МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА, МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.518

Исмагилов Тимур Фаритович

КОНСТРУКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО

Специальность 01.01.01 —

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Потапов Михаил Константинович

Москва — 2017

Оглавление

Введение

Настоящая работа посвящена изучению некоторых классов функций нескольких переменных. При этом основное внимание уделяется получению для этих классов конструктивных характеристик и теорем вложения.

Впервые задачу о наилучшем приближении функций поставил в середине прошлого века П.Л. Чебышев [1; 2].

В начале 20 века в работах Лебега [3], Валле-Пуссена [4], Джексона [5] и С.Н. Бернштейна [6] возник вопрос о получении конструктивных характеристик для функций, обладающих теми или иными структурными свойствами (дифференцируемостью, условием Липшица, и т.п.); то есть возник вопрос о получении для этих функций порядка их наилучшего приближения при помощи тех или иных агрегатов.

В дальнейшем ответу на этот вопрос было посвящено большое число работ. Однако и до настоящего времени в этом направлении имеется целый ряд нерешенных задач.

Хотя получение конструктивных характеристик для тех или иных классов функций представляет самостоятельный интерес, в данной работе они, кроме того, играют существенную роль при доказательстве теорем вложения.

Первая теорема вложения была доказана Харди и Литтлвудом в 1927 году [7].

Начало общей теории вложения пространств функций многих переменных было положено в 30-х годах С.Л. Соболевым [8], который рассматривал пространства W–функций, имеющих ограниченные производные.

Принципиально новый вклад в развитие этой теории был сделан С.М. Никольским [9], создавшим теорию вложения H-классов и привлекшим для её исследования конструктивные характеристики рассматриваемых классов.

С этого времени теория вложения начинает быстро развиваться. Вводятся и изучаются новые классы функций, интерес к которым вызван как различными задачами математической физики, так и естественными обобщениями изученных ранее пространств.

В 1963 г. С. М. Никольским [10] и Н. С. Бахваловым [11] были введены в рассмотрение SH-классы функций с доминирующим смешанным модулем гладкости. Для этих классов функций уже не удавалось найти конструктивные характеристики в терминах приближения функций полиномами и поэтому С.М. Никольский предложил новый метод исследования таких функций: он предложил заменить теоремы о конструктивных характеристиках теоремами о представлении функций рядами из тригонометрических полиномов. В дальнейшем этим методом исследовались и некоторые другие классы функций с доминирующим смешанным модулем гладкости.

Однако попытка доказать этим методом теоремы вложения для некоторых классов функций (смешанный модуль гладкости которых удовлетворяет другим условиям) либо не приводит к цели, либо приводит к результатам, которые уже не являются точными. Поэтому встал вопрос об изучении таких классов функций каким-либо другим методом. М.К. Потаповым было предложено изучать такие классы функций при помощи приближения углом [12—18].

Цель работы. При помощи приближения углом получить конструктивные характеристики и с их помощью теоремы вложения разных метрик и измерений для классов функций, представляющих из себя обобщение классов H и SH Никольского.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получены оценки приближений углом и модулей гладкости для функций распасовки.
2. При помощи приближений углом получены конструктивные характеристики обобщённых классов Никольского $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ и $S^m_n H^r_p$.
3. Для указанных классов функций получены теоремы вложения разных метрик.
4. Для указанных классов функций получены теоремы о следах.

Методология и методы исследования. В работе используются различные методы функционального анализа и теории приближений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в функциональном анализе и теории приближений, теории дифференциальных уравнений с частными производными и в теории интегральных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

1. семинаре механико-математического факультета по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством профессора М. К.

Потапова, профессора В. А. Скворцова, профессора Т. П. Лукашенко, профессора М. И. Дьяченко (2012–2017 г., неоднократно)

2. XIX международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", 9-13 апреля 2012;
3. XXI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов", 7-11 апреля 2014;
4. международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", Россия, Тула, 15-19 сентября 2014;

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в трудах механико-математического факультета, 2 — в тезисах докладов. Список работ автора по теме диссертации приведен в конце списка литературы. Работ в соавторстве нет.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 114 страниц, включая 24 рисунка. Список литературы содержит 23 наименования.

Краткое содержание работы. В главах 2 и 3 вводятся в рассмотрение классы функций, обобщающие классы H и SH Никольского, и для них доказываются конструктивные характеристики и теоремы вложения. Для доказательства этих результатов применяется предложенный С.М. Никольским метод распасовки. Поэтому в главе 1 доказываются теоремы о распасовке.

Приведем краткое описание основных результатов. Основным результатом главы 1 диссертации являются теоремы 1.1 – 1.3.

Теорема 1.1. *Если* $f \in L_{\vec{p}}$, $\vec{p} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $p_i \in [1, \infty]$, *то* f *можно представить в виде*

$$f = f_0 + \sum_{i_1=1}^{n} f_{i_1} + \sum_{i_2=2}^{n} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} + \cdots + \sum_{i_s=s}^{n} \sum_{i_{s-1}=s-1}^{i_s-1} \cdots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_s} + \cdots + \\ + \sum_{i_{n-1}=n-1}^{n} \sum_{i_{n-2}=n-2}^{i_{n-1}-1} \cdots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-1}} + f_{1,\ldots,n},$$

где

$$
\begin{array}{lcl}
f_0 & = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} f dx_1 \dots dx_n, \\
f_{i_1} & \equiv & f_{i_1}(x_{i_1}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_2} \dots dx_{i_n} - f_0, \forall i_1 \in (1,\dots,n), \\
f_{i_1,i_2} & \equiv & f_{i_1,i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-2} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_3} \dots dx_{i_n} - f_0 - f_{i_1} - f_{i_2}, \\
 & & \forall (i_1,i_2) \subset (1,\dots,n), \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{i_1,\dots,i_s} & \equiv & f_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_{s+1}} \dots dx_{i_n} - f_0 - \\
 & & - \sum\limits_{j_1=1}^{s} f_{i_{j_1}} - \sum\limits_{j_2=2}^{s} \sum\limits_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1} i_{j_2}} - \dots - \sum\limits_{j_{s-1}=s-1}^{s} \cdots \sum\limits_{j_2=2}^{j_3-1} \sum\limits_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{s-1}}}, \\
 & & \forall (i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n), \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{1,\dots,n} & \equiv & f_{1,\dots,n}(x_1,\dots,x_n) = f - f_0 - \sum\limits_{i_1=1}^{n} f_{i_1} - \sum\limits_{i_2=2}^{n} \sum\limits_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1 i_2} - \dots - \\
 & & - \sum\limits_{i_{n-1}=n-1}^{n} \cdots \sum\limits_{i_2=2}^{i_3-1} \sum\limits_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\dots,i_{n-1}}.
\end{array}
\tag{1}
$$

и выполнены следующие соотношения:

1) $\|f_{i_1,\dots,i_s}\|_{\vec{p}} \le c_1 \|f\|_{\vec{p}},\ \forall (i_1,\dots,i_s) \subseteq (1,\dots,n)$,

2) $\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_s} dx_{i_j} = 0,\ \forall j \in (1,\dots,s)$,

где постоянная c_1 *не зависит от* f.

Теорема 1.2. *В условиях теоремы 1.1 для функций представления (1) и* $\forall l_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *справедливы соотношения:*

1) $Y_{l_1,\dots,l_n}(f)_{\vec{p}} = Y_{l_1,\dots,l_n}(f_{1,\dots,n})_{\vec{p}}$;

2) $Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} \le c_2 Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f)_{\vec{p}}, \forall\, (i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n)$;

3)
$$
Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f)_{\vec{p}} \le c_3 \Bigg(Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} + \sum\limits_{j_{s+1}=s+1}^{n} Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}})_{\vec{p}} +
$$
$$
+ \sum\limits_{j_{s+2}=s+2}^{n} \sum\limits_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}})_{\vec{p}} + \dots +
$$
$$
+ \sum\limits_{j_{n-1}=n-1}^{n} \cdots \sum\limits_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1} \sum\limits_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}})_{\vec{p}} + Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{1,\dots,n})_{\vec{p}} \Bigg),
$$

$\forall\, (i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n)$,

где постоянные c_2 *и* c_3 *не зависят от* f *и* l_i.

Теорема 1.3. *В условиях теоремы 1.1 для функций представления (1) и* $\forall\delta_{i_j}\in(0,1)$ *справедливы соотношения:*

1) $\omega_{k_1,\dots,k_n}(f_{1,\dots,n},\delta_1,\dots,\delta_n)_p=\omega_{k_1,\dots,k_n}(f,\delta_1,\dots,\delta_n)_p$;

2) $\omega_{k_{i_{j_1}},\dots,k_{i_{jm}}}(f_{i_1,\dots,i_s},\delta_{i_{j_1}},\dots,\delta_{i_{jm}})_p\le c_4\omega_{k_{i_{j_1}},\dots,k_{i_{jm}}}(f,\delta_{i_{j_1}},\dots,\delta_{i_{jm}})_p$,

$\forall(j_1,\dots,j_m)\subset(1,\dots,s)$, $\forall(i_1,\dots,i_s)\subset(1,\dots,n)$ *и* $\forall s=1,\dots,n-1$;

3)
$$\omega_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(f,\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_s})_p\le\omega_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s},\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_s})_p+$$
$$+\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}\omega_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}},\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_s})_p+$$
$$+\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\omega_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+1}}},\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_s})_p+\ldots+$$
$$+\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\cdots\sum_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\omega_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}},\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_s})+$$
$$+\omega_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(f_{1,\dots,n},\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_s})_p,$$

$\forall\,(i_1,\dots,i_s)\subset(1,\dots,n)$, $\forall\,s=1,\dots,n-1$,
где постоянная c_4 *не зависит от* f *и* δ_i.

Эти результаты используются при доказательстве основных результатов глав 2 и 3.

Глава 2 посвящена изучению класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Этот класс является обобщением хорошо известных классов Никольского $H^{r_1,r_2}_{p_1,p_2}$ и $SH^{r_1,r_2}_{p_1,p_2}$.

Будем писать $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, если $1\le p_i\le\infty$, $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $k_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\ge1$ и выполнены условия:

0) $f\in L_{p_1,p_2}$,

1) $\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{p_1,p_2}\le c_5\delta_1^{\alpha_1}$, $\forall\delta_1\in(0,1)$, $k_1>\alpha_1$,

2) $\omega_{k_2}(f,\delta_2)_{p_1,p_2}\le c_6\delta_2^{\alpha_2}$, $\forall\delta_1\in(0,1)$, $k_2>\alpha_2$,

3) $\omega_{k_3k_4}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2}\le c_7\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}$, $\forall\delta_i\in(0,1)$, $i=1,2$, $k_3>\beta_1$, $k_4>\beta_2$,

где постоянные c_5, c_6 и c_7 не зависят от δ_1 и δ_2.

В параграфе §2.2 для функций из этого класса получена конструктивная характеристика.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функция* $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1\le p_i\le\infty$, $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $i=1,2$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall l_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *выполнялись следующие неравенства:*

$$Y_{l_i}(f)_{p_1,p_2}\le c_8\frac{1}{(l_i+1)^{\alpha_i}},i=1,2,Y_{l_1l_2}(f)_{p_1,p_2}\le c_9\frac{1}{(l_1+1)^{\beta_1}}\frac{1}{(l_2+1)^{\beta_2}},$$

где постоянные c_8 *и* c_9 *не зависят от* l_1 *и* l_2.

В параграфе §2.3 доказываются теоремы вложения разных метрик для функций из этого класса. Далее приведены основные теоремы этого параграфа.

Теорема 2.2. *Пусть* $f \in SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)$, *где* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} < \beta_i \le \alpha_i$, $i = 1,2$, *и выполнено одно из двух условий:*

1) $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha 2} \ge 1$, $\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1} + \frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2} < 1$;

2) $\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1} + \frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2} \ge 1$;

тогда $f \in SH(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, *где*
$\alpha_1^* = \alpha_1\vartheta_1$, $\alpha_2^* = \alpha_2\vartheta_2$, $\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)$, $\beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)$,
$\vartheta_1 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)\right)$,
$\vartheta_2 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) + \frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)\right)$.

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1,β_2), лежащие в области I, изображенной на рисунках 1 - 3.

Теорема 2.3. *Пусть* $f \in SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)$, *где* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $i = 1,2$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \alpha_1 \le \beta_1, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2 \le \beta_2,$$

тогда $f \in SH\left(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*\right)$, *где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right), \alpha_2^* = \alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$

$$\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right), \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right).$$

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1,β_2), лежащие в области II, изображенной на рисунках 1 - 3.

Теорема 2.4. *Пусть* $f \in SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)$, *где* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $i = 1,2$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \beta_1 \le \alpha_1, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2 \le \beta_2,$$

тогда $f \in SH\left(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*\right)$, *где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1\vartheta_1, \alpha_2^* = \alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$

$$\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right), \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$

$$\vartheta_1 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)\right),$$

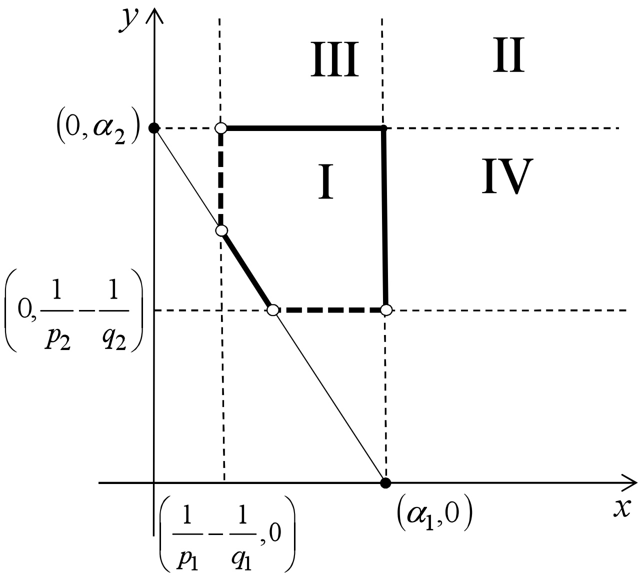

Рисунок 1

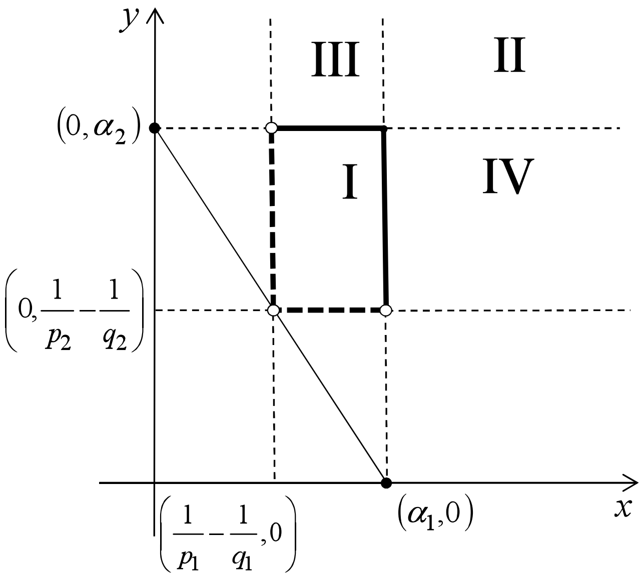

Рисунок 2

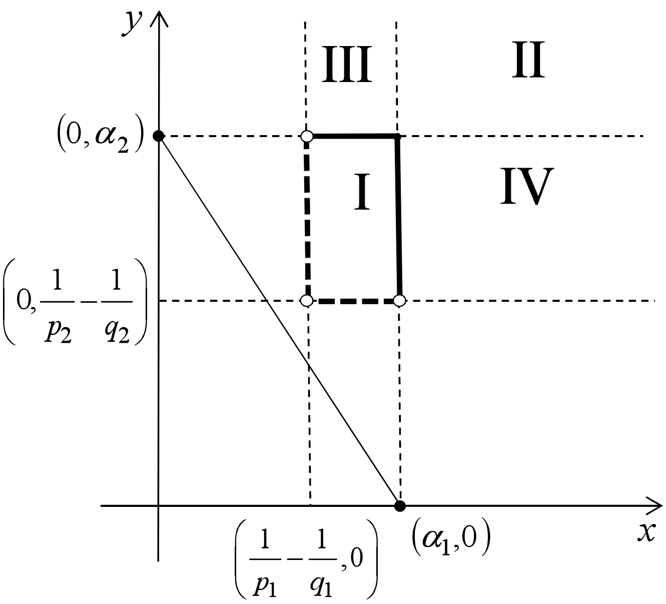

Рисунок 3

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1,β_2), лежащие в области III, изображенной на рисунках 1 - 3.

Теорема 2.5. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $i = 1,2$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \alpha_1 \leq \beta_1,\ \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \beta_2 \leq \alpha_2,$$

тогда $f \in SH\,(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, *где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),\ \alpha_2^* = \alpha_2\vartheta_2,$$

$$\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$

$$\vartheta_2 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)\right).$$

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1,β_2), лежащие в области IV, изображенной на рисунках 1 - 3.

В параграфе §2.3 для функций из класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ доказаны теоремы о следах на оси Ox_1 и Ox_2. Далее приведены основные теоремы этого параграфа.

Теорема 2.10. *Пусть* $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1,2$,

$$\alpha_2 > \frac{1}{p_2}, \beta_2 > \frac{1}{p_2}, \alpha_1 \ge \beta_1 > 0, \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \ge 1,$$

тогда f *имеет на оси* Ox_1 *след* $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, *где* $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Теорема 2.11. *Пусть* $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1,2$,

$$\alpha_2 > \frac{1}{p_2}, \beta_2 > \frac{1}{p_2}, \beta_1 > \alpha_1 > 0.$$

Тогда f *имеет на оси* Ox_1 *след* $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Условиям теорем 2.10 и 2.11 удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) лежащие в областях I (рис. 4) и II (рис. 5) соответственно.

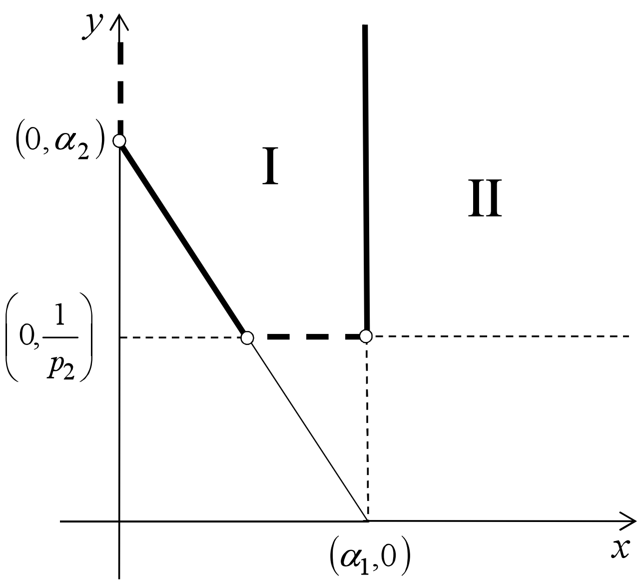

Рисунок 4

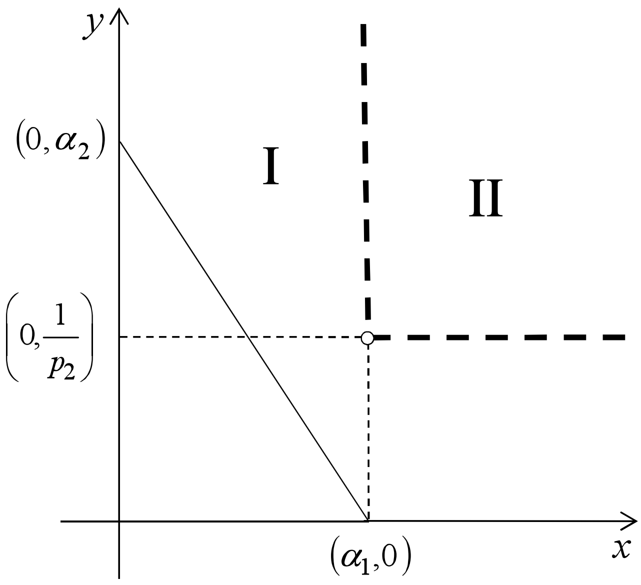

Рисунок 5

Аналогичные теоремы доказаны и для следов на ось Ox_2.

В главе 3 рассматривается класс $S_n^m H_p^r$. Этот класс является обобщением классов Никольского H_p^r и SH_p^r.

Будем писать $f \in S_n^m H_p^r$, если $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$, $1 \leq m \leq n$ и выполнены условия:

0) $f \in L_p(n)$;

1) $\omega_{k_{i_1}}(f,\delta_{i_1})_p \leq c_{10}\delta_{i_1}^r$, $\forall\ i_1 = 1,\ldots,n$;

2) $\omega_{k_{i_1}k_{i_2}}(f,\delta_{i_1},\delta_{i_2})_p \leq c_{11}\delta_{i_1}^r\delta_{i_2}^r$, $\forall\ (i_1,i_2) \subset (1,\ldots,n)$;

$\vdots$

m) $\omega_{k_{i_1}\ldots k_{i_m}}(f,\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_m})_p \leq c_{12}\delta_{i_1}^r\ldots\delta_{i_m}^r$, $\forall\ (i_1,\ldots,i_m) \subset (1,\ldots,n)$,

где $k_{i_j} > r$, $\delta_{i_j} \in (0,1)$ и постоянные c_{10}, c_{11} и c_{12} не зависят от δ_{i_j}.

В параграфе §3.2 для функций из этого класса получена конструктивная характеристика.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы функция $f \in S_n^m H_p^r$, где $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq m \leq n$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall l_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ выполнялись следующие условия:*

0) $f \in L_p(n)$;

1) $Y_{l_{i_1}}(f)_p \leq c_{13}\frac{1}{(l_{i_1}+1)^r}$, $\forall i_1 = 1,\ldots,n$;

2) $Y_{l_{i_1},l_{i_2}}(f)_p \leq c_{14}\frac{1}{(l_{i_1}+1)^r(l_{i_2}+1)^r}$, $\forall (i_1,i_2) \subset (1,\ldots,n)$;

$\vdots$

m) $Y_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}}(f)_p \leq c_{15}\frac{1}{(l_{i_1}+1)^r\ldots(l_{i_m}+1)^r}$, $\forall(i_1,\ldots,i_m) \subset (1,\ldots,n)$,

где постоянные c_{13}, c_{14} и c_{15} не зависят от δ_{i_j}.

В параграфе §3.3 для функций класса $S_n^m H_p^r$ доказана теорема вложения разных метрик.

Теорема 3.2. *Если $f \in S_n^m H_p^r$, $1 \leq p < q \leq \infty$, $r^* = r - \frac{n}{m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$, то $f \in S_n^m H_q^{r^*}$.*

В параграфе §3.4 для класса $S_n^m H_p^r$ доказана теорема о следах функций из этого класса.

Теорема 3.3. *Пусть на R_n задана функция $f \in S_n^m H_p^r$, где $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq m \leq n$, $r > \frac{n}{mp}$, тогда на любом подпространстве $R_k = R_k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, где $(i_1,\ldots,i_k) \subset (1,\ldots,n), 1 \leq k < n$, у функции f существует след $\phi = \phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, такой, что:*

1. если $k \leq m$, то $\phi \in S_k^k H_p^{r^*}$, $\forall\ r^* \in \left(0,r - \frac{n-m}{mp}\right]$;

2. если $k > m$, то $\phi \in S_k^m H_p^{r^*}$, $\forall\ r^* \in \left(0,r - \frac{n-k}{mp}\right)$.

В заключении приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем: получены оценки приближений углом и модулей гладкости для функций распасовки; при помощи приближений углом получены конструктивные характеристики обобщённых классов Никольского $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ и $S_n^m H_p^r$; для указанных классов функций получены теоремы вложения разных метрик; для указанных классов функций получены теоремы о следах.

В дальнейшем для исследуемых классов могут быть получены теоремы о продолжении. Класс $S_n^m H_p^r$ может быть обобщён на случай смешанной метрики. Вопрос об обобщении результатов, полученных для класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, на n-мерный случай также открыт.

Автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Потапову Михаилу Константиновичу, за постановку интересных задач, неоценимую помощь и постоянное внимание.

Основные определения и обозначения

Будем писать, что $f \in L_{\vec{p}}(n) \equiv L_{\vec{p}}(x_1,\ldots,x_n)$ или $f \in L_{p_1,\ldots,p_n}$, если $\vec{p} = \{p_1,\ldots,p_n\}, p_i \in [1,\infty]$, $f \equiv f(x_1,\ldots,x_n)$ - измеримая функция n переменных, 2π - периодическая по каждому из них и такая, что: $\|f\|_{L_{\vec{p}}(n)} \equiv \|f\|_{p_1,\ldots,p_n} = \|\{\|\ldots\|\{\|f\|_{p_1}\}\|_{p_2}\ldots\|_{p_{n-1}}\}\|_{p_n} < \infty$, где $||F||_{p_i} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |F|^{p_i} dx_i\right)^{1/p_i}$, если $p_i \in [1,\infty)$, $||F||_{p_i} = \underset{x_i\in[0,2\pi]}{supvrai}|F|$, если $p_i = \infty$.

Будем писать, что $f \in L^0_{\vec{p}}(n)$, если $f \in L_{\vec{p}}(n)$ и $\int\limits_0^{2\pi} f dx_i = 0$ для $i = 1,\ldots,n$.

Пусть дано s $(s \in (1,\ldots,n))$ различных индексов $i_1,\ldots,i_s$, каждый из которых принимает одно из значений $1,\ldots,n$, тогда *набор* этих индексов будем записывать в виде $(i_1,\ldots,i_s)$.

Пусть $\Phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) \in L_{\vec{p}(s)}$, где $\vec{p}(s) = \{p_{i_1},\ldots,p_{i_s}\}$, $(i_1,\ldots,i_s) \subset (1,\ldots,n)$, тогда

$$\|\Phi\|_{L_{\vec{p}(n)}} = (2\pi)^{\sum\limits_{j=i_{s+1}}^{i_n} \frac{1}{p_j}} \|\Phi\|_{L_{\vec{p}(s)}}. \tag{2}$$

Так как в дальнейшем нас не будут интересовать точные постоянные, то, учитывая это равенство, далее под нормой $\| * \|_{\vec{p}}$ будем обычно понимать норму $\| * \|_{L_{\vec{p}(n)}}$.

