слое  $t$  накладываем начальное условие в виде шума высокой частоты с амплитудой  $\epsilon > 0$ :

$$f_i^t = (-1)^i \epsilon \quad (177)$$

На следующем временном слое  $t + \Delta t$  значения  $f$  в узлах равны:

$$f_i^{t+\Delta t} = (-1)^i \epsilon \left[ 1 - \frac{A_i \Delta t}{2\Delta x} (B_{i-1} - B_{i+1}) \right] \quad (178)$$

В силу условия на коэффициент  $B(x)$ ,  $B_{i-1} - B_{i+1} < 0$ , и, как следствие, модуль  $|f_i^{t+\Delta t}| > \epsilon$  при любом значении шага по переменной  $t$ , а значит, численная схема, построенная на центральных разностях, является неустойчивой.

Иная ситуация складывается, если вместо центральных разностей использовать направленные. Запишем разностную схему для интегрирования модельного уравнения с помощью правой разности:

$$f_i^{t+\Delta t} = f_i^t - \frac{A_i \Delta t}{\Delta x} (B_{i+1} f_{i+1}^t - B_i f_i^t) \quad (179)$$

При аналогичном начальном условии получаем:

$$f_i^{t+\Delta t} = (-1)^i \epsilon \left[ 1 + \frac{A_i \Delta t}{\Delta x} (B_{i+1} + B_i) \right] \quad (180)$$

Не трудно заметить, что теперь модуль  $|f_i^{t+\Delta t}| < \epsilon$  при выполнении следующего неравенства:

$$0 < \Delta t < \frac{-2\Delta x}{A_i(B_i + B_{i+1})} \quad (181)$$

Отметим, что дробь в правой части положительна в силу отрицательности коэффициента  $B$ . Если условие (181) выполняется во всей области интегрирования, то численная схема является численно устойчивой.

Таким образом, несмотря на то, что аппроксимация производной центральными разностями является более точной, чем направленными разностями, только схема, построенная на направленных разностях, является численно устойчивой. Чтобы разобраться в причинах этого явления, перегруппируем слагаемые в уравнении (176) следующим образом:

$$f_i^{t+\Delta t} = f_i^t - \frac{A_i \Delta t}{2\Delta x} (B_{i+1} f_{i+1}^t - B_{i-1} f_{i-1}^t) - \frac{A_i \Delta t}{\Delta x} (B_{i+1} f_{i+1}^t + B_{i-1} f_{i-1}^t - 2B_i f_i^t) \quad (182)$$

Не трудно заметить, что это выражение эквивалентно разностному выражению, полученному с помощью центральных разностей (176) с некоторой добавкой. Эта добавка эквивалентна добавлению в уравнение вязкости, т. е. эффективно решается следующее уравнение:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -A(x) \frac{\partial}{\partial x} (B(x) f(x, t)) - \frac{A(x) \Delta x}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B(x) f(x)) \quad (183)$$

Причём коэффициент вязкости пропорционален шагу по  $x$ . Именно благодаря возникновению эффективной вязкости численная схема, построенная на направленных разностях, является устойчивой.

Отметим, что для интегрирования сопряжённых уравнений при аппроксимации слагаемых с фоновой радиальной скоростью необходимо использовать левые разности вместо правых из-за изменения направления

интегрирования. По этой причине граничное условие на величину  $W$  необходимо только для сопряжённой системы и используется лишь для моделей фонового потока N2 и P2.

Полученного условия, однако, не достаточно для обеспечения численной устойчивости разностной схемы, полученной для полных систем прямых и сопряжённых уравнений. Другим видом слагаемых, которые могут привести к численной неустойчивости, являются слагаемые, пропорциональные второй производной в координате. Условие численной устойчивости схемы с такими слагаемыми мы также приведём на примере модельного уравнения:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[ B(x) \frac{\partial}{\partial x} (C(x) f(x, t)) \right] \quad (184)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  будем считать положительными во всей области интегрирования.

Как в предыдущем примере, построим разностную схему для интегрирования этого уравнения с помощью центральной аппроксимации производных по  $x$ :

$$f_i^{t+\Delta t} = f_i^t + \frac{A_i \Delta t}{\Delta x^2} [B_{i+1/2} (C_{i+1} f_{i+1}^t - C_i f_i^t) - B_{i-1/2} (C_i f_i^t - C_{i-1} f_{i-1}^t)] \quad (185)$$

Теперь применим критерий фон-Неймана, наложив в качестве начального условия высокочастотный шум  $f_i^t = (-1)^i \epsilon$ . На слое  $t + \Delta t$  значения  $f$  в узлах будут равны:

$$f_i^{t+\Delta t} = (-1)^i \epsilon \left[ 1 - \frac{A_i \Delta t}{\Delta x^2} (B_{i+1/2} (C_{i+1} + C_i) + B_{i-1/2} (C_i + C_{i-1})) \right] \quad (186)$$

Модуль  $|f_i^{t+\Delta t}| < \epsilon$  при выполнении условия:

$$\Delta t < \frac{2\Delta x^2}{A_i [B_{i+1/2} (C_{i+1} + C_i) + B_{i-1/2} (C_i + C_{i-1})]} \quad (187)$$

Выполнение этого условия обеспечивает численную устойчивость модельного уравнения.

Для численной устойчивости полной системы уравнений необходимо одновременное выполнение условия (181) для всех слагаемых, содержащих  $v_r$ , и условия (187) для всех слагаемых, содержащих вторую производную по  $r$ . На практике это реализуется выбором максимального  $\Delta t$ , которое обеспечивает выполнение всех указанных условий.

## 4.7 Результаты

В этом параграфе представлены результаты вычисления оптимального роста возмущений для моделей, описанных выше. В отличие от предыдущей главы в качестве меры роста энергии будет рассматриваться только акустическая энергия возмущения.

$$G(t) \equiv \max \frac{E_{ak}(t)}{E_{ak}(0)}, \quad (188)$$

где  $E_{ak}$  определяется уравнением (87).

В силу наличия молекулярной вязкости разумно ожидать затухания всех возмущений к некоторому достаточно большому промежутку времени. Т. е. кривая  $G(T)$ , в отличие от невязкого случая, будет иметь максимум (см. также [124], [120] и [108]). В локальном пределе это было подтверждено с помощью вариационного метода в работе [175]. Этот максимум мы будем обозначать как

$$G_{max} \equiv \max_{\forall t} G(t). \quad (189)$$

При этом  $G_{max}$  зависит от параметров диска, таких как  $\delta$ ,  $R$  и  $R_b$ , а также от азимутального числа  $m$ .

Основные результаты будут представлены для азимутального числа  $m = 1$  и индекса политропы  $n = 3/2$ . Число Рейнольдса будем брать равным  $R = 2000$ . Несмотря на то, что это значение значительно меньше характерных для астрофизических дисков  $R \sim 10^{10}$ , такой выбор позволяет напрямую сравнивать результаты с предшествующими работами, в частности с [124]. Кроме того, уменьшение числа Рейнольдса приводит к значительному уменьшению времени, на котором достигается значение



$G_{max}$ , при этом зависимость самого  $G_{max}$  от числа Рейнольдса была получена аналитически в локальном приближении в работе [120] (см. также [175]):  $G_{max} \sim R^{2/3}$ . Прямой численной проверкой было установлено, что эта зависимость выполняется и в рассматриваемом случае вплоть до чисел Рейнольдса в несколько десятков тысяч.

Целью этого исследования является оптимальный рост вихревых возмущений, поэтому для исключения из рассмотрения звуковых волн (подробнее см. в [175]) мы будем использовать крайне большое значение второй вязкости (и, соответственно, малые вторые числа Рейнольдса)  $R_b = 0.001R$ .

Для сравнения с локальными результатами, а также для упрощения интерпретации результатов, введём следующие функции:

$$\bar{k}_y = \frac{mH}{(2n+1)^{1/2} r} \quad (190)$$

$$\bar{R} = \frac{qa_*^2}{\Omega\nu}. \quad (191)$$

Физический смысл этих функций достаточно ясен. Рассмотрим малую область диска, находящуюся в окрестностях точки с радиальной координатой  $r$ . Динамику возмущений в этой области можно рассматривать с помощью локального приближения, что и было сделано в работе [175]. При этом азимутальное волновое число возмущений на радиусе  $r$  будет равно  $\bar{k}_y$ , а число Рейнольдса –  $\bar{R}$ .

В общем случае  $\bar{k}_y$  и  $\bar{R}$  являются функциями радиуса, однако модели N2 и P2 введены таким образом, чтобы эти величины не зависели от радиуса.

#### 4.7.1 Оптимальный рост в Ньютоновском потенциале

В этом параграфе мы рассмотрим оптимальный рост глобальных двумерных возмущений в Ньютоновском потенциале. Зависимость оптимального роста  $G$  от времени оптимизации для модели N2 показана на левой верхней панели рисунка 21.

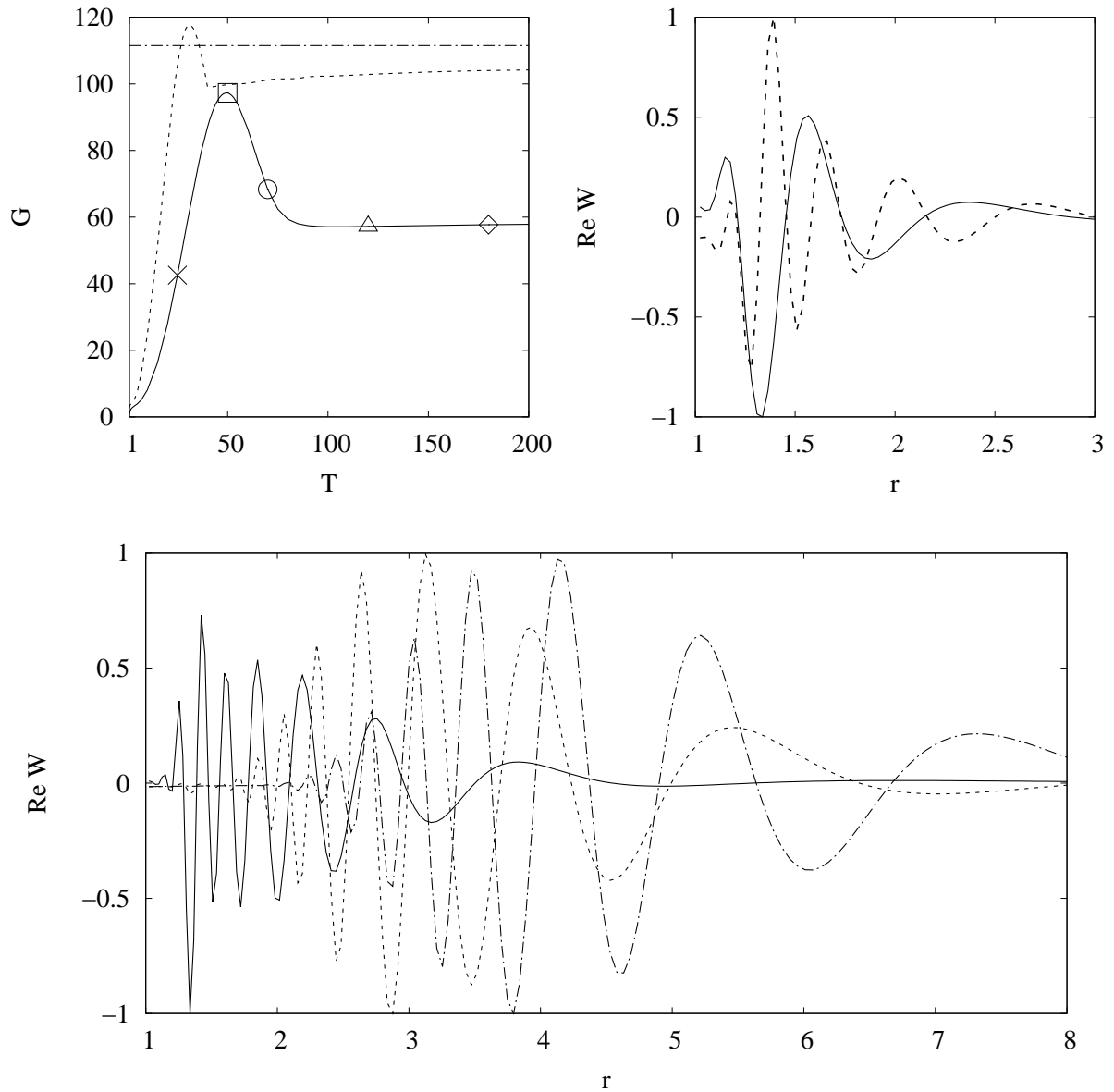


Рис. 21: Оптимальный транзиентный рост возмущений для модели N2. На левой верхней панели сплошной кривой показан оптимальный рост для возмущений с азимутальным числом  $m = 1$ ,  $\delta = 0.4$ , пунктирной —  $m = 10$ ,  $\delta = 0.04$  (отметим, что параметр  $k_y$  для сплошной и пунктирной кривой совпадает), штрихпунктирной кривой показана аналитическая реконструкция с помощью локального приближения. На правой верхней и на нижней панелях показаны радиальные профили вещественной части возмущения энтальпии  $\text{Re } W$ , соответствующие оптимальному начальному возмущению единичной амплитуды с  $m = 1$ . Сплошная и пунктирная линии соответствуют временам оптимизации, обозначенным соответственно крестом и квадратом на верхней левой панели. Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная линии на нижней панели соответствуют временам оптимизации, обозначенным соответственно кругом, треугольником и ромбом на верхней левой панели. Для всех кривых  $n = 1.5$ ,  $R = 2000$  and  $R_b = 0.001R$ .

