Неравенства С.Н. Бернштейна для суммы модулей коэффициентов тригонометрических многочленов

С. Б. Гашков, С. В. Кравцев

1 Введение

Сначала сформулируем несколько задач.

Первая из них предлагалась на Московской олимпиаде 2014 г.

Задача 1. *Найдите все такие a и b, что $|a|+|b| \geq 2/\sqrt{3}$ и при всех x выполнено неравенство $|a\sin x + b\sin 2x| \leq 1$.*

Первоначальная формулировка была такова:

Задача 2. *Доказать, что если при всех x выполнено неравенство*

$$|b_1 \sin x + b_2 \sin 2x| \leq 1,$$

где b_i — постоянные коэффициенты, то

$$|b_1| + |b_2| \leq 2/\sqrt{3},$$

причем равенство возможно лишь когда $|b_1| = 4/\sqrt{27}, |b_2| = 2/\sqrt{27}$.

Задача 3. *Если для многочлена $t(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$ выполняются неравенства*

$$\begin{cases} \left|t\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right| = \left|b_1 \sin\frac{2\pi}{7} + b_2 \sin\frac{4\pi}{7} + b_3 \sin\frac{6\pi}{7}\right| \leq 1 \\ \left|t\left(\frac{4\pi}{7}\right)\right| = \left|b_1 \sin\frac{4\pi}{7} - b_2 \sin\frac{\pi}{7} - b_3 \sin\frac{5\pi}{7}\right| \leq 1 \\ \left|t\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right| = \left|b_1 \sin\frac{6\pi}{7} - b_2 \sin\frac{5\pi}{7} + b_3 \sin\frac{4\pi}{7}\right| \leq 1 \end{cases},$$

то выполняется неравенство $|b_1| + |b_2| + |b_3| \leq \frac{6}{\sqrt{7}}$.

Задача 4. *Проверить, что многочлен $\frac{2\sqrt{7}}{7}\sin x + \frac{2\sqrt{7}}{7}\sin 2x - \frac{2\sqrt{7}}{7}\sin 3x$ удовлетворяет неравенствам из предыдущей задачи, и, тем самым, неравенство $|b_1| + |b_2| + |b_3| \leq \frac{6}{\sqrt{7}}$ нельзя улучшить.*

Можно добавить еще несколько подобных задач, но ограничимся этими. Прежде, чем читать дальше, рекомендуем попробовать решить хотя бы одну из них.

Далее будут доказаны следующие замечательные (и не заслужено мало известные) неравенства для суммы модулей коэффициентов тригонометрических многочленов, частные случаи которых были сформулированы выше.

Теорема 1 (С.Н.Бернштейн). *Пусть нечетный действительный тригонометрический многочлен*

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

удовлетворяет неравенствам $|t_n(2\pi k/(2n+1)| \le 1$, $k = 1, \dots, n$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| \le \sqrt{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Неравенство точное и достигается при нечетном n, *простом* $p = 2n+1$ *и* [1]

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{k}{2n+1} \right),\ k = 1, \dots, n.$$

Пусть четный действительный тригонометрический многочлен

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$$

удовлетворяет условию $t_n(0) = 0$ *и неравенствам* $|t_n(2\pi k/(2n+1)| \le 1$, $k = 1, \dots, n$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \sqrt{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Неравенство точное и достигается при четном n, *простом* $p = 2n+1$ *и*

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{k}{2n+1} \right),\ k = 1, \dots, n.$$

Эти неравенства (а также ряд других) были найдены С. Н. Бернштейном чуть больше ста лет назад (см. [1]), причем в их доказательстве неожиданно оказались задействованы не самые тривиальные теоретико-числовые факты.

[1] Ниже $\left(\frac{a}{p}\right)$ используется для обозначения символа Лежандра, определение его можно найти далее в тексте.