В случае, если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ вместо $\| * \|_{\vec{p}}$ будем писать $\| * \|_p$

Обозначим через $\omega_{k_{i_1}\ldots k_{i_s}}(f,\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s})_{\vec{p}}$ s-мерный $(1 \le s \le n)$ *модуль гладкости функции* $f \in L_p(n)$ *порядка* $k_{i_1},\ldots,k_{i_s}$ соответственно по переменным $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$, т. е.

$$\omega_{k_{i_1}\ldots k_{i_s}}(f,\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s})_{\vec{p}} = \sup_{|h_{i_1}|\le\delta_{i_1},\ldots,|h_{i_s}|\le\delta_{i_s}} \|\Delta^{k_{i_1}\ldots k_{i_s}}_{h_{i_1}\ldots h_{i_s}} f\|_{\vec{p}},$$

где $\Delta^{k_i}_{h_i} f = \sum\limits_{\nu_i=0}^{k_i} (-1)^{k_i-\nu_i} C^{\nu_i}_{k_i} f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\nu_i h_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$,
$\Delta^{k_{i_1}\ldots k_{i_s}}_{h_{i_1}\ldots h_{i_s}} f = \Delta^{k_{i_1}}_{h_{i_1}} \varphi$, $\varphi = \Delta^{k_{i_2}\ldots k_{i_s}}_{h_{i_2}\ldots h_{i_s}} f$.

Пусть функция $T_{\nu_{i_j}} \equiv T_{\nu_{i_j}}(x_1,\ldots,x_n) \in L_{\vec{p}}$ и является тригонометрическим полиномом по переменной x_{i_j} порядка ν_{i_j}, $\nu_{i_j} \in \mathbb{N} \cup 0$, $i_j \in (1,\ldots,n)$.

Через $Y_{\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}}$ обозначим *наилучшее приближение* s*-мерным* $(s \in (1,\ldots,n))$ *углом по переменным* $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$ функции $f \in L_{\vec{p}}$ в метрике $L_{\vec{p}}$, то есть $Y_{\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}} = \inf\limits_{T_{\nu_{i_1}},\ldots,T_{\nu_{i_s}}} ||f - \sum\limits_{j=1}^{s} T_{\nu_{i_j}}||_{\vec{p}}$.

Определим пространство R_n следующим образом:
$R_n \equiv \{0 \le x_i \le 2\pi, 1 \le i \le n\}$. Для набора индексов $(i_1,\dots,i_k) \subset (1,\dots,n)$ определим подпространство $R_k \subset R_n$:
$R_k \equiv R_k(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) \equiv \{0 \le x_{i_j} \le 2\pi, 1 \le j \le k \le n\}$.

Будем писать, что функция $f = f(x_1,\dots,x_n) \in L_{\vec{p}}(k) \equiv L_{\vec{p}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$, если для почти всех фиксированных x_{i_j}, $(k+1 \le j \le n)$, функция f как функция k переменных x_{i_j} $(1 \le j \le k)$ принадлежит $L_{\vec{p}}(k)$.

Будем говорить, что функция $\phi(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$ есть *след функции* $f = f(x_1,\dots,x_n)$ *на подпространство* $R_k \equiv R_k(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$, если f можно видоизменить на множестве n-й меры нуль так, что после этого будут выполняться следующие свойства:

1) $f(x_{i_1},\dots,x_{i_k},0,\dots,0) = \phi(x_1,\dots,x_k)$;

2) $f \in L_{\vec{p}}(k)$ для почти всех фиксированных x_{i_j}, $(k+1 \le j \le n)$, таких, что $x_{i_{k+1}}^2 + \cdots + x_{i_n}^2 < \delta$, где δ достаточно мала;

3) $||f - \phi(x_{i_1},\dots,x_{i_k})||_{L_{\vec{p}(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}} \to 0$ для $x_{i_{k+1}}^2 + \cdots + x_{i_n}^2 \to 0$.

С.М. Никольским [19] показано, что определенный таким образом след является единственным с точностью до эквивалентности в смысле R_k.

Глава 1. Распасовка функций

1.1 Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных результатов этой главы понадобятся вспомогательные утверждения, приведенные ниже.

Лемма 1.1. *Пусть* $f \in L_{\vec{p}}$, $\vec{p} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $p_i \in [1,\infty]$. *Тогда для почти всех* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi} |f| dx_i \leq c_1 \|f\|_{p_i},$$

где постоянная c_1 *не зависит от* f.

Доказательство. Рассмотрим $J = \int\limits_0^{2\pi} |f| dx_i$.

Пусть $p_i \in [1,\infty)$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$. Так как $J = \int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot |f| dx_i$, то, применяя неравенство Гельдера [19, с. 33], для почти всех $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ получаем

$$J \leq \left(\int_0^{2\pi} |f|^{p_i} dx_i \right)^{\frac{1}{p_i}} (2\pi)^{\frac{1}{q_i}} \leq c_2 \|f\|_{p_i},$$

где постоянная c_2 не зависит от f.

Пусть $p_i = \infty$. Тогда для почти всех $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ имеем

$$J \leq \int_0^{2\pi} \mathop{supvrai}_{x_i \in [0,2\pi]} |f| dx_i = \mathop{supvrai}_{x_i \in [0,2\pi]} |f| \cdot 2\pi \leq c_3 \|f\|_{p_i},$$

где постоянная c_3 не зависит от f.

Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Пусть* $f \in L_{\vec{p}}$, $\vec{p} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $p_i \in [1,\infty]$. *Тогда для почти всех* $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ *справедливы неравенства*

а) $\| \int\limits_0^{2\pi} |f| dx_i \|_{p_j} \leq \int\limits_0^{2\pi} \|f\|_{p_j} dx_i$,

б) $\| \int\limits_0^{2\pi} |f| dx_j \|_{p_i} \leq \int\limits_0^{2\pi} \|f\|_{p_i} dx_j$.

Доказательство. а) Рассмотрим $J = \| \int\limits_0^{2\pi} |f| dx_i \|_{p_j}$.

Пусть $p_j \in [1, \infty)$. Так как

$$J = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} |f| dx_i \right|^{p_j} dx_j \right)^{\frac{1}{p_j}},$$

то, применяя неравенство Минковского [19, с. 32], для почти всех $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ получаем

$$J \leq \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f|^{p_j} dx_j \right)^{\frac{1}{p_j}} dx_i = \int\limits_0^{2\pi} \|f\|_{p_j} dx_i.$$

Пусть $p_j = \infty$. Так как $J = \operatorname*{supvrai}_{x_j \in [0,2\pi]} \int\limits_0^{2\pi} |f| dx_i$, то для почти всех $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ имеем $J \leq \int\limits_0^{2\pi} \operatorname*{supvrai}_{x_j \in [0,2\pi]} |f| dx_i = \int\limits_0^{2\pi} \|f\|_{p_j} dx_i$.

Утверждение а) леммы 1.2 доказано.

Утверждение б) леммы 1.2 доказывается аналогично.

Лемма 1.3. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_{\vec{p}}$, *где* $\vec{p} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $p_i \in [1, \infty]$. *Пусть* $F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) = \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_n) dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$. *Тогда* $\|F\|_{\vec{p}} \leq c_4 \|f\|_{\vec{p}}$, *где постоянная* c_4 *не зависит от* f.

Доказательство. Так как

$$\|F\|_{\vec{p}} = \|F\|_{L_{\vec{p}}(n)} = (2\pi)^{\sum\limits_{j=i_{s+1}}^{i_n} \frac{1}{p_j}} \|F\|_{L_{\vec{p}}(s)},$$

то

$$J \equiv \|F\|_{\vec{p}} \leq c_5 \left\| \ldots \left\| \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} |f(x_1, \ldots, x_n)| dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n} \right\|_{p_{i_1}} \ldots \right\|_{p_{i_s}},$$

где постоянная c_5 не зависит от f.

Так как $x_1 \in (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ или $x_1 \in (x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_n})$, и $x_n \in (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ или $x_n \in (x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_n})$, то возможны следующие 4 случая:

1. $x_1 \in (x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_n})$, $x_n \in (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$;
2. $x_1 \in (x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_n})$, $x_n \in (x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_n})$;

3. $x_1 \in (x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$, $x_n \in (x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$;

4. $x_1 \in (x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$, $x_n \in (x_{i_{s+1}}, \dots, x_{i_n})$.

Рассмотрим случай 1. Тогда

$$
\begin{array}{lcl}
(dx_{i_{s+1}}, \dots, dx_{i_n}) & = & (dx_1, \dots, dx_{k_1}, \dots, dx_{k_{l-1}+1}, \dots, dx_{k_l}), \\
\{p_{i_1}, \dots, p_{i_s}\} & = & \{p_{k_1+1}, \dots, p_{k_2}, \dots, p_{k_l+1}, \dots, p_{k_{l+1}}\},
\end{array}
$$

где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_l < k_{l+1} = n$.

Учитывая эти равенства, имеем

$$
J \le c_6 \left\| \ldots \left\| \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f| dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_{k_1} \ldots dx_{k_l} \right\|_{p_{k_1+1}} \ldots \right\|_{p_n}.
$$

Применяя лемму 1.1 к выражению в круглых скобках, имеем

$$
J \le c_7 \left\| \ldots \left\| \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \|f\|_{p_1} dx_2 \right) dx_3 \ldots dx_{k_1} \ldots dx_{k_l} \right\|_{p_{k_1+1}} \ldots \right\|_{p_n}.
$$

Применяя лемму 1.1 еще $k_1 - 1$ раз, получаем

$$
J \le c_8 \left\| \ldots \left\| \left(\left\| \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \|\ldots\|f\|_{p_1} \ldots \|_{p_{k_1}} dx_{k_2+1} \ldots dx_{k_3} \ldots dx_{k_l} \right\|_{p_{k_1+1}} \right) \right\|_{p_{k_1+2}} \ldots \right\|_{p_n}.
$$

Применяя лемму 1.2 к выражению в круглых скобках, имеем

$$
J \le c_9 \left\| \ldots \left\| \left(\left\| \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \|\ldots\|f\|_{p_1} \ldots \|_{p_{k_1+1}} dx_{k_2+1} \ldots dx_{k_3} \ldots dx_{k_l} \right\|_{p_{k_1+2}} \right) \right\|_{p_{k_1+3}} \ldots \right\|_{p_n}.
$$

Применяя лемму 1.2 еще $k_2 - k_1 - 1$ раз, получаем

$$
J \le c_{10} \left\| \ldots \left\| \ldots \left\| \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \|\ldots\|f\|_{p_1} \ldots \|_{p_{k_2}} dx_{k_2+1} \ldots dx_{k_3} \ldots dx_{k_l} \right\|_{p_{k_3}+1} \ldots \right\|_{p_{k_4}} \ldots \right\|_{p_n}.
$$

Далее, применяя $k_3 - k_2$ раз лемму 1.1, затем $k_4 - k_3$ раз лемму 1.2, $\ldots$, затем $k_l - k_{l-1}$ раз лемму 1.1, затем $n - k_l$ раз лемму 1.2, получаем, что

$$
J \le c_{11} \|\ldots\|f\|_{p_1} \ldots \|_{p_n}.
$$

В полученных неравенствах постоянные c_6,c_7, c_8, c_9, c_{10} и c_{11} не зависят от f.

Случай 2 рассматривается аналогично, но последовательное применение лемм 1.1 и 1.2 заканчивается применением $n-k_l$ раз леммы 1.1.

Случай 3 рассматривается аналогично, но последовательное применение лемм 1.1 и 1.2 начинается с применения k_1 раз леммы 1.2 и заканчивается применением $n-k_l$ раз леммы 1.2.

Случай 4 рассматривается аналогично, но последовательное применение лемм 1.1 и 1.2 начинается с применения k_1 раз леммы 1.2 и заканчивается применением $n-k_l$ раз леммы 1.1.

Таким образом, лемма 1.3 доказана.

1.2 Теорема о распасовке функций

Термин *распасовка функций* был введен С.М. Никольским и П.И. Лизоркиным в работе[20].

Теорема 1.1. *Если $f \in L_{\vec{p}}$, $\vec{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $p_i \in [1,\infty]$, то f можно представить в виде*

$$f = f_0 + \sum_{i_1=1}^{n} f_{i_1} + \sum_{i_2=2}^{n} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} + \dots + \sum_{i_s=s}^{n} \sum_{i_{s-1}=s-1}^{i_s-1} \dots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\dots,i_s} + \dots + \\ + \sum_{i_{n-1}=n-1}^{n} \sum_{i_{n-2}=n-2}^{i_{n-1}-1} \dots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\dots,i_{n-1}} + f_{1,\dots,n}, \quad (1.1)$$

где

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_1 \dots dx_n, \\
f_{i_1} &\equiv f_{i_1}(x_{i_1}) = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_2} \dots dx_{i_n} - f_0, \forall i_1 \in (1, \dots ,n), \\
f_{i_1,i_2} &\equiv f_{i_1,i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^{n-2} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_3} \dots dx_{i_n} - f_0 - f_{i_1} - f_{i_2}, \\
& \forall (i_1,i_2) \subset (1, \dots ,n), \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{i_1,\dots,i_s} &\equiv f_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1}, \dots ,x_{i_s}) = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_{s+1}} \dots dx_{i_n} - f_0 - \\
& - \sum_{j_1=1}^{s} f_{i_{j_1}} - \sum_{j_2=2}^{s} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1} i_{j_2}} - \dots - \sum_{j_{s-1}=s-1}^{s} \dots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{s-1}}}, \\
& \forall (i_1, \dots ,i_s) \subset (1, \dots ,n), \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{1,\dots,n} &\equiv f_{1,\dots,n}(x_1, \dots ,x_n) = f - f_0 - \sum_{i_1=1}^{n} f_{i_1} - \sum_{i_2=2}^{n} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1 i_2} - \dots - \\
& - \sum_{i_{n-1}=n-1}^{n} \dots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\dots,i_{n-1}}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

и выполнены следующие соотношения:

1) $\|f_{i_1,\dots,i_s}\|_{\vec{p}} \le c_{12} \|f\|_{\vec{p}}, \ \forall (i_1, \dots ,i_s) \subseteq (1, \dots ,n)$,

2) $\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_s} dx_{i_j} = 0, \ \forall j \in (1, \dots ,s)$,

где постоянная c_{12} *не зависит от* f.

Доказательство.

Легко видеть, что функции в формулах (1.2) определены так, чтобы было справедливо представление (1.1).

Докажем справедливость соотношений 1) утверждения теоремы 1.1. Так как $f_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_1 \dots dx_n$, то, применяя n раз лемму 1.2 , получим, что $|f_0| \le c_{13} \|f\|_{\vec{p}}$, где постоянная c_{13} не зависит от f.

Пользуясь формулами 1.2 для f_{i_1}, имеем

$$
J_1 \equiv \|f_{i_1}\|_{\vec{p}} \le \left\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_2} \dots dx_{i_n} \right\|_{\vec{p}} + \|f_0\|_{\vec{p}}.
$$

Применяя лемму 1.3 и только что доказанную оценку для f_0, получим

$$J_1 \le c_{14}\left(\|f\|_{\vec{p}} + (2\pi)^{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}}|f_0|\right) \le c_{15}\|f\|_{\vec{p}},$$

где постоянные c_{14} и c_{15} не зависят от f.

Следовательно $\|f_{i_1}\|_{\vec{p}} \le c_{15}\|f\|_{\vec{p}}$, $\forall i_1 \in (1,\dots,n)$.

Покажем, что $\|f_{i_1,\dots,i_{k+1}}\|_{\vec{p}} \le c_{16}\|f\|_{\vec{p}}$, $\forall (i_1,\dots,i_{k+1}) \subset (1,\dots,n)$, где постоянная c_{16} не зависит от f, считая истинными аналогичные утверждения для всех функций представления (1.1), зависящих не более, чем от k переменных, где $k \in (1,\dots,n-2)$.

Так как (по предположению) все вычитаемые функции и постоянная f_0 в формулах (1.2) удовлетворяют соотношениям 1), то остается проверить, что первый член в соответствующей формуле (1.2) также удовлетворяет этому неравенству.

Рассмотрим

$$J_2 \equiv \left\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-k-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_{k+2}} \dots dx_{i_n} \right\|_{\vec{p}}.$$

Применяя лемму 1.3, получим

$$J_2 \le c_{17}\|f\|_{\vec{p}},$$

где c_{17} не зависит от f.

Таким образом, доказано, что $\|f_{i_1,\dots,i_{k+1}}\|_{\vec{p}} \le c_{18}\|f\|_{\vec{p}}$, $\forall (i_1,\dots,i_{k+1}) \subseteq (1,\dots,n)$, $\forall\ k \in (1,\dots,n-2)$, где c_{18} не зависит от f.

Так как $f \in L_p$ и для всех функции представления (1.1), зависящих не более чем от $(n-1)$ переменных, выполнено соотношение 1), то, пользуясь формулой (1.2) для $f_{1,\dots,n}$, получаем, что $\|f_{1,\dots,n}\|_{\vec{p}} \le c_{19}\|f\|_{\vec{p}}$, где c_{19} не зависит от f.

Таким образом, доказана справедливость соотношений 1) утверждения теоремы 1.1.

Докажем справедливость соотношений 2) утверждения теоремы 1.1.

Покажем, что $\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1} dx_{i_1} = 0$, $\forall i_1 \in (1,\dots,n)$. Применяя определение f_{i_1}, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1} dx_{i_1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_1 \dots dx_n - 2\pi f_0 = 2\pi(f_0 - f_0) = 0.$$

Покажем, что $\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_{s+1}} dx_{i_1} = \dots = \int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_{s+1}} dx_{i_{s+1}} = 0$, $\forall (i_1,\dots,i_{s+1}) \subset (1,\dots,n)$, считая, что аналогичное утверждение доказано для всех функций представления (1.1), зависящих не более, чем от s переменных, где $s \in (1,\dots,n-2)$.

Сначала проверим, что $\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_{s+1}} dx_{i_1} = 0$.

Пользуясь формулой (1.2) для $f_{i_1,\dots,i_{s+1}}$, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_{s+1}} dx_{i_1} = \int\limits_0^{2\pi} \Bigg(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_{s+2}} \dots dx_{i_n} - f_0 - \sum_{j_1=1}^{s+1} f_{i_{j_1}} - \\ - \sum_{j_2=2}^{s+1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1} i_{j_2}} - \dots - \sum_{j_{s-1}=s-1}^{s+1} \dots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{s-1}}} - \\ \sum_{j_s=s}^{s+1} \dots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_s}} \Bigg) dx_{i_1}.$$

Так как по предположению интегралы по dx_{i_1} от всех функций правой части, зависящих от x_{i_1}, равны 0, то

$$\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_{s+1}} dx_{i_1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_1} dx_{i_{s+2}} \dots dx_{i_n} - \int\limits_0^{2\pi} f_0 dx_{i_1} - \\ - \sum_{j_1=2}^{s+1} \int\limits_0^{2\pi} f_{i_{j_1}} dx_{i_1} - \sum_{j_2=3}^{s+1} \sum_{j_1=2}^{j_2-1} \int\limits_0^{2\pi} f_{i_{j_1} i_{j_2}} dx_{i_1} - \dots - \\ - \sum_{j_{s-1}=s}^{s+1} \dots \sum_{j_2=3}^{j_3-1} \sum_{j_1=2}^{j_2-1} \int\limits_0^{2\pi} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{s-1}}} dx_{i_1} - \int\limits_0^{2\pi} f_{i_2,\dots,i_{s+1}} dx_{i_1}.$$

Подставляя вместо $f_{i_2,\dots,i_{s+1}}$ ее явный вид из формул (1.2), получим

$$\int\limits_0^{2\pi} f_{i_1,\dots,i_{s+1}} dx_{i_1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_1} dx_{i_{s+2}} \dots dx_{i_n} - \int\limits_0^{2\pi} f_0 dx_{i_1} - \\ - \sum_{j_1=2}^{s+1} \int\limits_0^{2\pi} f_{i_{j_1}} dx_{i_1} - \sum_{j_2=3}^{s+1} \sum_{j_1=2}^{j_2-1} \int\limits_0^{2\pi} f_{i_{j_1} i_{j_2}} dx_{i_1} - \dots - \sum_{j_{s-1}=s}^{s+1} \dots \sum_{j_2=3}^{j_3-1} \sum_{j_1=2}^{j_2-1} \int\limits_0^{2\pi} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{s-1}}} dx_{i_1} - \\ - \int\limits_0^{2\pi} \Bigg(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_1} dx_{i_{s+2}} \dots dx_{i_n} - f_0 - \sum_{j_1=2}^{s+1} f_{i_{j_1}} - \sum_{j_2=3}^{s+1} \sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1} i_{j_2}} -$$

$$-\ldots-\sum_{j_{s-1}=s}^{s+1}\ldots\sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1}f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-1}}}\Bigg)\,dx_{i_1}.$$

Раскрывая скобки, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi}f_{i_1,\ldots,i_{s+1}}dx_{i_1}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s-1}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\,dx_{i_1}dx_{i_{s+2}}\ldots dx_{i_n}-\int\limits_0^{2\pi}f_0dx_{i_1}-$$

$$-\sum_{j_1=2}^{s+1}\int\limits_0^{2\pi}f_{i_{j_1}}dx_{i_1}-\sum_{j_2=3}^{s+1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1}\int\limits_0^{2\pi}f_{i_{j_1}i_{j_2}}dx_{i_1}-\ldots-\sum_{j_{s-1}=s}^{s+1}\ldots\sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1}\int\limits_0^{2\pi}f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-1}}}dx_{i_1}-$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s-1}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f\,dx_{i_1}dx_{i_{s+2}}\ldots dx_{i_n}+\int\limits_0^{2\pi}f_0dx_{i_1}+\sum_{j_1=2}^{s+1}\int\limits_0^{2\pi}f_{i_{j_1}}dx_{i_1}+$$

$$+\sum_{j_2=3}^{s+1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1}\int\limits_0^{2\pi}f_{i_{j_1}i_{j_2}}dx_{i_1}+\ldots+\sum_{j_{s-1}=s}^{s+1}\ldots\sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1}\int\limits_0^{2\pi}f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-1}}}dx_{i_1}=0.$$

Рассуждая аналогично, получим, что

$$\int\limits_0^{2\pi}f_{i_1,\ldots,i_{s+1}}dx_{i_2}=\ldots=\int\limits_0^{2\pi}f_{i_1,\ldots,i_{s+1}}dx_{i_{s+1}}=0$$

для $s\in(1,\ldots,n-2)$.

Проверим, что $\int\limits_0^{2\pi}f_{1,\ldots,n}dx_1=0$. Так как

$$\int\limits_0^{2\pi}f_{1,\ldots,n}dx_1=\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(f-f_0-\sum_{i_1=1}^{n}f_{i_1}-\sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}f_{i_1i_2}-\ldots-$$

$$-\sum_{i_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}f_{i_1,\ldots,i_{n-2}}-\sum_{i_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\Bigg)dx_1,$$

то, повторяя только что проведенное рассуждение, считая, что $s=n-1$, и рассматривая f вместо $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s-1}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}f\,dx_{i_{s+2}}\ldots dx_{i_n}$, получим требуемое.

Рассуждая аналогично, получим, что

$$\int\limits_0^{2\pi}f_{1,\ldots,n}dx_2=\ldots=\int\limits_0^{2\pi}f_{1,\ldots,n}dx_n=0.$$

Таким образом, доказана справедливость соотношений 2).

1.3 Приближение углом членов распасовки

Теорема 1.2. *В условиях теоремы 1.1, для функций представления (1.1) и* $\forall l_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *справедливы соотношения:*
1) $Y_{l_1,\dots,l_n}(f)_{\vec{p}} = Y_{l_1,\dots,l_n}(f_{1,\dots,n})_{\vec{p}}$*;*
2) $Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} \le c_{20} Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f)_{\vec{p}}, \forall\,(i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n)$*;*
3)
$$Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f)_{\vec{p}} \le c_{21} \Bigg(Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} + \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}})_{\vec{p}} +$$
$$+ \sum_{j_{s+2}=s+2}^{n} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}})_{\vec{p}} + \dots +$$
$$+ \sum_{j_{n-1}=n-1}^{n} \dots \sum_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}})_{\vec{p}} + Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f_{1,\dots,n})_{\vec{p}} \Bigg),$$
$\forall\,(i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n)$,
где постоянные c_{20} *и* c_{21} *не зависят от* f *и* l_{i_j}*.*

Доказательство. Докажем справедливость соотношения 1).

