



МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет
вычислительной математики
и кибернетики



Г.И. Фалин, А.И. Фалин

ПРОГРЕССИИ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, РЯДЫ

Учебное пособие



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Г.И.Фалин, А.И.Фалин

ПРОГРЕССИИ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, РЯДЫ

*Учебное пособие
для абитуриентов и студентов 1 курсов университетов*

МАКС Пресс

МОСКВА – 2017

УДК 512 (075.8)
ББК 22.141я73
Ф 19

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова*

Рецензенты:

Э.А.Шагиров – доцент, к.ф.м.н. (ВМК МГУ им.М.В.Ломоносова)
С.А.Волошин – доцент, к.ф.м.н. (ВМК МГУ им.М.В.Ломоносова)

Г.И.Фалин, А.И.Фалин.

Прогрессии, последовательности, ряды: *Учебное пособие для абитуриентов и студентов 1 курсов университетов.* – М.: МАКС Пресс, 2017 – 132 с.
ISBN 978-5-317-05515-8

В книге собрано около 200 задач по математике, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГУ им.М.В.Ломоносова, университеты Кембриджа и Оксфорда. Эти задачи охватывают несколько важных тем школьной, довузовской и начальной университетской математики: арифметическая и геометрическая прогрессия, последовательности, суммирование конечных и бесконечных рядов. Каждая задача снабжена или ответом, или подробным решением.

Книга предназначена для абитуриентов и студентов первых курсов университетов, а также для преподавателей.

Ключевые слова: арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, последовательность, суммирование, бесконечный ряд

УДК 512 (075.8)
ББК 22.141я73

G.I.Falin, A.I.Falin

Progressions, Sequences, Series: a workbook for prospective and first-year undergraduate university students. – М.: MAK S Press, 2017 – 132 p.

The book is a collection of about 200 mathematical problems from past admissions tests of Lomonosov Moscow State University, University of Cambridge and University of Oxford. The problems cover several important topics of school, pre-u and the first-year university mathematics: arithmetic and geometric progressions, sequences, summation of both finite and infinite series. Each problem comes either with the answer or with a detailed solution.

The book is intended for prospective and first-year undergraduate university students as well as for teachers.

Key words: arithmetic progression, geometric progression, sequence, summation, infinite series

ISBN 978-5-317-05515-8

© Издательство ООО «МАКС Пресс», 2017
© Фалин Г.И., Фалин А.И., 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
1 Арифметическая прогрессия	7
1.1 Типичные задачи с решениями	7
1.2 Задачи для самостоятельного решения	22
2 Геометрическая прогрессия	29
2.1 Типичные задачи с решениями	29
2.2 Задачи для самостоятельного решения	38
3 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	43
3.1 Типичные задачи с решениями	43
3.2 Задачи для самостоятельного решения	47
4 Разные типы прогрессий	49
4.1 Типичные задачи с решениями	49
4.2 Задачи для самостоятельного решения	54
5 Последовательности	57
5.1 Типичные задачи с решениями	57
5.2 Задачи для самостоятельного решения	84
6 Суммирование конечных числовых последовательностей	93
6.1 Типичные задачи с решениями	93
6.2 Задачи для самостоятельного решения	108
7 Числовые ряды	113
7.1 Типичные задачи с решениями	113
7.2 Задачи для самостоятельного решения	122
Об авторах	131

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выдающийся советский и русский математик В.И.Арнольд в статье «Математический тривиум» (Успехи Математических Наук, 1991, том 46, вып1, стр. 225-232) пишет:

«Чем определяется уровень подготовки математика? Ни перечень курсов, ни их программы уровень не определяют. Единственный способ зафиксировать, чему мы действительно научили своих студентов – это перечислить задачи, которые они должны уметь решать в результате обучения.»

Разделяя эту точку зрения академика Арнольда, мы решили подготовить предлагаемое вниманию читателя учебное пособие.

Оно составлено на основе тщательного анализа условий и методов решений задач на прогрессии, числовые последовательности и ряды, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике в МГУ им.М.В.Ломоносова, университетских олимпиадах (которые фактически являются предварительными экзаменами), задач заочных туров и тестов, задач выпускных экзаменов подготовительного отделения, а также задач вступительных экзаменов на математические специальности двух ведущих мировых университетов: университета Оксфорда (Mathematics Admissions Test – MAT) и университета Кембриджа (Sixth Term Examination Papers – STEP).