В первую очередь отметим, что оптимальный рост для  $m = 1$  действительно имеет максимум для некоторого времени оптимизации, подобно локальному пределу, рассмотренному в [175] (напомним, что локальный предел эквивалентен рассмотрению пространственно ограниченной глобальной задачи с  $m \rightarrow \infty$ ). Однако, вопреки ожиданиям, при больших временах оптимизации оптимальный рост перестаёт зависеть от времени и становится равен отличной от нуля константе.

Для объяснения этого феномена на том же рисунке отложены положения профилей оптимальных возмущений в начальный момент времени, нормированных на единичную амплитуду для различных времён оптимизации. Для малых времён оптимизации  $T$  оптимальное возмущение представляет собой закрученную спираль вблизи границы потока. Увеличение  $T$  приводит к более тугой закрутке спирали и, как следствие, большему значению оптимального роста. Однако, начиная с некоторой начальной длины волны, из-за влияния вязкости дальнейшая закрутка уже не приводит к увеличению  $G$  и оптимальное возмущение начинает смещаться вправо с сохранением числа узлов. В работе [175], в которой был рассмотрен локальный предел данной задачи, все времена выражаются в единицах обратной кеплеровской частоты на выбранном радиусе. В глобальной же постановке кеплеровская частота является функцией радиуса, а значит, динамическая шкала времени будет различной на разных расстояниях от центра потока. Таким образом, удаление от края диска можно описать как переход возмущения локальную область с более медленным течением времени (и, вообще говоря, другими значениями азимутального волнового числа и числа Рейнольдса), а поскольку мы рассматриваем радиально бесконечный диск, то для оптимального возмущения всегда найдётся область с ещё более медленным течением времени, куда оно сместится при увеличении времени оптимизации в шкале внутреннего радиуса диска.

При этом максимум  $G(T)$ , наблюдающийся на верхней левой панели рисунка 21 для возмущений с  $m = 1$ , является исключительно глобальным эффектом. Для подтверждения этого на той же панели отложена кривая  $G(T)$  для возмущений с  $m = 10$ . На этой кривой разница меж-

ду значением  $G_{max}$  и значением  $G$  для больших времён оптимизации уже значительно меньше, чем аналогичное различие для возмущений с  $m = 1$ .

Наконец, рассмотрение пространственно глобального диска как совокупности локальных областей позволяет получить приближённую аналитическую оценку оптимального роста линейных возмущений в случае  $m \rightarrow \infty$ . Для этого мы воспользуемся формулами для максимального транзиентного роста  $G_{max}$  и соответствующего ему времени оптимизации  $T_{max}$ , полученными для пространственно локальной задачи в работе [175]. В наших обозначениях эти формулы принимают следующий вид:

$$G_{max} \approx \frac{1}{(2-q)^2} (\bar{k}_y \bar{R})^{2/3} e^{-2/3} \quad (192)$$

$$T_{max} \approx \frac{\bar{R}^{1/3}}{q \bar{k}_y^{2/3} \Omega(r)} \quad (193)$$

В последней формуле мы также произвели перенормирование времени на локальное значение обратной кеплеровской частоты.

Теперь, задавая координату  $r$  по формуле (193), можно определить, в какой момент времени возмущение, находящееся на этом радиусе, будет оптимальным для всего диска, а по формуле (192) – какова будет величина оптимального роста. Зависимость  $G(T)$ , построенная по этим формулам, изображена штрихпунктирной кривой на левой верхней панели рисунка 21. Поскольку для модели N2 величины  $\bar{k}_y$ ,  $\bar{R}$  и  $q$  являются константами,  $G(T)$  не зависит от времени оптимизации.

Местоположение оптимальных профилей на верхней правой и нижней панелях рисунка 21 также хорошо согласуется с описанной выше моделью. Для вычисления местоположения  $r_{sp}$  оптимального возмущения, соответствующего заданному моменту оптимизации  $T$ , достаточно решить уравнение:

$$T_{max}(\bar{R}(r_{sp}), \bar{k}_y(r_{sp}), q(r_{sp})) \Omega^{-1}(r_{sp}) \approx T. \quad (194)$$

Для времён, соответствующих  $T = 120$  и  $T = 180$  (треугольник и ромб на левой верхней панели рисунка 21), значения  $r_{sp}$  равны  $r_{sp} \approx 3$  и

$r_{sp} \approx 4$  соответственно. Что находится в хорошем согласии с положениями соответствующих оптимальных возмущений на нижней панели рисунка 21.

Другой эффект, который проявляется исключительно в глобальных расчётах, – это модальный рост возмущений с азимутальным числом  $m \sim 1$  в дисках с достаточно малым  $\delta \lesssim 0.05$ . На рисунке 22 показаны зависимость оптимального роста  $G(T)$  от времени оптимизации и соответствующие радиальные профили возмущений в начальный момент времени для  $\delta = 0.02$  и модели N2. В отличие от предыдущего случая, диск является неустойчивым по отношению к линейным возмущениям, на что указывает экспоненциальный рост  $G(T)$  на больших временах. Т. е. оптимальный рост определяется максимальным фактором роста наиболее неустойчивой моды. Амплитуда самой неустойчивой моды для параметров рисунка 22 растёт экспоненциально  $\propto \exp(\gamma t)$ , с инкрементом  $\gamma \approx 0.001$ .

При этом на малых временах оптимальный рост  $G$  определяется величиной транзитного роста, т. е. величина транзитного роста превышает величину модального роста. Убедиться в этом можно, сравнив профили оптимальных возмущений для различных времён оптимизации. На малых временах оптимальным возмущением являются лидирующие спирали (см. верхнюю правую панель рисунка 22). Кроме того, можно проследить эволюцию индивидуального оптимального возмущения до больших времён. В случае модального роста увеличение энергии оптимального возмущения не ограничено во времени, тогда как энергия транзитно растущего возмущения начинает уменьшаться, начиная с некоторого момента времени.

При больших временах оптимизации (см. нижнюю панель рисунка 22) начальное оптимальное возмущение уже не имеет ничего общего со сдвиговой спиралью и практически не зависит от времени оптимизации. Эти оптимальные возмущения вращаются твердотельно с угловой частотой  $\omega_m \approx 0.98$ , что говорит о том, что область коротации находится внутри потока. Детальное выяснение природы данной неустойчивости выходит за пределы настоящего исследования, но, по всей видимости, это про-

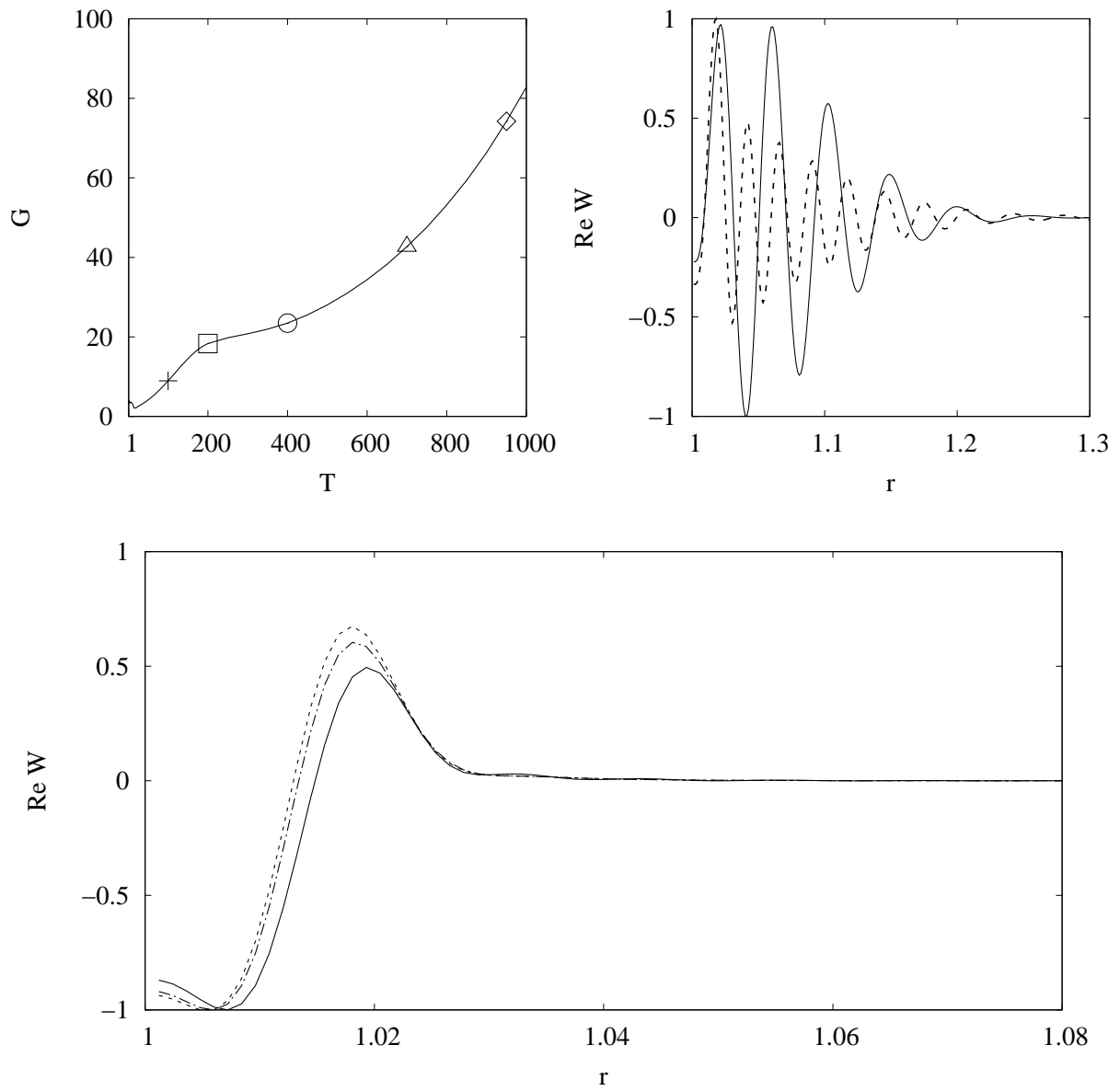


Рис. 22: То же, что и на рисунке 21, но для  $\delta = 0.02$ . Профили на верхней правой и нижней панелях соответствуют временам оптимизации, обозначенным символами на верхней левой панели таким же образом, как это было сделано на рисунке 21.

явление хорошо известной неустойчивости Папалойзу и Прингла (см. [15]). Эта неустойчивость была детально исследована для двумерных полубесконечных потоков в работах [21] и [25].

Опираясь на результаты вышеупомянутых работ, можно сделать предположения, что проявившаяся неустойчивость представляет собой глобальную не осесимметричную звуковую моду, возникающую из-за наличия у потока левой границы и отбирающую энергию у фонового потока в критическом слое, находящемся вблизи радиуса коротации. Механизм работы данной неустойчивости называется механизмом Ландау (см. книгу [23] для более полной информации). Наше предположение подтверждается тем, что инкремент неустойчивости быстро падает при переходе к возмущениям с азимутальным числом  $m > 1$ , поскольку обмен энергией между фоновым потоком и возмущениями возможен лишь при наличии ненулевого градиента завихрённости, который более эффективно воздействует на крупномасштабные возмущения.