Рис. 1: Академик АН СССР Сергей Натанович Бернштейн (1880-1968)

2 Квадратичный закон взаимности

Напомним относящиеся к нему понятия. Если m — целое, и $n > 1$ — натуральное число, то существует единственные целые числа k и $0 \leq l < n$, для которых выполняется равенство $m = k \cdot n + l$, и число l в этом равенстве называется *остатком от деления* m на n. Два целых числа a, b называются *сравнимыми по модулю натурального числа* $n > 1$ (что обозначают как $a \equiv b \pmod{n}$), если при делении на n они дают одинаковые остатки. Если все сравнимые между собой целые числа объединить в одно подмножество множества целых чисел, то получится n таких подмножеств, соответствующих остаткам $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Перечислим несколько свойств *сравнений.*

Задача 5. *Докажите, что если* $a \equiv b \pmod{n}$, *и* $c \equiv d \pmod{n}$, *то* $a + c \equiv b + d \pmod{n}$, $a - c \equiv b - d \pmod{n}$, $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Указание: доказательства этих свойств вытекают из равенств $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$, $(b - d) - (a - c) = (b - a) - (d - c)$, $b \cdot d - a \cdot c = (b - a)d + (d - c)a$.

Тем самым, сравнимость чисел не нарушится, если к одному из них прибавить число, сравнимое с 0 по заданному модулю, если оба сравнимых числа умножить на одно и то же целое число или возвести их в одинаковую натуральную степень.

Из перечисленных свойств следует, что сравнение остается верным, если какое-либо его слагаемое переносится из одной части сравнения в другую его часть с изменением знака этого слагаемого на противоположный, или если возвести обе части сравнения в одинаковую степень.

Задача 6. *Докажите, что если* $a_i \equiv b_i \pmod n, i = 0, 1, \ldots, m$ *и* $x \equiv y \pmod n$, *то*

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0 \equiv b_m y^m + b_{m-1}y^{m-1} + \ldots + b_0 \pmod n.$$

Указание: применить предыдущую задачу.

Пусть n — простое число. Напомним следующее определение (и обозначение):

$\left(\frac{k}{n}\right) = 1$, если k равно остатку от деления квадрата некоторого целого числа на n;

$\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, если k делится на n

и $\left(\frac{k}{n}\right) = -1$ в оставшихся случаях.

Так определенная величина $\left(\frac{k}{n}\right)$ называется *символом Лежандра*; числа k, для которых он равен 1 называются *квадратичными вычетами по модулю* n, а числа для которых он равен -1 — *квадратичными невычетами.*

Справедлива

Теорема 2 (Квадратичный закон взаимности Эйлера-Гаусса)**.** *Для простых чисел* $p, q > 2$ *справедливо тождество*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

Иными словами, если хотя бы одно из чисел p, q при делении на 4 дает остаток 1, то число p является квадратом по модулю числа q если и только если число q является квадратом по модулю числа p. Если же оба числа p, q при делении на 4 дает остаток 3, то число p является квадратом по модулю числа q если и только если число q не является квадратом по модулю числа p. В ходе доказательства понадобится несколько лемм, в которых везде a обозначает целое число, а p — простое число.

Лемма 1 (Малая теорема Ферма)**.** *Справедливо сравнение* $a^p \equiv a \pmod p$.

Доказательство. Заметим, что все биномиальные коэффициенты

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}, k = 1, 2, \ldots, p-1,$$

делятся на p, поскольку множитель p в числителе дроби не может сократиться со знаменателем. Если теперь $m, n-$ целые числа, то из предыдущего наблюдения и формулы бинома следует, что каждое слагаемое справа в разложении

$$(m+n)^p - m^p - n^p = \binom{p}{1}m^{p-1}n^1 + \binom{p}{2}m^{p-2}n^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}m^1 n^{p-1}$$

делится на p, поэтому и левая часть равенства делится на p. Точно так же делится на p число $(l+m+n)^p-l^p-m^p-n^p$, если $l, m, n-$ целые числа. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить предыдущее наблюдение к правой части записи

$$(l+m+n)^p-l^p-m^p-n^p = (((l+m)+n)^p-(l+m)^p-n^p)+((l+m)^p-l^p-m^p).$$

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что выражение

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p - \sum_{i=1}^{n} a_i^p$$

всегда делится на p. Лемма получается теперь, если взять в последнем сравнении все слагаемые равными 1, а $n = a$. $\square$

