



**12-Я ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

**МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ,
СЛОЖНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД**

им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского

15 ноября – 17 ноября 2022 года

Москва, Ленинградский проспект, 7

СБОРНИК ТРУДОВ

МОСКВА
2022

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт прикладной механики Российской академии наук
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов
управления Российской академии наук
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ, СЛОЖНЫХ И ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

**СБОРНИК ТРУДОВ
12-Й ВСЕРОССИЙСКОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ
им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского**

(15 – 17 ноября 2022 года, г. Москва)

**МОСКВА
2022**

«Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред».

Сборник трудов 12-й Всероссийской научной конференции с международным участием.

Москва, 15 – 17 ноября 2022 г. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2022. – 586 с.

ISBN 978-5-00166-850-3

**Конференция проведена в рамках
Празднования 300-летнего юбилея Российской академии наук**

В Сборник трудов включены работы участников конференции по направлениям: «Механика гетерогенных сред, адаптивных материалов, композитов и конструкций», «Аэро-, гидромеханика, реология структурно-сложных сред», «Проблемы горения и детонации сложных сред», «Вычислительные методы механики гетерогенных сред», «Высокоскоростной удар, распространение и взаимодействие волн в неоднородных средах и конструкциях» и «Геомеханика. Современные методы исследований».

Составители сборника:

Власов А.Н., Карнет Ю.Н., Муковникова И.И.

© ФГБУН Институт прикладной
механики РАН, 2022



ОБ УРАВНЕНИЯХ ТИПА ВЛАСОВА

Веденяпин В.В.¹, Аджиев С.З.², Мелихов И.В.²

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия*

²*МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются вывод уравнений гравитации и электродинамики в форме уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна. Рассматриваются свойства уравнения Власова-Пуассона и его приложения к построению периодических решений – волн Бернштейна-Грина-Крускала.

Кинетические уравнения типа Больцмана и Власова хорошо подходят для описания гетерогенных сред при соответствующем незначительном обобщении: нужно функцию распределения сделать зависящей от параметров, описывающих эту гетерогенность, в первую очередь по массе. Мы также положим, что функция распределения зависит от заряда. Итак, пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$ и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Известно, что уравнения типа Больцмана описывают короткодействующие взаимодействия [1-5], а уравнения типа Власова – далекодействующие. Уравнение Больцмана было выведено, как это ни странно, Максвеллом [1], но почему оно называется уравнением Больцмана – предмет отдельного разговора. В любом случае, Больцман трижды в яркой форме отказывается от этого уравнения в пользу Максвелла на одной странице [2]. Короткий ответ на этот вопрос – Больцман обессмертил это уравнение, доказав Н-теорему, теорему о росте энтропии [2]. В этой же работе [2] он заложил основы химической кинетики, обобщая дискретные модели уравнения Больцмана, как мы сказали бы сейчас, и доказывая для этих обобщений Н-теорему. В последующих исследованиях эта теорема обобщалась во многих направлениях, в частности, для уравнений коагуляции-фрагментации с обобщением уравнений Смолуховского, для квантовых уравнений Больцмана и их дискретных моделей (см. [3-5]). Уравнение Власова [6] прекрасно описывает далекодействие, поэтому используется в различных формах: существуют уравнения Власова-Пуассона (для гравитации, плазмы, и электронов), уравнение Власова-Максвелла, уравнение Власова-Эйнштейна и другие приставки к этому классу уравнений: все эти уравнения были введены за рубежом, и названия прижились. Уравнения типа Власова удобно выводить из принципа наименьшего действия. Здесь мы применим этот способ для вывода уравнения гравитации и электродинамики в форме уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна, а потом покажем его применение в более простых ситуациях.

В классических работах (см. [6,7]), уравнения для электромагнитных и гравитационных полей даются без вывода правых частей. Здесь мы предлагаем

вывод правых частей уравнений Максвелла и Эйнштейна в рамках уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна из классического, но немного более общего принципа наименьшего действия и применяем уравнения Гамильтона-Якоби для получения космологических решений.