Теперь мы приведём результаты расчёта оптимального роста возмущений в модели N1 для тех же параметров, для которых был рассчитан рисунок 23. Зависимость оптимального роста  $G$  от времени оптимизации значительно отличается от полученной в модели N2. Плато, возникающее в модели N2 на достаточно больших временах, исчезло. Теперь имеет место максимум  $G(T)$  с уменьшением  $G$  до нуля на больших временах как для возмущений с  $m = 1$ , так и для возмущений с  $m = 10$ . Тем не менее после прохождения максимума  $G$  форма кривой не похожа на колоколообразные кривые, которые имели место в предыдущих исследованиях (см., например, [124]). Как и в модели N2 имеет место сложная зависимость оптимального возмущения от времени оптимизации. При росте  $T$  меняется как степень закрутки спирали, так и её положение на оси  $r$ . По кривым на нижней панели рисунка 23 видно, что с ростом времени оптимизации оптимальное возмущение смещается вправо, а степень закрутки уменьшается. Уменьшение степени закрутки связано с тем, что, в отличие от модели N2,  $\bar{R}$  уменьшается к периферии диска, начиная с некоторого радиуса. Как следствие, уменьшается и значение локального  $T_{max}$ , выраженного в единицах  $\Omega^{-1}(r)$ . В свою очередь, уменьшение ло-

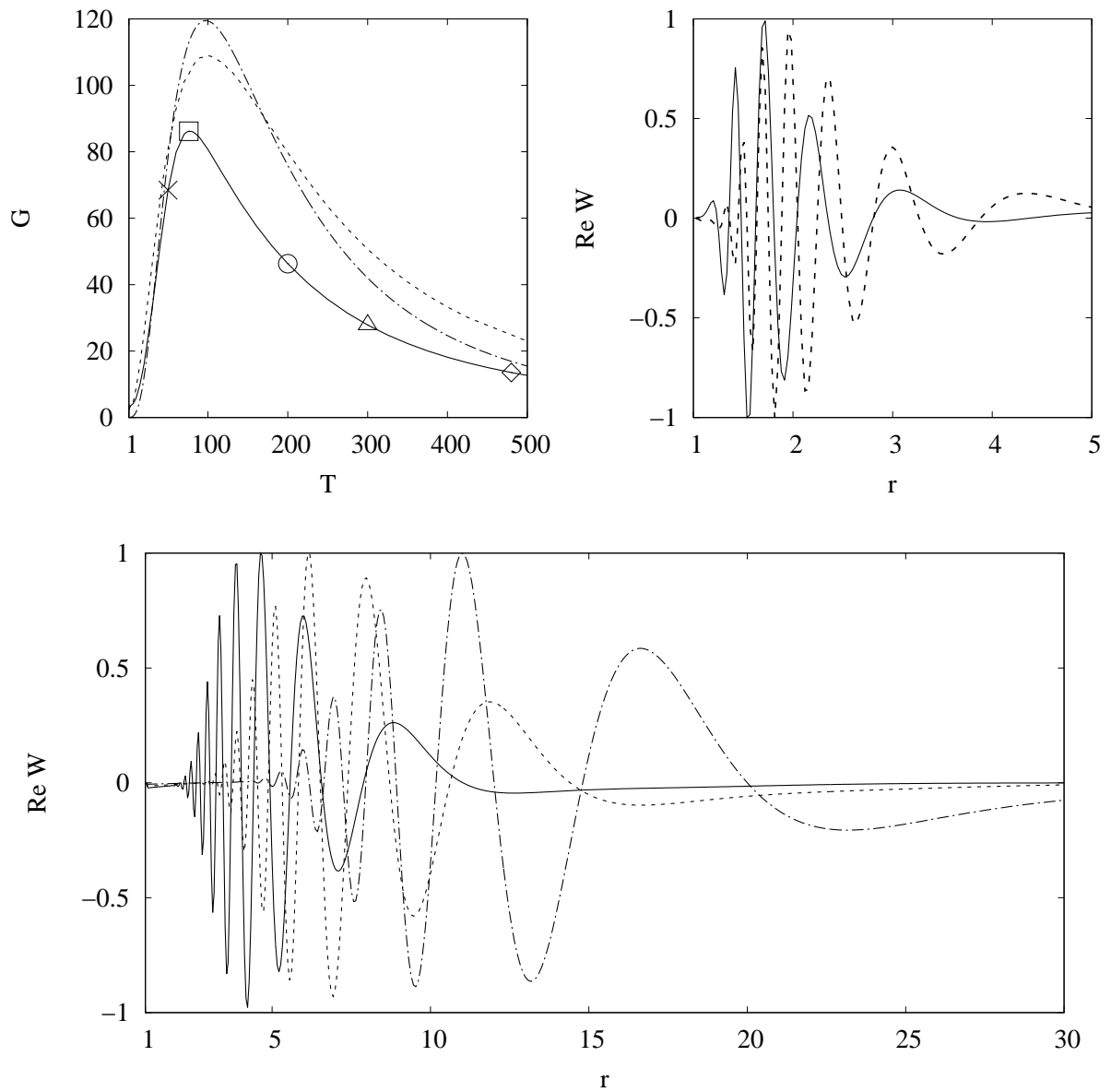


Рис. 23: То же, что и на рисунке 21, но для модели N1. Профили на верхней правой и нижней панелях соответствуют временам оптимизации, обозначенным символами на верхней левой панели таким же образом, как это было сделано на рисунке 21. Штрихпунктирная линия на верхней левой панели получена обобщением локальной модели с помощью соотношений (193) и (192).



кального  $T_{max}$  приводит к меньшей закрученности лидирующей спирали в начальный момент времени.

Процедура получения приближённой аналитической зависимости  $G(T)$  с помощью локальных соотношений (192) и (193) аналогична описанной для модели N2, за исключением того факта, что в модели N1  $\bar{k}_y$  и  $\bar{R}$  являются функциями радиуса. Как и в модели N2, эта оценка описывает оптимальный рост возмущений с  $m \rightarrow \infty$  в бесконечном диске. Полученная зависимость отложена штрихпунктирной линией на верхней левой панели рисунка 23. Простая аналитическая оценка оказывается в хорошем согласии с точными численными расчётами, причём отличия уменьшаются с переходом от возмущений с  $m = 1$  к возмущениям с  $m = 10$ . Как и для модели N2, положение оптимального возмущения даже для случая  $m = 1$  хорошо согласуется с оценкой по локальным соотношениям с помощью равенства (194). Так, для штриховой и штрихпунктирной линий с нижней панели рисунка 23 оценка даёт значения  $r_{sp} \approx 7$  и  $r_{sp} \approx 12$  соответственно.

В модели N1 возмущения с  $m = 1$  не демонстрируют модалного роста во всём диапазоне  $\delta$ . Это связано с тем, что критический слой находится вблизи внутреннего края диска, где рост подавляется большим значением вязкости, поскольку в модели N1  $\bar{R} \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow r_i$ .

Для обобщения результатов вычислений, полученных для потока в Ньютоновском потенциале, мы проведём сравнение зависимости  $G_{max}(k_y)$ , полученной в локальном приближении в работе [175] с глобальным расчётом, см. рисунок 24. В случае глобальных возмущений мы определим  $G_{max}$  как высоту максимума кривой  $G(T)$ . Как видно из рисунка 24, как глобальные, так и локальные крупномасштабные возмущения с  $k_y < 1$  демонстрируют примерно одно и то же значение оптимального роста. Кроме того, в модели N2 величина транзитного роста возмущений с  $m = 1$  может превосходить значения оптимального роста локальных возмущений для  $k_y \lesssim 0.1$ . В то же самое время при больших значениях  $k_y$  (что соответствует более геометрически толстому диску при фиксированном азимутальном числе  $m = 1$ ) в модели N2 оптимальный рост возмущений оказывается меньше, чем в локальном расчёте.

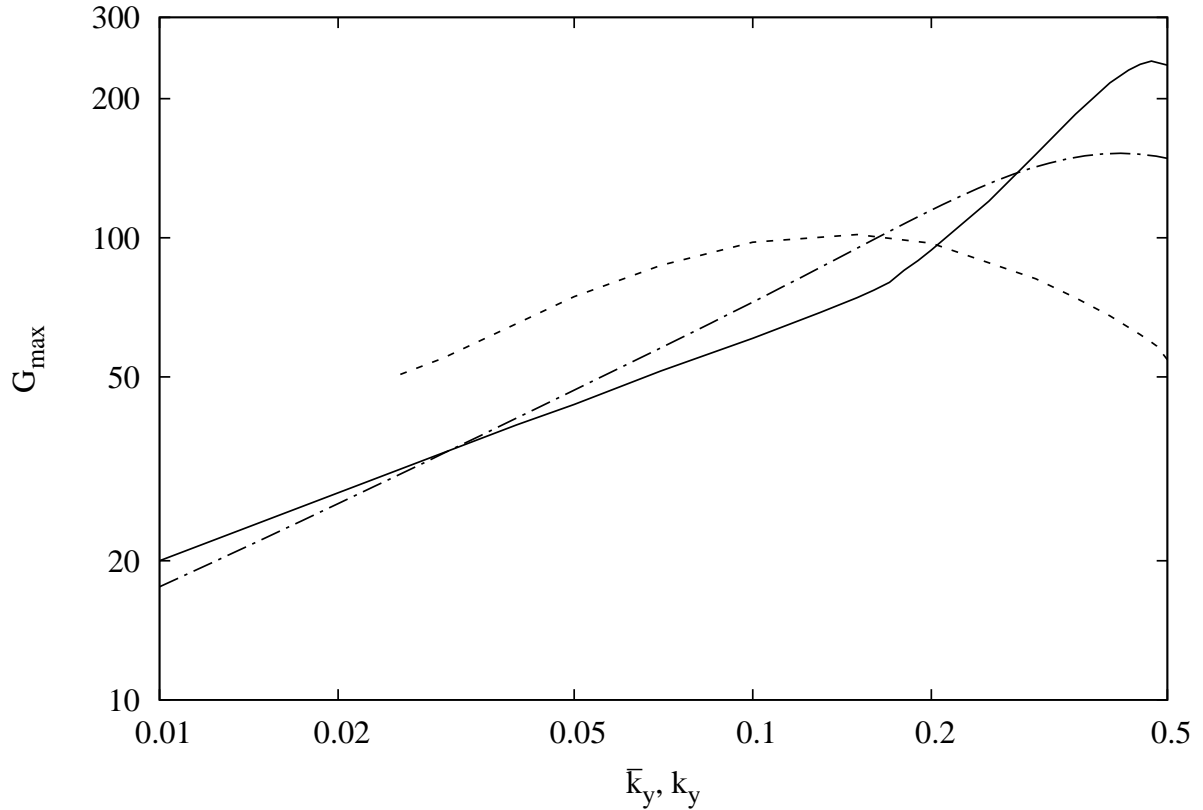


Рис. 24: Зависимость  $G_{\max}$  от  $k_y \equiv m\delta/(2n+1)^{1/2}$  для  $n = 1.5$ ,  $m = 1$ ,  $R = 2000$  and  $R_b = 0.001R$ . Сплошная и штриховая кривые соответствуют моделям N1 и N2, а штрихпунктирная – зависимости  $G_{\max}(k_y)$  для локального приближения, полученной в работе [175] при  $q = 3/2$ ,  $R_{05} = 2000$  and  $R_b = 0.001R_{05}$  (в обозначениях упомянутой статьи  $R_{05}$  соответствует числу Рейнольдса  $R$  в данной диссертации). Прерывание штриховой кривой соответствует возникновению модального роста.

Максимальное значение оптимального роста получено для модели N1 и составляет  $G_{\max} \sim 200$ , что на порядок превосходит результат, полученный для мелкомасштабных возмущений в работе [124] (см. рисунок 5 в упомянутой работе) при тех же числах Рейнольдса. Напомним, что речь идёт о росте лишь вихревых возмущений. В данной главе рост акустических волн подавлен второй вязкостью, а в работе [124] рассматривается приближение несжимаемой жидкости. Учёт роста излучённой в момент свинга волны плотности приведёт к дополнительному увеличению оптимального роста. Таким образом, можно заключить, что возмущения с длиной волны порядка толщины диска способны более эффективно уси-

ливаться в кеплеровском потоке, чем мелкомасштабные возмущения.

Наконец, стоит сделать важное замечание касательно сосуществования модального и транзиентного роста возмущений с  $m \sim 1$  в достаточно тонких дисках, описываемых моделью N2. В этой работе мы проводим анализ для числа Рейнольдса, равного  $R = 2000$ . При том, что в астрофизических дисках значения числа Рейнольдса могут достигать  $R \sim 10^{10}$ , что почти на шесть порядков превышает используемое в данной работе значение. Этот выбор обусловлен рядом причин. Во-первых, это значение позволяет проводить прямое сравнение результатов глобального расчёта с полученными ранее в работах [124] и [175] локальными результатами. Кроме того, большее значение числа Рейнольдса означает, что максимальный фактор усиления возмущений  $G_{max}$  достигается на больших временах оптимизации для гораздо более туго закрученных лидирующих спиралей. Это означает, что при численном расчёте необходимо проводить интегрирование систем уравнений до больших времён и при крайне малом пространственном шаге, что потребовало бы гораздо более значительных вычислительных ресурсов.

С другой стороны, из результатов вычислений в локальном приближении известна простая аналитическая зависимость максимальной величины транзиентного роста от числа Рейнольдса  $G_{max} \sim R^{2/3}$  (см. формулу (192)). Эта зависимость выполняется и в пространственно глобальном случае. Таким образом, полученные значения  $G_{max} \sim 200$  для потока с  $R = 2000$  могут быть легко пересчитаны для аналогичных потоков с произвольным числом Рейнольдса. Для упомянутого выше значения  $R = 10^{10}$  фактор оптимального роста  $G_{max} \sim 5 \times 10^6$ .

При этом инкремент самой неустойчивой моды возрастает лишь на несколько процентов при переходе к полностью невязкому случаю. Таким образом, доминирование моды над транзиентным ростом для малых  $k_y$  в модели N2 является следствием нашего выбора значения числа Рейнольдса.