Следствие 1. *Если p не делит a, то после деления сравнения $a^p \equiv a \pmod p$ на a получится верное сравнение $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, поскольку из условия $a \cdot (a^{p-1} - 1) = k \cdot p$ вытекает, что простое число p делит именно $a^{p-1} - 1$.*

Часто малую теорему Ферма формулируют так, как в этом следствии.

Сравнения вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod p, a_n \neq 0,$$

называют *сравнениями степени n.*

Лемма 2. *Любое сравнение*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod p$$

равносильно некоторому сравнению степени не выше $p - 1$.

Доказательство. Разделим многочлен $q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ на двучлен $x^p - x$, в результате получим $q(x) = (x^p - x) f(x) + r(x)$, причем степень остатка $r(x)$ не превосходит $p-1$. По малой теореме Ферма верно сравнение $x^p - x \equiv 0 \pmod p$, поэтому исходное сравнение равносильно сравнению $r(x) \equiv 0 \pmod p$. $\square$

Лемма 3. *Если сравнение*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod p$$

степени n имеет более n различных решений, то все коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ кратны p (и тогда сравнение тривиально, то есть все целые числа являются его решениями).

Доказательство. Если рассматриваемое сравнение имеет по меньшей мере $n+1$ различное решение $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$, $0 \le x_i < p$, то многочлен $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ можно записать в виде

$$q(x) = b_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)+$$

$$+b_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})+$$

$$+b_{n-2}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2}) + \ldots + b_1(x-x_1) + b_0.$$

В самом деле, достаточно положить $b_n = a_n$, затем взять коэффициент b_{n-1} равным коэффициенту при x^{n-1} в разности

$$q(x) - a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

после чего взять коэффициент b_{n-2} равным коэффициенту при x^{n-2} в разности

$$q(x) - a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})(x-x_n)-$$

$$-b_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})$$

и т.д. Но тогда $q(x_1) = b_0 \equiv 0 \pmod p$, то есть p делит b_0,

$$q(x_2) = b_0 + b_1(x_2-x_1) \equiv b_1(x_2-x_1) \equiv 0 \pmod p,$$

и тогда p делит b_1, поскольку $|x_2 - x_1| < p$. Последовательно подставляя далее $x = x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$, убеждаемся, что все коэффициенты $b_i, i = 1, 2, \dots, n$, делятся на p, но тогда и все коэффициенты многочлена $q(x)$ делятся на p, поскольку они являются суммами произведений чисел $b_i, i = 1, 2, \dots, n$, на целые числа. □

Следствие 2. *Всякое нетривиальное*[2] *сравнение по модулю простого числа p равносильно сравнению степени не выше $p-1$ и имеет не более чем $p-1$ решение.*

Доказательство. Это следствие непосредственно вытекает лемм 2 и 3. □

Лемма 4 (Критерий Эйлера)**.** *. Если число a не кратно p, то*

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p.$$

[2]У которого не все целые числа являются решениями.

Доказательство. Согласно малой теореме Ферма, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, что можно также переписать в виде

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \cdot \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod p.$$

Разность сомножителей в левой части последнего сравнения равна 2, поэтому только один из них делится на $p > 2$. Рассмотрим первый из двух возможных случаев: число a является квадратичным вычетом по модулю p, то есть сравнение $a \equiv x^2 \pmod p$ имеет решение, тогда то же самое решение имеет и сравнение $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, которое получается из предыдущего сравнения почленным возведением в степень $\frac{p-1}{2}$. и повторным применением малой теоремы Ферма. Осталось заметить, что сравнение $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ имеет степень $\frac{p-1}{2}$, поэтому, согласно следствию 10, оно не может иметь более $\frac{p-1}{2}$ решений, то есть множество решений этого сравнения исчерпывается квадратичными вычетами. Тем самым, все квадратичные невычеты удовлетворяют сравнению $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$. □

Следующие две задачи пригодятся в дальнейшем.