Для данного $\varepsilon > 0$ существуют функции $T^*_{\nu_1} \in L_{\vec{p}}, \dots, T^*_{\nu_n} \in L_{\vec{p}}$, каждая из которых является тригонометрическим полиномом соответственно порядка ν_i по переменной x_i, такие, что

$$\|f - \sum_{i=1}^{n} T^*_{\nu_i}\|_{\vec{p}} \le Y_{\nu_1,\dots,\nu_n}(f)_{\vec{p}} + \varepsilon.$$

Рассмотрим функции:

$$T_{\nu_1} = T^*_{\nu_1} - f_0 - \sum_{i_1=2}^{n} f_{i_1} - \sum_{i_2=3}^{n} \sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} - \dots - \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \dots \sum_{i_2=3}^{i_3-1} \sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,\dots,i_{n-2}} -$$
$$- f_{2,3,\dots,n},$$
$$T_{\nu_2} = T^*_{\nu_2} - f_1 - \sum_{i_2=3}^{n} f_{1,i_2} - \sum_{i_3=4}^{n} \sum_{i_2=3}^{i_3-1} f_{1,i_2,i_3} - \dots - \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \dots \sum_{i_3=4}^{i_4-1} \sum_{i_2=3}^{i_3-1} f_{1,i_2,\dots,i_{n-2}} -$$
$$- f_{1,3,4,\dots,n},$$

$$
\begin{aligned}
T_{\nu_3} =& T^*_{\nu_3} - f_{1,2} - \sum_{i_3=4}^{n} f_{1,2,i_3} - \sum_{i_4=5}^{n}\sum_{i_3=4}^{i_4-1} f_{1,2,i_3,i_4} - \ldots - \\
& - \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_4=5}^{i_5-1}\sum_{i_3=4}^{i_4-1} f_{1,2,i_3,\ldots,i_{n-2}} - f_{1,2,4,5,\ldots,n},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{aligned}
T_{\nu_k} =& T^*_{\nu_k} - f_{1,2,\ldots,k-1} - \sum_{i_k=k+1}^{n} f_{1,\ldots,k-1,i_k} - \sum_{i_{k+1}=k+2}^{n}\ \sum_{i_k=k+1}^{i_{k+1}-1} f_{1,\ldots,k-1,i_k,i_{k+1}} - \ldots - \\
& - \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_{k+1}=k+2}^{i_{k+2}-1}\ \sum_{i_k=k+1}^{i_{k+1}-1} f_{1,\ldots,k-1,i_k,i_{k+1},\ldots,i_{n-2}} - f_{1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n},
\end{aligned}
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{aligned}
T_{\nu_{n-1}} =& T^*_{\nu_{n-1}} - f_{1,2,\ldots,n-2} - f_{1,\ldots,n-2,n}, \\
T_{\nu_n} =& T^*_{\nu_n} - f_{1,2,\ldots,n-1}.
\end{aligned}
$$

В равенствах (1.3) для:

- T_{ν_1} – из $T^*_{\nu_1}$ вычитаются постоянная f_0 и все функции представления (1.1), не зависящие от x_1,
- T_{ν_2} – из $T^*_{\nu_2}$ вычитаются все функции представления (1.1), зависящие от x_1, но не зависящие от x_2,
- T_{ν_3} – из $T^*_{\nu_3}$ вычитаются все функций представления (1.1), зависящие от x_1 и x_2, но не зависящие от x_3,
- $\ldots$
- T_{ν_k} – из $T^*_{\nu_k}$ вычитаются все функций представления (1.1), зависящие от $x_1, \ldots, x_{k-1}$, но не зависящие от x_k,
- $\ldots$
- $T_{\nu_{n-1}}$ – из $T^*_{\nu_{n-1}}$ вычитаются все функций представления (1.1), зависящие от $x_1, \ldots, x_{n-2}$, но не зависящие от x_{n-1}.
- T_{ν_n} – из $T^*_{\nu_n}$ вычитаются все функций представления (1.1), зависящие от $x_1, \ldots, x_{n-1}$, но не зависящие от x_n.

Так как постоянная f_0 и все функции представления (1.1), не зависящие от x_1, являются по переменной x_1 тригонометрическими полиномами порядка 0, то T_{ν_1} является тригонометрическим полиномом порядка ν_1 по переменной x_1.

Так как все функции представления (1.1), не зависящие от x_k, $k \in (2,\ldots,n)$ и зависящие от $x_1,\ldots,x_{k-1}$, являются по переменной x_k тригонометрическими полиномами порядка 0, то T_{ν_k} является тригонометрическим полиномом порядка ν_k по переменной x_k.

Рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{n} T_{\nu_i}$. Подставим вместо T_{ν_i} их явный вид из равенств (1.3), сгруппируем вместе функции одинакового количества переменных, и, учитывая, что в совокупности правых частей равенств (1.3) содержатся постоянная f_0 и все функции представления (1.1), кроме $f_{1,\ldots,n}$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} T^*_{\nu_i} - f_0 - \left(\sum_{i_1=2}^{n} f_{i_1} + f_1\right) - \left(\sum_{i_2=3}^{n}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} + \sum_{i_2=3}^{n} f_{1,i_2} + f_{1,2}\right) - \ldots -$$

$$-\left(\sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_2=3}^{i_3-1}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-2}} + \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_3=4}^{i_4-1}\sum_{i_2=3}^{i_3-1} f_{1,i_2,\ldots,i_{n-2}} + \ldots + f_{1,\ldots,n-2}\right) -$$

$$-\left(f_{2,\ldots,n} + f_{1,3,\ldots,n} + f_{1,2,4,\ldots,n} + \ldots + f_{1,\ldots,n-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} T^*_{\nu_i} - f_0 - \sum_{i_1=1}^{n} f_{i_1} - \sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} - \ldots - \sum_{i_{n-2}=n-2}^{n} \ldots \sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-2}} -$$

$$- \sum_{i_n-1=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}.$$

Используя представление (1.1), получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} T^*_{\nu_i} - f + f_{1,\ldots,n}. \tag{1.4}$$

По определению приближения n-мерным углом имеем

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}} \leq \left\| f_{1,\ldots,n} - \sum_{i=1}^{n} T_{\nu_i} \right\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь равенством (1.4), получим

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}} \leq \left\| f_{1,\ldots,n} - \sum_{i=1}^{n} T^*_{\nu_i} + f - f_{1,\ldots,n} \right\|_{\vec{p}} = \left\| f - \sum_{i=1}^{n} T^*_{\nu_i} \right\|_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f)_{\vec{p}} + \varepsilon.$$

Так как это неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}} \le Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f)_{\vec{p}}. \tag{1.5}$$

Теперь проверим, что

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f)_{\vec{p}} \le Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}}.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ существуют функции $T^{**}_{\nu_1} \in L_{\vec{p}}, \ldots, T^{**}_{\nu_n} \in L_{\vec{p}}$, каждая из которых является тригонометрическим полиномом соответственно степени ν_i по переменной x_i, такие, что

$$\|f_{1,\ldots,n} - \sum_{i=1}^{n} T^{**}_{\nu_i}\|_{\vec{p}} \le Y_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}} + \varepsilon.$$

Рассмотрим функции:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\nu_1} =& T^{**}_{\nu_1} + f_0 + \sum_{i_1=2}^{n} f_{i_1} + \sum_{i_2=3}^{n}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} + \ldots + \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_2=3}^{i_3-1}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-2}} + \\
& + f_{2,3,\ldots,n}, \\
\hat{T}_{\nu_2} =& T^{**}_{\nu_2} + f_1 + \sum_{i_2=3}^{n} f_{1,i_2} + \sum_{i_3=4}^{n}\sum_{i_2=3}^{i_3-1} f_{1,i_2,i_3} + \ldots + \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_3=4}^{i_4-1}\sum_{i_2=3}^{i_3-1} f_{1,i_2,\ldots,i_{n-2}} + \\
& + f_{1,3,\ldots,n}, \\
\hat{T}_{\nu_3} =& T^{**}_{\nu_3} + f_{1,2} + \sum_{i_3=4}^{n} f_{1,2,i_3} + \sum_{i_4=5}^{n}\sum_{i_3=4}^{i_4-1} f_{1,2,i_3,i_4} + \ldots + \\
& + \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_4=5}^{i_5-1}\sum_{i_3=4}^{i_4-1} f_{1,2,i_3,\ldots,i_{n-2}} + f_{1,2,4,5,\ldots,n}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hat{T}_{\nu_k} =& T^{**}_{\nu_k} + f_{1,2,\ldots,k-1} + \sum_{i_k=k+1}^{n} f_{1,\ldots,k-1,i_k} + \sum_{i_{k+1}=k+2}^{n}\sum_{i_k=k+1}^{i_{k+1}-1} f_{1,\ldots,k-1,i_k,i_{k+1}} + \ldots + \\
& + \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_{k+1}=k+2}^{i_{k+2}-1}\sum_{i_k=k+1}^{i_{k+1}-1} f_{1,\ldots,k-1,i_k,i_{k+1},\ldots,i_{n-2}} + f_{1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hat{T}_{\nu_{n-1}} =& T^{**}_{\nu_{n-1}} + f_{1,2,\ldots,n-2} + f_{1,2,\ldots,n-2,n}, \\
\hat{T}_{\nu_n} =& T^{**}_{\nu_n} + f_{1,2,\ldots,n-1}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

В равенствах (1.6) для:

– T_{ν_1} – к $T^{**}_{\nu_1}$ прибавляются постоянная f_0 и все функции представления (1.1), не зависящие от x_1,
– T_{ν_2} – к $T^{**}_{\nu_2}$ прибавляются все функции представления (1.1), зависящие от x_1, но не зависящие от x_2,
– T_{ν_3} – к $T^{**}_{\nu_3}$ прибавляются все функции представления (1.1), зависящие от x_1 и x_2, но не зависящие от x_3,
– ...
– T_{ν_k} – к $T^{**}_{\nu_k}$ прибавляются все функций представления (1.1), зависящие от $x_1, \ldots, x_{k-1}$, но не зависящие от x_k,
– ...
– $T_{\nu_{n-1}}$ – к $T^{**}_{\nu_{n-1}}$ прибавляются все функций представления (1.1), зависящие от $x_1, \ldots, x_{n-2}$, но не зависящие от x_{n-1},
– T_{ν_n} – к $T^{**}_{\nu_n}$ прибавляются все функций представления (1.1), зависящие от $x_1, \ldots, x_{n-1}$, но не зависящие от x_n,

Так как постоянная f_0 и все функции представления (1.1), не зависящие от x_1, являются по переменной x_1 тригонометрическими полиномами порядка 0, то $\hat{T}_{\nu_1}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_1 по переменной x_1.

Так как все функции представления (1.1), не зависящие от x_k, $k \in (2, \ldots, n)$, и зависящие от $x_1, \ldots, x_{k-1}$, являются по переменной x_k тригонометрическими полиномами порядка 0, то $\hat{T}_{\nu_k}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_k по переменной x_k.

Рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{n} \hat{T}_{\nu_i}$. Подставим вместо $\hat{T}_{\nu_i}$ их явный вид из равенств (1.6), сгруппируем вместе функции одинакового количества переменных, и, учитывая, что в совокупности правых частей равенств (1.6) содержатся постоянная f_0 и все функции представления (1.1), кроме $f_{1,\ldots,n}$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{T}_{\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} T^{**}_{\nu_i} + f_0 + \left(\sum_{i_1=2}^{n} f_{i_1} + f_1\right) + \left(\sum_{i_2=3}^{n}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} + \sum_{i_2=3}^{n} f_{1,i_2} + f_{1,2}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_2=3}^{i_3-1}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-2}} + \sum_{i_{n-2}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_3=4}^{i_4-1}\sum_{i_2=3}^{i_3-1} f_{1,i_2,\ldots,i_{n-2}} + \ldots + f_{1,\ldots,n-2}\right) +$$
$$+ \left(f_{2,\ldots,n} + f_{1,3,\ldots,n} + f_{1,2,4,\ldots,n} + \ldots + f_{1,\ldots,n-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} T_{\nu_i}^{**} + f_0 + \sum_{i_1=1}^{n} f_{i_1} + \sum_{i_2=2}^{n} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} + \ldots + \sum_{i_{n-2}=n-2}^{n} \cdots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-2}} + \\ + \sum_{i_n-1=n-1}^{n} \cdots \sum_{i_2=2}^{i_3-1} \sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}.$$

Применяя представление (1.1), получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{T}_{\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} T_{\nu_i}^{**} + f - f_{1,\ldots,n}. \tag{1.7}$$

По определению приближения n-мерным углом, имеем

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f)_{\vec{p}} \leq \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \hat{T}_{\nu_i} \right\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь равенством (1.7), получим

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f)_{\vec{p}} \leq \left\| f - \sum_{i=1}^{n} T_{\nu_i}^{**} - f + f_{1,\ldots,n} \right\|_{\vec{p}} = \left\| f_{1,\ldots,n} - \sum_{i=1}^{n} T_{\nu_i}^{**} \right\|_{\vec{p}} \leq \\ \leq Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}} + \varepsilon.$$

Так как это неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f)_{\vec{p}} \leq Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}}. \tag{1.8}$$

Из справедливости неравенств (1.5) и (1.8), получаем, что

$$Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f)_{\vec{p}} = Y_{\nu_1\ldots\nu_n}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}}.$$

Таким образом, доказана справедливость соотношения 1).

Докажем справедливость соотношений 2).

Для данного $\varepsilon > 0$ существуют функции $T_{\nu_{i_1}}^{*} \in L_{\vec{p}}, \ldots, T_{\nu_{i_s}}^{*} \in L_{\vec{p}}$, каждая из которых является тригонометрическим полиномом соответственно порядка ν_i по переменной x_i, такие, что

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{s} T_{\nu_{i_j}}^{*} \right\|_{\vec{p}} \leq Y_{\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}} + \varepsilon.$$

Рассмотрим функции:

$$T_{\nu_{i_1}} \equiv T_{\nu_{i_1}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_1}} dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n} - f_0 - \sum_{j_1=2}^{s} f_{i_{j_1}} -$$

$$-\sum_{j_2=3}^{s}\sum_{j_1=2}^{i_2-1} f_{i_{j_1},i_{j_2}} - \ldots - \sum_{j_{s-2}=s-1}^{s}\ldots\sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-2}}} - f_{i_2,i_3,\ldots,i_s},$$

$$T_{\nu_{i_2}} \equiv T_{\nu_{i_2}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_2}} dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n} - f_{i_1} - \sum_{j_2=3}^{s} f_{i_1,i_{j_2}} -$$

$$-\sum_{j_3=4}^{s}\sum_{j_2=3}^{i_3-1} f_{i_1,i_{j_2},i_{j_3}} - \ldots - \sum_{j_{s-2}=s-1}^{s}\ldots\sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\ldots,i_{j_{s-2}}} - f_{i_1,i_3,\ldots,i_s},$$

$$T_{\nu_{i_3}} \equiv T_{\nu_{i_3}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_3}} dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n} - f_{i_1,i_2} -$$

$$-\sum_{j_3=4}^{s} f_{i_1,i_2,i_{j_3}} - \sum_{j_4=5}^{s}\sum_{j_3=4}^{i_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},i_{j_4}} - \ldots -$$

$$-\sum_{j_{s-2}=s-1}^{s}\ldots\sum_{j_4=5}^{j_5-1}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\ldots,i_{j_{s-2}}} - f_{i_1,i_2,i_4,\ldots,i_s},$$

. . . .

$$T_{\nu_{i_k}} \equiv T_{\nu_{i_k}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_k}} dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n} - f_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}} - \tag{1.9}$$

$$-\sum_{j_k=k+1}^{s} f_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{j_k}} - \sum_{j_{k+1}=k+2}^{s}\sum_{j_k=k+1}^{i_{k+1}-1} f_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{j_k},i_{j_{k+1}}} - \ldots -$$

$$-\sum_{j_{s-2}=s-1}^{s}\ldots\sum_{j_{k+1}=k+2}^{j_{k+2}-1}\sum_{j_k=k+1}^{j_{k+1}-1} f_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{j_k},i_{j_{k+1}},\ldots,i_{j_{s-2}}} - f_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_s},$$

. . . .

$$T_{\nu_{i_{s-1}}} \equiv T_{\nu_{i_{s-1}}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_s}} dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n} - f_{i_1,\ldots,i_{s-2}} -$$

$$-f_{i_1,\ldots,i_{s-2},i_s},$$

$$T_{\nu_{i_s}} \equiv T_{\nu_{i_s}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_s}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n} - f_{i_1,\ldots,i_{s-1}}.$$

В равенствах (1.9) для:

– $T_{\nu_{i_1}}$ – из $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_1}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$ вычитаются постоянная f_0 и все функции представления (1.1), содержащиеся в правой части формулы (1.2), соответствующей $f_{i_1,\ldots,i_s}$, и не зависящие от x_{i_1},

– $T_{\nu_{i_2}}$ – из $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_2}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$ вычитаются все функции представления (1.1), содержащиеся в правой части формулы (1.2), соответствующей $f_{i_1,\ldots,i_s}$, и зависящие от x_{i_1}, но не зависящие от x_{i_2} ,

– $T_{\nu_{i_3}}$ – из $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_3}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$ вычитаются все функции представления (1.1), содержащиеся в правой части формулы (1.2), соответствующей $f_{i_1,\ldots,i_s}$, и зависящие от x_{i_1} и x_{i_2}, но не зависящие от x_{i_3},

– ...

– $T_{\nu_{i_k}}$ – из $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_k}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$ вычитаются все функций представления (1.1), содержащиеся в правой части формулы (1.2), соответствующей $f_{i_1,\ldots,i_s}$, и зависящие от $x_{i_1},\ldots,x_{i_{k-1}}$, но не зависящие от x_{i_k},

– ...

– $T_{\nu_{i_{s-1}}}$ – из $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_s}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$ вычитаются все функций представления (1.1), содержащиеся в правой части формулы (1.2), соответствующей $f_{i_1,\ldots,i_{s-1}}$, и зависящие от $x_{i_1},\ldots,x_{i_{s-2}}$, но не зависящие от $x_{i_{s-1}}$,

– $T_{\nu_{i_s}}$ – из $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_s}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$ вычитаются все функций представления (1.1), содержащиеся в правой части формулы (1.2), соответствующей $f_{i_1,\ldots,i_s}$, и зависящие от $x_{i_1},\ldots,x_{i_{s-1}}$, но не зависящие от x_{i_s}.

Так как $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} T^*_{\nu_{i_1}} dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_1} по переменной x_{i_1}, и так как постоянная f_0 и все функции представления (1.1), не зависящие от x_{i_1}, являются по переменной x_{i_1} тригонометрическими полиномами порядка 0, то $T_{\nu_{i_1}}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_1} по переменной x_{i_1}.

Так как $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}T^*_{\nu_{i_k}}dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_k} по переменной x_{i_k}, $k\in(2,\ldots,s)$, и так как все функции представления (1.1), не зависящие от x_{i_k}, являются по переменной x_{i_k} тригонометрическими полиномами порядка 0, то $T_{\nu_{i_k}}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_1} по переменной x_{i_1}.

Рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}$. Подставим вместо $T_{\nu_{i_k}}$ их явный вид из формул (1.9), сгруппируем вместе функции одинакового количества переменных, и, учитывая, что в совокупности правых частей равенств (1.9) содержатся постоянная f_0 и все функции представления (1.1), содержащиеся в формуле (1.2) для функции $f_{i_1,\ldots,i_s}$ кроме $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}f dx_{i_{s+1}}dx_{i_n}$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}T_{\nu_i}&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{s}T^*_{\nu_{i_k}}dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n}-f_0-\left(\sum_{j_1=2}^{s}f_{i_{j_1}}+f_{i_1}\right)-\\&-\left(\sum_{j_2=3}^{s}\sum_{j_1=2}^{j_2-1}f_{i_{j_1},i_{j_2}}+\sum_{j_2=3}^{s}f_{i_1,i_{j_2}}+f_{i_1,i_2}\right)-\ldots-\\&-\left(\sum_{j_{s-2}=s-1}^{s}\ldots\sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1}f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-2}}}+\sum_{j_{s-2}=s-1}^{s}\ldots\sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1}f_{i_1,i_{j_2},\ldots,i_{j_{s-2}}}+\right.\\&\left.+\ldots+f_{i_1,\ldots,i_{s-2}}\right)-\left(f_{i_2,\ldots,i_s}+f_{i_1,i_3,\ldots,i_s}+f_{i_1,i_2,i_4,\ldots,i_s}+\ldots+f_{i_1,\ldots,i_{s-1}}\right)=\\&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{s}T^*_{\nu_{i_k}}dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n}-f_0-\sum_{j_1=1}^{s}f_{i_{j_1}}-\sum_{j_2=2}^{s}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}f_{i_{j_1},i_{j_2}}-\ldots-\\&-\sum_{j_{s-2}=s-2}^{s}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-2}}}-\sum_{j_{s-1}=s-1}^{s}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-1}}}.\end{aligned}$$

Используя явный вид для $f_{i_1,\ldots,i_s}$ из соответствующей формулы (1.2), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}T_{\nu_i}&=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{s}T^*_{\nu_{i_k}}dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n}+f_{i_1,\ldots,i_s}-\\&-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}f dx_{i_{s+1}}\ldots dx_{i_n}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{s} T_{\nu_i} = f_{i_1,\dots,i_s} + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{s} T^*_{\nu_{i_k}} - f\right) dx_{i_{s+1}} \dots dx_{i_n}. \tag{1.10}$$

По определению s мерного приближения углом, имеем

$$Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} \le \left\| f_{i_1,\dots,i_s} - \sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}} \right\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь равенством (1.10), получим

$$Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} \le$$
$$\le \left\| f_{i_1,\dots,i_s} - \left(f_{i_1,\dots,i_s} + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{s} T^*_{\nu_{i_k}} - f\right) dx_{i_{s+1}} \dots dx_{i_n} \right) \right\|_{\vec{p}} =$$
$$= \left\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{s} T^*_{\nu_{i_k}} - f\right) dx_{i_{s+1}} \dots dx_{i_n} \right\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь леммой 1.3, получаем

$$Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} \le c_{22} \left\| f - \sum_{k=1}^{s} T^*_{\nu_{i_k}} \right\|_{\vec{p}} \le c_{22} \left(Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}} + \varepsilon \right),$$

где постоянная c_{22} не зависит от f, ν_{i_j} и ε.

Так как последнее неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то

$$Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}} \le c_{23} Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}},$$

где постоянная c_{23} не зависит от f и ν_{i_j}.

Таким образом, доказана справедливость соотношений 2).

Докажем справедливость соотношений 3).

Для данных $s \in (1,\dots,n-1)$, $(i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n)$, $\varepsilon > 0$ и любого $k \in (1,\dots,s)$ существуют функции:

$$\begin{aligned} T^{(\varnothing)}_{\nu_{i_k}} &\equiv T^{(\varnothing)}_{\nu_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}), \\ T^{(j_{s+1})}_{\nu_{i_k}} &\equiv T^{(j_{s+1})}_{\nu_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_s},x_{i_{j_{s+1}}}), \forall j_{s+1} \in (s+1,\dots,n), \\ T^{(j_{s+1},j_{s+2})}_{\nu_{i_k}} &\equiv T^{(j_{s+1},j_{s+2})}_{\nu_{i_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_s},x_{i_{j_{s+1}}},x_{i_{j_{s+2}}}), \forall (j_{s+1},j_{s+2}) \subset (s+1,\dots,n), \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{s+m})} \equiv T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{s+m})}(x_{i_1},\dots,x_{i_s},x_{i_{j_{s+1}}},\dots,x_{i_{j_{s+m}}}),\\
\forall (j_{s+1},\dots,j_{s+m}) \subset (s+1,\dots,n),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{n-1})} \equiv T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{n-1})}(x_{i_1},\dots,x_{i_s},x_{i_{j_{s+1}}},\dots,x_{i_{j_{n-1}}}),\\
\dots\dots\dots\forall (j_{s+1},\dots,j_{n-1}) \subset (s+1,\dots,n),\\
T_{\nu_{i_k}}^{(s+1,\dots,n)} \equiv T_{\nu_{i_k}}^{(s+1,\dots,n)}(x_{i_1},\dots,x_{i_s},x_{i_{s+1}},\dots,x_{i_n}),
\end{gathered}
$$

каждая из которых принадлежит $L_{\vec{p}}$, является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_k} по переменной x_{i_k} и удовлетворяет одному (соответствующему ему) из следующих неравенств:

$$
\begin{gathered}
\left\| f_{i_1,\dots,i_s} - \sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}}^{(\varnothing)} \right\|_{\vec{p}(s)} \le Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s})_{\vec{p}(s)} + \varepsilon,\\
\left\| f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}} - \sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1})} \right\|_{\vec{p}(s+1)} \le Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}})_{\vec{p}(s+1)} + \varepsilon,\\
\forall j_{s+1} \in (s+1,\dots,n),\\
\left\| f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}} - \sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},j_{s+2})} \right\|_{\vec{p}(s+2)} \le Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}})_{\vec{p}(s+2)} + \varepsilon,\\
\forall (j_{s+1},j_{s+2}) \in (s+1,\dots,n),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (1.11)\\
\left\| f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{s+m}}} - \sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{s+m})} \right\|_{\vec{p}(s+m)} \le\\
\le Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{s+m}}})_{\vec{p}(s+m)} + \varepsilon,\\
\forall (j_{s+1},\dots,j_{s+m}) \subseteq (s+1,\dots,n),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left\| f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}} - \sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{n-1})} \right\|_{\vec{p}(n-1)} \le Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}})_{\vec{p}(n-1)} + \varepsilon,\\
\forall (j_{s+1},\dots,j_{n-1}) \subseteq (s+1,\dots,n),\\
\left\| f_{1,\dots,n} - \sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}}^{(s+1,\dots,n)} \right\|_{\vec{p}(n)} \le Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f_{1,\dots,n})_{\vec{p}(n)} + \varepsilon.
\end{gathered}
$$

Для каждого $k \in (1,\dots,s)$ обозначим через $J(i_k)$ сумму всех этих функций $T^{(\varnothing)}_{\nu_{i_k}},\dots,T^{(s+1,\dots,n)}_{\nu_{i_k}}$, то есть

$$
\begin{aligned}
J(i_k) \equiv T^{(\varnothing)}_{\nu_{i_k}} &+ \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} T^{(j_{s+1})}_{\nu_{i_k}} + \sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_2-1} T^{(j_{s+1},j_{s+2})}_{\nu_{i_k}} + \\
&+ \ldots + \sum_{j_{s+m}=s+m}^{n} \cdots \sum_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} T^{(j_{s+1},\dots,j_{s+m})}_{\nu_{i_k}} + \ldots + \\
&+ \sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\sum_{j_{n-2}=n-2}^{j_{n-1}-1} \cdots \sum_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} T^{(j_{s+1},\dots,j_{n-1})}_{\nu_{i_k}} + T^{(s+1,\dots,n)}_{\nu_{i_k}}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим функции:

$$
\begin{aligned}
T_{\nu_{i_1}} =& J(i_1) + f_0 + \sum_{j_1=2}^{n} f_{i_{j_1}} + \sum_{j_2=3}^{n}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},i_{j_2}} + \ldots + \\
&+ \sum_{j_{n-2}=n-1}^{n} \cdots \sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{n-2}}} + f_{i_2,\dots,i_n}, \\
T_{\nu_{i_2}} =& J(i_2) + f_{i_1} + \sum_{j_2=3}^{n} f_{i_1,i_{j_2}} + \sum_{j_3=4}^{n}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},i_{j_3}} + \ldots + \\
&+ \sum_{j_{n-2}=n-1}^{n} \cdots \sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\dots,i_{j_{n-2}}} + f_{i_1,i_3,\dots,i_n}, \\
T_{\nu_{i_3}} =& J(i_3) + f_{i_1,i_2} + \sum_{j_3=4}^{n} f_{i_1,i_2,i_{j_3}} + \sum_{j_4=5}^{n}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},i_{j_4}} + \ldots + \qquad (1.12) \\
&+ \sum_{j_{n-2}=n-1}^{n} \cdots \sum_{j_4=5}^{j_5-1}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\dots,i_{j_{n-2}}} + f_{i_1,i_2,i_4,\dots,i_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
T_{\nu_{i_{s-1}}} =& J(i_{s-1}) + f_{i_1,\ldots,i_{s-2}} + \sum_{j_{s-1}=s}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{s-2},i_{j_{s-1}}} + \\
&+ \sum_{j_s=s+1}^{n} \sum_{j_{s-1}=s}^{j_s-1} f_{i_1,\ldots,i_{s-2},i_{j_{s-1}},i_{j_s}} + \ldots + f_{i_1,\ldots,i_{s-2},i_s,\ldots,i_n}, \\
T_{\nu_{i_s}} =& J(i_s) + f_{i_1,\ldots,i_{s-1}} + \sum_{j_s=s+1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{j_s}} + \\
&+ \sum_{j_{s+1}=s+2}^{n} \sum_{j_s=s+1}^{j_{s+1}-1} f_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{j_s},i_{j_{s+1}}} + \ldots + f_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_n}.
\end{aligned}$$

В равенствах (1.12) для:

- $T_{\nu_{i_1}} \equiv T_{\nu_{i_1}}(x_1,\ldots,x_n)$ – к $J(i_1)$ прибавляются постоянная f_0 и все функции представления (1.1), не зависящие от x_{i_1},
- $T_{\nu_{i_2}} \equiv T_{\nu_{i_2}}(x_1,\ldots,x_n)$ – к $J(i_2)$ прибавляются все функции представления (1.1), зависящие от x_{i_1}, но не зависящие от x_{i_2},
- $T_{\nu_{i_3}} \equiv T_{\nu_{i_3}}(x_1,\ldots,x_n)$ – к $J(i_3)$ прибавляются все функции представления (1.1), зависящие от x_{i_1}, x_{i_2}, но не зависящие от x_{i_3},
- $\ldots$
- $T_{\nu_{i_{s-1}}} \equiv T_{\nu_{i_{s-1}}}(x_1,\ldots,x_n)$ – к $J(i_{s-1})$ прибавляются все функции представления (1.1), зависящие от $x_{i_1},\ldots,x_{i_{s-2}}$, но не зависящие от $x_{i_{s-1}}$,
- $T_{\nu_{i_s}} \equiv T_{\nu_{i_s}}(x_1,\ldots,x_n)$ – к $J(i_s)$ прибавляются все функции представления (1.1), зависящие от $x_{i_1},\ldots,x_{i_{s-1}}$, но не зависящие от x_{i_s}.