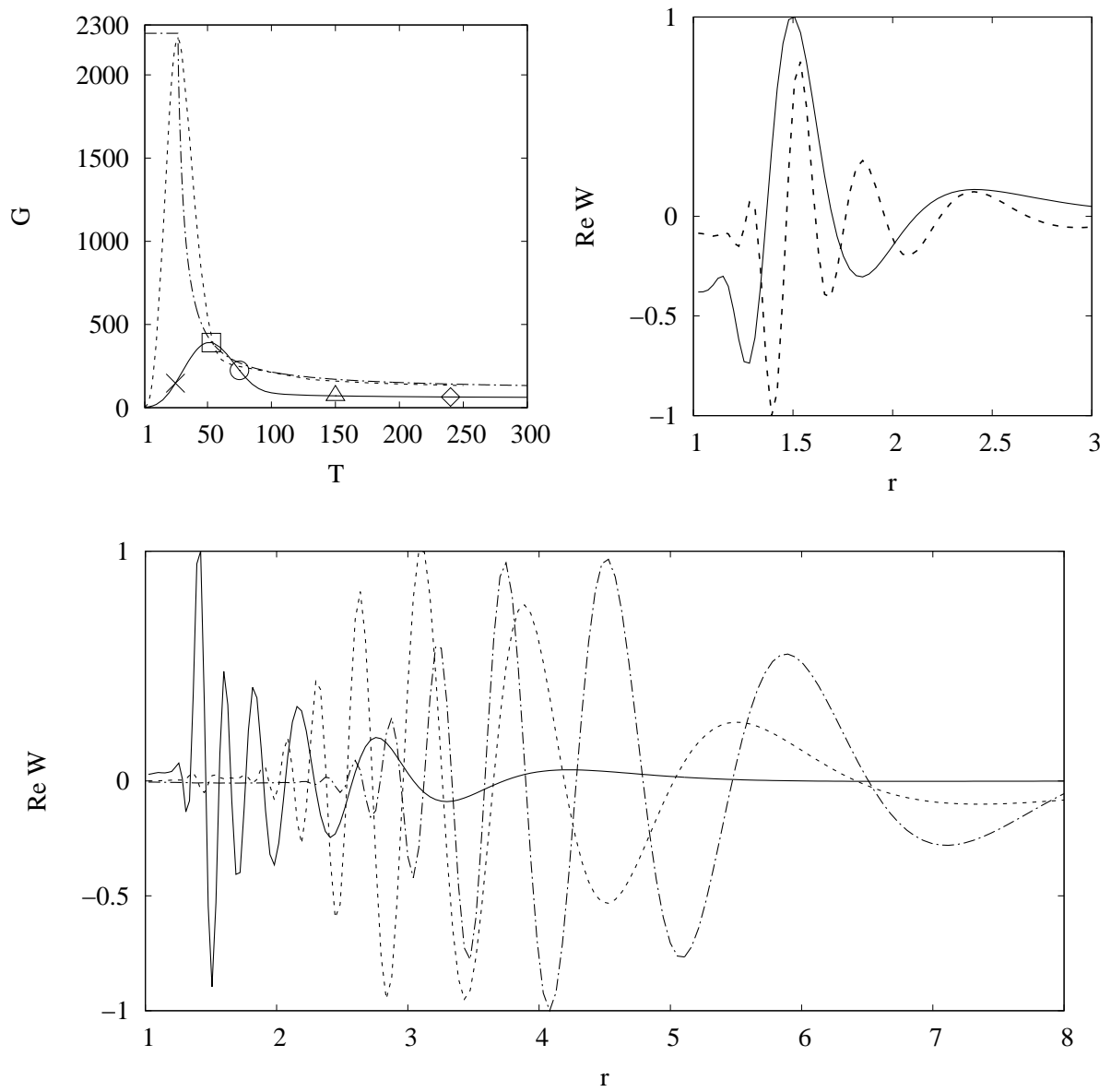


Рис. 25: То же, что и на рисунке 21, но для модели R2. Профили на верхней правой и нижней панелях соответствуют временам оптимизации, обозначенным символами на верхней левой панели таким же образом, как это было сделано на рисунке 21.

#### 4.7.2 Оптимальный рост в потенциале Пачинского-Виита

В этом параграфе мы обсудим влияние эффектов общей теории относительности на оптимальный рост линейных возмущений. Как уже упоминалось ранее, для учёта эффектов ОТО мы используем потенциал Пачинского-Виита [177]. При этом мы рассматриваем предельный случай: гравитационный радиус  $r_g = 1/3$  в единицах внутреннего радиуса диска, что соответствует тому, что граница диска совпадает с радиусом последней устойчивой орбиты. Это означает, что эпициклическая частота обращается в ноль на внутреннем краю диска (обращение в ноль эпициклической частоты можно увидеть и напрямую из уравнения (123). Поскольку фактор транзитного усиления обратно пропорционален четвёртой степени эпициклической частоты, можно ожидать существенного увеличения величины оптимального роста по сравнению с рассмотренным ранее случаем Ньютоновского потенциала.

В первую очередь рассчитаем оптимальный рост глобальных возмущений для однородной модели P2. На рисунке 25 показаны как кривые оптимального роста  $G(T)$  для возмущений с  $m = 1$  и  $m = 10$ , так и соответствующие оптимальные профили. Интерпретацию полученных результатов также можно получить с помощью локального приближения.

Как и в модели N2, для малых времён оптимизации оптимальное возмущение находится вблизи внутренней границы диска. Затем с ростом времени оптимизации начальный профиль смещается от границы, что сопровождается уменьшением фактора роста  $G$ . При этом уменьшение фактора роста гораздо значительнее, чем имевшее место для модели N2 (см. рисунок 21), поскольку с удалением от границы  $q$  приближается к значению для кеплеровского диска ( $q$  меняется от  $q = 2$  до  $q = 3/2$ ).

На верхней левой панели рисунка 25 видно, что для времён оптимизации  $T \gtrsim 20$  аналитическая оценка находится в хорошем соответствии с численной кривой, полученной для  $m = 10$ . Причём при  $T \rightarrow \infty$ , это соответствие становится практически идеальным. Как и в предыдущем параграфе, аналитическая кривая получается из уравнений (192) и (193), однако в потенциале Пачинского-Виита фактор  $q$  уже не является кон-

стантой. По этой причине аналитическая оценка  $G_{max}$  уменьшается с ростом времени оптимизации, так как оптимальное возмущение переходит в область меньших  $q$ .

Полученная аналитическая оценка расходится на малых временах оптимизации, поскольку при малых  $T$  оптимальное возмущение находится вблизи левой границы потока  $r_{sp} \sim 1$ , что соответствует значению  $q \sim 2$ , а из уравнения (192) следует, что  $G$  в данном случае бесконечно велико. По этой причине мы обрезали аналитическую оценку в области  $t \lesssim 20$  и заменили её численным значением  $G_{max} = 2250$ , полученным в работе [175] для параметров рисунка 25 в локальном приближении. Также стоит отметить, что при достаточно большом значении времени оптимизации фактор оптимального роста в потенциале Пачинского-Виита совпадает с фактором роста, полученным в предыдущем параграфе для Ньютоновского потенциала (см. рисунки 21 и 25).

Таким образом, глобальные возмущения с  $m = 1$  способны к гораздо более значительному транзиентному росту в модели P2, чем в модели N2. Это, очевидно, связано с локализацией оптимальных возмущений на малых временах в области, где фактор сдвига  $q$  близок к  $q = 2$ . Также заметим, что уравнение (194) приводит к положениям оптимальных возмущений  $r_{sp} \approx 3$  и  $r_{sp} \approx 4$  для штриховой и штрихпунктирной кривой с нижней панели рисунка 25 соответственно, что, как в модели N2, находится в согласии с численным результатом для возмущений с  $m = 1$ .

В модели P2 модальный рост возмущений проявляется для  $\delta < 0.3$ . Как и в модели N2, оптимальный рост возмущений на малых временах представляет собой лидирующую спираль, демонстрирующую транзиентный рост (см. правую верхнюю панель рисунка 26). Для достаточно больших времён  $T$  оптимальное возмущение превращается в твердотельно вращающийся профиль вблизи внутренней границы диска (см. нижнюю панель рисунка 26). Инкремент моды имеет максимум  $\gamma \approx 0.03$  при  $\delta \approx 0.05$  и прочих параметрах, использованных на рисунке 26. Скорость вращения моды можно определить из Фурье разложения по времени одной из компонент вектора состояния на некотором радиусе. Для моды, показанной на рисунке 26, скорость вращения соответствует коротацион-

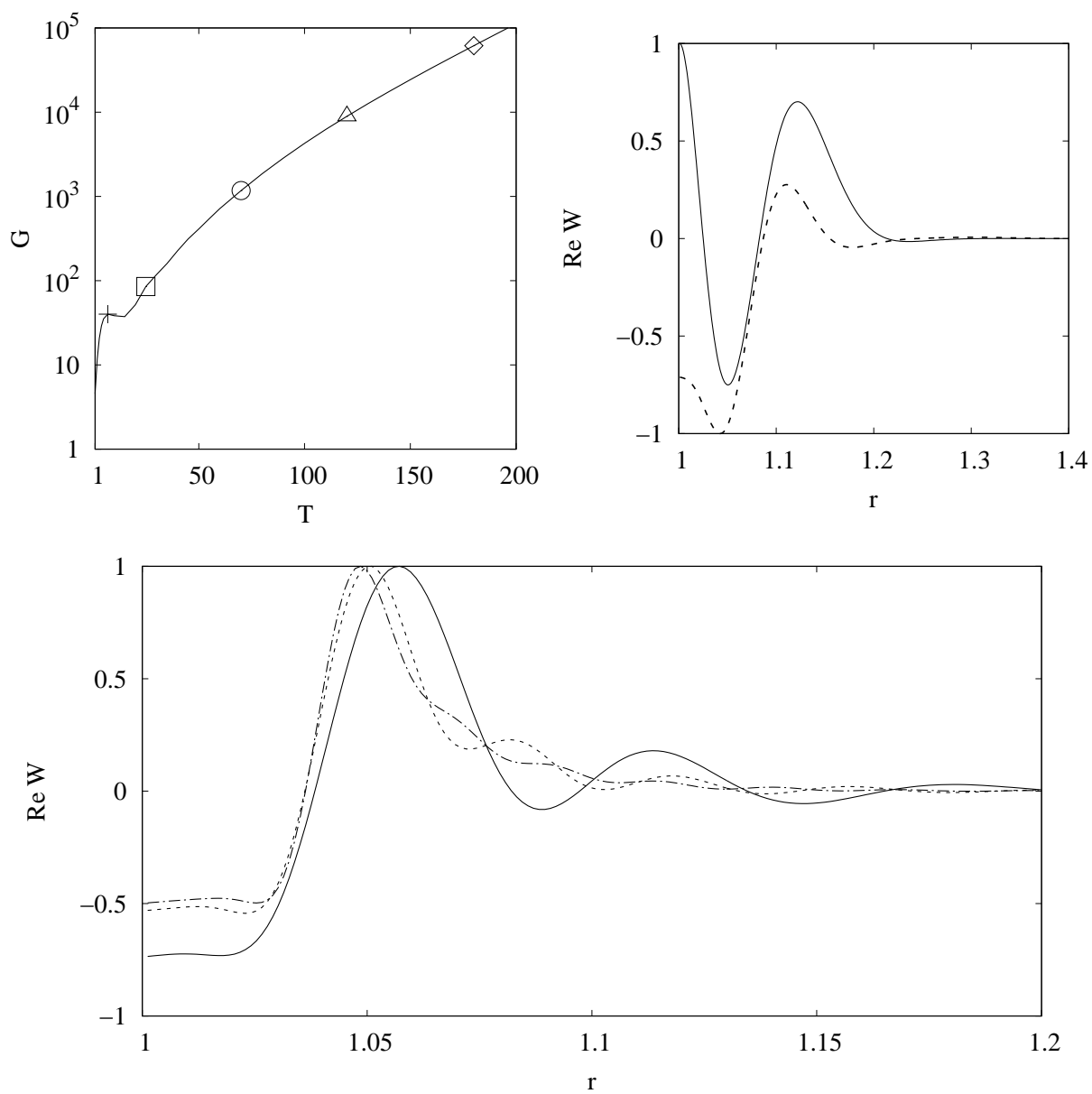


Рис. 26: Тоже, что и на рисунке 22, но для модели P2.

ному радиусу  $r_c \approx 1.04$ , т. е. находится вблизи внутренней границы диска. Таким образом, критический слой находится внутри потока, что и делает возможным модалый рост возмущений. Несмотря на то, что по сравнению с N2 инкремент моды значительно больше, при переходе к большим числам Рейнольдса транзитный рост всё равно будет доминировать по тем же причинам, что и для модели N2.

Кривые оптимального роста для модели P1 отложены на левой верхней панели рисунка 27. Не трудно заметить, что по сравнению с аналогичным рисунком для модели P2, величина роста  $G$  оказалась значительно меньше. Это связано с тем, что оптимальные возмущения находятся дальше от внутренней границы диска (см. правые верхние панели на рисунках 27 и 25), а именно находящиеся у внутренней границы возмущения в модели P2 демонстрировали наибольший транзитный рост. Так, в модели P2 максимальный фактор усиления  $G_{max}$  соответствует начальному возмущению, находящемуся на радиусе  $r_{sp} \approx 1.5$ , где величина  $q \approx 1.8$ . В модели же P1 аналогичное начальное возмущение находится на  $r_{sp} \approx 3$ , где  $q \approx 1.6$ , что гораздо ближе к кеплеровскому значению. В локальном приближении подобная разница в значении  $q$  соответствует различию  $G_{max}$  в четыре раза (см. уравнение 192).