Задача 7 (Эйлер-Лежандр)**.** *Доказать для простого числа n тождества*

$$\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{km}{n}\right), \ \left(\frac{k}{n}\right)^2 = 1, \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{n-k}{n}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Указание: применить критерий Эйлера.

Задача 8 (Эйлер-Лежандр)**.** *Доказать для простого числа n вида $4l+3$ тождество $\left(\frac{k}{n}\right) = -\left(\frac{n-k}{n}\right)$, а для простого числа n вида $4l+1$ тождество $\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{n-k}{n}\right)$.*

Указание: применить критерий Эйлера.

Прежде чем сформулировать следующую лемму, введем необходимые дополнительные обозначения. Ранее уже говорилось, что если все целые числа, сравнимые между собой по модулю фиксированного числаn, объединить в одно подмножество множества целых чисел, то получится n таких подмножеств, соответствующих остаткам $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Заметим, что эти остатки мы считали обозначениями получающихся подмножеств. Понятно, что можно ввести и иные обозначения для подмножеств чисел, сравнимых между собой по фиксированному модулю. Достаточно просто выбрать по одному числу из каждого такого подмножеств и назначить выбранные числа обозначениями подмножеств. Выбранные числа образуют набор, который называется *полной системой вычетов по модулю* n.

Например, для сравнения по простому модулю $p > 2$ удобно выбрать в качестве набора обозначений классов сравнимых чисел набор $\{-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}\}$. Такой выбор интересен тем, что из каждого подмножества был выбран его элемент, имеющий наименьшую абсолютную величину среди всех элементов этого подмножества. Набор вычетов с указанным свойством называют набором *абсолютно наименьших вычетов.*

Обозначим символом Ω положительную часть этого набора:

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, (p-3)/2, (p-1)/2\}.$$

Для заданного целого числа a и каждого $s \in \Omega$ найдем его абсолютно наименьший вычет по модулю p: $a \cdot s \equiv t_s \pmod p$, после чего положим $\varepsilon_s = 1$, если $t_s > 0$ и $\varepsilon_s = -1$, если $t_s < 0$. Будем также считать, что $t_s = \varepsilon_s \cdot r_s, r_s > 0$. Если из полной системы вычетов удалить все вычеты, которые имеют общий делитель, больший 1, с модулем сравнения, то оставшийся набор взаимно простых с модулем вычетов называется *приведенной системой вычетов.*

Число элементов в приведенной системе вычетов по модулю n равно числу тех натуральных чисел из набора $1, 2, \ldots, n-1$, которые взаимно просты с n. Это число обозначается символом $\varphi(n)$, где φ —*функция Эйлера.* Из определения приведенной системы вычетов следует, что любые $\varphi(n)$ попарно не сравнимых по модулю n и взаимно простых с этим модулем целых чисел образуют приведенную систему вычетов по модулю n.

Лемма 5. *Если целое число a взаимно просто с модулем n и переменная x пробегает приведенную систему вычетов по модулю n, то произведение $a \cdot x$ также пробегает приведенную систему вычетов по этому модулю.*

Доказательство. Поскольку различные значения переменной x попарно несравнимы и взаимно просты, как и число a, с модулем, то и числа ax будут попарно несравнимы и взаимно просты с модулем, осталось заметить, что таких чисел ровно $\varphi(n)$. $\square$

Лемма 6 (Лемма Гаусса). *Если $p > 2$ — простое, то $\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{s \in \Omega} \epsilon_s$.*