1. Действие в общей теории относительности и уравнения для полей. Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ – функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$ и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Рассмотрим действие

$$S = -c \int m f(t, x, v, m, e) \sqrt{g_{\mu\nu}} u^\mu u^\nu d^2 x d^3 v dm de dt - \\ - \frac{1}{c} \int e f(t, x, v, m, e) A_\mu u^\mu d^2 x d^3 v dm de dt + \\ + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4 x + k_2 \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4 x, \quad (1)$$

где c – скорость света, $u^0 = c$ и $u^i = v^i$ ($i = 1, 2, 3$) – трёхмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i ($i = 1, 2, 3$) – координата, $g_{\mu\nu}(x, t)$ – метрика ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $A_\mu(x, t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(x, t) = \partial A_\nu(x, t) / \partial x^\mu - \partial A_\mu(x, t) / \partial x^\nu$ – электромагнитные поля. Здесь R – полная кривизна, Λ – лямбда-член Эйнштейна, $k_1 = -\frac{c^2}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\frac{1}{16\pi}$ – константы [7–10], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование.

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ . Такой способ вывода уравнений Власова-Максвелла и Власова-Эйнштейна использовался в работах [8–12]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \\ = c \int m \frac{f(t, x, v, m, e)}{2 \sqrt{g_{\alpha\phi}} u^\alpha u^\beta} u^\mu u^\nu d^3 v dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (2)$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению Гильберта тензором энергии-импульса. Он выписан впервые в таком виде в работах [11,12] в менее общем виде без распределения по массам и зарядам. Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова-Эйнштейна. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, x, v, m, e) d^3 v dm de. \quad (3)$$

Покажем, что вид действия (1) является более общим, чем в [6,7].

Для получения стандартного вида действия возьмем функцию распределения в виде δ -функции для одной частицы

$$f(t, x, v, m, e) = \delta(x - x'(t)) \delta(v - v'(t)) \delta(m - m') \delta(e - e'). \quad (4)$$

Подставляя (4) в действие (1) и опустив штрихи, получаем стандартные [6,7] выражения для всех слагаемых

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x, t)} u^\mu u^\nu dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(x, t) u^\mu dt + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4x + k_2 \int (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (5)$$

В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной. В равенстве (4) мы можем взять сумму дельта-функций и получить обычное действие [6,7] для конечной системы частиц: этим обосновывается единственность выбора более общего действия (1).

Этой же подстановкой получаются уравнения для гравитационного и электрического поля движущейся заряженной массивной частицы

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = m \frac{\delta(x - x'(t))}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}} u^\alpha u^\beta} u^\mu u^\nu - \frac{1}{2} k_2 F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (6)$$

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c^2} e u^\mu \delta(x - x'(t)). \quad (7)$$

Это система уравнений на метрику и электромагнитные поля точечной заряженной массы. Выпишем теперь уравнение для гравитационного поля точечной незаряженной покоящейся массы (задача Шварцшильда)

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = m \frac{\delta(x)}{2\sqrt{g^{00}} c^2} c \delta^{\mu\nu}. \quad (8)$$

2. Переход к гидродинамике и уравнению Гамильтона-Якоби в релятивистском случае уравнения Власова-Максвелла-Эйнштейна. Для вывода уравнений Власова-Максвелла-Эйнштейна в форме Гамильтона-Якоби нужно вывести его в импульсах [7,8]. Схема вывода уравнений типа Власова – это вывод уравнений для полей при заданном движении частиц и вывод уравнений движения частиц в заданных полях с переходом к уравнениям Лиувилля – следует общей схеме классических учебников [7]. Имеем часть действия (5) для движения частиц в заданных полях

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}} u^\mu u^\nu dt - \frac{e}{c} \int A_\mu u^\mu dt.$$

Мы получим уравнение движения

$$-cm \frac{d}{dt} \left[\frac{g_{i\beta} u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi}} u^\eta u^\xi} + \frac{e}{c} A_i \right] = -cm \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\xi}} u^\eta u^\xi} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^i} u^\mu u^\nu - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^i} u^\mu.$$

Латинские индексы $i, j, k, \dots$ пробегает значения 1, 2, 3, а греческие $\mu, \nu, \dots$ пробегает значения 0, 1, 2, 3.

Мы получаем выражение для импульсов

$$q_\mu - \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc \frac{g_{\mu\alpha} u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}} - \frac{e}{c} A_\mu. \quad (9)$$

Здесь выражение для q_0 получается формальным дифференцированием по $u^0 = c$.

Это выражения для длинных или канонических импульсов, но понадобятся и малые импульсы $p_\mu - q_\mu + \frac{e}{c} A_\mu = -mc \frac{g_{\mu\alpha} u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}}$: формулы связи со скоростями

проще для малых импульсов, а при переходе к уравнению Гамильтона-Якоби мы обязаны пользоваться каноническими.