Причиной смещения оптимальных возмущений от левой границы является рост вязкости при приближении к левой границе диска, что исключает из рассмотрения области с наибольшими значениями  $q$ , в которых возможен наиболее эффективный транзитный рост.

Как и для предыдущих моделей, аналитическая кривая, полученная с помощью уравнений (192) и (193), находится в хорошем согласии с результатами численного счёта, причём согласие улучшается при переходе от возмущений с  $m = 1$  к возмущениям с  $m = 10$ . Уравнение (194) приводит к оценкам местоположения оптимальных возмущений  $r_{sp} \approx 4.5$  и  $r_{sp} \approx 6.5$  для штриховой и штрихпунктирной кривой на нижней панели рисунка 27, что также находится в согласии с результатами численного расчёта.

Отметим также, что благодаря крайне малым значениям локального числа Рейнольдса вблизи левой границы потока, диск в модели P1 оста-



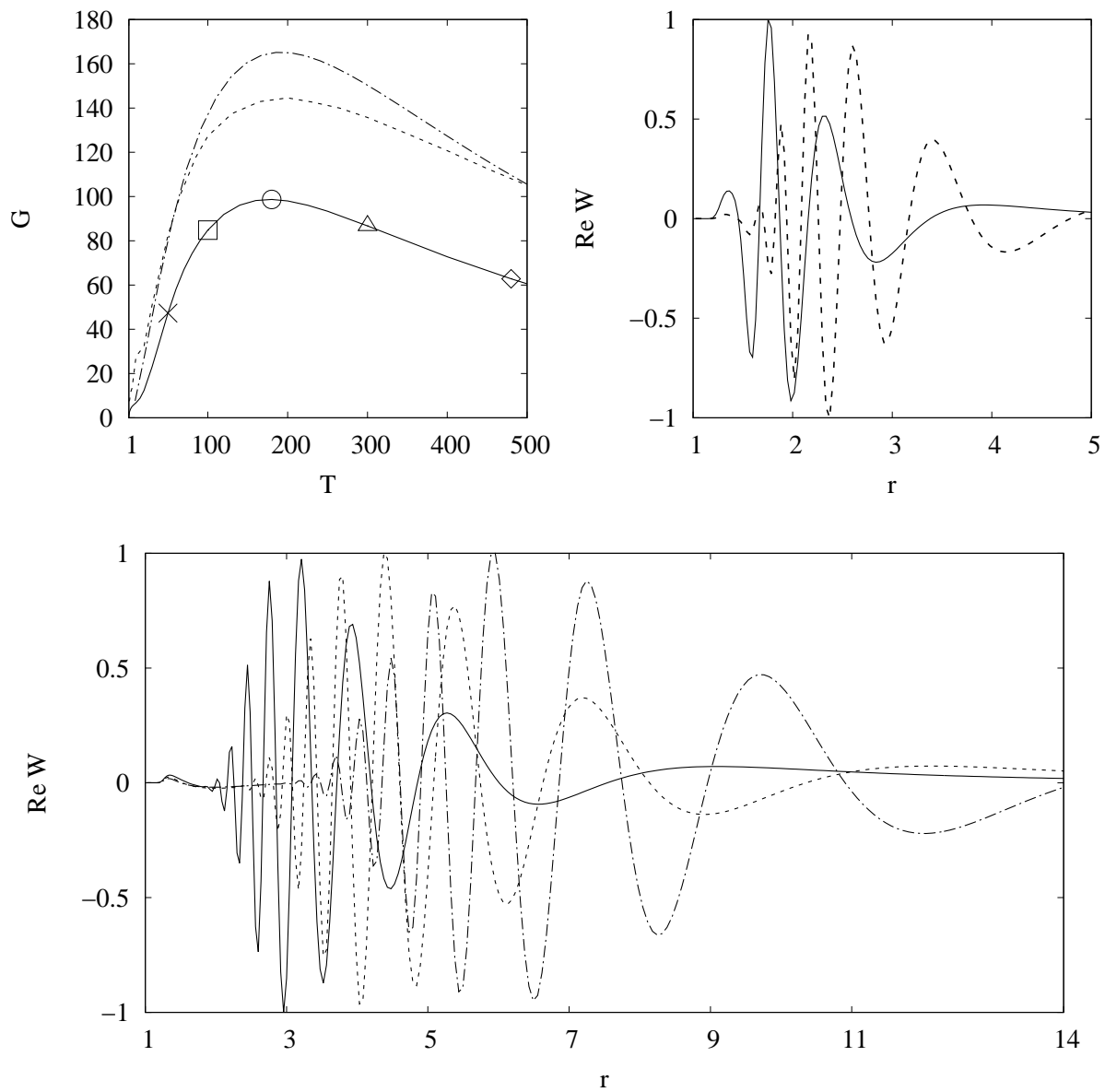


Рис. 27: То же, что и на рисунке 23, но для модели P1.

ётся линейно устойчивым во всём диапазоне значений  $\delta$ .

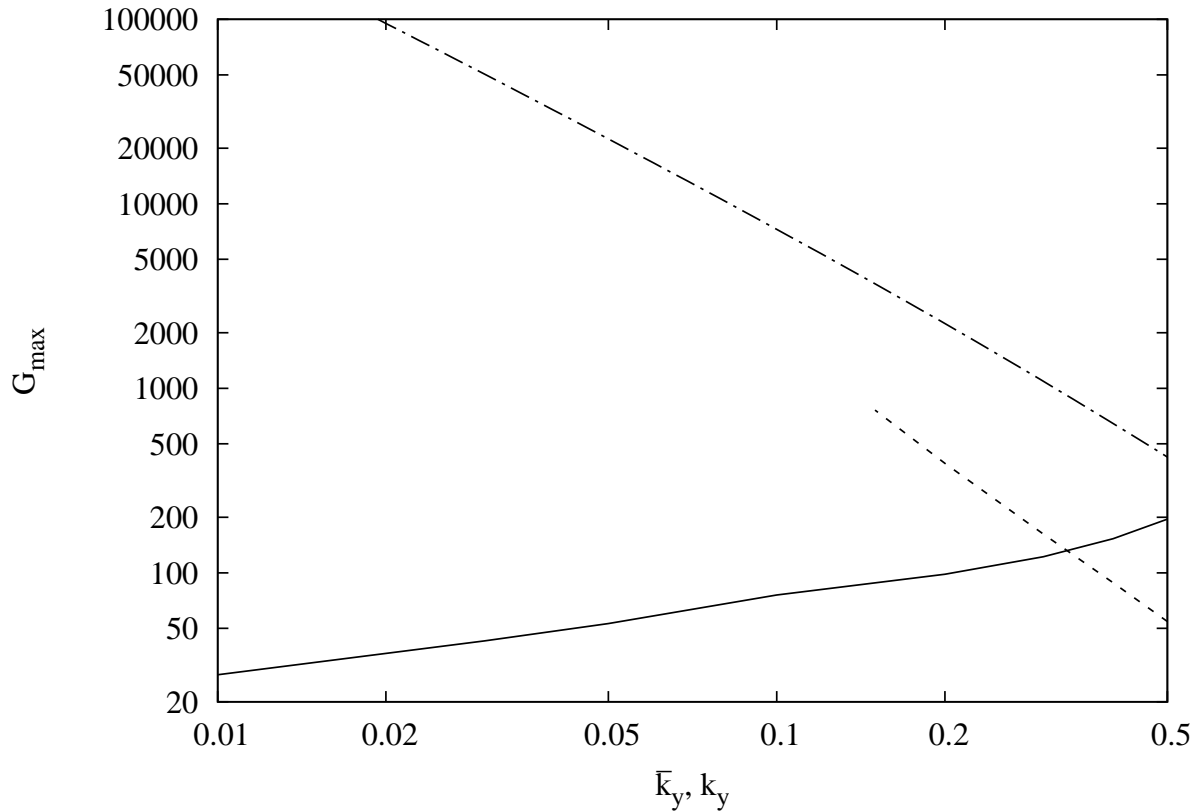


Рис. 28: То же, что и на рисунке 24, но чёрная и штриховая линии соответствуют моделям P1 и P2, а штрихпунктирная – локальным возмущениям для  $q = 2$ , посчитанным в работе [175].

Наконец, для обобщения результатов расчёта транзиентного роста возмущений для диска в потенциале Пачинского-Виита приведём зависимость максимального фактора усиления среди всех времён оптимизации  $G_{max}$  от азимутального волнового числа  $k_y$  для возмущений с  $m = 1$ . На графике 28 отображены кривые  $G_{max}(k_y)$  для моделей P1 и P2, а также аналогичная кривая, полученная в локальном приближении в работе [175] для  $q = 2$ . Как и в предыдущем параграфе, прерывание штриховой кривой соответствует проявлению модалого роста.

В модели P2 значение  $G_{max}$  в несколько раз меньше, чем аналог, посчитанный в локальном приближении, но оно по-прежнему растёт с уменьшением  $k_y$ . Поведение же кривой  $G_{max}(k_y)$  для возмущений в моде-

ли P1 существенно отличается как от локального расчёта, так и от модели P2. В этой модели величина оптимального роста не превосходит значений, полученных для Ньютоновского потенциала.

Таким образом, можно сделать вывод, что радиальная структура фонового потока оказывает значительное влияние на оптимальный рост возмущений. Причём это влияние наиболее сильно для дисков в окрестностях релятивистских объектов. Для подобных потоков наиболее эффективно усиливаются возмущения вблизи внутренней границы диска, поэтому рост возмущений оказывается особо чувствителен к радиальному распределению вязкости.

## 4.8 Заключение

В данной главе было проанализировано влияние диссипативных эффектов и эффектов ОТО на оптимальный рост глобальных адиабатических возмущений. Роль вязкости в оптимальном росте в первую очередь заключается в ограничении максимально возможной начальной закрутки лидирующей спирали, что ставит ограничение на извлечение энергии возмущениями из фонового потока.

Из эффектов ОТО были учтены отличия орбитальной и эпициклической частот от их ньютоновских значений. Поскольку оптимальный рост обратно пропорционален четвёртой степени эпициклической частоты, её уменьшение при приближении к релятивистскому гравитирующему центру может приводить к значительному усилению оптимального роста возмущений.

Оптимальный рост исследовался для крупномасштабных возмущений, т. е. для возмущений с азимутальной длиной волны больше или порядка толщины диска. В главе 3 в рамках невязкой задачи было показано, что именно крупномасштабные возмущения способны к наиболее значительному усилению. В этой главе этот результат был подтверждён. Так, было показано, что в кеплеровском потоке оптимальный рост крупномасштабных вихрей на порядок превосходит рост мелкомасштабных возмущений, исследовавшийся ранее в [124], при тех же числах Рейнольдса.

Рассмотрение крупномасштабных возмущений требует учёта радиальной структуры фонового потока, поскольку, в отличие от рассмотрения мелкомасштабных возмущений, нельзя пренебрегать изменениями фоновых величин на масштабах порядка длины волны возмущения. В настоящей диссертации было исследовано два предельных случая радиальной структуры потоков: однородный поток и ламинарный вязкий поток. Было показано, что структура фонового потока оказывает значительное влияние на оптимальный рост возмущений в релятивистском диске. Так, в ламинарном вязком релятивистском диске за счёт уменьшения числа Рейнольдса на внутреннем краю диска оптимальный рост не превосходит значений для кеплеровского диска, тогда как в однородном релятивистском диске обращение эпициклической частоты в ноль на внутренней границе приводит к усилению оптимального роста. Несмотря на сложную форму кривых оптимального роста, этим кривым удалось дать качественную интерпретацию на языке локальной модели транзиентной динамики возмущений во вращательном сдвиговом потоке.

## Заключение

На сегодняшний день нелинейная устойчивость квазикеплеровских потоков проверена как в лабораторных, так и в численных экспериментах вплоть до чисел Рейнольдса порядка миллиона. Однако вопрос о невозможности перехода таких потоков в турбулентное состояние до сих пор нельзя считать закрытым, так как в астрофизических дисках числа Рейнольдса могут достигать десятков миллиардов. При этом единственным механизмом, способным подпитывать предполагаемую турбулентность в подобных потоках, является транзитный рост линейных возмущений в них. В настоящей диссертации был исследован оптимальный (т. е. максимально возможный) рост возмущений в квазикеплеровских потоках.

При этом в настоящей диссертации особое внимание было уделено т. наз. крупномасштабным возмущениям, т. е. возмущениям с длиной волны больше или порядка толщины диска. Исследование таких возмущений сопряжено со значительными сложностями. Так, для широко исследованных в литературе мелкомасштабных возмущений можно пренебречь неоднородностью фонового потока, поскольку масштаб этих неоднородностей намного превышает длины волн возмущений. Необходимость учёта радиальной структуры потока потребовала отказа от широко применяемого матричного метода расчёта оптимального роста в пользу вариационного. В астрофизической литературе вариационный метод был впервые применён в работах данного диссертационного цикла. Подробное изложение методов вычисления оптимального роста приведено в главе 1 настоящей диссертации.