Доказательство. Согласно лемме 5, множество чисел $\{\pm a \cdot s | s \in \Omega\}$ является приведенной системой вычетов по модулю p. Соответствующие абсолютно наименьшие вычеты составляют набор

$$\{\pm\varepsilon_s r_s | s \in \Omega\} = \{-\varepsilon_1 r_1, \varepsilon_1 r_1, -\varepsilon_2 r_2, \varepsilon_2 r_2, -\varepsilon_3 r_3, \ldots, -\varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_{\frac{p-1}{2}}, \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_{\frac{p-1}{2}}\}.$$

Подмножество положительных вычетов из последнего набора, то есть множество $\{r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}\}$, совпадает со множеством чисел $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, то есть со множеством Ω. Перемножим теперь сравнения

$$\begin{cases} a \cdot 1 \equiv \varepsilon_1 r_1 \pmod p \\ a \cdot 2 \equiv \varepsilon_2 r_2 \pmod p \\ \cdots \\ a \cdot \frac{p-1}{2} \equiv \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_{\frac{p-1}{2}} \pmod p \end{cases}$$

и разделим обе части сравнения-произведения на число

$$1 \cdot 2 \cdots \ (p-1)/2 = r_1 r_2 \cdots r_{\frac{p-1}{2}}.$$

После деления имеем сравнение $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \pmod p$. Остается применить критерий Эйлера. □

Лемма 7 (Лемма Эйзенштейна)**.** *Для каждого нечетного натурального числа $2n+1$ справедливо тождество*

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = (-4)^n \prod_{1 \le k \le n} \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{2\pi k}{2n+1}\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sin(2n+1)x = \operatorname{Im}\left((e^{ix})^{2n+1}\right) = \operatorname{Im}\left((\cos x + i \sin x)^{2n+1}\right),$$

если в правой части этого равенства воспользоваться формулой бинома Ньютона, то мнимая единица появится только в тех слагаемых, которые будут содержать множитель $i \sin x$ в нечетной степени, и тогда множитель $\cos x$ будет присутствовать в таких слагаемых непременно в четной степени, поскольку сумма степеней этих двух множителей всегда равна нечетному числу $2n+1$. Используя тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получаем, что левая часть доказываемого тождества является многочленом степени n от функции $\sin^2 x$. Числа $\frac{2\pi k}{2n+1}, k = 1, 2, \ldots, n$, обращают левую часть тождества в 0, и их число совпадает со степенью левой части как многочлена от $\sin^2 x$. поэтому нулями многочлена в левой части доказываемого тождества являются числа $\sin^2 \frac{2\pi k}{2n+1}, k = 1, 2, \ldots, n$, и только они, ведь их количество совпадает со степенью этого многочлена. Осталось проверить, что множитель перед произведением в правой части тождества выбран правильно. Для этого достаточно найти старший коэффициент многочлена относительно $\sin^2 x$ в левой части тождества. Так как указанный многочлен равен

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}x^{2k}(1-x^2)^{n-k},$$

его старший коэффициент (т.е. коэффициент при x^{2n}) равен

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}=(-1)^n 2^{2n}=(-4)^n,$$

потому, что в силу формулы бинома

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}=(1-1)^{2n+1}=0,\ \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}=(1+1)^{2n+1}=2^{2n+1}.$$

$\square$

Изложенное ниже доказательство закона взаимности содержится, например, в книге Ж.П. Серра "Курс арифметики"(М.: Мир , 1982.)[3]

Согласно лемме 6 для двух простых чисел $p, q > 2$ справедливо тождество

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\prod_{s\in\Omega}\epsilon_s.$$

Используя обозначения из доказательства этой леммы, имеем $q\cdot s=\varepsilon_s r_s$, поэтому, используя нечетность синуса,получаем $\sin\frac{2\pi qs}{p}=\varepsilon_s\sin\frac{2\pi r_s}{p}$. Перемножая эти равенства для всех индексов s, имеем (с учетом взаимной однозначности отображения $s\longrightarrow r_s$)

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\prod_{s\in\Omega}\epsilon_s=\prod_{s\in\Omega}\left(\frac{\sin\frac{2\pi qs}{p}}{\sin\frac{2\pi s}{p}}\right).$$