Так как $J(i_1)$ является суммой тригонометрических полиномов порядка ν_{i_1} по переменной x_{i_1}, а постоянная f_0 и все функции представления (1.1), не зависящие от x_{i_1}, являются тригонометрическими полиномами порядка 0 по переменной x_{i_1}, то $T_{\nu_{i_1}}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_1} по переменной x_{i_1}.

Так как $J(i_2)$ является суммой тригонометрических полиномов порядка ν_{i_2} по переменной x_{i_2}, а все функции представления (1.1), не зависящие от x_{i_2}, являются тригонометрическими полиномами порядка 0 по переменной x_{i_2}, то $T_{\nu_{i_2}}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_2} по переменной x_{i_2}.

Повторяя аналогичные рассуждения для каждой функции $T_{\nu_{i_k}}$, получаем, что $T_{\nu_{i_k}}$ является тригонометрическим полиномом порядка ν_{i_k} по переменной x_{i_k} $(\forall k \in \{1,\ldots,s\})$.

Рассмотрим $\sum\limits_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}}$. Подставляя вместо $T_{\nu_{i_k}}$ их явный вид из равенств (1.12) и группируя вместе все функции представления (1.1), зависящие от одинакового количества переменных, получим

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}} = &\sum_{k=1}^{s} J(i_k) + f_0 + \left(\sum_{j_1=2}^{n} f_{i_{j_1}} + f_{i_1}\right) + \\
&+ \left(\sum_{j_2=3}^{n}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},i_{j_2}} + \sum_{j_2=3}^{n} f_{i_1,i_{j_2}} + f_{i_1,i_2}\right) + \\
&+ \left(\sum_{j_3=4}^{n}\sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},i_{j_2},i_{j_3}} + \sum_{j_3=4}^{n}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},i_{j_3}} + \sum_{j_3=4}^{n} f_{i_1,i_2,i_{j_3}}\right) + \\
&+ \ldots + \\
&+ \left(\sum_{j_{s-2}=s-1}^{n} \ldots \sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-2}}} + \sum_{j_{s-2}=s-1}^{n} \ldots \sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\ldots,i_{j_{s-2}}} + \right. \\
&+ \sum_{j_{s-2}=s-1}^{n} \ldots \sum_{j_4=5}^{j_5-1}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\ldots,i_{j_{s-2}}} + \ldots + \\
&\left. + \sum_{j_{s-2}=s-1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{s-3},i_{j_{s-2}}} + f_{i_1,\ldots,i_{s-2}}\right) + \\
&+ \left(\sum_{j_{s-1}=s}^{n} \ldots \sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-1}}} + \sum_{j_{s-1}=s}^{n} \ldots \sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\ldots,i_{j_{s-1}}} + \right. \\
&\left. + \sum_{j_{s-1}=s}^{n} \ldots \sum_{j_4=5}^{j_5-1}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\ldots,i_{j_{s-1}}} + \ldots + \sum_{j_{s-1}=s}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{s-2},i_{j_{s-1}}} + f_{i_1,\ldots,i_{s-1}}\right) + \\
&+ \left(\sum_{j_s=s+1}^{n} \ldots \sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_s}} + \sum_{j_s=s+1}^{n} \ldots \sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\ldots,i_{j_s}} + \right. \\
&\left. + \sum_{j_s=s+1}^{n} \ldots \sum_{j_4=5}^{j_5-1}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\ldots,i_{j_s}} + \ldots + \sum_{j_s=s+1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{j_s}}\right) + \\
&+ \left(\sum_{j_{s+1}=s+2}^{n} \ldots \sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s+1}}} + \sum_{j_{s+1}=s+2}^{n} \ldots \sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\ldots,i_{j_{s+1}}} + \right. \\
&\left. + \sum_{j_{s+1}=s+2}^{n} \ldots \sum_{j_4=5}^{j_5-1}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\ldots,i_{j_{s+1}}} + \ldots + \sum_{j_{s+1}=s+2}^{n}\sum_{j_s=s+1}^{j_{s+1}-1} f_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{j_s},i_{j_{s+1}}}\right) +
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

$$+\left(\sum_{j_{s+2}=s+3}^{n}\dots\sum_{j_2=3}^{j_3-1}\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{s+2}}} + \sum_{j_{s+2}=s+3}^{n}\dots\sum_{j_3=4}^{j_4-1}\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\dots,i_{j_{s+2}}}+\right.$$
$$+\sum_{j_{s+2}=s+3}^{n}\dots\sum_{j_4=5}^{j_5-1}\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\dots,i_{j_{s+2}}}+\dots+$$
$$\left.+\sum_{j_{s+2}=s+3}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+2}^{j_{s+2}-1}\sum_{j_s=s+1}^{j_{s+1}-1} f_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{j_s},i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}\right)+\dots+$$
$$+\left(\sum_{j_{n-2}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_1=2}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{n-2}}} + \sum_{j_{n-2}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_2=3}^{j_3-1} f_{i_1,i_{j_2},\dots,i_{j_{n-2}}}+\right.$$
$$+\sum_{j_{n-2}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_3=4}^{j_4-1} f_{i_1,i_2,i_{j_3},\dots,i_{j_{n-2}}}+\dots+\sum_{j_{n-2}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_{s-1}=s}^{j_s-1} f_{i_1,\dots,i_{s-2},i_{j_{s-1}},\dots,i_{j_{n-2}}}+$$
$$\left.+\sum_{j_{n-2}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_s=s+1}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{j_s},\dots,i_{j_{n-2}}}\right)+$$
$$+\left(f_{i_2,\dots,i_n}+f_{i_1,i_3,\dots,i_n}+\dots+f_{i_1,\dots,i_{s-2},i_s,\dots,i_n}+f_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_n}\right).$$

В равенстве (1.13):

- в первой скобке находится сумма всех функции представления (1.1), зависящих от одной переменной,
- во второй скобке — сумма всех функции представления (1.1), зависящих от двух переменных,
- во третьей скобке — сумма всех функции представления (1.1), зависящих от трех переменных,
- …
- в $(s-2)$-ой скобке — сумма всех функций представления (1.1), зависящих от $s-2$ переменной,
- в $(s-1)$-ой скобке — сумма всех функций представления (1.1), зависящих от $s-1$ переменной,
- в s-ой скобке — сумма всех функций представления (1.1), зависящих от s переменных, кроме $f_{i_1,\dots,i_s}$,
- в $(s+1)$-ой скобке — сумма всех функций представления (1.1), зависящих от $s+1$ переменных, кроме $\sum\limits_{j_{s+1}=s+2}^{n} f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}} + f_{i_1,\dots,i_{s+1}} =$ $= \sum\limits_{j_{s+1}=s+1}^{n} f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}}$,

– в $(s+2)$-ой скобке — сумма всех функций представления (1.1), зависящих от $s+2$ переменных, кроме $\sum\limits_{j_{s+2}=s+3}^{n}\sum\limits_{j_{s+1}=s+2}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}+$ $+\sum\limits_{j_{s+2}=s+3}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{s+1},i_{j_{s+2}}}+f_{i_1,\ldots,i_{s+1}}=\sum\limits_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum\limits_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}$,

– ...

– в $(n-2)$-ой скобке — сумма всех функций представления (1.1), зависящих от $n-2$ переменных, кроме $\sum\limits_{j_{n-2}=n-1}^{n}\ldots\sum\limits_{j_{s+1}=s+2}^{j_{s+3}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}}+$ $+\sum\limits_{j_{n-2}=n-1}^{n}\ldots\sum\limits_{j_{s+2}=s+3}^{j_{s+4}-1} f_{i_1,\ldots,i_{s+1},i_{j_{s+2}},\ldots,i_{j_{n-2}}}+\ldots+\sum\limits_{j_{n-2}=n-1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_{n-3},i_{j_{n-2}}}+$ $+f_{i_1,\ldots,i_{n-2}}=\sum\limits_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum\limits_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+3}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}}$,

– в $(n-1)$-ой скобке — сумма всех функций представления (1.1), зависящих от $(n-1)$-ой переменной, кроме $f_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+2},\ldots,i_n}+f_{i_1,\ldots,i_{s+1},i_{s+3},\ldots,i_n}+\ldots+$ $+f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}=\sum\limits_{j_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum\limits_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}}$.

В каждую скобку равенства (1.13) добавим и вычтем отсутствующие функции представления (1.1) соответствующего числа переменных, тогда получим, что

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s} T_{\nu_{i_k}} = &\sum_{k=1}^{s} J(i_k)+f_0+\sum_{j_1=1}^{n} f_{i_{j_1}}+\sum_{j_2=2}^{n}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},i_{j_2}}+\sum_{j_3=3}^{n}\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},i_{j_2},i_{j_3}}+\\
&+\ldots+\\
&+\sum_{j_{s-2}=s-2}^{n}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-2}}}+\sum_{j_{s-1}=s-1}^{n}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-1}}}+\\
&+\left(\sum_{j_s=s}^{n}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_s}}-f_{i_1,\ldots,i_s}\right)+\\
&+\left(\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s+1}}}-\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}}\right)+\\
&+\left(\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\ldots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s+2}}}-\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}\right)+\\
&+\ldots+\\
&+\left(\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{n-2}}}-\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+3}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}}\right)+
\end{aligned}
$$

$$+\left(\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_1=1}^{j_2-1}f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{n-1}}}-\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}}\right)+$$
$$+\left(f_{1,\dots,n}-f_{1,\dots,n}\right).$$

Используя представление (1.1), получим

$$\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}=\sum_{k=1}^{s}J(i_k)+f-f_{i_1,\dots,i_s}-\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}}-$$
$$-\sum_{j_{s+2}=s+1}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}-\dots-\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\dots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+3}-1}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-2}}}-$$
$$-\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}}-f_{1,\dots,n}. \quad (1.14)$$

По определению наилучшего приближения s мерным углом, имеем

$$Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}}\le\left\|f-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}\right\|_{\vec{p}}.$$

Применяя равенство (1.14), получим

$$Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}}\le\left\|f-\left(\sum_{k=1}^{s}J(i_k)+f-f_{i_1,\dots,i_s}-\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}}}-\right.\right.$$
$$-\sum_{j_{s+2}=s+1}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}-\dots-\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\dots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+3}-1}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-2}}}-$$
$$\left.\left.-\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}f_{i_1,\dots,i_s,i_{j_{s+1}},\dots,i_{j_{n-1}}}-f_{1,\dots,n}\right)\right\|_{\vec{p}}.$$

Подставляя вместо $J(i_k)$ их явный вид, имеем

$$Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}}\le\left\|f-\left(\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(\varnothing)}+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1})}+\right.\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},j_{s+2})}+\dots+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\dots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{n-2})}+$$
$$+\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\dots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\dots,j_{n-1})}+\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(s+1,\dots,n)}+f-$$

$$
-f_{i_1,\ldots,i_s}-\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}}-\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}-
$$

$$
-\ldots-\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+3}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}}-
$$

$$
\left.\left.-\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}}-f_{1,\ldots,n}\right)\right\|_{\vec{p}}.
$$

Объединяя в группы функции, зависящие от одинакового количества переменных, получим

$$
Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}}\le\left\|\left(f_{i_1,\ldots,i_s}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(\varnothing)}\right)+\right.
$$

$$
+\left(\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}}-\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1})}\right)+
$$

$$
+\left(\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{i_{j_{s+2}}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}-\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},j_{s+2})}\right)+
$$

$$
+\ldots+\left(\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+3}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}}-\right.
$$

$$
\left.-\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\ldots,j_{n-2})}\right)+
$$

$$
+\left(\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}}-\sum_{k=1}^{s}\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\ldots,j_{n-1})}\right)+
$$

$$
\left.+\left(f_{1,\ldots,n}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(s+1,\ldots,n)}\right)\right\|_{\vec{p}}.
$$

Используя свойства нормы функции, получим

$$
Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}}\le\left\|f_{i_1,\ldots,i_s}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(\varnothing)}\right\|_{\vec{p}}+
$$

$$
+\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}\left\|f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1})}\right\|_{\vec{p}}+
$$

$$
+\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\left\|f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},j_{s+2})}\right\|_{\vec{p}}+
$$

$$+\ldots+\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\left\|f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\ldots,j_{n-2})}\right\|_{\vec{p}}+$$
$$+\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\left\|f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\ldots,j_{n-1})}\right\|_{\vec{p}}+$$
$$+\left\|f_{1,\ldots,n}-\sum_{k=1}^{s}T_{\nu_{i_k}}^{(j_{s+1},\ldots,j_{n})}\right\|_{\vec{p}}.$$

Используя равенство (2) и подставляя в полученное неравенство оценки (1.11), имеем

$$Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}}\le c_{24}\Bigg(\big(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s})_{\vec{p}}+\varepsilon\big)+$$
$$+\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}\Big(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}})_{\vec{p}}+\varepsilon\Big)+$$
$$+\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\Big(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}})_{\vec{p}}+\varepsilon\Big)+\ldots+$$
$$+\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\Big(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}})_{\vec{p}}+\varepsilon\Big)+$$
$$+\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\Big(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}})_{\vec{p}}+\varepsilon\Big)+$$
$$+\big(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}}+\varepsilon\big)\Bigg)=$$
$$=c_{24}\Bigg(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s})_{\vec{p}}+\sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}})_{\vec{p}}+$$
$$+\sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}})_{\vec{p}}+$$
$$+\ldots+\sum_{j_{n-2}=n-2}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}})_{\vec{p}}+$$
$$+\sum_{j_{n-1}=n-1}^{n}\ldots\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}})_{\vec{p}}+Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}}\Bigg)+c_{24}2^{n-s}\varepsilon,$$

где постоянная c_{24} не зависит от f, ν и ε.

Так как полученное неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то

$$Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f)_{\vec{p}} \le c_{24}\Bigg(Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s})_{\vec{p}} + \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}})_{\vec{p}} +$$
$$+ \sum_{j_{s+2}=s+2}^{n} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}})_{\vec{p}} +$$
$$+ \ldots + \sum_{j_{n-2}=n-2}^{n} \cdots \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-2}}})_{\vec{p}} +$$
$$+ \sum_{j_{n-1}=n-1}^{n} \cdots \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}})_{\vec{p}} + Y_{\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}}(f_{1,\ldots,n})_{\vec{p}} \Bigg),$$

где постоянная c_{24} не зависит от f и ν.
Что завершает доказательство справедливости соотношений 3).

1.4 Модули гладкости членов распасовки

Теорема 1.3. *В условиях теоремы 1.1 для функций представления (1.1) и* $\forall \delta_{i_j} \in (0,1)$ *справедливы соотношения:*

1) $\omega_{k_1,\ldots,k_n}(f_{1,\ldots,n}, \delta_1, \ldots, \delta_n)_{\vec{p}} = \omega_{k_1,\ldots,k_n}(f, \delta_1, \ldots, \delta_n)_{\vec{p}}$;

2) $\omega_{k_{i_{j_1}},\ldots,k_{i_{j_m}}}(f_{i_1,\ldots,i_s}, \delta_{i_{j_1}}, \ldots, \delta_{i_{j_m}})_{\vec{p}} \le c_{25}\omega_{k_{i_{j_1}},\ldots,k_{i_{j_m}}}(f, \delta_{i_{j_1}}, \ldots, \delta_{i_{j_m}})_{\vec{p}}$,
$\forall (j_1, \ldots, j_m) \subset (1, \ldots, s)$, $\forall (i_1, \ldots, i_s) \subset (1, \ldots, n)$ *и* $\forall s = 1, \ldots, n-1$.

3) $$\omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_{\vec{p}} \le \omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s}, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_{\vec{p}} +$$
$$+ \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} \omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}}, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_{\vec{p}} +$$
$$+ \sum_{j_{s+2}=s+2}^{n} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} \omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+1}}}, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_{\vec{p}} + \ldots +$$
$$+ \sum_{j_{n-1}=n-1}^{n} \cdots \sum_{j_{s+2}=s+2}^{j_{s+3}-1} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1} \omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},\ldots,i_{j_{n-1}}}, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_{\vec{p}} +$$
$$+ \omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{1,\ldots,n}, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_{\vec{p}},$$

$\forall\, (i_1, \ldots, i_s) \subset (1, \ldots, n)$, $\forall\ s = 1, \ldots, n-1$, *где постоянная* c_{25} *не зависит от* f, k_{i_j} *и* δ_{i_j}.

Доказательство.

Докажем утверждение 1). Пользуясь явным видом (1.2) функции $f_{1,\ldots,n}$, имеем

$$\left\|\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f_{1,\ldots,n})\right\|_{\vec{p}} = \left\|\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}\left(f - f_0 - \sum_{i_1=1}^{n} f_{i_1} - \sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1 i_2} - \ldots - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{i_{n-1}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\right)\right\|_{\vec{p}}$$

Пользуясь свойствами разности, имеем

$$\left\|\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f_{1,\ldots,n})\right\|_{\vec{p}} = \left\|\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f) - \Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f_0) - \sum_{i_1=1}^{n}\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f_{i_1}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f_{i_1 i_2}) - \ldots - \sum_{i_{n-1}=n-1}^{n} \ldots \sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f_{i_1,\ldots,i_{n-1}})\right\|_{\vec{p}}$$

Так как в правой части равенства вычитаемые разности порядка $k_1, \ldots, k_n$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ берутся от функций, зависящих лишь от части переменных $x_1, \ldots, x_n$, то все вычитаемые разности равны 0. Следовательно,

$$\|\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f_{1,\ldots,n})\|_{\vec{p}} = \|\Delta^{k_1,\ldots,k_n}_{h_1,\ldots,h_n}(f)\|_{\vec{p}}$$

Так как полученная оценка верна для любых $h_1, \ldots, h_n$, то по определению смешанного модуля гладкости, имеем

$$\omega_{k_1,\ldots,k_n}(f_{1,\ldots,n}, \delta_1, \ldots, \delta_n)_p = \omega_{k_1,\ldots,k_n}(f, \delta_1, \ldots, \delta_n)_p.$$

Докажем утверждение 2). Рассмотрим случай, когда $(j_1, \ldots, j_m) = (1, \ldots, m)$. Для произвольного набора $(j_1, \ldots, j_m)$ доказательство будет проводиться аналогично.

Рассмотрим случай, когда $s = m$, то есть получим оценку для $\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m})\|_{\vec{p}}$. Подставляя вместо $f_{i_1,\ldots,i_m}$ её явный вид, получаем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m})\|_{\vec{p}} = \left\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f\,dx_{i_{m+1}}\ldots dx_{i_n} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f_0 - \sum_{j_1=1}^{m} f_{i_{j_1}} - \sum_{j_2=2}^{m}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1} i_{j_2}} - \ldots - \sum_{j_{m-1}=m-1}^{m} \ldots \sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{m-1}}}\right)\right\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь свойствами разности, имеем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_m})\|_{\vec{p}} = \Bigg\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\, dx_{i_{m+1}} \dots dx_{i_n} -$$
$$- \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_0) - \sum_{j_1=1}^{m} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1}}) - \sum_{j_2=2}^{m}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1} i_{j_2}}) -$$
$$- \dots - \sum_{j_{m-1}=m-1}^{m} \dots \sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{m-1}}}) \Bigg\|_{\vec{p}}.$$

Так как в правой части равенства вычитаемые разности порядка $k_{i_1}, \dots, k_{i_m}$ по переменным $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ берутся от функций, зависящих лишь от части переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$, то все вычитаемые разности равны 0. Следовательно,

$$\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_m})\|_{\vec{p}} = \Bigg\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\, dx_{i_{m+1}} \dots dx_{i_n} \Bigg\|_{\vec{p}}.$$

Применяя лемму 1.3, имеем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_m})\|_{\vec{p}} \le c_{26} \left\| \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f) \right\|_{\vec{p}}, \tag{1.15}$$

где постоянная c_{26} не зависит от f, h_{i_j} и k_{i_j}.

Рассмотрим случай, когда $s = m + 1$, то есть получим оценку для $\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_{m+1}})\|_{\vec{p}}$. Подставляя вместо $f_{i_1,\dots,i_{m+1}}$ её явный вид, имеем

$$\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_{m+1}})\right\|_{\vec{p}} = \Bigg\| \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}} \Bigg(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} f dx_{i_{m+2}} \dots dx_{i_n} -$$
$$- f_0 - \sum_{j_1=1}^{m+1} f_{i_{j_1}} - \sum_{j_2=2}^{m+1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1} i_{j_2}} - \dots - \sum_{j_m=m}^{m+1} \dots \sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} f_{i_{j_1},\dots,i_{j_m}} \Bigg) \Bigg\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь свойствами разности, имеем

$$\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_{m+1}})\right\|_{\vec{p}} = \Bigg\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m-1} \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f) dx_{i_{m+2}} \dots dx_{i_n} -$$
$$- \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_0) - \sum_{j_1=1}^{m+1} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1}}) - \sum_{j_2=2}^{m+1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1} \Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1} i_{j_2}}) - \dots -$$

$$-\sum_{j_m=m}^{m+1}\dots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1},\dots,i_{j_m}})\Bigg\|_{\vec{p}}.$$

Так как разности порядка $k_{i_1},\dots,k_{i_m}$ по переменным $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ от функций, зависящих лишь от части переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_m}$ равны 0, то

$$\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_{m+1}})\right\|_{\vec{p}}=\Bigg\|\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\,dx_{i_{m+2}}\dots dx_{i_n}-$$
$$-\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_m})\Bigg\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь свойством нормы функции, имеем

$$\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_{m+1}})\right\|_{\vec{p}}\le\left\|\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\,dx_{i_{m+2}}\dots dx_{i_n}\right\|_{\vec{p}}+$$
$$+\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_m})\right\|_{\vec{p}}.$$

Применяя лемму 1.3 и неравенство (1.15), имеем

$$\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_{m+1}})\right\|_{\vec{p}}\le c_{27}\left(\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\right\|_{\vec{p}}+\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\right\|_{\vec{p}}\right)\le$$
$$\le 2c_{27}\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\right\|_{\vec{p}},$$

где постоянная c_{27} не зависит от f, h_{i_j} и k_{i_j}.