В главе 2 было проведено исследование оптимального роста для комбинаций глобальных звуковых мод в тонком квазикеплеровском газовом торе. Приближение тонкого тора позволило провести вычисления в ВКБ-приближении. Было показано, что оптимальными возмущениями в рассмотренной постановке являются волновые пакеты, локализованные у внешней границы тора. С течением времени волновой пакет перемещается к внутренней границе, что сопровождается ростом его энергии, причём фактор роста может достигать нескольких сотен. После отражения

от внутренней границы пакет движется обратно с уменьшением амплитуды до начального значения. Таким образом, поведение энергии оптимальных комбинаций рассматриваемых глобальных мод имеет квазипериодический характер, причём величина оптимального роста увеличивается при переходе к более тонким торам, что эквивалентно приближению закона вращения к кеплеровскому. Такое поведение противоположно поведению хорошо известной неустойчивости Папалойзу-Прингла, инкремент которой уменьшается при приближении к кеплеровским законам вращения. Подобное квазипериодическое поведение оптимальных комбинаций мод может иметь отношение к феномену наблюдаемых квазипериодических осцилляций в аккрецирующих системах.

В главе 3 был вычислен и проанализирован оптимальный рост глобальных возмущений в тонком диске пренебрежимо малой вязкости. В отличие от главы 2 никаких ограничений на природу возмущений не накладывалось, также диск считался бесконечным. Показано, что и на азимутальном масштабе, значительно превышающем геометрическую толщину диска, максимально возможным фактором роста обладают сдвиговые вихри в форме лидирующих спиралей. С течением времени лидирующая спираль раскручивается потоком вплоть до превращения в отстающую спираль. При этом момент наибольшей раскрутки соответствует максимально возможному росту возмущений. Было продемонстрировано, что именно крупномасштабные возмущения наиболее эффективно усиливаются потоком. Поскольку для вычисления оптимального роста применялся вариационный метод, была выведена система уравнений, сопряжённая к уравнениям, описывающим динамику линейных возмущений. Это в свою очередь дало возможность строго доказать, что для существования транзитивно растущих линейных возмущений в двумерном вращательном потоке идеальной жидкости необходимо и достаточно отличия закона вращения от твердотельного.

В главе 4 результаты главы 3 были обобщены на случай неидеальной жидкости: были учтены кинематическая и объёмная вязкости. Причём оптимальный рост был вычислен в том числе и с учётом релятивистских эффектов отклонения орбитальной и эпициклической частот от их нью-

тоновских значений. Показано, что в релятивистских областях газовых дисков рост крупномасштабных вихрей усиливается обратно пропорционально четвертой степени эпициклической частоты и может значительно превосходить рост аналогичных вихрей с азимутальным масштабом, много меньшим толщины диска. Оптимальный рост был исследован для двух фоновых потоков: однородного и ламинарного вязкого потока. Было продемонстрировано, что структура потока слабо влияет на оптимальный рост в ньютоновском диске, однако крайне важна для диска в релятивистском потенциале. Более резкое уменьшение числа Рейнольдса на внутреннем краю релятивистского диска компенсирует эффект уменьшения эпициклической частоты. В итоге оптимальный рост в ламинарном вязком диске для релятивистского случая слабо отличается от оптимального роста в случае ньютоновского потенциала. Несмотря на сложную форму кривых оптимального роста, им удалось дать качественную интерпретацию на языке локальной модели транзитной динамики возмущений во вращательном сдвиговом потоке.

В заключение отметим, что транзитный рост линейных возмущений – это единственный механизм отбора энергии возмущениями у фонового потока, который работает для всех классов астрофизических дисков. Для его работы необходимо лишь наличие градиента угловой скорости. Это делает транзитный рост естественным кандидатом на роль механизма, питающего турбулентность в астрофизических потоках, в первую очередь в кеплеровском потоке. Хотя существование подобной турбулентности не подтверждено, но не известно и нетурбулентных дисков, существования которых можно было бы ожидать, исходя из многообразия различных видов газовых дисков во Вселенной. Из чего можно сделать вывод, что турбулентное состояние – это естественное состояние для дискового газового потока любой природы. В любом случае, только новые лабораторные и численные эксперименты смогут дать окончательный ответ на вопрос о существовании универсального механизма турбулизации газовых дисков, основанного на транзитном росте линейных возмущений.

## Список литературы

- [1] *Шакура Н. И.* Дисконвая модель аккреции газа релятивистской звездой в тесной двойной системе // *Астрономический журнал*. — 1972. — Т. 49. — С. 921–929.
- [2] *Shakura N. I., Sunyaev R. A.* Black holes in binary systems. Observational appearance. // *A&A*. — 1973. — Vol. 24. — Pp. 337–355.
- [3] *Richardson Lewis Fry.* Weather prediction by numerical process. — Cambridge University Press, 1922.
- [4] *Зыбин К. П., Сирота В. А.* Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности // *Успехи физических наук*. — 2015. — Vol. 185, no. 6. — Pp. 593–612.
- [5] *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР*. — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 299–303.
- [6] *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Усп. физ. наук*. — 1967. — Т. 93, № 11. — С. 476–481.
- [7] *Колмогоров А. Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // *Докл. АН СССР*. — 1941. — Т. 32, № 1. — С. 19–21.
- [8] *Обухов А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // *Докл. АН СССР*. — 1941. — Т. 32, № 1. — С. 22.
- [9] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика / Под ред. Л. П. Питаевский. — Москва: Физматлит, 2006.
- [10] *Zakharov V. E., L’Vov V. S., Falkovich G.* Kolmogorov spectra of turbulence 1. Wave turbulence. — Springer Series in Nonlinear Dynamics, Berlin: Springer, 1992.



- [11] *Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // *Успехи физических наук*. — 1997. — Т. 167, № 11. — С. 1137–1167.
- [12] *Rayleigh Lord.* On the dynamics of revolving fluids // *Scientific Papers*. — 1916. — Vol. 6. — Pp. 447–453.
- [13] *Papaloizou J. C. B., Pringle J. E.* The dynamical stability of differentially rotating discs with constant specific angular momentum // *MNRAS*. — 1984. — 06. — Vol. 208. — Pp. 721–750.
- [14] *Papaloizou J. C. B., Pringle J. E.* The dynamical stability of differentially rotating discs. II // *MNRAS*. — 1985. — Vol. 213. — Pp. 799–820.
- [15] *Papaloizou J. C. B., Pringle J. E.* The dynamical stability of differentially rotating discs. III // *MNRAS*. — 1987. — 03. — Vol. 225. — Pp. 267–283.
- [16] *Goldreich P., Narayan R.* Non-axisymmetric instability in thin discs // *MNRAS*. — 1985. — 03. — Vol. 213. — Pp. 7P–10P.
- [17] *Blaes O. M., Glatzel W.* On the stability of incompressible constant angular momentum cylinders // *MNRAS*. — 1986. — Vol. 220. — Pp. 253–258.
- [18] *Kojima Y.* Non-axisymmetric unstable modes of a differentially rotating torus // *MNRAS*. — 1989. — 02. — Vol. 236. — Pp. 589–602.
- [19] *Goldreich P., Goodman J., Narayan R.* The stability of accretion tori. I - Long-wavelength modes of slender tori // *MNRAS*. — 1986. — 07. — Vol. 221. — Pp. 339–364.
- [20] *Чурилов С. М., Шухман И. Г.* О связи "объёмного" и поверхностного показателя адиабаты для газовых подсистем плоских дисков // *Астрон. циркуляр.* — 1981. — Т. 1157. — С. 1–2.

- [21] *Glatzel W.* On the stability of compressible differentially rotating cylinders // MNRAS. — 1987. — Vol. 225. — Pp. 227–255.
- [22] *Nowak M. A., Wagoner R. V.* Diskoseismology: Probing accretion disks. II - G-modes, gravitational radiation reaction, and viscosity // ApJ. — 1992. — 07. — Vol. 393, no. 2. — Pp. 697–707.
- [23] *Степанянц Ю. А., Фабрикант А. Л.* Распространение волн в сдвиговых потоках // *Успехи физ. наук.* — 1989. — Т. 159. — С. 83.
- [24] *Glatzel W.* Sonic instabilities in supersonic shear flows // MNRAS. — 1988. — Vol. 231. — Pp. 795–821.
- [25] *Glatzel W.* On the stability of compressible differentially rotating cylinders. II // MNRAS. — 1987. — 09. — Vol. 228. — Pp. 77–100.
- [26] *Narayan R., Goldreich P., Goodman J.* Physics of modes in a differentially rotating system - Analysis of the shearing sheet // MNRAS. — 1987. — 09. — Vol. 228. — Pp. 1–41.
- [27] *Kato S.* Instability of isentropic geometrically thin disks due to corotation resonance // *Astronomical Society of Japan.* — 1987. — Vol. 39, no. 4. — Pp. 645–666.
- [28] *Drury L. O.* Acoustic amplification in discs and tori // MNRAS. — 1985. — Vol. 217. — Pp. 821–829.
- [29] *Savonije G. J., Heemskerk M. H. M.* Non-axisymmetric unstable modes in a thin differentially rotating gaseous disk // A&A. — 1990. — 12. — Vol. 240, no. 1. — Pp. 191–202.
- [30] *Zurek W. H., Benz W.* Redistribution of angular momentum by nonaxisymmetric instabilities in a thick accretion disk // ApJ. — 1986. — Vol. 308. — Pp. 123–133.
- [31] *Hawley J. F.* Nonaxisymmetric instabilities in a slender torus - Two- and three-dimensional simulations // ApJ. — 1990. — Vol. 356. — Pp. 580–590.

- [32] *Kato S.* Basic Properties of Thin-Disk Oscillations // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. — 2001. — 02. — Vol. 53, no. 1. — Pp. 1–24.
- [33] *Narayan R., Goodman J.* Non-Axisymmetric Shear Instabilities in Thick Accretion Disks // Proceedings of a NATO Advanced Research Workshop: Theory of Accretion Disks / Ed. by F. Meyer. — Vol. 290 of *Series C*. — Garching: NATO Advanced Science Institutes (ASI), 1989. — P. 231.
- [34] *Narayan R.* Instabilities in Thick Disks // Proceedings of IAU Colloq. 129, the 6th Institute d’Astrophysique de Paris (IAP) Meeting: Structure and Emission Properties of Accretion Disks / Ed. by C. Bertout, S. Collin-Souffrin, J. P. Lasota. — Gif-sur-Yvette: Editions Frontieres, 1991. — P. 153.
- [35] *Velikhov E. P.* Stability of an ideally conducting liquid flowing between cylinders rotating in a magnetic field // *Sov. Phys. JETP*. — 1959. — Vol. 9. — P. 995.
- [36] *Chandrasekhar S.* The Stability of Non-Dissipative Couette Flow in Hydromagnetics // *Proceedings of the National Academy of Science*. — 1960. — Vol. 46. — Pp. 253–257.
- [37] *Balbus S. A., Hawley J. F.* A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution // *ApJ*. — 1991. — 07. — Vol. 376. — Pp. 214–233.
- [38] *Hawley J. F., Balbus S. A.* A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. III - Long-term evolution in a shearing sheet // *ApJ*. — 1992. — Vol. 400. — Pp. 595–609.
- [39] *Balbus S. A., Hawley J. F.* A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. IV. Nonaxisymmetric Perturbations // *ApJ*. — 1992. — Vol. 400. — Pp. 610–621.

- [40] *Balbus S. A., Hawley J. F.* Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks // *Reviews of Modern Physics*. — 1998. — Vol. 70. — Pp. 1–53.
- [41] *Goldreich P., Lynden-Bell D.* II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities // *MNRAS*. — 1965. — Vol. 130. — P. 125.
- [42] *Hawley J. F., Gammie C. F., Balbus S. A.* Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks // *ApJ*. — 1995. — Vol. 440. — P. 742.
- [43] *Beck R.* Magnetic Field Structure from Synchrotron Polarization // *EAS Publications Series* / Ed. by M.-A. Miville-Deschênes, F. Boulanger. — Vol. 23 of *EAS Publications Series*. — 2007. — Pp. 19–36.
- [44] *McKinney J. C., Narayan R.* Disc-jet coupling in black hole accretion systems - I. General relativistic magnetohydrodynamical models // *MNRAS*. — 2007. — Vol. 375. — Pp. 513–530.
- [45] *Beckwith K., Hawley J. F., Krolik J. H.* The Influence of Magnetic Field Geometry on the Evolution of Black Hole Accretion Flows: Similar Disks, Drastically Different Jets // *ApJ*. — 2008. — Vol. 678. — Pp. 1180–1199.
- [46] Locality of MHD Turbulence in Isothermal Disks / X. Guan, C. F. Gammie, J. B. Simon, B. M. Johnson // *ApJ*. — 2009. — Vol. 694. — Pp. 1010–1018.
- [47] *Simon J. B., Beckwith K., Armitage P. J.* Emergent mesoscale phenomena in magnetized accretion disc turbulence // *MNRAS*. — 2012. — Vol. 422. — Pp. 2685–2700.
- [48] *Simon J. B., Hawley J. F.* Viscous and Resistive Effects on the Magnetorotational Instability with a Net Toroidal Field // *ApJ*. — 2009. — Vol. 707. — Pp. 833–843.
- [49] *Hawley J. F., Gammie C. F., Balbus S. A.* Local Three-dimensional Simulations of an Accretion Disk Hydromagnetic Dynamo // *ApJ*. — 1996. — Vol. 464. — P. 690.