Применяя лемму 7 к сомножителям правой части последнего тождества (для $2n+1=q$), получаем

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\prod_{s\in\Omega}(-4)^{\dfrac{q-1}{2}}\prod_{1\le k\le\frac{q-1}{2}}\left(\sin^2\frac{2\pi s}{p}-\sin^2\frac{2\pi k}{q}\right)=$$

[3] Оно принадлежит ученику Гаусса Эйзенштейну.

$$= (-4)^{\frac{(q-1)(p-1)}{4}} \prod_{1\le k\le \frac{q-1}{2}, s\in\Omega} \left(\sin^2\frac{2\pi s}{p} - \sin^2\frac{2\pi k}{q}\right).$$

Меняя числа q и p ролями, точно так же получаем

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-4)^{\frac{(q-1)(p-1)}{4}} \prod_{1\le k\le \frac{q-1}{2}, s\in\Omega} \left(\sin^2\frac{2\pi k}{q} - \sin^2\frac{2\pi s}{p}\right).$$

Осталось заметить, что соответствующие множители в правых частях двух последних тождеств противоположны по знаку, причем число этих множителей равно $\frac{(q-1)(p-1)}{4}$, поэтому

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{(q-1)(p-1)}{4}},$$

что и завершает доказательство.

Для доказательства неравенств С.Н. Бернштейна понадобится несколько тригонометрических тождеств.

Задача 9. *Докажите, что при $l < m$ справедливы тождества*

$$\sum_{k=1}^{m} \sin(x + 2\pi kl/m) = 0 = \sum_{k=1}^{m} \cos(x + 2\pi kl/m).$$

Указание. Сумма векторов, выходящих из начала координат в точки на единичной окружности, образующие правильный $n-$угольник, равна нулю. Чтобы доказать этот факт, достаточно повернуть плоскость с изображенными на ней векторами против часовой стрелки на угол $2\pi/m$. Если бы сумма рассматриваемых векторов была бы ненулевой, то она тоже должна была бы повернуться на этот угол. С другой стороны, при таком повороте каждый вектор превратился в соседний вектор, то есть набор векторов не изменился и сумма измениться не должна. Осталось заметить, что

$$\sum_{k=1}^{m} \cos(x + 2\pi kl/m) + \sum_{k=1}^{m} i\sin(x + 2\pi kl/m) = \sum_{k=1}^{m} e^{i(x+2\pi kl/m)},$$

а последняя сумма геометрически изображается как раз как сумма векторов, выходящих из начала координат в точки на единичной окружности, образующие правильный $n-$угольник.

Задача 10. *Докажите, что при* $l < m/2$ *выполняются тождества*

$$\sum_{k=1}^{m} \sin(x+2\pi kl/m)\cos(y+2\pi ks/m) = 0 = \sum_{k=1}^{m} \sin(x+2\pi kl/m)\sin(y+2\pi ks/m),$$

$$\sum_{k=1}^{m} \cos(x+2\pi kl/m)\cos(y+2\pi ks/m) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \cos^2(x+2\pi kl/m) = m/2 = \sum_{k=1}^{m} \sin^2(x+2\pi kl/m).$$

Указание. Для этого достаточно выразить каждое слагаемое вида $\cos(x+la)\sin(y+sa)$, $\cos(x+la)\cos(y+sa)$, $\sin(x+la)\sin(y+sa)$ в виде линейной комбинации синусов или косинусов от $x+y+(l+s)a$ и $x-y+(l-s)a$, а каждый квадрат — через косинус двойного угла, и применить тождества задачи 9.

Задача 11. *Докажите, что для каждого действительного тригонометрического многочлена*

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

при $m > 2n, l \le n$ *справедливы тождества*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} t_n^2(x+2\pi k/m) = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)/2,$$

$$a_l = \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} t_n(2k\pi/m)\cos(2kl\pi/m),\ b_l = \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{m} t_n(2k\pi/m)\sin(2kl\pi/m).$$

Указание: применить тождества задачи 10.