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем

$$p^\beta - -mc \frac{u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}}.$$

Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать уравнение движения (6) через импульсы (а затем перейти к уравнению Гамильтона и Гамильтона-Якоби). Для этого в последней формуле поделим β -ю компоненту на нулевую

$$\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}.$$

В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} = (mc)^2$ и его решение относительно p^0 : $p^0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, где $a = g^{00}$, $b = 2p_i g^{0i}$, $c = p_i p_j g^{ij} - (mc)^2$.

При этом для согласования с нерелятивистской динамикой берется знак минус.

Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений для исключения скоростей с учетом $u^0 = c$ $\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}$ в формулу (9) при индексе $\mu = 0$ (см. [7]).

Уравнение для полей останется тем же самым (2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}, m, e) d\mathbf{q} dm de = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m, e) d\mathbf{p} dm de$. Каждая из трех этих величин – это число частиц в элементе объема, что является инвариантом при замене переменных

$$\begin{aligned} k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \\ = c \int m \frac{f(t, x, q, m, e)}{2\sqrt{g_{\alpha\varphi} u^\alpha u^\beta}} u^\mu u^\nu d^3 q dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \\ k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, x, q, m, e) d^3 q dm de \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \\
& = c \int m \frac{f(t, x, q, m, e)}{2} \frac{c p^\mu p^\nu}{(q^0)(mc)^2} d^3 q dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \\
& k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \int e \frac{c p^\mu}{p^0} f(t, x, q, m, e) d^3 q dm de.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь имеется в виду, что скорости в первом уравнении, а импульсы p^μ во втором должны быть выражены через канонические импульсы q_μ .

Уравнение движения для частиц получаем уже в Гамильтоновой форме, где функция Гамильтона $H = -c \frac{\partial L}{\partial u^0} = -c q_0$. Эта формула получается из-за того, что Лагранжиан для действия $S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu u^\mu dt$ есть функция первой степени по скоростям, и формулы Эйлера $u^\mu \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - L = 0$. Так как по определению $H = u^i \frac{\partial L}{\partial u^i} - L$, получаем: $c \frac{\partial L}{\partial u^0} + H = 0$. Здесь имеется в виду суммирование по $i = 1, 2, 3$ и по $\mu = 0, 1, 2, 3$. Отсюда находим выражения для скоростей $u^i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = u^i(q) = -c \frac{\partial q_0}{\partial q_i}$.

Выписываем через этот гамильтониан уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial q_0}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial x^i} - c \frac{\partial q_0}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0. \tag{11}$$

И получаем замкнутую систему уравнений гравитации и электродинамики Власова-Максвелла-Эйнштейна в импульсах (7)-(8). По общей схеме работ [8-12] получаем гидродинамическое следствие системы Власова-Максвелла-Эйнштейна (10)-(11) гидродинамической подстановкой $f(t, x, q, m, e) = \rho(t, x, m, e) \delta(q - Q(t, x, m, e))$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (u^i(Q) \rho) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} - c \frac{\partial q_0}{\partial q_i} (x, Q) \frac{\partial Q_k}{\partial x^i} + c \frac{\partial q_0}{\partial x^k} = 0. \tag{13}$$

Подстановкой $Q_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}$ или $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} A_\alpha$ получаем затем уравнения Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} A_\alpha \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c} A_\beta \right) g^{\alpha\beta} = (mc)^2. \tag{14}$$

Мы также должны переписать уравнение неразрывности (12)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (u^i (\nabla W) \rho) = 0. \tag{15}$$

Чтобы получить замкнутую форму уравнений Гамильтона-Якоби-Власова-Максвелла-Эйнштейна, необходимо и в уравнениях для полей выполнить ту же гидродинамическую подстановку $f(t, x, q, m, e) = \rho(t, x, m, e) \delta(q - Q(t, x, m, e))$

$$\begin{aligned} k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \\ = c \int m \frac{\rho(t, x, m, e)}{2} \frac{c P^\mu P^\nu}{(P^0)(mc)^2} dm de - \frac{1}{2} k_2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \quad (16) \\ k_2 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \sqrt{-g} = \frac{1}{c^2} \int e \frac{c P^\mu}{P^0} \rho(t, x, m, e) dm de. \end{aligned}$$

Здесь макроскопические импульсы P^μ и P_μ связаны обычными соотношениями $P_\mu = g_{\mu\nu} P^\nu$. При этом в форме Гамильтона-Якоби нужно учитывать, что $P_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c} A_\alpha$. Мы получили уравнение Власова-Максвелла-Эйнштейна как в редукции к гидродинамическим переменным (9), (10), (13), так и в редукции к уравнениям Гамильтона-Якоби (11), (12), (13). В принципе можно рассматривать космологическую задачу и в общем случае, но выражения будут громоздкими, поэтому рассмотрим примеры специальных слабoreлятивистских систем.