Проверим, что $\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_s})\right\|_{\vec{p}}\le c_{28}\left\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f)\right\|_{\vec{p}}$ для $m+1<s<n$, считая, что аналогичная оценка разностей m-го порядка получена для всех функций распасовки, зависящих от $(s-1)$ переменных. Подставляя вместо $f_{i_1,\dots,i_s}$ её явный вид (1.2), имеем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}(f_{i_1,\dots,i_s})\|_{\vec{p}}=\Bigg\|\Delta^{k_{i_1},\dots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\dots,h_{i_m}}\Bigg(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s}\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}f\,dx_{i_{s+1}}\dots dx_{i_n}-$$
$$-f_0-\sum_{j_1=1}^{s}f_{i_{j_1}}-\sum_{j_2=2}^{s}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}f_{i_{j_1}i_{j_2}}-\dots-\sum_{j_{s-1}=s-1}^{s}\dots\sum_{j_2=2}^{j_3-1}\sum_{j_1=1}^{j_2-1}f_{i_{j_1},\dots,i_{j_{s-1}}}\Bigg)\Bigg\|_{\vec{p}}.$$

Пользуясь свойствами разности , имеем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_s})\|_{\vec{p}} = \left\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)_p dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n} - \right.$$

$$- \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_0) - \sum_{j_1=1}^{s} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1}}) - \sum_{j_2=2}^{s} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1} i_{j_2}}) - \ldots -$$

$$\left. - \sum_{j_{s-1}=s-1}^{s} \ldots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_{j_1},\ldots,i_{j_{s-1}}}) \right\|_{\vec{p}}$$

Так как разности порядка $k_{i_1}, \ldots, k_{i_{m+1}}$ по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}$ от функций, зависящих лишь от части переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}$ равны 0, то

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_s})\|_{\vec{p}} = \left\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)_p dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n} - \right.$$

$$- \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m}) - \sum_{j_{m+1}=m+1}^{s} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m,i_{j_{m+1}}}) - \ldots -$$

$$\left. - \sum_{j_{s-1}=s-1}^{s} \ldots \sum_{j_{m+2}=m+2}^{j_{m+3}-1} \sum_{j_{m+1}=m+1}^{j_{m+2}-1} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m,i_{j_{m+1}},\ldots,i_{j_{s-1}}}) \right\|_{\vec{p}}$$

Пользуясь свойством нормы функции, имеем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_s})\|_{\vec{p}} \le \left\| \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-s} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)_p dx_{i_{s+1}} \ldots dx_{i_n} \right\|_{\vec{p}} +$$

$$+ \left\| \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m}) \right\|_{\vec{p}} + \sum_{j_{m+1}=m+1}^{s} \left\| \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m,i_{j_{m+1}}}) \right\|_{\vec{p}} + \ldots +$$

$$+ \sum_{j_{s-1}=s-1}^{s} \ldots \sum_{j_{m+2}=m+2}^{j_{m+3}-1} \sum_{j_{m+1}=m+1}^{j_{m+2}-1} \left\| \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_m,i_{j_{m+1}},\ldots,i_{j_{s-1}}}) \right\|_{\vec{p}}$$

Применяя лемму 1.3, а затем предположение индукции, получаем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_s})\|_{\vec{p}} \le c_{29} \Bigg(\left\| \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)_p \right\|_{\vec{p}} + \|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)\|_{\vec{p}} +$$

$$+ \sum_{j_{m+1}=m+1}^{s} \|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)\|_{\vec{p}} + \ldots + \sum_{j_{s-1}=s-1}^{s} \ldots \sum_{j_{m+2}=m+2}^{j_{m+3}-1} \sum_{j_{m+1}=m+1}^{j_{m+2}-1} \|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)\|_{\vec{p}} \Bigg) \le$$

$$\leq c_{30} \|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)\|_{\vec{p}},$$

где постоянные c_{29} и c_{30} не зависят от f, k_{i_j} и h_{i_j}.

Таким образом доказано, что для $\forall s = 1,\ldots,n-1$ выполнено неравенство $\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_s})\|_{\vec{p}} \leq c_{30}\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_m}}(f)\|_{\vec{p}}$.

Так как полученная оценка верна для любых $h_{i_1},\ldots,h_{i_m}$, то по определению смешанного модуля гладкости имеем

$$\omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}(f_{i_1,\ldots,i_s}, \delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_m})_p \leq c_{30}\omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_m}}(f, \delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_m})_p.$$

Докажем утверждение 3). Получим оценку для $\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f)\|_{\vec{p}}$. Используя представление (1.1), имеем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f)\|_{\vec{p}} = \Bigg\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}\Bigg(f_0 + \sum_{i_1=1}^{n} f_{i_1} + \sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,i_2} + \ldots +$$
$$+\sum_{i_s=s}^{n}\sum_{i_{s-1}=s-1}^{i_s-1}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_s} + \sum_{i_{s+1}=s+1}^{n}\sum_{i_s=s}^{i_{s+1}-1}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+1}} +$$
$$+\sum_{i_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{i_{s+1}=s+1}^{i_{s+2}-1}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} f_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+1},i_{s+2}} + \ldots + f_{i_1,\ldots,i_n}\Bigg)\Bigg\|_{\vec{p}}$$

Используя свойства разности, получаем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f)\|_{\vec{p}} = \Bigg\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_0) + \sum_{i_1=1}^{n}\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1}) + \sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,i_2}) +$$
$$+\ldots+\sum_{i_s=s}^{n}\sum_{i_{s-1}=s-1}^{i_s-1}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s}) +$$
$$+\sum_{i_{s+1}=s+1}^{n}\sum_{i_s=s}^{i_{s+1}-1}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+1}}) +$$
$$+\sum_{i_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{i_{s+1}=s+1}^{i_{s+2}-1}\ldots\sum_{i_2=2}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2-1}\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+1},i_{s+2}}) + \ldots + \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_n})\Bigg\|_{\vec{p}}$$

Так как разности порядка $k_{i_1},\ldots,k_{i_s}$ по переменным $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$ от функций, зависящих лишь от части переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$ равны 0, то

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f)\|_{\vec p} = \Bigg\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s}) + \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}}) + \sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}}) + \ldots + \Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_n})\Bigg\|_{\vec p}$$

Используя свойство нормы функции, получаем

$$\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f)\|_{\vec p} \le \left\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s})\right\|_{\vec p} + \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}\left\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}})\right\|_{\vec p} + \\ + \sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\left\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+2}}})\right\|_{\vec p} + \ldots + \left\|\Delta^{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}_{h_{i_1},\ldots,h_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_n})\right\|_{\vec p}$$

Так как полученная оценка верна для любых $h_{i_1},\ldots,h_{i_s}$, то по определению смешанного модуля гладкости, имеем

$$\omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f,\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s})_p \le \omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s},\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s})_p + \\ + \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n}\omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}}},\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s})_p + \\ + \sum_{j_{s+2}=s+2}^{n}\sum_{j_{s+1}=s+1}^{j_{s+2}-1}\omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{i_1,\ldots,i_s,i_{j_{s+1}},i_{j_{s+1}}},\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s})_p + \\ + \ldots + \omega_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(f_{1,\ldots,n},\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s})_p,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.3.

Глава 2. Класс функций $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

Напомним определение *класса функций* $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ *Никольского*. Будем писать $f \in H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$, если $1 \le p_i \le \infty$, $\alpha_i > 0$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$, и выполнены следующие условия:

0) $f \in L_{p_1,p_2}$,

1) $\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{p_1,p_2} \le c_1\delta_1^{\alpha_1}$, $\forall\delta_1 \in (0,1), k_1 > \alpha_1$,

2) $\omega_{k_2}(f,\delta_2)_{p_1,p_2} \le c_2\delta_2^{\alpha_2}$, $\forall\delta_1 \in (0,1), k_2 > \alpha_2$,

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от δ_1 и δ_2.

В одномерном случае через H^r_p, где $1 \le p \le \infty$, $r > 0$ обозначим множество функций $f = f(x) \in L_p$ таких, что $\omega_k(f,\delta)_p \le \delta^r$., где постоянная c_3 не зависит от δ.

Напомним определение *класса функций* $SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ *Никольского*. Будем писать $f \in SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$, если $1 \le p_i \le \infty$, $\alpha_i > 0$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$, и выполнены следующие условия:

0) $f \in L_{p_1,p_2}$,

1) $\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{p_1,p_2} \le c_3\delta_1^{\alpha_1}$, $\forall\delta_1 \in (0,1), k_1 > \alpha_1$,

2) $\omega_{k_2}(f,\delta_2)_{p_1,p_2} \le c_4\delta_2^{\alpha_2}$, $\forall\delta_1 \in (0,1), k_2 > \alpha_2$,

3) $\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} \le c_5\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}$, $\forall\delta_i \in (0,1), k_i > \alpha_i, i = 1,2$,

где постоянные c_3, c_4 и c_5 не зависят от δ_1 и δ_2.

Определим *класс функций* $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Будем писать $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, если $1 \le p_i \le \infty$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$, $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \ge 1$ и выполнены условия:

0) $f \in L_{p_1,p_2}$,

1) $\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{p_1,p_2} \le c_6\delta_1^{\alpha_1}$, $\forall\delta_1 \in (0,1), k_1 > \alpha_1$,

2) $\omega_{k_2}(f,\delta_2)_{p_1,p_2} \le c_7\delta_2^{\alpha_2}$, $\forall\delta_1 \in (0,1), k_2 > \alpha_2$,

3) $\omega_{k_3k_4}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} \le c_8\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}$, $\forall\delta_i \in (0,1), i = 1,2,\ k_3 > \beta_1,\ k_4 > \beta_2$.

где постоянные c_6, c_7 и c_8 не зависят от δ_1 и δ_2.

Класс $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ является обобщением классов $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ и $SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$. Покажем это.

Если β_1 и β_2 таковы, что $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2$, то непосредственно из определений вытекает, что классы $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ и $SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ совпадают.

Если $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, то очевидно, что $f \in H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$.

Если $f \in H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ и для β_1 и β_2 выполняется равенство $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1$, то из свойств модулей гладкости и определения класса $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ для любой функции $f \in H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ получим

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} = \omega^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} \cdot \omega^{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} \leq$$
$$\leq c_9\omega^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}_{k_1}(f,\delta_1)_{p_1,p_2} \cdot \omega^{\frac{\beta_2}{\alpha_2}}_{k_2}(f,\delta_2)_{p_1,p_2} \leq c_{10}\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}, \quad (2.1)$$

где постоянные c_9 и c_{10} не зависят от δ_1 и δ_2, т.е. получим, что $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Следовательно, классы $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ и $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ совпадают, если β_1 и β_2 таковы, что $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1$.

Покажем, что если для $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ выполнено неравенство $\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2} < 1$, то в определении класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ условие 4 вытекает из условий 2 и 3.

Действительно, если для $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ выполнено неравенство $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} < 1$, то существуют такие $\beta_1^* > \beta_1$ и $\beta_2^* > \beta_2$, что $\frac{\beta_1^*}{\alpha_1} + \frac{\beta_2^*}{\alpha_2} = 1$. Если функция $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, то из условий 2 и 3 определения этого класса следует (см. (2.1)), что

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} \leq c_{11}\delta_1^{\beta_1^*}\delta_2^{\beta_2^*}, \quad (2.2)$$

где постоянная c_{11} не зависит от f, δ_1 и δ_2.

Так как $\delta_1^{\beta_1^*}\delta_2^{\beta_2^*} \leq \delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}$ для любых $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$, то из неравенства (11) получаем, что $\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} \leq c_{11}\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}$. Это означает, что условие 4 вытекает из условий 2 и 3. Поэтому класс функций $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ и рассматривается при условии $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \geq 1$.

2.1 Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных результатов этой главы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.1. *Если* $f \in L_{p_1,p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$, *то* $\forall l_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*справедливы неравенства*

$$Y_{l_1l_2}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{12}\omega_{k_1k_2}\left(f,\frac{1}{l_1+1},\frac{1}{l_2+1}\right)_{p_1,p_2} \leq$$

$$\leq c_{13}\frac{1}{(l_1+1)^{k_1}(l_2+1)^{k_2}}\sum_{\nu_1=0}^{l_1}\sum_{\nu_2=0}^{l_2}(\nu_1+1)^{k_1-1}(\nu_2+1)^{k_2-1}Y_{\nu_1\nu_2}(f)_{p_1,p_2},$$

$$Y_{l_i}(f)_{p_1,p_2}\leq c_{14}\omega_{k_i}\left(f,\frac{1}{l_i+1}\right)_{p_1,p_2}\leq c_{15}\frac{1}{(l_i+1)^{k_i}}\sum_{\nu_i=0}^{l_i}(\nu_i+1)^{k_i-1}Y_{\nu_i}(f)_{p_1,p_2}.$$

где постоянные c_{12}, c_{13}, c_{14} *и* c_{15} *не зависят от* f,l_1 *и* l_2.

Лемма 2.1 доказана в работе [12].

Лемма 2.2. *Пусть* $f\in L^0_{p_1,p_2}$, *где* $1\leq p_i<q_i\leq\infty$, $\theta_i=q_i$ *при* $q_i<\infty$ *и* $\theta_i=1$ *при* $q_i=\infty$, $i=1,2$. *Тогда если*

$$\sum_{\nu_2=0}^{\infty}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1}Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}<\infty,$$

то $f\in L_{q_1,q_2}$ *и* $\forall N_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *выполнено неравенство*

$$Y^{\theta_2}_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2}\leq c_{16}\sum_{\nu_2=N_2}^{\infty}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=N_1}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1}Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}},$$

где постоянная c_{16} *не зависит от* f *и* N_i.

Лемма 2.2 доказана в работе [13].

Лемма 2.3. *Пусть* $\varphi_i\in L^0_{p_i}$, $1\leq p_i<q_i\leq\infty$, $\theta_i=q_i$ *в случае* $q_i<\infty$ *и* $\theta_i=1$ *в случае* $q_i=\infty$, *тогда если* $\sum_{\nu_i=0}^{\infty}2^{\nu_i\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right)\theta_i}Y^{\theta_i}_{2^{\nu_i}-1}(\varphi_i)_{p_i}<\infty$, *то* $\varphi_i\in L_{q_i}$ *и* $\forall N_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *выполнено неравенство*

$$Y^{\theta_i}_{2^{N_i}-1}(\varphi_i)_{q_i}\leq c_{17}\sum_{\nu_i=N_i}^{\infty}2^{\nu_i\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right)\theta_i}Y^{\theta_i}_{2^{\nu_i}-1}(\varphi_i)_{p_i}.$$

где постоянная c_{17} *не зависит от* φ_i *и* N_i.

Лемма 2.3 доказана в работе [13].

Введем некоторые обозначения. Через $D_l(u)$ обозначим ядро Дирихле, то есть

$$D_l(u)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{l}\cos\nu u=\frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

Через $S_{l_{i_j}}(f)$ обозначим частную сумму порядка l_{i_j} по переменной x_{i_j} ряда Фурье функции f, то есть

$$S_{l_{i_1}}(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_{i_1},\ldots,x_{i_{j-1}},x_{i_j}+t_{i_j},x_{i_{j+1}},\ldots,x_{i_n})D_{l_{i_j}}(t_{i_j})dt_{i_j}.$$

Обозначим через $V_{l_{i_1},\ldots,l_{i_s}}(f)$ – сумму Валле-Пуссена функции $f \in L_p(n)$, по переменным $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}, (i_1,\ldots,i_s) \in (1,\ldots,n)$ где

$$V_{l_{i_j}}(f) = S_{l_{i_j}}(f), \text{ если } l_{i_j} = 0, \forall j = 1,\ldots,n,$$
$$V_{l_{i_j}}(f) = \frac{S_{l_{i_j}}(f) + \ldots + S_{2l_{i_j}-1}(f)}{l_{i_j}}, \text{ если } l_{i_j} \geq 1, \forall j = 1,\ldots,n,$$
$$V_{l_{i_1},\ldots,l_{i_s}}(f) = V_{l_{i_1}}(\psi), \psi = V_{l_{i_2},\ldots,l_{i_s}}(f),\ \forall s = 2,\ldots,n.$$

Обозначим

$$W_{k_1,\ldots,k_n}(f) \ = \ f - \sum_{i_1=1}^{n} V_{k_{i_1}}(f) + \sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} V_{k_{i_1},k_{i_2}}(f) + \ldots + (-1)^n V_{k_{i_1},\ldots,k_{i_n}}(f),$$

Лемма 2.4. *Если T_{k_j} – тригонометрический полином порядка k_j по переменной x_j, то $W_{k_1,\ldots,k_n}(T_{k_j}) = 0$, $\forall j = 1,\ldots,n$.*

Доказательство. Непосредственно из определения сумм Валле-Пуссена следует равенство

$$V_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(T_{k_j}) = \begin{cases} T_{k_j}, & \text{если } j = i_1 \text{ и } s = 1, \\ V_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s}}(T_{k_j}) & \text{если } j \in (i_1,\ldots,i_s),\ s > 1, \\ V_{k_{i_1},\ldots,k_{i_s},k_j}(T_{k_j}), & \text{если } j \notin (i_1,\ldots,i_s). \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $j = 1$, тогда, учитывая указанное выше равенство, получим, что

$$W_{k_1,\ldots,k_n}(T_{k_1}) = T_{k_1} - \sum_{i_1=1}^{n} V_{k_{i_1}}(T_{k_1}) + \sum_{i_2=2}^{n}\sum_{i_1=1}^{i_2-1} V_{k_{i_1},k_{i_2}}(T_{k_1}) +$$
$$+ \ldots + (-1)^n V_{k_{i_1},\ldots,k_{i_n}}(T_{k_1}) == T_{k_1} - T_{k_1} - \sum_{i_1=2}^{n} V_{k_1,k_{i_1}}(T_{k_1}) + \sum_{i_2=2}^{n} V_{k_1,k_{i_2}}(T_{k_1}) +$$
$$+ \sum_{i_2=3}^{n}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} V_{k_1,k_{i_1},k_{i_2}}(T_{k_1}) - \sum_{i_3=3}^{n}\sum_{i_2=2}^{i_2-1} V_{k_1,k_{i_2},k_{i_3}}(T_{k_1}) - \sum_{i_3=4}^{n}\sum_{i_2=3}^{i_3-1}\sum_{i_1=2}^{i_2-1} V_{k_1,k_{i_1},k_{i_2}}(T_{k_1}) +$$
$$+ \ldots - (-1)^n V_{k_{i_1},\ldots,k_{i_n}}(T_{k_1}) + (-1)^n V_{k_{i_1},\ldots,k_{i_n}}(T_{k_1}) = 0.$$

Аналогично проверяется, что для любого $j = 2, \dots, n$ выполнено равенство $W_{k_1,\dots,k_n}(T_{k_j}) = 0$.

Лемма 2.5. *Пусть* $f \in L^0_{\vec{p}}(n)$, $\vec{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $1 \le p_i \le \infty$, $k_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \le s < n$, *тогда*

$$Y_{2k_{i_1}-1,\dots,2k_{i_s}-1}(f)_{\vec{p}} \le c_{18} Y_{k_{i_1},\dots,k_{i_s},k_{i_{s+1}},\dots,k_{i_n}}(f)_{\vec{p}},$$

где $k_{i_l} = 0$, $\forall l > s$ *и постоянная* c_{18} *не зависит от* f *и* k_{i_j} $(1 \le j \le n)$.

Доказательство. Рассмотрим $J = Y_{2k_{i_1}-1,\dots,2k_{i_s}-1}(f)_{\vec{p}}$, где $1 \le s < n$. По определению наилучшего приближения углом, имеем

$$J \le \left\| f - \sum_{j_1=1}^{s} V_{k_{j_1}}(f) + \sum_{j_2=2}^{s} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} V_{k_{i_{j_1}},k_{i_{j_2}}}(f) - \ldots + (-1)^s V_{k_{i_{j_1}},\dots,k_{i_{j_s}}}(f) \right\|_{\vec{p}} \equiv \|A\|_{\vec{p}}$$

Так как $f \in L^0_{\vec{p}}$, то все суммы Валле-Пуссена $V_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_l}}(f)$, содержащие хотя бы одно $\nu_{i_j} = 0$, равны 0, поэтому имеет место равенство

$$A = f - \sum_{j_1=1}^{n} V_{k_{i_{j_1}}}(f) + \sum_{j_2=2}^{n} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} V_{k_{i_{j_1}},k_{i_{j_2}}}(f) + \ldots +$$
$$+ (-1)^s \sum_{j_s=s}^{n} \ldots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} V_{k_{i_{j_1}},\dots,k_{i_{j_s}}}(f) + (-1)^{s+1} \sum_{j_{s+1}=s+1}^{n} \ldots \sum_{j_2=2}^{j_3-1} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} V_{k_{i_{j_1}},\dots,k_{i_{j_{s+1}}}}(f) +$$
$$+ \ldots + (-1)^n V_{k_{i_{j_1}},\dots,k_{i_{j_n}}} = W_{k_1,\dots,k_n}(f)$$

где $k_{i_{j_l}} = 0$, если $j_l > s$.

Пусть функции $T_{k_{i_j}} \equiv T_{k_{i_j}}(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, \dots, n$ – тригонометрические полиномы порядка соответственно k_{i_j} по переменной x_{i_j}, удовлетворяющие условию $\|f - \sum_{j=1}^{n} T_{k_{i_j}}\|_{\vec{p}} \le Y_{k_{i_1},\dots,k_{i_n}}(f)_{\vec{p}} + \varepsilon$.

Пусть $\varphi = f - \sum_{j=1}^{n} T_{k_{i_j}}$.

Пользуясь леммой 2.4, получаем, что

$$W_{k_1,\dots,k_n}(\varphi) = W_{k_1,\dots,k_n}(f - \sum_{j=1}^{n} T_{k_{i_j}}) =$$
$$= W_{k_1,\dots,k_n}(f) - \sum_{j=1}^{n} W_{k_1,\dots,k_n}(T_{k_{i_j}}) = W_{k_1,\dots,k_n}(f),$$

а значит, выполнены следующие соотношения

$$\|W_{k_1,\dots,k_n}(f)\|_{\vec{p}} = \|W_{k_1,\dots,k_n}(\varphi)\|_{\vec{p}} \le \|\varphi\|_{\vec{p}} + \sum_{j_1=1}^{n} \|V_{k_{i_{j_1}}}(\varphi)\|_{\vec{p}} +$$
$$+ \sum_{j_2=2}^{n} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \|V_{k_{i_{j_1}},k_{i_{j_2}}}(\varphi)\|_{\vec{p}} + \ldots + \|V_{k_{i_1},\dots,k_{i_n}}(\varphi)\|_{\vec{p}}.$$

Из определения сумм Валле-Пуссена следует, что

$$\|V_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(\varphi)\|_{\vec{p}} \le c_{19}\|\varphi\|_{\vec{p}}, \forall (i_1,\dots,i_s) \subseteq (1,\dots,n),$$

где c_{19} не зависит от φ и k_{i_j}.
Следовательно, имеют место соотношения

$$\|A\|_{\vec{p}} = \|W_{k_1,\dots,k_n}(f)\|_{\vec{p}} \le c_{20}\|\varphi\|_{\vec{p}} \le c_{20}(Y_{k_{i_1},\dots,k_{i_n}}(f)_{\vec{p}} + \varepsilon),$$

где $k_{i_l} = 0$, если $i_l > s$ и c_{20} не зависит от φ, f и k_{i_j}.
Так как это неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$ и $Y_{2k_{i_1}-1,\dots,2k_{i_s}-1}(f)_{\vec{p}} \le$ $\le \|A\|_{\vec{p}}$, то

$$Y_{2k_{i_1}-1,\dots,2k_{i_s}-1}(f)_{\vec{p}} \le c_{20} Y_{k_{i_1},\dots,k_{i_n}}(f)_{\vec{p}}, \text{ где } k_{i_j} = 0, \text{ если } j > s,$$

что и завершает доказательство леммы 2.5.

Лемма 2.6. *Пусть* $f \in L_{p_1,p_2}$, $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)\,dx_1 = 0$ *для почти всех* x_2, $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)\,dx_2 = 0$ *для почти всех* x_1. *Тогда если*

$$I = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_1}{p_1}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2} < \infty,$$

то функция $f(x_1,x_2)$ *имеет на оси* Ox_2 *след* $\varphi_2(x_2)$, *принадлежащий* L_{p_2}. *При этом* $\forall N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *наилучшее приближение функции* $\varphi_2(x_2)$ *удовлетворяет неравенству*

$$Y_{2^N-1}(\varphi_2)_{p_2} \le c_{21} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=N}^{\infty} 2^{\frac{\nu_1}{p_1}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}.$$

где постоянная c_{21} *не зависит от* f *и* N.

Доказательство. Обозначим

$$Z_{l_1,l_2}(f) = V_{l_1,\infty}(f) + V_{\infty,l_2}(f) - V_{l_1,l_2}(f)$$

и рассмотрим $T_{i,j} = -Z_{2^i,2^j}(f) + Z_{2^i,2^j-1}(f) + Z_{2^i-1,2^j}(f) - Z_{2^i-1,2^j-1}(f)$ — тригонометрические полиномы порядка $2^i - 1$ по x_1, порядка $2^j - 1$ по x_2 где $i = 0,1,2,\ldots, j = 0,1,2,\ldots$. В работе [14, стр. 185] доказано: если $f \in L_{p_1,p_2}$, то

$$\|f - Z_{l_1,l_2}(f)\|_{p_1,p_2} \le c_{22} Y_{l_1,l_2}(f)_{p_1,p_2}, l_i = 0,1,2,\ldots, i = 1,2, \tag{2.3}$$

где постоянна c_{22} не зависит от f, l_1 и l_2, и

$$\|T_{i,j}\|_{p_1,p_2} \le c_{23} Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2}, i = 0,1,2,\ldots, j = 0,1,2,\ldots \tag{2.4}$$

где постоянная c_{23} не зависит от f и T_{i_j}.

Так как $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)\,dx_1 = 0$ для почти всех x_2 и $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)\,dx_2 = 0$ для почти всех x_1, то

$$V_{0,\infty}(f) = V_{\infty,0}(f) = V_{0,0}(f) = 0.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} T_{ij}$. Так как $Z_{00} = 0$, то, применяя неравенство (2.3), получим, что выполнены следующие соотношения

$$\begin{aligned}
\|f - \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} T_{ij}\|_{p_1,p_2} &= \|f + Z_{2^M,2^N}(f) - Z_{2^M,0}(f) - Z_{0,2^N}(f) + Z_{0,0}(f)\|_{p_1,p_2} \le \\
&\le \|f - Z_{2^M,2^N}(f)\|_{p_1,p_2} + \|f - Z_{2^M,0}(f)\|_{p_1,p_2} + \|f - Z_{0,2^N}(f)\|_{p_1,p_2} \le \\
&\le c_{24}\left[Y_{2^M,2^N}(f)_{p_1,p_2} + Y_{2^M,0}(f)_{p_1,p_2} + Y_{0,2^N}(f)_{p_1,p_2}\right],
\end{aligned}$$

где постоянная c_{24} не зависит от f, M и N.