Задача 12. *Докажите, что при каждом натуральном* $m \le 2n$ *справедливы тождества*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2mk\pi/(2n+1)) = \frac{-1}{2},\ \sum_{k=1}^{n} \sin^2(mk\pi/(2n+1)) = \frac{2n+1}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2(mk\pi/(2n+1)) = (2n-1)/4.$$

Указание: первое из этих тождеств сразу следует из тождеств задачи 10, остальные два тождества следуют из первого, если применить формулы двойного угла.

Далее понадобится замечательное тригонометрическое тождество

Теорема 3 (Гаусс)**.** *При простом $n = 4m + 1$ и $l = 1, \dots, n-1$*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos(2kl\pi/n) = \pm\sqrt{n} \left(\frac{l}{n}\right), \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin(2kl\pi/n) = 0.$$

При простом $n = 4m + 3$ и и $l = 1, \dots, n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin(2kl\pi/n) = \pm\sqrt{n} \left(\frac{l}{n}\right), \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos(2kl\pi/n) = 0.$$

На самом деле Гаусс доказал, что в этих формулах везде знак плюс, но доказательство сложно, а нас устроит более слабое утверждение.

Но сначала докажем вспомогательные тождества, также найденные Гауссом.

Задача 13. *При простом n и $l = 1, \dots, n$*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos(2kl\pi/n) = \left(\frac{l}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos(2k\pi/n),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin(2kl\pi/n) = \left(\frac{l}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin(2k\pi/n).$$

Указание. При l кратном n обе части формул нулевые, так как $\left(\frac{l}{n}\right) = 0$ и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Если l не кратно n, то

$$\left(\frac{l}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos(2kl\pi/n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{kl}{n}\right) \cos(2kl\pi/n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos(2k\pi/n).$$

потому что остатки от деления kl на n при $k = 1, \dots, n-1$ пробегают все числа от 1 до $n-1$ по одному разу. С синусом доказательство аналогично.

Теперь все готово для доказательства теоремы Гаусса. Удобно использовать комплексное обозначение

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

и тождества доказывать одновременно (равенство нулю в них легко проверить непосредственно). Тогда эти тождества можно записать в компактном виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} = \pm\sqrt{n}$$

при $n = 4m + 1$ и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} = \pm i\sqrt{n}$$

при $n = 4m + 3$, или в общем случае

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n}\right)^2 = n(-1)^{(n-1)/2}.$$

Далее будем использовать обозначение $g_l = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n}$. Из доказанных тригонометрических тождеств следует, что

$$g_l^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n}\right)^2 = g_1^2 = g^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2k\pi i/n}\right)^2.$$

Вычислим двумя способами сумму $\sum\limits_{l=1}^{n} g_l g_{n-l}$. С одной стороны, согласно задаче 7,

$$g_l g_{n-l} = \left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{n-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) g^2, \; g_0 = g_n = 0,$$

поэтому сумма равна $(n-1)\left(\frac{-1}{n}\right) g^2$. С другой стороны непосредственно после раскрытия скобок имеем

$$g_l g_{n-l} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{m}{n}\right) e^{2m(n-l)\pi i/n} = \sum_{k,m=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) e^{2(k-m)l\pi i/n},$$

откуда

$$(n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right) g^2 = \sum_{l=1}^{n} g_l g_{n-l} = \sum_{k,m=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) \sum_{l=1}^{n} e^{2(k-m)l\pi i/n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 n = \sum_{k=1}^{n-1} n = n(n-1),$$

и теорема Гаусса доказана.

Задача 14. *Докажите, что для любого набора действительных чисел* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *справедливо неравенство Коши:*

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| \leq \sqrt{n(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)},$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все числа $|b_i|$ *равны.*

Наконец, мы можем доказать теорему С.Н.Бернштейна. Напомним ее формулировку.