Пример 1. Рассмотрим простейшее релятивистское действие с метрикой Лоренца

$$S = -cm \int \left(\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} + \frac{U}{c} \right) dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt.$$

Варьируя по координатам $x(t)$, получаем обычные релятивистские уравнения в метрике Лоренца с Гамильтонианом [7]

$$H(x, q) = c \sqrt{(mc)^2 + q^2} + U.$$

Переходим к действию, пригодному к варьированию по полям по нашей обычной схеме

$$\begin{aligned} S = -c \int m \left(\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} + \frac{U}{c} \right) f(t, x, p, m, e) dp dm de dx dt - \\ - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt. \end{aligned}$$

Варьируя его по потенциалу U , получаем уравнения для полей

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, x, q, m, e) dq dm de - \frac{1}{2} c^2 \Lambda.$$

Сразу переходим к уравнению Гамильтона-Якоби и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i (\nabla W) \rho) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c \sqrt{(mc)^2 + (\nabla W)^2} + U = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, x, q, m, e) dq dm de - \frac{1}{2} c^2 \Lambda, \end{cases}$$

$$\text{где } v^i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq^i}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}.$$

Мы получили выражение для скорости, из которого видно Хаббловское расширение, замкнутую систему уравнений и возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства. Лямбда-член в правой части уравнения Пуассона должен обеспечивать ускоренное расширение.

Пример 2. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} \left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1 \right).$$

При этом потенциал вносится в действие под корень

$$S = -cm \int \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} + U dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt.$$

Действуя так же, получаем гамильтониан

$$H = -cp_0(x, q, t) = c \sqrt{\left((mc)^2 + q^2 \right) \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right)}$$

и систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i (\nabla W) \rho) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c \sqrt{\left((mc)^2 + (\nabla W)^2 \right) \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right)} = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int \frac{m \rho(t, x, m)}{\sqrt{c^2 - (v(\nabla W))^2} + U} dm - \frac{c^2 \Lambda}{2}, \end{cases}$$

$$\text{где } v^i(q) = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{cq^i \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}}{\sqrt{(mc)^2 + q^2}}.$$

Мы получили снова замкнутую систему уравнений, из которой видно происхождение корня в правой части уравнения Эйнштейна, а также выражение для скорости, из которой видно хаббловское расширение. И возможность переходить к космологическим решениям в изотропном случае и когда плотность не зависит от пространства.

Получаем уравнение для определения поля точечной массы (модельное уравнение для задачи Шварцшильда)

$$\Delta U = 4\pi\gamma \frac{m\delta(x)}{\sqrt{c^2 + U}} - \frac{c^2 \Lambda}{2}.$$

Здесь вместо уравнения Пуассона получили добавочный множитель, превращающий уравнение в нелинейное.

Здесь уместно отметить, что модель Фридмана нестационарной Вселенной послужила основанием для пересмотра решения основного вопроса философии. Это было отмечено в докладе Я.Б. Зельдовича на семинаре М.В. Келдыша в 1972 году фразой: мы вернулись к библейскому взгляду на мир. Она означает, что современные астрофизические воззрения следует первой главе книги Бытия (Шестоднев или шесть дней творения). Академик В.В. Струминский в беседе с одним из авторов (В.В.) привел еще один довод: «Ты же понимаешь, что Бог есть. Ну да, ты же занимался вторым законом термодинамики, значит как такой сложный мир может получиться». Речь идет о фундаментальности и всеобщности закона о росте энтропии ([3]), этот закон запрещает любое усложнение, а астрофизика в яркой форме подтверждает множественное усложнение от элементарных частиц к клетке, растительному и животному миру и человеку. Наука доказала в 20 веке естественнонаучным способом, что Бог есть.