- [50] *Fromang S., Papaloizou J.* MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. I. The issue of convergence // *A&A.* — 2007. — Vol. 476. — Pp. 1113–1122.
- [51] MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. II. The effect of transport coefficients / S. Fromang, J. Papaloizou, G. Lesur, T. Heinemann // *A&A.* — 2007. — Vol. 476. — Pp. 1123–1132.
- [52] Subcritical dynamos in shear flows / F. Rincon, G. I. Ogilvie, M. R. E. Proctor, C. Cossu // *Astronomische Nachrichten.* — 2008. — Vol. 329. — P. 750.
- [53] Global bifurcations to subcritical magnetorotational dynamo action in Keplerian shear flow / A. Riols, F. Rincon, C. Cossu et al. // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2013. — Vol. 731. — Pp. 1–45.
- [54] Magnetorotational dynamo chimeras. The missing link to turbulent accretion disk dynamo models? / A. Riols, F. Rincon, C. Cossu et al. // *ArXiv e-prints.* — 2016.
- [55] *Klahr H. H., Bodenheimer P.* Turbulence in Accretion Disks: Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability // *ApJ.* — 2003. — 01. — Vol. 582. — Pp. 869–892.
- [56] *Klahr H.* The Global Baroclinic Instability in Accretion Disks. II. Local Linear Analysis // *ApJ.* — 2004. — Vol. 606. — Pp. 1070–1082.
- [57] *Johnson B. M., Gammie C. F.* Linear Theory of Thin, Radially Stratified Disks // *ApJ.* — 2005. — 06. — Vol. 626. — Pp. 978–990.
- [58] *Johnson B. M., Gammie C. F.* Nonlinear Stability of Thin, Radially Stratified Disks // *ApJ.* — 2006. — 01. — Vol. 636. — Pp. 63–74.
- [59] *Petersen M. R., Julien K., Stewart G. R.* Baroclinic Vorticity Production in Protoplanetary Disks. I. Vortex Formation // *ApJ.* — 2007. — 04. — Vol. 658. — Pp. 1236–1251.

- [60] *Petersen M. R., Stewart G. R., Julien K.* Baroclinic Vorticity Production in Protoplanetary Disks. II. Vortex Growth and Longevity // *ApJ*. — 2007. — 04. — Vol. 658. — Pp. 1252–1263.
- [61] *Lesur G., Papaloizou J. C. B.* The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models // *A&A*. — 2010. — 04. — Vol. 513. — P. 12.
- [62] *Klahr H., Hubbard A.* Convective Overstability in Radially Stratified Accretion Disks under Thermal Relaxation // *ApJ*. — 2014. — 06. — Vol. 788. — P. 8.
- [63] *Lyra W.* Convective Overstability in Accretion Disks: Three-dimensional Linear Analysis and Nonlinear Saturation // *ApJ*. — 2014. — 07. — Vol. 789. — P. 7.
- [64] Three-Dimensional Vortices Generated by Self-Replication in Stably Stratified Rotating Shear Flows / P. S. Marcus, S. Pei, C.-H. Jiang, P. Hassanzadeh // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 111, no. 8. — P. 084501.
- [65] Zombie Vortex Instability. I. A Purely Hydrodynamic Instability to Resurrect the Dead Zones of Protoplanetary Disks / P. S. Marcus, S. Pei, C.-H. Jiang et al. // *ApJ*. — 2015. — Vol. 808. — P. 87.
- [66] Zombie Vortex Instability. II. Thresholds to Trigger Instability and the Properties of Zombie Turbulence in the Dead Zones of Protoplanetary Disks / P. S. Marcus, S. Pei, C.-H. Jiang, J. A. Barranco // *ArXiv e-prints*. — 2016.
- [67] *Tassoul J.-L.* Theory of Rotating Stars. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1978.
- [68] *Goldreich P., Schubert G.* Differential Rotation in Stars // *ApJ*. — 1967. — 11. — Vol. 150. — P. 571.
- [69] *Fricke K.* Instabilität stationärer Rotation in Sternen // *Zeitschrift für Astrophysik*. — 1968. — Vol. 68. — P. 317.

- [70] *Urrpin V., Brandenburg A.* Magnetic and vertical shear instabilities in accretion discs // MNRAS. — 1998. — Vol. 294. — P. 399.
- [71] *Urrpin V.* A comparison study of the vertical and magnetic shear instabilities in accretion discs // ApJ. — 2003. — Vol. 404. — Pp. 397–403.
- [72] *Arlt R., Urrpin V.* Simulations of vertical shear instability in accretion discs // A&A. — 2004. — Vol. 426. — Pp. 755–765.
- [73] *Nelson R. P., Gressel O., Umurhan O. M.* Linear and non-linear evolution of the vertical shear instability in accretion discs // MNRAS. — 2013. — 09. — Vol. 435. — Pp. 2610–2631.
- [74] *King A. R., Pringle J. E., Livio M.* Accretion disc viscosity: how big is alpha? // MNRAS. — 2007. — Vol. 376. — Pp. 1740–1746.
- [75] *Lipunova G. V., Malanchev K. L.* Determination of the turbulent parameter in the accretion disks: effects of self-irradiation in 4U 1543-47 during the 2002 outburst // *ArXiv e-prints*. — 2016.
- [76] *Rafikov R. R.* Protoplanetary Disks as (Possibly) Viscous Disks // *ArXiv e-prints*. — 2017.
- [77] *Lesur G., Longaretti P.-Y.* On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport // A&A. — 2005. — 12. — Vol. 444. — Pp. 25–44.
- [78] *Balbus S. A., Hawley J. F., Stone J. M.* Nonlinear Stability, Hydrodynamical Turbulence, and Transport in Disks // ApJ. — 1996. — Vol. 467. — P. 76.
- [79] *Hawley J. F., Balbus S. A., Winters W. F.* Local Hydrodynamic Stability of Accretion Disks // ApJ. — 1999. — Vol. 518. — Pp. 394–404.
- [80] *Shen Y., Stone J. M., Gardiner T. A.* Three-dimensional Compressible Hydrodynamic Simulations of Vortices in Disks // ApJ. — 2006. — 12. — Vol. 653. — Pp. 513–524.

- [81] Hydrodynamic turbulence cannot transport angular momentum effectively in astrophysical disks / H. Ji, M. Burin, E. Schartman, J. Goodman // *Nature*. — 2006. — Vol. 444. — Pp. 343–346.
- [82] Stability of quasi-Keplerian shear flow in a laboratory experiment / E. Schartman, H. Ji, M. J. Burin, J. Goodman // *A&A*. — 2012. — Vol. 543. — P. 13.
- [83] *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability // *NASA STI/Recon Technical Report A*. — 1981. — Vol. 82. — P. 17950.
- [84] *Joseph D. D.* Stability of fluid motions. I, II // *NASA STI/Recon Technical Report A*. — 1976. — Vol. 77. — P. 287.
- [85] *Taylor G. I.* Fluid Friction between Rotating Cylinders. I. Torque Measurements // *Royal Society of London Proceedings Series A*. — 1936. — Vol. 157. — Pp. 546–564.
- [86] *Wendt G.* Potentialtheoretische Behandlung des Wehneltzylinders // *Annalen der Physik*. — 1933. — Vol. 409. — Pp. 445–459.
- [87] *Zeldovich Y. B.* On the Friction of Fluids Between Rotating Cylinders // *Royal Society of London Proceedings Series A*. — 1981. — Vol. 374. — Pp. 299–312.
- [88] *Richard D., Zahn J.-P.* Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment // *A&A*. — 1999. — Vol. 347. — Pp. 734–738.
- [89] *Henningson D. S., Reddy S. C.* On the role of linear mechanisms in transition to turbulence // *Phys. Fluids*. — 1994. — 03. — Vol. 6. — Pp. 1396–1398.
- [90] *Schmid P. J., Henningson D. S.* Stability and Transition in Shear Flows. — New York: Springer-Verlag, 2001.
- [91] *Kelvin Lord.* On the Stability of Steady and of Periodic Fluid Motion // *Philosophy Magazine*. — 1887. — Vol. 23. — Pp. 459–539.



- [92] *Orr W. McF.* The stability or instability of the steady motions of a liquid I // *Proceedings of the Royal Irish Academy A.* — 1907. — Vol. 27. — Pp. 9–68.
- [93] *Orr W. McF.* The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid II // *Proceedings of the Royal Irish Academy A.* — 1907. — Vol. 27. — Pp. 69–138.
- [94] *Julian W. H., Toomre A.* Non-Axisymmetric Responses of Differentially Rotating Disks of Stars // *ApJ.* — 1966. — Vol. 146. — P. 810.
- [95] *Farrell B. F.* Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow // *Physics of Fluids.* — 1988. — Vol. 31. — Pp. 2093–2102.
- [96] *Butler K. M., Farrell B. F.* Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow // *Phys. Fluids A.* — 1992. — 08. — Vol. 4, no. 8. — Pp. 1637–1650.
- [97] *Reddy S. C., Schmid P. J., Henningson D. S.* Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld Operator // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1993. — March. — Vol. 53, no. 01. — Pp. 15–47.
- [98] *Reddy S. C., Henningson D. S.* Energy growth in viscous channel flows // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1993. — Vol. 252. — Pp. 209–238.
- [99] Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues / L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, T. A. Driscoll // *Science.* — 1993. — 07. — Vol. 261, no. 5121. — Pp. 578–584.
- [100] *Meseguer Á.* Energy transient growth in the Taylor-Couette problem // *Physics of Fluids.* — 2002. — Vol. 14. — Pp. 1655–1660.
- [101] *Gustavsson L H.* Energy growth of three-dimensional disturbances in plane Poiseuille flow // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1991. — March. — Vol. 224. — Pp. 241–260.

- [102] *Chagelishvili G. D., Rogava A. D., Segal I. N.* Hydrodynamic stability of compressible plane Couette flow // *Phys. Rev. E.* — 1994. — 12. — Vol. 50. — P. 4283.
- [103] *Malik M., Alam M., Dey J.* Nonmodal energy growth and optimal perturbations in compressible plane Couette flow // *Physics of Fluids.* — 2006. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 034103–034103–14.
- [104] Linear Mechanism of Wave Emergence from Vortices in Smooth Shear Flows / G. D. Chagelishvili, A. G. Tevzadze, G. Bodo, S. S. Moiseev // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — 10. — Vol. 79. — Pp. 3178–3181.
- [105] *Чагелишвили Г. Д., Чанишвили Р. Г., Дж.Г Ломинадзе.* Физика усиления вихревых возмущений в сдвиговых течениях // *Письма в ЖЭТФ.* — 1996. — Т. 63. — С. 517–522.
- [106] Mechanical picture of the linear transient growth of vortical perturbations in incompressible smooth shear flows / G. Chagelishvili, J.-N. Hau, G. Khujadze, M. Oberlack // *Physical Review Fluids.* — 2016. — Vol. 1, no. 4. — P. 043603.
- [107] Transient growth in Taylor-Couette flow / H. Hristova, S. Roch, P. J. Schmid, L. S. Tuckerman // *Physics of Fluids.* — 2002. — Vol. 14. — Pp. 3475–3484.
- [108] *Maretzke S., Hof B., Avila M.* Transient growth in linearly stable Taylor-Couette flows // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2014. — Vol. 742. — Pp. 254–290.
- [109] *Waleffe F.* On a self-sustaining process in shear flows // *Physics of Fluids.* — 1997. — Vol. 9. — Pp. 883–900.
- [110] On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows / S. C. Reddy, P. J. Schmid, J. S. Baggett, D. S. Henningson // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1998. — Vol. 365. — Pp. 269–303.

- [111] Dynamics of homogeneous shear turbulence: A key role of the nonlinear transverse cascade in the bypass concept / G. Mamatsashvili, G. Khujadze, G. Chagelishvili et al. // *Phys. Rev. E*. — 2016. — Vol. 94, no. 2. — P. 023111.
- [112] *Ломинадзе Д. Г., Чагелашвили Г. Д., Чанашивили Р. Г // Письма в Астрон. журнал.* — 1988. — Т. 14. — С. 856.
- [113] *Фридман А. М. // Письма в Астрон. журнал.* — 1989. — Т. 15. — С. 487.
- [114] *Ioannou P. J., Kakouris A. Stochastic Dynamics of Keplerian Accretion Disks // ApJ.* — 2001. — 04. — Vol. 550. — Pp. 931–943.
- [115] *Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости / Под ред. С. В. Фалькович.* — Москва: Издательство иностранной литературы, 1958.
- [116] Global axisymmetric dynamics of thin viscous accretion disks / O. M. Umurhan, A. Nemirovsky, O. Regev, G. Shaviv // *A&A*. — 2006. — 01. — Vol. 446. — Pp. 1–18.
- [117] *Regev O. Hydrodynamical activity in thin accretion disk // New Astron. Rev.* — 2008. — 05. — Vol. 51. — Pp. 819–827.
- [118] Global transient dynamics of three-dimensional hydrodynamical disturbances in a thin viscous accretion disk / P. Rebusco, O. M. Umurhan, W. Kluźniak, O. Regev // *Phys. Fluids*. — 2009. — Vol. 21. — P. 076601.
- [119] *Zhuravlev V. V., Shakura N. I. Temporal behavior of global perturbations in compressible axisymmetric flows with free boundaries. // Astron. Nachr.* — 2009. — Vol. 330, no. 88. — Pp. 84–91.
- [120] *Yecko P. A. Accretion disk instability revisited. Transient dynamics of rotating shear flow // A&A.* — 2004. — 10. — Vol. 425. — Pp. 385–393.