Пусть нечетный действительный тригонометрический многочлен

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

удовлетворяет неравенствам $|t_n(2\pi k/(2n+1)| \leq 1,\ k = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| \leq \sqrt{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Неравенство точное и достигается при простом $p = 2n+1$, *нечетном* n *и*

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{k}{2n+1}\right),\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть четный действительный тригонометрический многочлен

$$t_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx$$

удовлетворяет условию $t_n(0) = 0$ *и неравенствам* $|t_n(2\pi k/(2n+1)| \leq 1$, $k = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sqrt{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Неравенство точное и достигается при простом $p = 2n+1$, *четном* n, *и*

$$a_k = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{k}{2n+1}\right),\ k = 1, 2, \ldots, n$$

Доказательство. Рассмотрим случай нечетного многочлена. Воспользуемся тождеством из задачи 11,в котором выберем $x = 0$, $m = 2n+1 > 2n$, и тогда

$$\sum_{k=1}^{2n+1} t_n(2k\pi/(2n+1))^2 = \frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Заметим, что середина отрезка $\left[\frac{2k\pi}{2n+1}, \frac{2(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right]$ находится в точке π, поэтому $t_n(2k\pi/(2n+1)) = -t_n(2(2n+1-k)\pi/(2n+1))$ в силу тождества $t_n(x) = -t_n(2\pi - x)$, справедливого для всех нечетных тригонометрических многочленов. Таким образом, верхнюю границу индекса суммирования в левой части написанного выше равенства можно понизить до n, если одновременно вдвое уменьшить его правую часть (слагаемое при $k = 2n+1$ равно нулю). Следовательно, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} t_n(2k\pi/(2n+1))^2 = \frac{2n+1}{4}\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

С другой стороны, из условия теоремы следует, что все слагаемые левой части последнего равенства не превосходят единицы, поэтому их сумма не превосходит числа слагаемых, то есть n. Тем самым доказано неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le \frac{4n}{2n+1}.$$

Чтобы получить выписанную в условии теоремы оценку для суммы модулей коэффициентов, воспользуемся неравенством Коши. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| \le \sqrt{n\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \le \sqrt{\frac{4n}{2n+1}}\sqrt{n} = \sqrt{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

и неравенство теоремы в случае нечетного тригонометрического многочлена доказано. Конечно, все изящество этого результата проявится лишь тогда, когда мы докажем, что полученная оценка — точная, то есть ее уже не удастся улучшить, если рассматривать все множество нечетных тригонометрических многочленов порядка n с наложенными в условии неравенствами на значения этих многочленов. Для этого понадобятся тождества Гаусса.

Сначала заметим, что для коэффициентов, удовлетворяющих условию $|b_k| = 2/\sqrt{2n+1}$, $k = 1, \ldots, n$, неравенство теоремы превращается в равенство. Остается для каждого числа из некоторого бесконечного множества натуральных чисел n предъявить нечетный тригонометрический многочлен порядка n, коэффициенты которого удовлетворяют этому условию,а его значения - условию $|t_n(2\pi k/(2n+1)| \leq 1$, $k = 1, \ldots, n$, что и доказывает неулучшаемость полученных неравенств. Действительно, при простом $p = 2n + 1 = 4m + 3$ и

$$b_k = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{k}{2n+1} \right), \; k = 1, \ldots, n,$$

согласно тождеству Гаусса

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2n+1} \right) \sin(2kl\pi/n) = \pm\sqrt{(2n+1)/4}$$

имеем при любом $l = 1, \ldots, n$

$$t_n(2l\pi/n) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2kl\pi/n) = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2n+1} \right) \sin(2kl\pi/n) = \pm 1,$$

что и требовалось доказать. Четный случай аналогичен, и мы предлагаем читателю разобрать его самостоятельно, по аналогии с доказательством для нечетного тригонометрического многочлена.

Список литературы

[1] С.Н. Бернштейн Sur certaines fonctions periodiques qui s'ecartent le moins possible de zero. Сообщ. Харьковского математ. об-ва , сер.2 т.14, 1914, стр. 145-152.