3. Уравнение Власова-Пуассона и его стационарные решения. Уравнение Власова-Пуассона весьма активно используется для описаний квантовых приборов (плазменные двигатели, токамаки, диод Ленгмюра) и может быть записано в виде [6,9,10]

$$\begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \left(v, \frac{\partial f_i}{\partial x} \right) - \frac{e_i}{m_i} \left(\nabla \varphi, \frac{\partial f_i}{\partial v} \right) = 0, \\ \Delta \varphi = - \sum 4\pi e_i \int f_i(t, v, x) dv. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим подстановку [6,9,10] (энергетическая подстановка, которая сводит систему (17) к нелинейному эллиптическому уравнению)

$$f_i(v, x) = g_i \left(\frac{m_i v^2}{2} + e_i \varphi \right).$$

Тогда первое уравнение системы (17) удовлетворяется, и мы получаем эллиптическое уравнение

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \psi(\varphi), \\ \psi(u) &= - \sum 4\pi e_i \int g_i \left(\frac{m_i v^2}{2} + e_i u \right) dv. \end{aligned}$$

Если $v \in \mathbb{R}^d$, то $\psi'(u) \geq 0$ при $d \geq 2$ или если $g'_i \leq 0$ [9,10]. Тогда граничная задача корректна, и мы имеем также отсутствие периодических решений. Это очень важное свойство стационарных решений уравнения Власова-Пуассона именно для двумерной и трехмерной по скоростям функции распределения.

Пусть, однако, мы имеем одномерную задачу, когда потенциал $\varphi(x)$ и функция распределения зависят только от одной пространственной переменной x_1 : $\varphi(x) = \Phi(x_1)$, $f_i(x, v) = F(x_1, v)$. В этом случае мы можем перейти к одномерной и по v системе для функции (что полезно для численного счета)

$$G(x_1, v_1) = \int F(x_1, v_1, v_2, v_3) dv_2 dv_3.$$

В этом случае существуют нетривиальные периодические решения по x_1 , которые называются волнами Бернштейна-Грина-Крускала:

$$G_i(x_1, v_1) = g_i \left(\frac{m_i v_1^2}{2} + e_i \varphi(x_1) \right) \quad (\text{БГК}). \quad \text{При этом функции } g_i(E) \text{ не могут быть}$$

монотонно убывающими, например, максвелловскими распределениями, а должны быть, например, вида $\delta(E - E_0)$. Все это налагает значительные ограничения на поведение функций распределения, которые дают волны БГК и которые сейчас хотят получить экспериментально. Трудности здесь заключаются и в том, что среда не может быть квазинейтральной. Вопросы квазинейтральности важны и должны быть тщательно исследованы: во втором из уравнений (17) правая часть оказывается равной нулю, и требуется установить, насколько это совместимо с первым из уравнений.

Итак, мы получили уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова. Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получить и уравнение гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звёзд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова Максвелла-Эйнштейна была получена для скоростей [11,12], а здесь для импульсов, что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона-Якоби. Интерес представляют стационарные решения полученных уравнений, как это делалось для уравнений Власова-Пуассона [8-10] и как это сделано здесь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максвелл Дж.К. *О динамической теории газов* / В книге: Труды по кинетической теории. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – С.173-230.
2. Больцман Л. *Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа* / В книге: Избранные труды. – М.: Наука, 1984. – С.125-189.
3. Веденяпин В.В., Аджиев С.З. *Энтропия по Больцману и Пуанкаре* // Успехи математических наук. – 2014. – Т.69. – №6. – С.45-80.
4. Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V. *The H-theorem for the physico-chemical kinetic equations with explicit time discretization* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2017. – Vol.481. – Pp.60-69.
5. Adzhiev S.Z., Melikhov I.V., Vedenyapin V.V. *The H-theorem for the physico-chemical kinetic equations with discrete time and for their generalizations* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2017. – Vol.480. – Pp.39-50.
6. Власов А.А. *Статистические функции распределения*. – М.: Наука, 1966. – 356 с.

7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения*. – М.: Наука, 1986.
8. Веденяпин В.В., Негматов М.А. *О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тожество Лагранжа и форма Годунова* // Теоретическая и математическая физика. – 2012. – Т.170. – №3. – С.468-480.
9. Веденяпин В.В., Негматов М.-Б.А., Фимин Н.Н. *Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2017. – Т.81. – №3. – С.45-82.
10. Веденяпин В.В., Негматов М.А. *О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тожество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса* // СМФН. – 2013. – Т.47. – С.5-17.
11. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. *О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия* // Доклады РАН. – 2020. – Т.495. – С.9-13.
12. Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M. *The generalized Friedman model as a self-similar solution of Vlasov-Poisson equations system* // European Physical Journal Plus. – 2021. – Vol.136. – No.670.