Из определения наилучшего приближения углом следует, что правая чать последнего неравенства при $M \to \infty$ и $N \to \infty$ стремится к 0. Это означает, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} T_{ij}$ сходится к функции $f(x_1,x_2)$ в смысле L_{p_1,p_2}.

На основании неравенства С.М. Никольского [21] можно написать, что для любого фиксированного $x_1 \in [0,2\pi]$

$$\|T_{i,j}(x_1,x_2)\|_{p_2} \le c_{25} 2^{i/p_1} \|T_{i,j}(x_1,x_2)\|_{p_1,p_2}, \tag{2.5}$$

где постоянная c_{25} не зависит от T_{i_j} и x_1.

Откуда, учитывая неравенство (2.4), получаем, что для любого фиксированного $x_1 \in [0,2\pi]$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\|T_{ij}(x_1,x_2)\|_{p_2} \le c_{25}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2^{i/p_1}\|T_{ij}(x_1,x_2)\|_{p_1,p_2} \le$$

$$\le c_{26}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}2^{i/p_1}Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2} < \infty,$$

где постоянная c_{26} не зависит от f и x_1.

Это неравенство означает, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}T_{ij}(x_1,x_2)$ сходится к некоторой функции $f_1(x_1,x_2)$ при любом фиксированном $x_1 \in [0,2\pi]$ в смысле L_{p_2}. Но тогда [22, стр. 14] $f_1(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$ почти всюду. Изменим функцию $f_1(x_1,x_2)$ на множестве 2-мерной меры 0 так, чтобы она была определена в точках $(0,x_2)$. Полученную функцию обозначим $f_{11}(x_1,x_2)$. Осталось проверить, что функция $\varphi_2(x_2) = f_{11}(0,x_2)$ определяет след функции $f(x_1,x_2)$ на оси Ox_2.

Свойство 1 определения следа функции выполнено, так как $f_{11}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2)$ почти всюду и $\varphi_2(x_2) = f_{11}(0,x_2)$.

Как показано выше, $f_{11}(x_1,x_2) \in L_{p_2}$ для любого фиксированного $x_1 \in [0,2\pi]$. Это означает, что свойство 2 определения следа функции также выполнено.

Остается проверить свойство 3, то есть надо проверить, что

$$I_1 = \|f(x_1,x_2) - \varphi_2(x_2)\|_{p_2} \to 0$$

при $|x_1| \to 0$.

Оценим I_1. Заменяя $f(x_1,x_2)$ и $\varphi_2(x_2)$ на сходящиеся к ним в смысле L_{p_2} ряды, получаем, что для любого фиксированного $x_1 \in [0,2\pi]$ и $\forall N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ выполнены неравенства

$$I_1 \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)\right\|_{p_2} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)\right\|_{p_2} +$$

$$+ \sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)\right\|_{p_2} = I_2 + I_3.$$

Теперь оценим I_2 и I_3. Учитывая неравенства (2.5) и (2.4) получаем, что для любого фиксированного $x_1 \in [0,2\pi]$ выполнены неравенства

$$I_3 \leq c_{27} \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{i/p_1} \left\| T_{ij}(x_1,x_2) \right\|_{p_1,p_2} \leq c_{28} \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{i/p_1} Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2},$$

где постоянные c_{27} и c_{28} не зависят от f, N, x_1 и T_{i_j}.

Поскольку разность $T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)$ есть тригонометрический полином, то, применяя неравенство Никольского [21], получим, что $\forall x_1 \in [0,2\pi]$ выполнено неравенство

$$\|T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)\|_{p_2} \leq c_{29} 2^{i/p_1} \|T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)\|_{p_1,p_2}, \tag{2.6}$$

где постоянная c_{29} не зависит от f, T_{i_j} и x_1.

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении, получим, что для любого $x_1 \in [0,2\pi]$

$$\|T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)\|_{p_1,p_2} \leq |x_1| \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} T_{ij}(x_1,x_2) \right\|_{p_1,p_2}.$$

Воспользовавшись неравенством Бернштейна-Никольского [21], для любого $x_1 \in [0,2\pi]$, получим

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_1} T_{ij}(x_1,x_2) \right\|_{p_1,p_2} \leq c_{30} 2^i \|T_{ij}(x_1,x_2)\|_{p_1,p_2},$$

где постоянная c_{30} не зависит от T_{i_j} и x_1.

Таким образом, получаем, что выполнено неравенство

$$\|T_{ij}(x_1,x_2) - T_{ij}(0,x_2)\|_{p_2} \leq c_{31} |x_1| 2^i \|T_{ij}(x_1,x_2)\|_{p_1,p_2}, \tag{2.7}$$

где постоянная c_{31} не зависит от T_{i_j} и x_1.

Учитывая неравенства (2.6), (2.7) и (2.4), для любого $x_1 \in [0,2\pi]$ имеем

$$I_2 \leq |x_1| \sum_{i=0}^{N} 2^{i(1+\frac{1}{p_1})} \sum_{j=0}^{\infty} c_{32} Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2} \leq$$

$$\leq c_{32} |x_1| 2^N \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{i/p_1} Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2} \leq$$

$$\leq c_{32} |x_1| 2^N \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{i/p} Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{32} |x_1| 2^N I,$$

где постоянная c_{32} не зависит от f, N и x_1.

Таким образом, получаем, что

$$I_1 \le c_{33}\left(|x_1|2^N I + \sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{i/p_1} Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2}\right),$$

где, как следует из вышеизложенного, постоянная c_{33} не зависит от f, N и x_1.

Так как по условию леммы $I < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{i/p_1} Y_{2^i-1,2^j-1}(f)_{p_1,p_2} \le \frac{\varepsilon}{2c_{33}}.$$

Для выбранного N возьмем x_1 такие, что $|x_1| < \frac{\varepsilon}{2c_{33}2^N I}$, тогда $I_1 \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Таким образом, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $N = N(\varepsilon)$, что для любого x_1 такого, что $|x_1| < \frac{\varepsilon}{2c_{33}2^N I}$ имеем $I_1 \le \varepsilon$. Это означает, что $I_1 \to 0$ при $|x_1| \to 0$.

Этим завершается проверка 3-го свойства следа функции.

Теперь докажем последнее утверждение леммы. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{N-1} T_{ij}(x_1,x_2)$. Повторяя рассуждения аналогичные тем, что приведены в начале доказательства получаем, что для любого фиксированного $x_1 \in [0,2\pi]$ этот ряд сходится в смысле L_{p_2} к некоторой функции $\Theta(x_1,x_2)$. Так как $T_{ij}(x_1,x_2)$ являются тригонометрическими полиномими порядка $2^i - 1$ по x_1 и $2^j - 1$ по x_2, то $\Theta(x_1,x_2)$ является тригонометрическим полиномом порядка $2^{N-1} - 1$ по переменной x_2 при любом фиксированном $x_1 \in [0,2\pi]$. Изменим функцию $\Theta(x_1,x_2)$ на множестве 2-мерной меры 0 так, чтобы она была определена в точках $(0,x_2)$. Полученную функцию обозначим $\Theta_1(x_1,x_2)$. Тогда $\Theta_1(0,x_2)$ — тригонометрический полином порядка $2^{N-1} - 1$.

Поэтому, применяя неравенства (2.5) и (2.4), имеем

$$Y_{2^N-1}(\varphi_2(x_2))_{p_2} \le \|\varphi_2(x_2) - \Theta_1(0,x_2)\|_{p_2} \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=N}^{\infty} \|T_{ij}(0,x_2)\|_{p_2} \le$$

$$\le c_{34}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=N}^{\infty} 2^{i/p_1}\|T_{ij}(x_1,x_2)\|_{p_1,p_2} \le c_{35}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=N}^{\infty} 2^{i/p_1} Y_{2^i-1,2^j-1]}(f)_{p_1,p_2},$$

где постоянные c_{34} и c_{35} не зависят от f и N.

Лемма 2.6 доказана полностью.

Лемма 2.7. *Пусть* $f \in L^0_{p_1,p_2}$, *тогда если*

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2} < \infty,$$

то функция $f(x_1,x_2)$ *имеет на оси* Ox_1 *след* $\varphi_1(x_1)$, *принадлежащий* L_{p_1}. *При этом* $\forall N_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$*наилучшее приближение функции* $\varphi(x_1)$ *удовлетворяет неравенству*

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_1)_{p_1} \le c_{36}\sum_{\nu_1=N_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2},$$

где постоянная c_{36} *не зависит от* f *и* N_1.

Лемма 2.7 доказывается аналогично лемме 2.6.

Лемма 2.8. *Для того чтобы функция* $f = f(x) \in H^r_p$, *где* $1 \le p \le \infty$, $r > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *выполнялось следующее неравенство:*

$$Y_l(f)_p \le c_{37}\frac{1}{(l+1)^r}.$$

где постоянная c_{37} *не зависит от* l.

Лемма 2.8 доказана в работе [19].

Лемма 2.9. *Пусть* $f = f(x) \in H^r_p$ *и выполнены следующие условия* $1 \le p < \infty$, $r > 0$, $r > \frac{1}{p}$, *то* $f \in H_\infty^{r-\frac{1}{p}}$

Лемма 2.9 доказана в работе [19].

2.2 Конструктивная характеристика класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

Теорема 2.1. *Для того чтобы функция* $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1,2$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall l_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *выполнялись следующие неравенства:*

$$Y_{l_i}(f)_{p_1,p_2} \le c_{38}\frac{1}{(l_i+1)^{\alpha_i}},\ i = 1,2,$$

$$Y_{l_1 l_2}(f)_{p_1,p_2} \le c_{39}\frac{1}{(l_1+1)^{\beta_1}}\frac{1}{(l_2+1)^{\beta_2}}.$$

где постоянные c_{38} и c_{39} не зависят от l_1 и l_2.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, тогда, подставляя в оценки из леммы 2.1 оценки для модулей гладкости из определения класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, имеем

$$Y_{l_1}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{14}\omega_{k_1}\left(f,\frac{1}{l_1+1}\right)_{p_1,p_2} \leq c_{14}c_6\frac{1}{(l_1+1)^{\alpha_1}},$$

$$Y_{l_2}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{14}\omega_{k_2}\left(f,\frac{1}{l_2+1}\right)_{p_1,p_2} \leq c_{14}c_7\frac{1}{(l_2+1)^{\alpha_2}},$$

$$Y_{l_1l_2}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{12}\omega_{k_1,k_2}\left(f,\frac{1}{l_1+1},\frac{1}{l_2+1}\right)_{p_1,p_2} \leq c_{12}c_8\frac{1}{(l_1+1)^{\beta_1}}\frac{1}{(l_2+1)^{\beta_2}},$$

где постоянные c_6, c_7, c_8, c_{12} и c_{14} не зависят от l_1 и l_2. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство проведем для $Y_{l_1}(f)_{p_1,p_2}$ (для $Y_{l_2}(f)_{p_1,p_2}$ и $Y_{l_1l_2}(f)_{p_1,p_2}$ доказательства аналогичные).
Пусть $\forall\nu_1 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ выполнено неравенство $Y_{\nu_1}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{38}\frac{1}{(\nu_1+1)^{\alpha_1}}$, где постоянная c_{38} не зависит от ν_1. Тогда, применяя лемму 2.1, для $k_1 > \alpha_1$ имеем

$$\omega_{k_1}\left(f,\frac{1}{l_1+1}\right)_{p_1,p_2} \leq c_{15}\frac{1}{(l_1+1)^{k_1}}\sum_{v_1=0}^{l_1}(v_1+1)^{k_1-1}Y_{\nu_1}(f)_{p_1,p_2} \leq$$

$$\leq c_{15}\frac{1}{(l_1+1)^{k_1}}\sum_{v_1=0}^{l_1}c_{38}\frac{(v_1+1)^{k_1-1}}{(v_1+1)^{\alpha_1}} \leq c_{40}\frac{1}{(l_1+1)^{\alpha_1}},$$

где постоянная c_{40} не зависит от l_1.

Теорема 2.1 доказана.

2.3 Теоремы вложения разных метрик

Теорема 2.2. *Пусть $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} < \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1,2$, и выполнено одно из двух условий:*

1) $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha 2} \geq 1$, $\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1} + \frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2} < 1$;

2) $\frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1} + \frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2} \geq 1$;

тогда $f \in SH(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, *где*
$\alpha_1^* = \alpha_1\vartheta_1,\ \alpha_2^* = \alpha_2\vartheta_2,\ \beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$
$\vartheta_1 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)\right),$
$\vartheta_2 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) + \frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)\right).$

Условиям теоремы соответствуют пары чисел (β_1,β_2), лежащие в области I, изображенной на рисунках 6 - 8. Область I меняется в зависимости от положе-

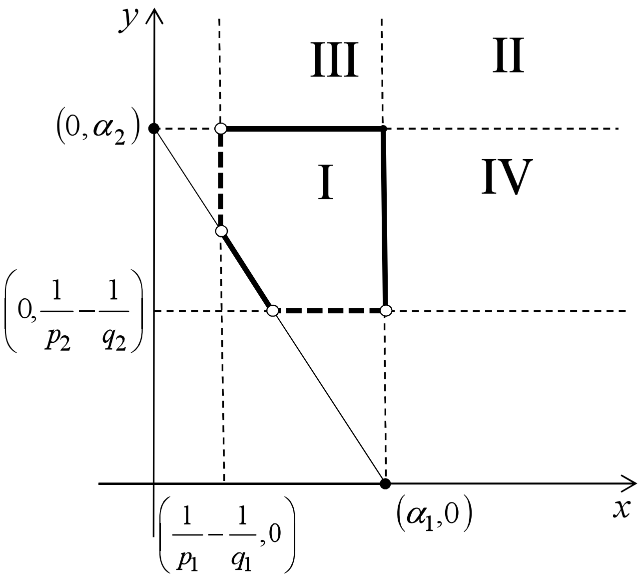

Рисунок 6

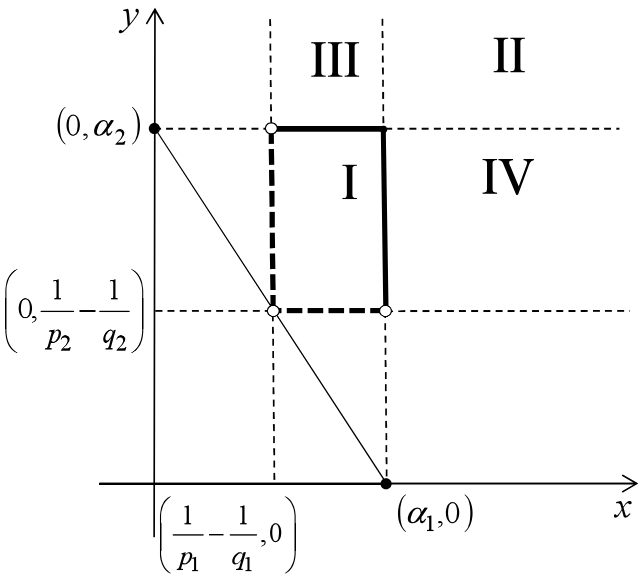

Рисунок 7

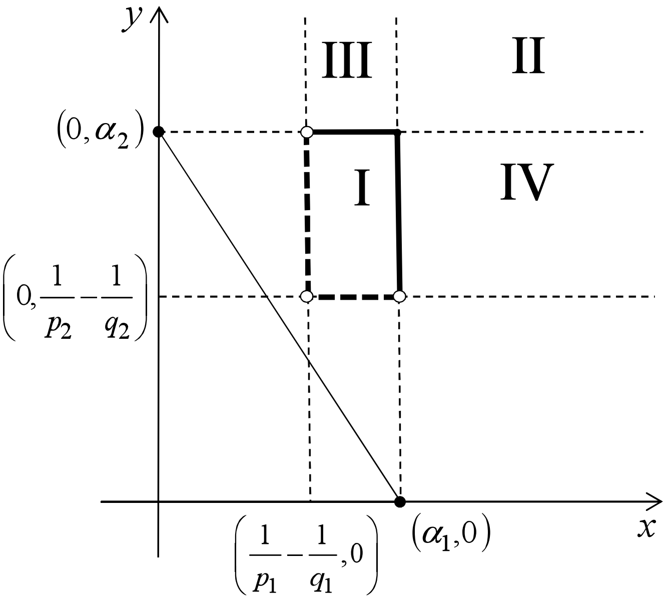

Рисунок 8

ния точки $\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)$ отностиельно прямой, соединяющей точки $(\alpha_1,0)$ и $(0,\alpha_2)$. Условию 1) соответствует точка $\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)$ под прямой (см. рис. 6). Условию 2) — на и над прямой (см. рис. 7 и 8).

Доказательство. Пусть $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Тогда, в частности, $f \in L_{p_1,p_2}$, поэтому, применяя теорему 1.1, получим

$$f(x_1,x_2) = f_{12}(x_1,x_2) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_0. \tag{2.8}$$

Покажем, что в условиях теоремы 2.2 будем иметь $f_{12} \in L_{q_1,q_2}$, $f_1 \in L_{q_1}$ и $f_2 \in L_{q_2}$. Рассмотрим

$$J_1 = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2} \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1} Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f_{12})_{p_1,p_2} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}.$$

Применяя теорему 1.2, а затем теорему 2.1, приходим к оценке

$$J_1 \le c_{41} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2} \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1} Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \le$$

$$\le c_{42} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2} \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1} 2^{-\nu_1\beta_1\theta_1} 2^{-\nu_2\beta_2\theta_1} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \le$$

$$\le c_{43} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{-\nu_2\left(\beta_2-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}\right)\theta_2} \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{-\nu_1\left(\beta_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)\theta_1} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}.$$

Так как $\beta_i > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}$, то $J_1 < \infty$. На основании леммы 2.2 заключаем, что $f_{12} \in L_{q_1,q_2}$.

Теперь рассмотрим $J_2 = \sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1} Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1}(f_1)_{p_1}$. Применяя теорему 1.2, а затем теорему 2.1, имеем

$$J_2 \le c_{44} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1} Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1}(f)_{p_1,p_2} \le c_{45} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{-\nu_1\theta_1\left(\alpha_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)}.$$

Поскольку $\alpha_1 > \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, то $J_2 < \infty$. Применяя лемму 2.3, получим, что $f_1 \in L_{q_1}$. Аналогично доказывается, что $f_2 \in L_{q_2}$.

Теперь оценим $||f||_{q_1,q_2}$. Используя равенство (2.8), и приходим к оценке

$$||f||_{q_1,q_2} \le ||f_{12}||_{q_1,q_2} + (2\pi)^{1/q_2}||f_1||_{q_1} + (2\pi)^{1/q_1}||f_2||_{q_2} + (2\pi)^{1/q_1+1/q_2}|f_0|.$$

Так как $f_{12} \in L_{q_1,q_2}$, $f_1 \in L_{q_1}$, $f_2 \in L_{q_2}$, то получаем, что $||f||_{q_1,q_2} < \infty$, то есть

$$f \in L_{q_1,q_2}. \tag{2.9}$$

Теперь получим оценку для $Y_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}\left(f\right)_{q_1,q_2}$.Воспользовавшись теоремой 1.2, а затем леммой 2.2 и теоремой 2.1, находим

$$Y_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}(f)^{\theta_2}_{q_1,q_2}=Y_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}(f_{12})^{\theta_2}_{q_1,q_2}\leq$$

$$\leq c_{46}\sum_{\nu_2=N_2}^{\infty}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=N_1}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1}Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f_{12})_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\leq$$

$$\leq c_{47}\sum_{\nu_2=N_2}^{\infty}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=N_1}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1}Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\leq$$

$$\leq c_{48}\sum_{\nu_2=N_2}^{\infty}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}-\beta_2\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=N_1}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}-\beta_1\right)\theta_1}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}},$$

где постоянные c_{46}, c_{47} и c_{48} не зависят от N_1, N_2.
Поскольку $\beta_i>\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}$, $i=1{,}2$, то

$$Y_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2}\leq c_{49}2^{-N_1\left(\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)}2^{-N_2\left(\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)},\tag{2.10}$$

где постоянная c_{49} не зависит от N_1 и N_2.

Для оценки $Y_{2^{N_1}-1}\left(f\right)_{q_1,q_2}$ необходимо получить оценки для $Y_{2^{N_1}-1}\left(f_{12}\right)_{q_1,q_2}$ и $Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1}$.

Получим оценку $Y_{2^{N_1}-1}\left(f_{12}\right)_{q_1,q_2}$. Применяя лемму 2.5, а затем лемму 2.2 и теорему 1.2, для любых $K\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $N_1\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ будем иметь

$$Y_{2^{N_1}-1}\left(f_{12}\right)^{\theta_2}_{q_1,q_2}\leq c_{50}Y_{2^{N_1-1}-1,0}\left(f_{12}\right)^{\theta_2}_{q_1,q_2}\leq$$

$$\leq c_{51}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=N_1-1}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1}Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f_{12})_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\leq$$

$$\leq c_{51}\sum_{\nu_2=0}^{K}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=N_1-1}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1}Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}+$$

$$+c_{51}\sum_{\nu_2=K+1}^{\infty}2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2}\left(\sum_{\nu_1=N_1-1}^{\infty}2^{\nu_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\theta_1}Y^{\theta_1}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}},$$

где постоянные c_{50} и c_{51} не зависят от f, N_1 и K.

Из определений двумерного и одномерного приближений углом следует неравенство $Y_{l_1l_2}(f)_{p_1,p_2}\leq Y_{l_1}(f)_{p_1,p_2}$. Тогда, заменив в первом слагаемом двумерное приближение углом бóльшим (одномерным приближением) и используя для обоих слагаемых конструктивную характеристику класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, получим

$$Y_{2^{N_1}-1}(f_{12})^{\theta_2}_{q_1,q_2} \leq c_{52} \sum_{\nu_2=0}^{K} 2^{\nu_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\theta_2} \left(\sum_{\nu_1=N_1-1}^{\infty} 2^{-\nu_1\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)\theta_1} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} +$$
$$+ c_{52} \sum_{\nu_2=K+1}^{\infty} {}^{-\nu_2\left(\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)\theta_2} \left(\sum_{\nu_1=N_1-1}^{\infty} 2^{-\nu_1\left(\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)\theta_1} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}},$$

где постоянная c_{52} не зависит от N_1 и K.

Так как $\alpha_1 > \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $\beta_i > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}$, $\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} > 0$, $i = 1{,}2$, то из этого неравенства следует, что

$$Y_{2^{N_1}-1}\left(f_{12}\right)^{\theta_2}_{q_1,q_2} \leq c_{53} 2^{-N_1\theta_2\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)} 2^{K\theta_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)} +$$
$$+ c_{53} 2^{-N_1\theta_2\left(\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)} 2^{-K\theta_2\left(\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \quad (2.11)$$

где постоянная c_{53} не зависит от N_1, и K.
Подставляя $\left[\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2} N_1\right]$ вместо K и учитывая, что $\alpha_1 \geq \beta_1$ и $\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2} N_1 - 1 \leq \left[\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2} N_1\right] \leq \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2} N_1$, имеем

$$Y_{2^{N_1}-1}(f_{12})_{q_1,q_2} \leq c_{54} 2^{-N_1\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \quad (2.12)$$

где постоянная c_{54} не зависит от N_1.

Теперь получим оценку $Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1}$. Применяя лемму 2.3, затем теорему 1.2 и теорему 2.1, получаем

$$Y^{\theta_1}_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1} \leq c_{55} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} 2^{\nu_1\theta_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)} Y^{\theta_1}_{2^{N_1}-1}(f_1)_{p_1} \leq$$
$$\leq c_{56} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} 2^{\nu_1\theta_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)} Y^{\theta_1}_{2^{N_1}-1}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{57} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} 2^{-\nu_1\theta_1\left(\alpha_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)},$$

где постоянные c_{55}, c_{56} и c_{57} не зависят от N_1. Так как $\alpha_1 > \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, то

$$Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1} \leq c_{58} 2^{-N_1\left(\alpha_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)}, \quad (2.13)$$

где постоянная c_{58} не зависит от N_1.

Теперь рассмотрим $Y_{2^{N_1}-1}(f)_{q_1,q_2}$. Используя теорему 1.2 и оценки 2.12 и 2.13, заключаем, что

$$Y_{2^{N_1}-1}(f)_{q_1,q_2} \le c_{59}\left(Y_{2^{N_1}-1}(f_{12})_{q_1,q_2} + Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1}\right) \le$$
$$\le c_{60}\left(2^{-N_1\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)} + 2^{-N_1\left(\alpha_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)}\right],$$

где постоянные c_{59} и c_{60} не зависят от N_1. Откуда следует, что

$$Y_{2^{N_1}-1}(f)_{q_1,q_2} \le c_{61}2^{-N_1\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \tag{2.14}$$

где постоянная c_{61} не зависит от N_1.

Аналогично рассуждая, приходим к оценке

$$Y_{2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2} \le c_{62}2^{-N_2\left(\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)-\frac{\alpha_2-\beta_2}{\beta_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)}, \tag{2.15}$$

где постоянная c_{62} не зависит от N_2.

Из соотношений (2.9), (2.10), (2.14) и (2.15), применяя теорему 2.1, получаем справедливость утверждения теоремы 2.2.

Замечание. Теорема 2.2 содержит в себе теоремы вложения классов Никольского $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ и $SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ при условии совпадения классов $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ и $SH(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$ соответственно с классами $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ и $H^{\alpha_1^*\alpha_2^*}_{q_1,q_2}$ или $SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ и $SH^{\alpha_1^*\alpha_2^*}_{q_1,q_2}$.

Теорема 2.3. *Пусть $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $i = 1,2$,*

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \alpha_1 \le \beta_1, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2 \le \beta_2,$$

тогда $f \in SH\,(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, где

$$\alpha_1^* = \alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right), \alpha_2^* = \alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$
$$\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right), \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right).$$

Условиям теоремы удовлетворяют пары точек (β_1,β_2) лежащие в области II, изображённой на рисунках 6 - 8.

Доказательство. Так как $f \in L_{p_1,p_2}$, то применяя теорему 1.1, получим

$$f(x_1,x_2) = f_{12}(x_1,x_2) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_0.$$

Проверка того, что при заданных условиях функция $f \in L_{q_1,q_2}$, проводится также как и при доказательстве теоремы 2.2.