Задачи сгруппированы по типам, что позволяет составить представление об основных темах, затрагиваемых на экзаменах, а также основных методах решения задач на прогрессии, числовые последовательности и ряды. Ко всем задачам даны ответы. Для 40% задач (это наиболее характерные и/или сложные задачи) приведены подробные решения. Условия некоторых задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в университеты Оксфорда и Кембриджа, отредактированы, чтобы облегчить их понимание.

Для каждой задачи, предлагавшейся в МГУ, мы указываем факультет, год и месяц, когда проводился экзамен (если в упомянутом году экзамен на этот факультет проводился только в июле, то месяц не указывается), номер задачи в варианте. Для названий факультетов используются

обычные университетские сокращения: мех-мат (механико-математический факультет), ВМК (факультет вычислительной математики и кибернетики), Севастополь (Черноморский филиал МГУ), Ташкент (филиал МГУ в г.Ташкенте), «Покори Воробьёвы горы» – олимпиада МГУ, проводимая совместно с газетой «Московский комсомолец», «Ломоносов» – олимпиада МГУ, которая проводится весной, начиная с 2005г., ДВИ – дополнительное вступительное испытание по математике, которое проводится с 2011 года (по одному и тому же комплексу вариантов на все факультеты МГУ).

Следует иметь в виду, что различия в подходах к школьному и довузовскому образованию в России и Великобритании приводит к существенным отличиям в программах вступительных экзаменов. В частности, в Великобритании абитуриенты должны владеть основами высшей математики в объёме примерно первого курса отечественного вуза. Поэтому на вступительных экзаменах в университеты Оксфорда и Кембриджа предлагают задачи на ряды, в то время как на вступительных экзаменах в МГУ ряды появляются только в их простейшей форме – сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Мы надеемся, что книга поможет абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ, школьникам, которые ориентируются на высокую оценку по ЕГЭ, а также студентам-математикам первого курса, изучающим математический анализ. Книга также будет интересна преподавателям математического анализа, которые смогут ознакомиться с методикой проверки знаний по темам «последовательности» и «ряды» в ведущих мировых университетах.

д.ф.м.н., проф. Г.И.Фалин
falin@math.msu.su

к.ф.м.н., доцент А.И.Фалин
falin.anatoly@gmail.com

10 марта 2017

Об авторах

Фалин Геннадий Иванович – профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, доктор физико-математических наук, лауреат премии имени М.В. Ломоносова за педагогическую работу.

В МГУ читает лекции и руководит семинарами по стохастическим моделям компьютерных и коммуникационных сетей, теории риска, математике финансов и инвестиций, актуарной математике, исследованию операций, методике преподавания математики и т.д. Читал курсы лекций и выполнял научные исследования в университетах Великобритании, Канады, Испании и других стран.

Опубликовал более 10 книг и брошюр по школьной математике и около 60 учебно-методических статей, посвященных подготовке к вступительным экзаменам в МГУ, преподаванию элементов теории вероятностей и статистики в средней школе, проблемам ЕГЭ, зарубежным программам и методикам преподавания математики в школе и довузовской подготовки.

Фалин Анатолий Иванович -- доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, кандидат физико-математических наук.

В 2011 году присвоено почётное звание "Заслуженный преподаватель Московского университета".

Область научных интересов: асимптотические методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, приложения теории вероятностей, методика преподавания элементарной математики.

Автор более 10 книг и брошюр и около 40 статей в ведущих отечественных журналах для учителей и школьников.

Учебное издание

ФАЛИН Геннадий Иванович

ФАЛИН Анатолий Иванович

ПРОГРЕССИИ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, РЯДЫ

Учебное пособие

для абитуриентов и студентов I курсов университетов

Отпечатано с готового оригинал-макета
в издательстве ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД №00510 от 01.12.99 г.

Подписано в печать 22.03.2017 г.
Формат 60х90 1/16. Усл. печ.л. 8,25 Тираж 100 экз. Заказ 056

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им.М.В.Ломоносова
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/93 Тел/Факс 8(495)939-3891