- [121] On hydrodynamic shear turbulence in stratified Keplerian disks: Transient growth of small-scale 3D vortex mode perturbations / A. G. Tevzadze, G. D. Chagelishvili, J.-P. Zahn et al. // *A&A*. — 2003. — Vol. 407. — Pp. 779–786.
- [122] *Tevzadze A. G., Chagelishvili G. D., Zahn J. . P.* Hydrodynamic stability and mode coupling in Keplerian flows: local strato-rotational analysis // *A&A*. — 2008. — 01. — Vol. 478. — Pp. 9–15.
- [123] Spiral density wave generation by vortices in Keplerian flows / G. Bodo, G. Chagelishvili, G. Murante et al. // *A&A*. — 2005. — 07. — Vol. 437. — Pp. 9–22.
- [124] *Mukhopadhyay B., Afshordi N., Narayan R.* Bypass to Turbulence in Hydrodynamic Accretion Disks: An Eigenvalue Approach // *ApJ*. — 2005. — 08. — Vol. 629. — Pp. 383–396.
- [125] *Afshordi N., Mukhopadhyay B., Narayan R.* Bypass to Turbulence in Hydrodynamic Accretion: Lagrangian Analysis of Energy Growth // *ApJ*. — 2005. — 08. — Vol. 629. — Pp. 373–382.
- [126] *Mukhopadhyay B., Afshordi N., Narayan R.* Growth of hydrodynamic perturbations in accretion disks: Possible route to non-magnetic turbulence // *Advances in Space Research*. — 2006. — 01. — Vol. 38. — Pp. 2877–2879.
- [127] *Rincon F., Ogilvie G. I., Cossu C.* On self-sustaining processes in Rayleigh-stable rotating plane Couette flows and subcritical transition to turbulence in accretion disks // *A&A*. — 2007. — Vol. 463. — Pp. 817–832.
- [128] *Longaretti P.-Y.* On the Phenomenology of Hydrodynamic Shear Turbulence // *ApJ*. — 2002. — Vol. 576. — Pp. 587–598.
- [129] On hydrodynamic shear turbulence in Keplerian disks: Via transient growth to bypass transition / G. D. Chagelishvili, J.-P. Zahn,

- A. G. Tevzadze, J. G. Lominadze // A&A. — 2003. — 05. — Vol. 402. — Pp. 401–407.
- [130] *Umurhan O. M., Regev O.* Hydrodynamic stability of rotationally supported flows: Linear and nonlinear 2D shearing box results // ApJ. — 2004. — Vol. 427. — Pp. 855–872.
- [131] Angular redistribution of nonlinear perturbations: A universal feature of nonuniform flows / W. Horton, J.-H. Kim, G. D. Chagelishvili et al. // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 81, no. 6. — P. 066304.
- [132] *Lithwick Y.* Nonlinear Evolution of Hydrodynamical Shear Flows in Two Dimensions // ApJ. — 2007. — Vol. 670. — Pp. 789–804.
- [133] *Lithwick Y.* Formation, Survival, and Destruction of Vortices in Accretion Disks // ApJ. — 2009. — Vol. 693. — Pp. 85–96.
- [134] *Heinemann T., Papaloizou J. C. B.* The excitation of spiral density waves through turbulent fluctuations in accretion discs - I. WKBJ theory // MNRAS. — 2009. — Vol. 397. — Pp. 52–63.
- [135] *Heinemann T., Papaloizou J. C. B.* The excitation of spiral density waves through turbulent fluctuations in accretion discs - II. Numerical simulations with MRI-driven turbulence // MNRAS. — 2009. — Vol. 397. — Pp. 64–74.
- [136] *Heinemann T., Papaloizou J. C. B.* A weakly non-linear theory for spiral density waves excited by accretion disc turbulence // MNRAS. — 2012. — Vol. 419. — Pp. 1085–1096.
- [137] *Squire J., Bhattacharjee A.* Magnetorotational Instability: Nonmodal Growth and the Relationship of Global Modes to the Shearing Box // ApJ. — 2014. — 12. — Vol. 797. — P. 15.
- [138] *Squire J., Bhattacharjee A.* Nonmodal Growth of the Magnetorotational Instability // Phys. Rev. Lett.. — 2014. — Vol. 113, no. 2. — P. 025006.

- [139] *Nath S. K., Mukhopadhyay B.* Origin of nonlinearity and plausible turbulence by hydromagnetic transient growth in accretion disks: Faster growth rate than magnetorotational instability // *Phys. Rev. E.* — 2015. — Vol. 92, no. 2. — P. 023005.
- [140] *Singh Bhatia T., Mukhopadhyay B.* Exploring non-normality in magnetohydrodynamic rotating shear flows: Application to astrophysical accretion disks // *Physical Review Fluids.* — 2016. — Vol. 1, no. 6. — P. 063101.
- [141] *Раздобурдин Д. Н., Журавлев В. В.* Транзиентная динамика возмущений в астрофизических дисках // *Успехи физических наук.* — 2015. — Т. 185, № 11. — С. 1129–1161.
- [142] Аккреционные процессы в астрофизике / Н. И. Шакура, К. А. Постнов, Г. В. Липунова и др. — Физматлит Москва, 2015. — С. 416.
- [143] Функциональный анализ / М. Ш. Бирман, Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин и др.; Под ред. С. Г. Крейн. — Москва: Наука, 1972.
- [144] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Под ред. И. Г. Араманович. — Москва: Наука, 1984.
- [145] *Schmid P. J.* Nonmodal Stability Theory // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2007. — Vol. 39. — Pp. 129–162.
- [146] *Farrell B. F., Ioannou P. J.* Generalized Stability Theory. Part I: Autonomous Operators // *Journal of the Atmospheric Sciences.* — 1996. — 07. — Vol. 53. — Pp. 2025–2040.
- [147] *Раздобурдин Д. Н., Журавлёв В. В.* Оптимальный рост малых возмущений в тонких газовых дисках // *Письма в Астрономический журнал.* — 2012. — Т. 38. — С. 1–11.
- [148] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа / Под ред. Е. А. Горин, В. М. Гринберг. — Москва: Наука, 1968.

- [149] *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Продолжение курса / Под ред. А. Н. Тихонов. — Москва: изд-во МГУ, 1987.
- [150] *Golub G. H., Reinsch C.* Singular value decomposition and least squares solutions // *Numer. Math.* — 1970. — 4. — Vol. 14. — Pp. 403–420.
- [151] *Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix Computations. — Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [152] *Hanifi A., Schmid P. J., Henningson D. S.* Transient growth in compressible boundary layer flow // *Phys. Fluids.* — 1996. — 03. — Vol. 8. — Pp. 826–837.
- [153] *Luchini P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2000. — 09. — Vol. 404. — Pp. 289–309.
- [154] *Andersson P., Berggren M., Henningson D. S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Physics of Fluids.* — 1999. — Vol. 11. — Pp. 134–150.
- [155] *Farrell B. F., Ioannou P. J.* Generalized Stability Theory. Part II: Nonautonomous Operators. // *Journal of the Atmospheric Sciences.* — 1996. — Vol. 53. — Pp. 2041–2053.
- [156] *Corbett P., Bottaro A.* Optimal linear growth in swept boundary layers // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2001. — 05. — Vol. 435. — Pp. 1–23.
- [157] *Guégan A., Schmid P. J., Huerre P.* Optimal energy growth and optimal control in swept Hiemenz flow // *Journal of Fluid Mechanics.* — 2006. — 11. — Vol. 566. — Pp. 11–45.
- [158] *Gunzburger M. D.* Perspectives in Flow Control and Optimization / Ed. by John A. Burns. — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

- [159] *Марчук Г. И.* Построение сопряженных операторов в нелинейных задачах математической физики // *Математический сборник*. — 1998. — Т. 189, № 10. — С. 75–88.
- [160] Optimal wave packets in a boundary layer and initial phases of a turbulent spot / S. Cherubini, J.-C. Robinet, A. Bottaro, P. de Palma // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2010. — Vol. 656. — Pp. 231–259.
- [161] The minimal seed of turbulent transition in the boundary layer / S. Cherubini, P. de Palma, J.-C. Robinet, A. Bottaro // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2011. — Vol. 689. — Pp. 221–253.
- [162] *Cherubini S., De Palma P.* Nonlinear optimal perturbations in a Couette flow: bursting and transition // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2013. — Vol. 716. — Pp. 251–279.
- [163] *Kato S., Fukue J., Mineshige S.* Black-Hole Accretion Disks — Towards a New Paradigm —. — Kyoto University Press (Kyoto, Japan),, 2008.
- [164] *Sekiya M., Miyama S. M.* The stability of a differentially rotating cylinder of an incompressible perfect fluid // MNRAS. — 1988. — Vol. 234. — Pp. 107–114.
- [165] *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) / Под ред. В. П. Маслов. — Москва: Мир, 1965.
- [166] *Zhuravlev V. V., Razdoburdin D. N.* A study of the transient dynamics of perturbations in Keplerian discs using a variational approach // MNRAS. — 2014. — 07. — Vol. 442. — Pp. 870–890.
- [167] *Razdoburdin D. N.* Transient dynamics of large scale vortices in Keplerian disk // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. — 2016. — Vol. 29. — P. 355–364.
- [168] *Bisnovatyi-Kogan G. S., Blinnikov S. I.* Disk accretion onto a black hole at subcritical luminosity // A&A. — 1977. — Vol. 59. — Pp. 111–125.



- [169] *Shakura N. I., Sunyaev R. A., Zilitinkevich S. S.* On the turbulent energy transport in accretion discs // *A&A.* — 1978. — Vol. 62. — Pp. 179–187.
- [170] *Lynden-Bell D., Ostriker J. P.* On the stability of differentially rotating bodies // *MNRAS.* — 1967. — Vol. 136. — P. 293.
- [171] *Frank J., Robertson J. A.* Numerical studies of the dynamical stability of differentially rotating tori // *MNRAS.* — 1988. — 05. — Vol. 232. — Pp. 1–33.
- [172] *Olver Piter.* Introduction to Partial Differential Equations. — Springer International Publishing, 2014.
- [173] *Рухтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Том 2 / Под ред. И. Д. Софронова. — Москва: Мир, 1984.
- [174] *Lominadze D. G., Chagelishvili G. D., Chanishvili R. G.* The Evolution of Nonaxisymmetric Shear Perturbations in Accretion Disks // *Soviet Astronomy Letters.* — 1988. — 09. — Vol. 14, no. 5. — P. 364.
- [175] *Razdoburdin D. N., Zhuravlev V. V.* Transient growth of perturbations on scales beyond the accretion disc thickness // *MNRAS.* — 2017. — Vol. 487, no. 1. — Pp. 849–872.
- [176] *Zhuravlev V. V., Ivanov P. B.* A fully relativistic twisted disc around a slowly rotating Kerr black hole: derivation of dynamical equations and the shape of stationary configurations // *MNRAS.* — 2011. — Vol. 415. — Pp. 2122–2144.
- [177] *Paczynsky B., Wiita P. J.* Thick accretion disks and supercritical luminosities // *A&A.* — 1980. — Vol. 88. — Pp. 23–31.
- [178] *Nowak M. A., Wagoner R. V.* Diskoseismology: Probing accretion disks. I - Trapped adiabatic oscillations // *ApJ.* — 1991. — Vol. 378. — Pp. 656–664.

- [179] *Kluźniak W., Lee W. H.* The swallowing of a quark star by a black hole // MNRAS. — 2002. — Vol. 335. — Pp. L29–L32.
- [180] *Abramowicz M. A.* The Paczyński-Wiita potential. A step-by-step "derivation". Commentary on: Paczyński B. and Wiita P. J., 1980, A&A, 88, 23 // A&A. — 2009. — Vol. 500. — Pp. 213–214.
- [181] *Paczynski B., Bisnovatyi-Kogan G.* A Model of a Thin Accretion Disk around a Black Hole // Acta Astron.. — 1981. — Vol. 31. — P. 283.
- [182] *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Fluid Mechanics. — Oxford: Pergamon Press, 1987.
- [183] *Charney J. G., Fjörtoft R., Von Neuman J.* Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation // *Tellus*. — 1950. — Vol. 2. — Pp. 237–254.