Оценка для $Y_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2}$ получается также как и в доказательстве теоремы 2.2:

$$Y_{2^{N_1}-1,2^{N2}-1}(f)_{q_1,q_2} \leq c_{63} 2^{-N_1\left(\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)} 2^{-N_2\left(\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \tag{2.16}$$

где постоянная c_{63} не зависит от N_1 и N_2.

Теперь оценим $Y_{2^{N_1}-1}(f)_{q_1,q_2}$. Для этого необходимо сначала оценить $Y_{2^{N_1}-1}(f_{1,2})_{q_1,q_2}$ и $Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1}$.

Для $Y_{2^{N_1}-1}(f_{1,2})_{q_1,q_2}$, повторяя рассуждения, приведённые при доказательстве теоремы 2.2, имеем, что $\forall K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верна оценка (2.11), а именно

$$Y_{2^{N_1}-1}(f_{12})^{\theta_2}_{q_1,q_2} \leq c_{64} 2^{-N_1\theta_2\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)} 2^{K\theta_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)} + \\ + c_{64} 2^{-N_1\theta_2\left(\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)} 2^{-K\theta_2\left(\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)},$$

где постоянная c_{64} не зависит от N_1 и K.

Положив $K=0$ и учитывая, что $\beta_1 \geq \alpha_1$, имеем

$$Y_{2^{N_1}-1}(f_{12})_{q_1,q_2} \leq c_{65} 2^{-N_1\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)},$$

где постоянная c_{65} не зависит от N_1.

Повторяя рассуждения, приведённые при доказательстве теоремы 2.2 для $Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1}$, имеем

$$Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1} \leq c_{66} 2^{-N_1\left(\alpha_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}\right)},$$

где постоянная c_{66} не зависит от N_1.

Теперь рассмотрим $Y_{2^{N_1}-1}(f)_{q_1,q_2}$. Применяя теорему 1.2 и полученные оценки для $Y_{2^{N_1}-1}(f_{12})_{q_1,q_2}$ и $Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1}$ заключаем, что

$$Y_{2^{N_1}-1}(f)_{q_1,q_2} \leq c_{67}\left(Y_{2^{N_1}-1}(f_{12})_{q_1,q_2} + Y_{2^{N_1}-1}(f_1)_{q_1}\right) \leq \\ \leq c_{68} 2^{-N_1\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)}, \tag{2.17}$$

где постоянные c_{67} и c_{68} не зависят от N_1.

Аналогично получается оценка:

$$Y_{2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2} \leq c_{69}\left(Y_{2^{N_2}-1}(f_{12})_{q_1,q_2} + Y_{2^{N_2}-1}(f_1)_{q_2}\right) \leq \\ \leq c_{70} 2^{-N_2\left(\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \tag{2.18}$$

где постоянные c_{69} и c_{70} не зависят от N_2.

Из соотношений (2.16), (2.17) и (2.18), применяя теорему 2.1, получаем справедливость утверждения теоремы 2.3.

Теорема 2.4. *Пусть* $f \in SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)$, *где* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $i = 1,2$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \beta_1 \le \alpha_1, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2 \le \beta_2,$$

тогда $f \in SH\left(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*\right)$, *где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1\vartheta_1,\, \alpha_2^* = \alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$
$$\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),\, \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$
$$\vartheta_1 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)\right),$$

Условиям теоремы удовлетворяют пары точек (β_1,β_2) лежащие в области III, изображённой на рисунках 6 - 8.

Доказательство. Так как $f \in L_{p_1,p_2}$, то применяя теорему 1.1, получим

$$f(x_1,x_2) = f_{12}(x_1,x_2) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_0.$$

Проверка того, что при заданных условиях функция $f \in L_{q_1,q_2}$, проводится также как и при доказательстве теоремы 2.2.

Повторяя рассуждения, приведённые при доказательстве теоремы 2.2 для $Y_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}\left(f\right)_{q_1,q_2}$ и $Y_{2^{N_1}-1}\left(f\right)_{q_1,q_2}$, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} Y_{2^{N_1}-1,2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2} &\le c_{71} 2^{-N_1\left(\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)} 2^{-N_2\left(\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \\ Y_{2^{N_1}-1}(f)_{q_1,q_2} &\le c_{72} 2^{-N_1\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где постоянные c_{71} и c_{72} не зависят от N_1.

Теперь оценим $Y_{2^{N_2}-1}\left(f\right)_{q_1,q_2}$. Для этого необходимо сперва оценить $Y_{2^{N_2}-1}\left(f_{1,2}\right)_{q_1,q_2}$ и $Y_{2^{N_2}-1}\left(f_2\right)_{q_2}$.

Для $Y_{2^{N_2}-1}(f_{1,2})_{q_1,q_2}$, повторяя рассуждения, приведённые при доказательстве теоремы 2.2, получим, что $\forall K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верна оценка

$$Y_{2^{N_2}-1}(f_{12})_{q_1,q_2}^{\theta_2} \le c_{73} 2^{K\theta_2\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)} 2^{-N_2\theta_2\left(\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)} + \\ + c_{73} 2^{-K\theta_2\left(\beta_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right)} 2^{-N_2\theta_2\left(\beta_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)},$$

где постоянная c_{73} не зависит от N_2 и K.
Положив $K=0$ и учитывая, что $\beta_2 \geq \alpha_2$, имеем

$$Y_{2^{N_2}-1}(f_{12})_{q_1,q_2} \leq c_{74} 2^{-N_2\left(\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)},$$

где постоянная c_{74} не зависит от N_2.

Повторяя рассуждения, аналогичные приведённым при доказательстве теоремы 2.2 для $Y_{2^{N_2}-1}(f_2)_{q_2}$, имеем

$$Y_{2^{N_2}-1}(f_2)_{q_2} \leq c_{75} 2^{-N_2\left(\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)},$$

где постоянная c_{75} не зависит от N_2.

Теперь рассмотрим $Y_{2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2}$. Применяя теорему 1.2 и полученные оценки для $Y_{2^{N_2}-1}(f_{12})_{q_1,q_2}$ и $Y_{2^{N_2}-1}(f_2)_{q_2}$ заключаем, что

$$Y_{2^{N_2}-1}(f)_{q_1,q_2} \leq c_{76}\left(Y_{2^{N_2}-1}(f_{12})_{q_1,q_2} + Y_{2^{N_2}-1}(f_2)_{q_2}\right) \leq$$
$$\leq c_{77} 2^{-N_2\left(\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)}, \quad (2.20)$$

где постоянные c_{76} и c_{77} не зависят от N_2.
Из соотношений (2.19) и (2.20), применяя теорему 2.1, получаем справедливость утверждения теоремы 2.4.

Теорема 2.5. *Пусть $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$, $i=1,2$,*

$$\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1} < \alpha_1 \leq \beta_1,\ \frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2} < \beta_2 \leq \alpha_2,$$

тогда $f \in SH\,(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, где

$$\alpha_1^* = \alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right),\ \alpha_2^* = \alpha_2\vartheta_2,$$
$$\beta_1^* = \beta_1 - \left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^* = \beta_2 - \left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right),$$
$$\vartheta_2 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right) + \frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right).$$

Условиям теоремы удовлетворяют пары точек (β_1,β_2) лежащие в области IV, изображённой на рисунках 6 - 8.

Доказательство теоремы 2.5 проводится аналогично доказательству теоремы 2.4.

2.4 Следствия теорем вложения разных метрик

В теоремах 2.2–2.5 предполагалось, что $\alpha_i > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}$ и $\beta_i > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}$, $i = 1{,}2$. Возникает вопрос: возможны ли теоремы вложения в случае, когда хотя бы одно из этих условий не выполнено. Теоремы 2.6–2.9 дают ответ на этот вопрос.

Теорема 2.6. *Пусть* $f \in SH\,(p_1{,}p_2{,}\alpha_1{,}\alpha_2{,}\beta_1{,}\beta_2)$, *где* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $i = 1{,}2$,

$$0 < \beta_1 \le \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \alpha_1,\ \alpha_2 > \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2},\ \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)} + \frac{\beta_2}{\alpha 2} > 0,$$

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \gamma < \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\beta_2}\alpha_2,$$

тогда $f \in SH\,(q_1{,}q_2{,}\alpha_1^*{,}\alpha_2^*{,}\beta_1^*{,}\beta_2^*)$, *где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1\vartheta_1,\ \alpha_2^* = \alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$

$$\beta_1^* = \gamma - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^* = \beta_2\frac{\alpha_1 - \gamma}{\alpha_1 - \beta_1} - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$

$$\vartheta_1 = 1 - \left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)\right).$$

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел $(\beta_1{,}\beta_2)$ из области V, изображённой на рисунке 9. Область V ограниченна прямыми: AB – снизу, $x = 0$ – слева и $x = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$ – справа, где точки A, B имеют следующие координаты: $A(\alpha_1{,}0)$, $B\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \alpha_2\right)$.

Точка $D\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\beta_2}\alpha_2{,}\alpha_2\right)$ является точкой пересечения прямой AM (где $M(\beta_1{,}\beta_2)$) с прямой $y = \alpha_2$.

Доказательство. Если зафиксировать $\gamma_1 = \gamma$ из промежутка $\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\beta_2}\alpha_2\right)$, то найдётся γ_2 такое, что точка $N(\gamma_1{,}\gamma_2)$ лежит на прямой AM (т.е. $\gamma_2 = \frac{\alpha_1\gamma}{\alpha_1 - \beta_1}\beta_2$) и находится в области III.

Обозначим $\gamma_1 = \gamma$ и $\gamma_2 = \frac{\alpha_1 - \gamma}{\alpha_1 - \beta_1}\beta_2$, тогда, используя свойства модуля гладкости, получим, что справедливы соотношения

$$\omega_{k_1k_2}(f{,}\delta_1{,}\delta_2)_{p_1{,}p_2} = \left(\omega_{k_1k_2}(f{,}\delta_1{,}\delta_2)_{p_1{,}p_2}\right)^{\frac{\alpha_1 - \gamma}{\alpha_1 - \beta_1}}\left(\omega_{k_1k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{p_1{,}p_2}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha_1} - \frac{\beta_1(\alpha_1 - \gamma)}{\alpha_1(\alpha_1 - \beta_1)}} \le$$

$$\le c_{78}\left(\omega_{k_1k_2}(f{,}\delta_1{,}\delta_2)_{p_1{,}p_2}\right)^{\frac{\alpha_1 - \gamma}{\alpha_1 - \beta_1}}\left(\omega_{k_1}(f{,}\delta_1)_{p_1{,}p_2}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha_1} - \frac{\beta_1(\alpha_1 - \gamma)}{\alpha_1(\alpha_1 - \beta_1)}} \le$$

$$\le c_{79}\left(\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_1 - \gamma}{\alpha_1 - \beta_1}}(\delta_1^{\alpha_1})^{\frac{\gamma}{\alpha_1} - \frac{\beta_1(\alpha_1 - \gamma)}{\alpha_1(\alpha_1 - \beta_1)}} = c_{79}\delta_1^{\gamma_1}\delta_2^{\gamma_2},$$

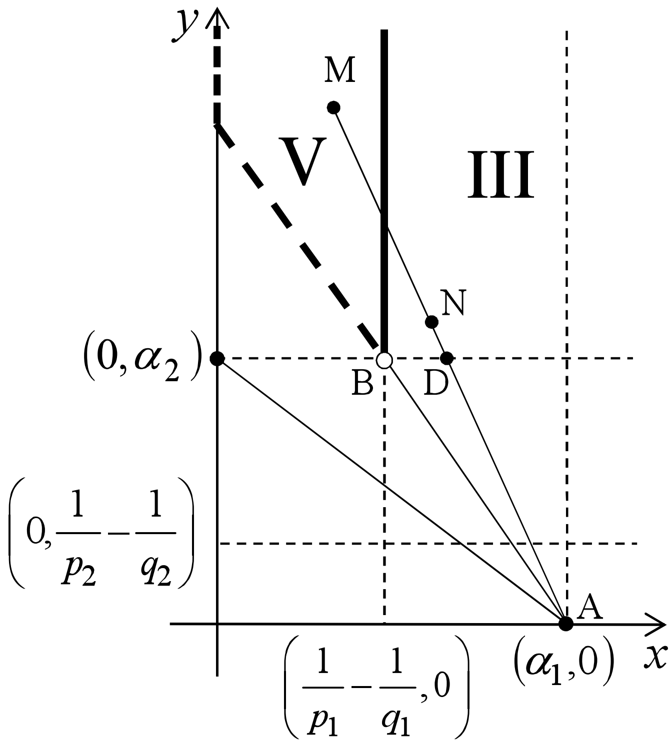

Рисунок 9

где постоянные c_{78} и c_{79} не зависят от δ_1 и δ_2.

Следовательно, имеет место вложение:

$$SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right) \subseteq SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2\right).$$

Так как

$$1-\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{\alpha_1-\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)=$$
$$=1-\left(\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)=\vartheta_1$$

и числа $\alpha_i,\gamma_i, i=1{,}2$, удовлетворяют условиям теоремы 2.2, то, применяя теорему 2.2, получим справедливость утверждения теоремы 2.6.

Теорема 2.7. *Пусть* $f\in SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)$, *где* $1\le p_i<q_i\le\infty$, $i=1{,}2$,

$$0<\beta_1\le\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}<\alpha_1,\ \frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}<\alpha_2,$$
$$\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}<\gamma<\alpha_1-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right),$$

и выполнено одно из двух условий:

$$1)\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\alpha_1-\beta_1)\le\beta_2\le\alpha_2\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)},\ \text{если}\ \frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1}+\frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2}<1;$$

$$2)\ \frac{(\alpha_1-\beta_1)\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}{\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}<\beta_2\le\alpha_2\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)},\ \text{если}\ \frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1}+\frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2}\ge 1,$$

тогда $f\in SH\,(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, *где*

$$\vartheta_1=1-\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right],$$

$$\vartheta_2'=1-\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)+\frac{(\alpha_1-\beta_1)\alpha_2-(\alpha_1-\gamma)\beta_2}{(\alpha_1-\beta_1)\alpha_2\gamma}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right],$$

$$\alpha_1^*=\alpha_1\vartheta_1,\alpha_2^*=\alpha_2\vartheta_2',\beta_1^*=\gamma-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right),\beta_2^*=\beta_2\frac{\alpha_1-\gamma}{\alpha_1-\beta_1}-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right).$$

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) из области VI, изображённой на рисунках 10-12. Область VI ограниченна прямыми: AC – снизу, AB – сверху, $x=0$ – слева и $x=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}$ – справа, где точки A,B,C имеют следующие координаты: $A(\alpha_1,0)$, $B\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1},\alpha_2\right)$, $C\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1},\max\left\{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\alpha_1-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right),\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right\}\right)$.

Точка $F\left(\alpha_1-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right),\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)$, является точкой пересечения прямой AM (где $M\,(\beta_1,\beta_2)$) с прямой $y=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}$.

Доказательство.Если зафиксировать $\gamma_1=\gamma$ из промежутка $\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1},\alpha_1-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right)$, то найдётся γ_2 такое, что точка $N(\gamma_1,\gamma_2)$ лежит на прямой AM (т.е $\gamma_2=\frac{\alpha_1-\gamma}{\alpha_1-\beta_1}\beta_2$) и находится в области I.

Обозначим $\gamma_1=\gamma$, $\gamma_2=\frac{\alpha_1-\gamma}{\alpha_1-\beta_1}\beta_2$, тогда используя свойства модуля гладкости получим, что справедливы соотношения:

$$\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2}=(\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2})^{\frac{\alpha_1-\gamma}{\alpha_1-\beta_1}}(\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2})^{\frac{\gamma}{\alpha_1}-\frac{\beta_1(\alpha_1-\gamma)}{\alpha_1(\alpha_1-\beta_1)}}\le$$

$$\le c_{80}\left(\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\alpha_1-\gamma}{\alpha_1-\beta_1}}\left(\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{p_1,p_2}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha_1}-\frac{\beta_1(\alpha_1-\gamma)}{\alpha_1(\alpha_1-\beta_1)}}\le$$

$$\le c_{81}\left(\delta_1^{\beta_1}\delta_2^{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_1-\gamma}{\alpha_1-\beta_1}}(\delta_1^{\alpha_1})^{\frac{\gamma}{\alpha_1}-\frac{\beta_1(\alpha_1-\gamma)}{\alpha_1(\alpha_1-\beta_1)}}\le c_{81}\delta_1^{\gamma_1}\delta_2^{\gamma_2}.$$

где постоянные c_{80} и c_{81} не зависят от δ_1 и δ_2.

Следовательно, имеет место вложение:

$$SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\subseteq SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2).$$

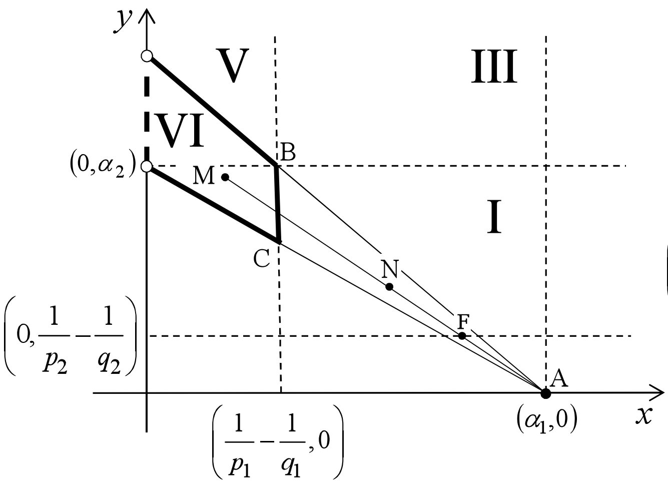

Рисунок 10

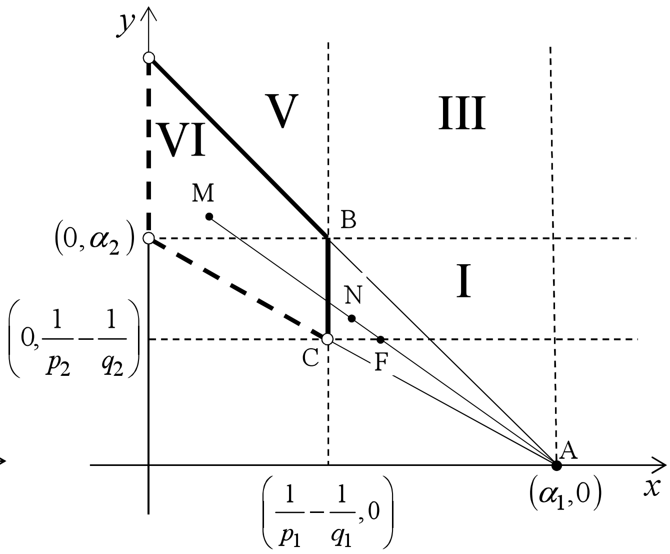

Рисунок 11

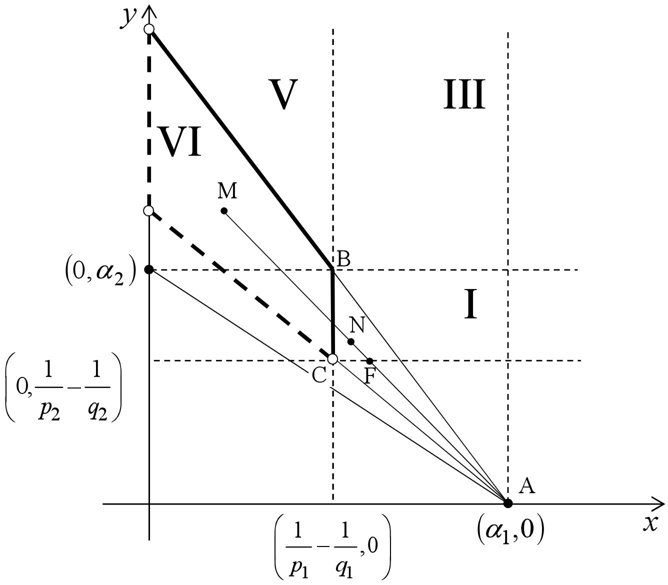

Рисунок 12

Так как

$$1-\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{\alpha_1-\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right]=$$

$$=1-\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_1\beta_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right]=\vartheta_1,$$

$$1-\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)+\frac{\alpha_2-\gamma_2}{\alpha_2\gamma_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right]=$$

$$=1-\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)+\frac{(\alpha_1-\beta_1)\alpha_2-(\alpha_1-\gamma)\beta_2}{(\alpha_1-\beta_1)\alpha_2\gamma}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right]=\vartheta_2'$$

и числа $p_i, q_i, \alpha_i, i=1{,}2$, удовлетворяют условиям теоремы 2.3, то, применяя теорему 2.3, получим справедливость утверждения теоремы 2.7.

Теорема 2.8. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $i = 1,2$,

$$0 < \beta_2 \le \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2,\ \alpha_1 > \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1},\ \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\alpha_2 - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)} > 0,$$

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \gamma < \alpha_2 - \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\beta_1}\alpha_1,$$

тогда $f \in SH\,(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, *где*

$$\alpha_1^* = \alpha_1 - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),\ \alpha_2^* = \alpha_2\vartheta_2,$$

$$\beta_1^* = \beta_1\frac{\alpha_2 - \gamma}{\alpha_2 - \beta_2} - \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^* = \gamma - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right),$$

$$\vartheta_2 = 1 - \left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right) + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)\right].$$

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) из области VII, изображённой на рисунке 13.

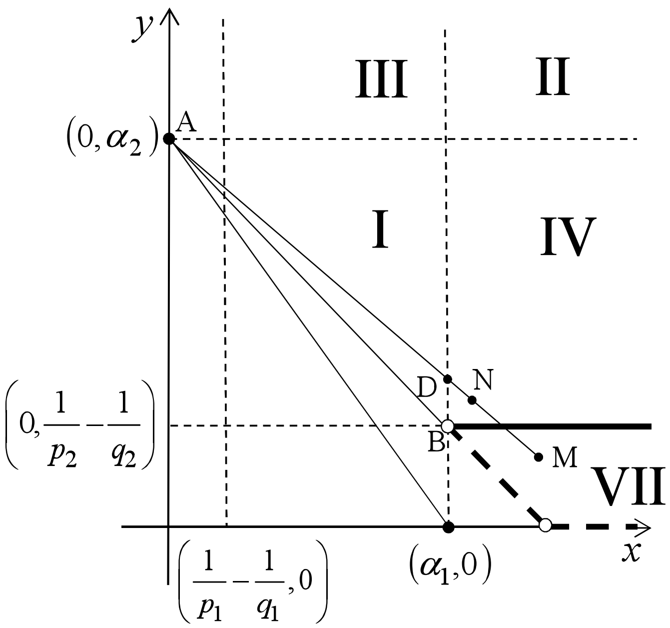

Рисунок 13

Доказательство теоремы 2.8 аналогично доказателству теоремы 2.6, но вместо ссылки на теорему 2.2 надо сделать ссылку на теорему 2.4.

Теорема 2.9. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i < q_i \le \infty$, $i = 1,2$,

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} < \alpha_1, 0 < \beta_2 \le \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \alpha_2, \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} < \gamma < \alpha_2 - \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\beta_1}\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right),$$

и выполнено одно из двух условий:

$$1)\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\alpha_2-\beta_2) \le \beta_1 \le \alpha_1 \frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)},\ \textit{если}\ \frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1}+\frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2}<1;$$

$$2)\ \frac{(\alpha_2-\beta_2)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}{\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)} < \beta_1 \le \alpha_1 \frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)},\ \textit{если}\ \frac{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}}{\alpha_1}+\frac{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}}{\alpha_2}\ge 1,$$

тогда $f \in SH\,(q_1,q_2,\alpha_1^*,\alpha_2^*,\beta_1^*,\beta_2^*)$, *где*

$$\alpha_1^*=\alpha_1\vartheta_1',\ \alpha_2^*=\alpha_2\vartheta_2,\ \beta_1^*=\beta_1\frac{\alpha_2-\gamma}{\alpha_2-\beta_2}-\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right),\ \beta_2^*=\gamma-\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right),$$
$$\vartheta_1'=1-\left[\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+\frac{(\alpha_2-\beta_2)\alpha_1-(\alpha_2-\gamma)\beta_1}{(\alpha_2-\beta_2)\alpha_1\gamma}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)\right],$$
$$\vartheta_2=1-\left[\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)+\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_2\beta_1}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)\right].$$

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) из области VI, изображённой на рисунках 14-16.

Доказательство теоремы 2.9 аналогично доказательству теоремы 2.7, но вместо ссылки на теорему 2.3 надо сделать ссылку на теорему 2.5.

2.5 Теоремы о следах функций

Теорема 2.10. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $i=1,2$,

$$\alpha_2>\frac{1}{p_2},\beta_2>\frac{1}{p_2},\alpha_1\ge\beta_1>0,\ \frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\ge 1,$$

тогда f *имеет на оси* Ox_1 *след* $\varphi(x_1)\in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, *где* $\alpha_1^*=\alpha_1-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) из области I, изображённой на рисунке 17.

Доказательство. Пусть $f\in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Тогда, в частности, $f\in L_{p_1,p_2}$, поэтому, применяя теорему 1.1, получим, что

$$f(x_1,x_2)=f_{12}(x_1,x_2)+f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_0. \qquad (2.21)$$

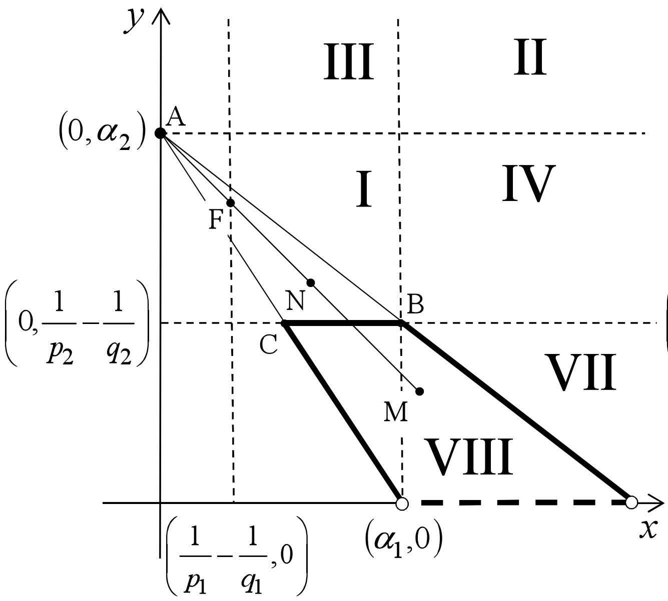

Рисунок 14

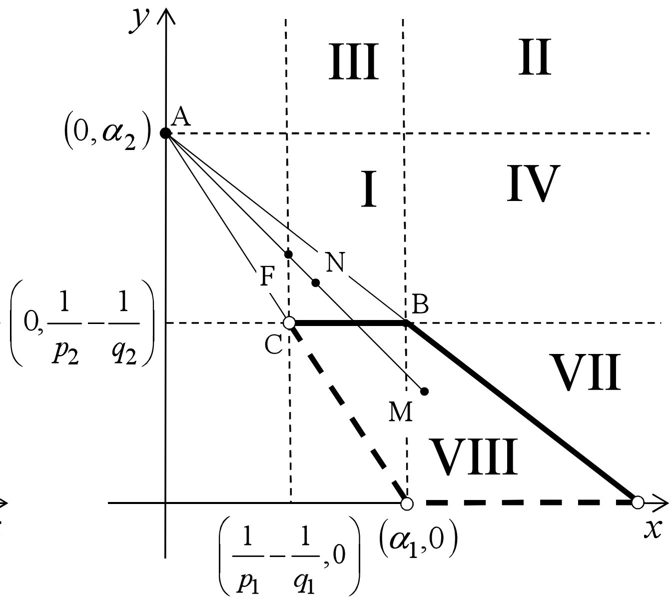

Рисунок 15

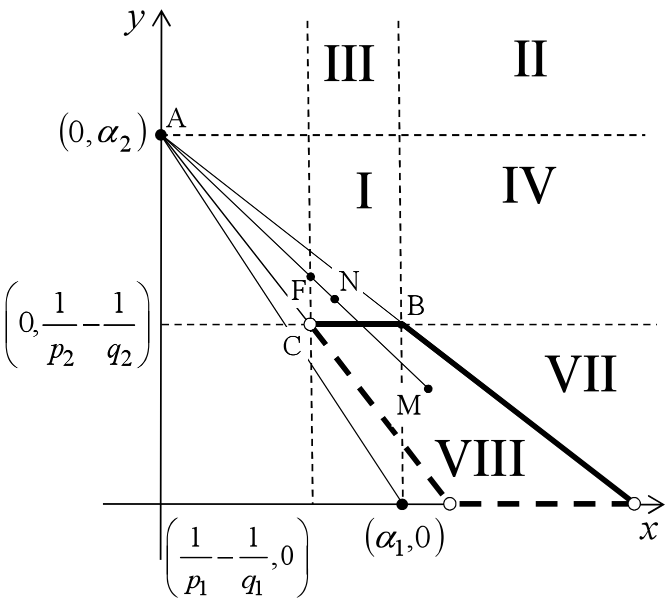

Рисунок 16

Рассмотрим следы на оси Ox_1 каждой из функций f_{12},f_1,f_2.

След функции $f_1(x_1)$ совпадает с ней. Применяя для $f_1(x_1)$ теоремы 1.2 и 2.1, получим, что

$$Y_{l_1}(f_1)_{p_1} \leq c_{82} Y_{l_1}(f)_{p_1,p_2} \leq c_{83} \frac{1}{(l_1+1)^{\alpha_1}},$$

где постоянные c_{82} и c_{83} не зависят от l_1.

Воспользовавшись леммой 2.8, имеем

$$f_1(x_1) \in H^{\alpha_1}_{p_1}.$$

Итак, следом функции $f_1(x_1)$ на оси Ox_1 будет сама функция $f_1(x_1)$, такая, что $f_1(x_1) \in H^{\alpha_1}_{p_1}$.

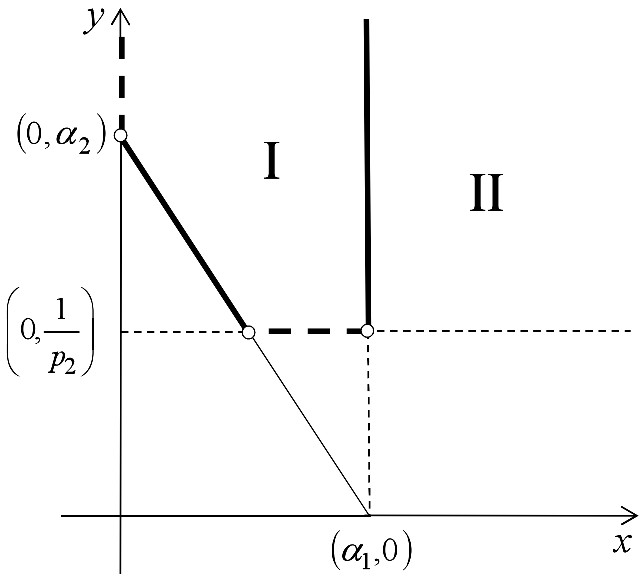

Рисунок 17

Используя аналогичные рассуждения получаем, что $f_2(x_2) \in H^{\alpha_2}_{p_2}$. Применяя лемму 2.9 для функции $f_2(x_2)$ из класса $H^{\alpha_2}_{p_2}$ получаем, что $f_2 \in H_{\infty}^{\alpha_2 - \frac{1}{p_2}}$. Следовательно, после изменения этой функции на множестве меры 0 она станет непрерывной функцией хотя бы в окрестности точки 0, а это означает $f_2(0) = C$ и при этом $|f_2(x_2) - C| \to 0$ при $|x_2| \to 0$. Получаем, что эта константа C и будет следом $f_2(x_2)$ на оси Ox_1.

Рассмотрим теперь функцию $f_{12}(x_1,x_2)$. Рассмотрим

$$I = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f_{12})_{p_1,p_2}.$$

Применяя теорему 1.2 и затем теорему 2.1, получим, что

$$I = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2} \le c_{84} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{-\nu_1\beta_1} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\nu_2(\frac{1}{p_2}-\beta_2)}.$$

Так как $\beta_2 > \frac{1}{p_2}$ и $\beta_1 > 0$, то $I < \infty$. На основании леммы 2.7 и теоремы 1.2 заключаем, что $f_{12}(x_1,x_2)$ имеет на оси Ox_1 след $\varphi_0(x_1) \in L_{p_1}$ и для него выполнено следующее неравенство

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{85} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2},$$

где постоянная c_{85} не зависит от f и N_1.

Используя свойство $Y_{l_1,l_2}(f)_{p_1,p_2} \le Y_{l_1}(f)_{p_1,p_2}$, которое следует непосредственно из определения приближения углом, получаем, что для любого $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено неравенство

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{85} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{K} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1}(f)_{p_1,p_2} + \\ + c_{85} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=K+1}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}.$$

Применяя теорему 2.1, имеем

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{86} \sum_{\nu_2=0}^{K} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} 2^{-\nu_1\alpha_1} + c_{87} \sum_{\nu_2=K+1}^{\infty} 2^{\nu_2(\frac{1}{p_2}-\beta_2)} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} 2^{-\nu_1\beta_1} \le \\ \le c_{88} 2^{-N_1\alpha_1+\frac{K}{p_2}} + c_{89} 2^{-K(\beta_2-\frac{1}{p_2})-N_1\beta_1},$$

где постоянные c_{86}, c_{87}, c_{88} и c_{89} не зависят от N_1 и K.

Положим $K = \left[\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2} N_1\right]$, тогда получим, что

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{90} 2^{-N_1(\alpha_1-\frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2})},$$

где постоянная c_{90} не зависит от N_1.
Следовательно, по лемме 2.9 получим, что $\varphi_0(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, где $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Таким образом получено, что $\varphi_0(x_1)$ будет следом на оси Ox_1 функции $f_{12}(x_1,x_2)$ и $\varphi_0(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, где $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_1(x_1) = \varphi_0(x_1) + f_1(x_1) + C + f_0$, представляющую из себя сумму следов каждой из функций представления (2.21).

Проверим свойство 1 определения следа функции. Выписывая представление (2.21) в точке $(x_1,0)$, получим

$$f(x_1,0) = f_{12}(x_1,0) + f_1(x_1) + f_2(0) + f_0 = \varphi_0(x_1) + f_1(x_1) + C + f_0 = \varphi_1(x_1).$$

Таким образом, свойство 1 определения следа функции выполнено.

Проверим свойство 2 определения следа функции. Так как каждая из функций представления (2.21) имеет на оси Ox_1 след, удовлетворяющий свойству 2, то их сумма также будет удовлетворять свойству 2.

Проверим свойство 3 определения следа функции.

Так как для любого фиксированного x_2 справедливы оценки

$$\|f(x_1,x_2) - \varphi_1(x_1)\|_{p_1} \le \|f_{12}(x_1,x_2) - \varphi_0(x_1)\|_{p_1} + \\ + \|f_1(x_1) - f_1(x_1)\|_{p_1} + \|f_2(x_2) - C\|_{p_1} + \|f_0 - f_0\|_{p_1},$$

то $\|f(x_1,x_2) - \varphi_1(x_1)\|_{p_1} \to 0$ при $|x_2| \to 0$.

Для функции $\varphi_1(x_1)$ все свойства следа функции выполняются, значит она будет следом функции $f(x_1,x_2)$ на оси Ox_1.

Проверим, что $\varphi_1(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, где $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Так как

$$\omega_k(\varphi_1,\delta)_{p_1} = \omega_k(\varphi_0 + f_1 + C + f_0,\delta)_{p_1} \le \omega_k(\varphi_0,\delta)_{p_1} + \omega_k(f_1,\delta)_{p_1},$$

то

$$\omega_k(\varphi_1,\delta)_{p_1} \le c_{91}\delta^{\alpha_1} + c_{92}\delta^{\alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}} \le c_{93}\delta^{\alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}},$$

где постоянные c_{91}, c_{92} и c_{93} не зависят от δ.
Следовательно, по определению класса $H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, получаем, что $\varphi_1(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, где $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1}{\beta_2 p_2}$.

Таким образом, утверждение теоремы 2.10 доказано.

Теорема 2.11. *Пусть $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1,2$,*

$$\alpha_2 > \frac{1}{p_2},\ \beta_2 > \frac{1}{p_2},\ \beta_1 > \alpha_1 > 0.$$

Тогда f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) из области II, изображённой на рисунке 18.

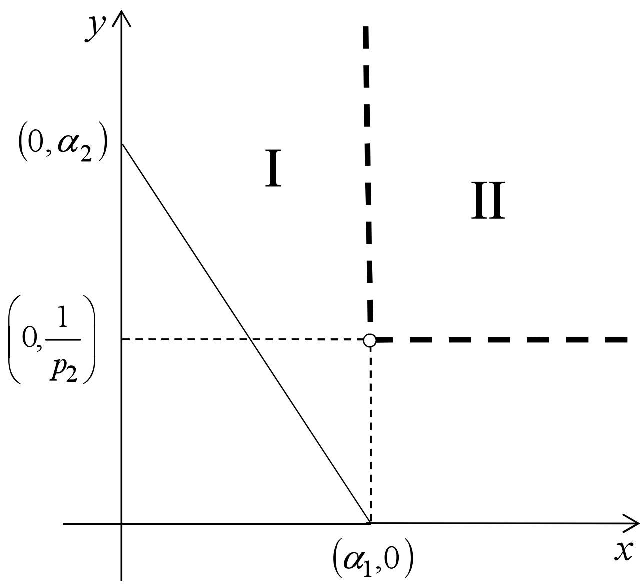

Рисунок 18

Доказательство. Пусть $f \in SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$. Тогда, в частности, $f \in L_{p_1,p_2}$, поэтому, применяя теорему 1.1, получим, что

$$f(x_1,x_2) = f_{12}(x_1,x_2) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_0. \tag{2.22}$$

Рассмотрим следы на оси Ox_1 каждой из функций f_{12},f_1,f_2.

След функции $f_1(x_1)$ совпадает с ней. Применяя для $f_1(x_1)$ теоремы 1.2 и 2.1, получим, что

$$Y_{l_1}(f_1)_{p_1} \le c_{94} Y_{l_1}(f)_{p_1,p_2} \le c_{95} \frac{1}{(l_1+1)^{\alpha_1}},$$

где постоянные c_{94} и c_{95} не зависят от l_1.
Воспользовавшись леммой 2.8, имеем

$$f_1(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}.$$

Итак, следом функции $f_1(x_1)$ на оси Ox_1 будет сама функция $f_1(x_1)$, такая, что $f_1(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Используя аналогичные рассуждения получаем, что $f_2(x_2) \in H_{p_2}^{\alpha_2}$. Применяя лемму 2.9 для функции $f_2(x_2)$ из класса $H_{p_2}^{\alpha_2}$ получаем, что $f_2 \in H_{\infty}^{\alpha_2 - \frac{1}{p_2}}$. Следовательно, после изменения этой функции на множестве меры 0 она станет непрерывной функцией хотя бы в окрестности точки 0, а это означает $f_2(0) = C$ и при этом $|f_2(x_2) - C| \to 0$ при $|x_2| \to 0$. Получаем, что эта константа C и будет следом $f_2(x_2)$ на оси Ox_1.

Рассмотрим теперь функцию $f_{12}(x_1,x_2)$. Рассмотрим

$$I = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f_{12})_{p_1,p_2}.$$

Применяя теорему 1.2 и затем теорему 2.1, получим, что

$$I = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2} \le c_{96} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} 2^{-\nu_1\beta_1} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\nu_2(\frac{1}{p_2}-\beta_2)}.$$

Так как $\beta_2 > \frac{1}{p_2}$ и $\beta_1 > 0$, то $I < \infty$. На основании леммы 2.7 и теоремы 1.2 заключаем, что $f_{12}(x_1,x_2)$ имеет на оси Ox_1 след $\varphi_0(x_1) \in L_{p_1}$ и для него выполнено следующее неравенство

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{97} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2},$$

где постоянная c_{97} не зависит от N_1 и f.
Используя свойство $Y_{l_1,l_2}(f)_{p_1,p_2} \le Y_{l_1}(f)_{p_1,p_2}$, которое следует непосредственно из определения, получаем, что для любого $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено неравенство

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{97} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{K} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1}(f)_{p_1,p_2} +$$
$$+ c_{97} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=K+1}^{\infty} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_{p_1,p_2}.$$

Воспользовавшись теоремой 2.1, получим

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{98} \sum_{\nu_2=0}^{K} 2^{\frac{\nu_2}{p_2}} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} 2^{-\nu_1\alpha_1} + c_{99} \sum_{\nu_2=K+1}^{\infty} 2^{\nu_2(\frac{1}{p_2}-\beta_2)} \sum_{\nu_1=N_1}^{\infty} 2^{-\nu_1\beta_1} \le$$
$$\le c_{100} 2^{-N_1\alpha_1+\frac{K}{p_2}} + c_{101} 2^{-K(\beta_2-\frac{1}{p_2})-N_1\beta_1},$$

где постоянные c_{98}, c_{99}, c_{100} и c_{101} не зависят от N_1 и K.

Положим $K = 0$, тогда получим

$$Y_{2^{N_1}-1}(\varphi_0)_{p_1} \le c_{102}\left(2^{-N_1\alpha_1} + 2^{-N_1\beta_1}\right) \le c_{103} 2^{-N_1\alpha_1},$$

где постоянные c_{102} и c_{103} не зависят от N_1.
Откуда, по лемме 2.9 получим, что $\varphi_0(x_1) \in H^{\alpha_1}_{p_1}$.

Таким образом получено, что $\varphi_0(x_1)$ будет следом на оси Ox_1 функции $f_{12}(x_1,x_2)$ и $\varphi_0(x_1) \in H^{\alpha_1}_{p_1}$.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi_1(x_1) = \varphi_0(x_1) + f_1(x_1) + C + f_0$, представляющую из себя сумму следов каждой из функций представления (2.22).

Проверим свойство 1 определения следа функции. Выписывая представление (2.22) в точке $(x_1,0)$, получим

$$f(x_1,0) = f_{12}(x_1,0) + f_1(x_1) + f_2(0) + f_0 = \varphi_0(x_1) + f_1(x_1) + C + f_0 = \varphi_1(x_1).$$

Таким образом, свойство 1 определения следа функции выполнено.

Проверим свойство 2 определения следа функции. Так как каждая из функций представления (2.22) имеет на оси Ox_1 след, удовлетворяющий свойству 2, то их сумма также будет удовлетворять свойству 2.

Проверим свойство 3 определения следа функции.

Так как для любого фиксированного x_2 выполнены неравенства

$$\|f(x_1,x_2) - \varphi_1(x_1)\|_{p_1} \le \|f_{12}(x_1,x_2) - \varphi_0(x_1)\|_{p_1} +$$
$$+ \|f_1(x_1) - f_1(x_1)\|_{p_1} + \|f_2(x_2) - C\|_{p_1} + \|f_0 - f_0\|_{p_1},$$

то $\|f(x_1,x_2) - \varphi_1(x_1)\|_{p_1} \to 0$ при $|x_2| \to 0$.

Для функции $\varphi_1(x_1)$ все свойства следа функции выполняются, значит она будет следом функции $f(x_1,x_2)$ на оси Ox_1.

Проверим, что $\varphi_1(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Так как

$$\omega_k(\varphi_1,\delta)_{p_1} = \omega_k(\varphi_0 + f_1 + C + f_0,\delta)_{p_1} \le \omega_k(\varphi_0,\delta)_{p_1} + \omega_k(f_1,\delta)_{p_1},$$

то

$$\omega_k(\varphi_1,\delta)_{p_1} \le c_{104}\delta^{\alpha_1} + c_{105}\delta^{\alpha_1} \le c_{106}\delta^{\alpha_1},$$

где постоянные c_{104}, c_{105} и c_{106} не зависят от δ. Следовательно, по определению класса $H_{p_1}^{\alpha_1}$, получаем, что $\varphi_1(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Таким образом, утверждение теоремы 2.11 доказано.

Теорема 2.12. *Пусть $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, где $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1,2$,*

$$\alpha_1 > \frac{1}{p_1},\ \beta_1 > \frac{1}{p_1},\ \alpha_2 \ge \beta_2 > 0,\ \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \ge 1,$$

тогда f имеет на оси Ox_2 след $\varphi_2(x_2) \in H_{p_2}^{\alpha_2^*}$, где $\alpha_2^* = \alpha_2 - \frac{\alpha_2-\beta_2}{\beta_1 p_1}$.

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) из области I, изображённой на рисунке 19.

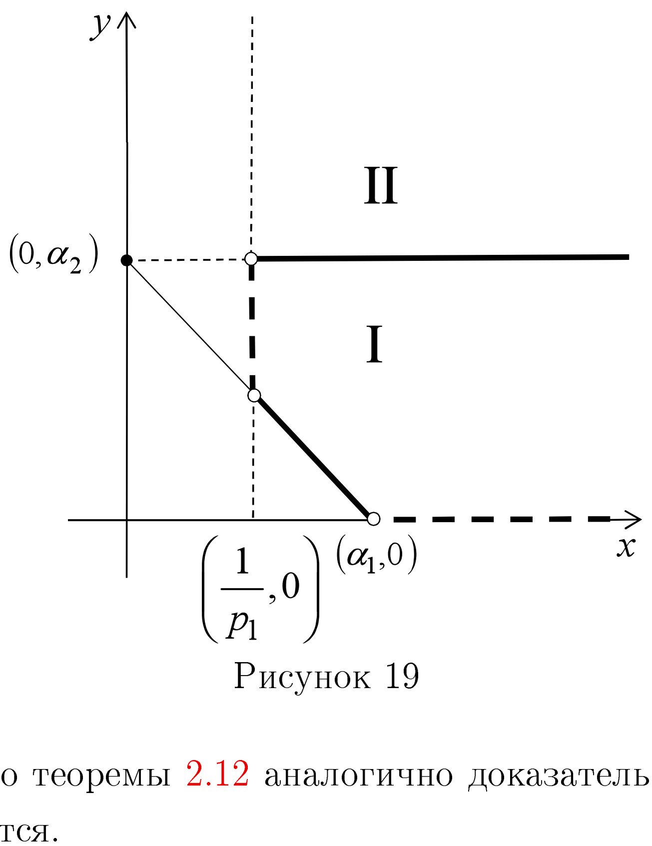

Рисунок 19

Доказательство теоремы 2.12 аналогично доказательству теоремы 2.11 и поэтому не приводится.

Теорема 2.13. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1{,}2$,

$$\alpha_1 > \frac{1}{p_1},\, \beta_1 > \frac{1}{p_1},\, \beta_2 > \alpha_2 > 0.$$

Тогда f *имеет на оси* Ox_2 *след* $\varphi_2(x_2) \in H^{\alpha_2}_{p_2}$.

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел (β_1,β_2) из области II, изображённой на рисунке 20.

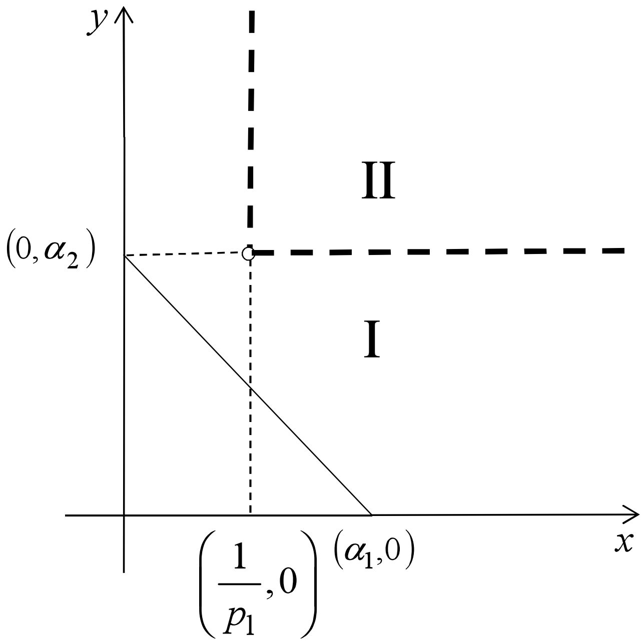

Рисунок 20

Доказательство теоремы 2.13 аналогично доказательству теоремы 2.11 и поэтому не приводится.

Замечание. Теоремы 2.11 и 2.13 содержат в себе теорему о следах функций из класса Никольского $SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ при условии совпадения класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ с классом $SH^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ (если $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$). Теоремы 2.10 и 2.12 содержат в себе теорему о следах функций из класса Никольского $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ при условии совпадения класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ с классом $H^{\alpha_1\alpha_2}_{p_1,p_2}$ (если $\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1$).

2.6 Следствия теорем о следах

В теоремах 2.10–2.13 предполагалось, что $\beta_i > \frac{1}{p_i}$ для следа на ось Ox_i. Возникает вопрос: если не выполнено такое условие, то может ли функция иметь след на эту ось? Ответ на этот вопрос дают теоремы 2.14–2.17.

Теорема 2.14. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $i = 1,2$, $\alpha_2 > \frac{1}{p_2}$,

$$0 < \beta_2 \le \frac{1}{p_2},\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\alpha_2-\beta_2) \le \beta_1 \le \frac{\alpha_1}{\alpha_2-\frac{1}{p_2}}(\alpha_2-\beta_2),\ 0<\gamma<\frac{\beta_1\left(\frac{1}{p_2}-\alpha_2\right)}{\beta_2-\alpha_2},$$

тогда f *имеет на оси* Ox_1 *след* $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, *где* $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1\frac{\gamma-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}}{\gamma p_2}$.

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел $M(\beta_1,\beta_2)$ из области III, изображённой на рисунке 21.

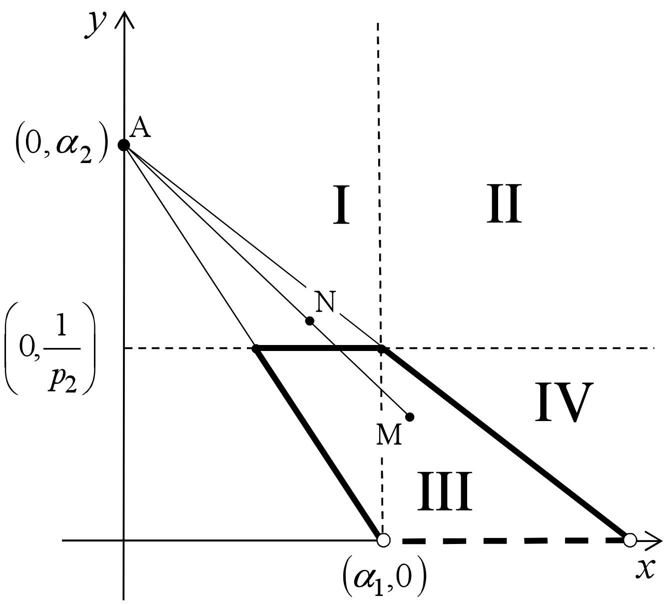

Рисунок 21

Область III ограниченна прямыми: $y = 0$ снизу, $y = \frac{1}{p_2}$ сверху, прямой, соединяющей точки $A(0,\alpha_2)$ и $(\alpha_1,0)$, слева и прямой, соединяющей точки $A(0,\alpha_2)$ и $(\alpha_1,\frac{1}{p_2})$, справа.

Доказательство.Если зафиксировать произвольное $\gamma_1 = \gamma$ из промежутка $\left(0,\frac{\beta_1\left(\frac{1}{p_2}-\alpha_2\right)}{\beta_2-\alpha_2}\right)$, то найдётся γ_2 такое, что точка $N(\gamma_1,\gamma_2)$ лежит на прямой AM (т.е. $\gamma_2 = \frac{\gamma}{\beta_1}(\beta_2-\alpha_2)+\alpha_2$) и находится в области I.

Обозначим $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \frac{\gamma}{\beta_1}(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2$, тогда используя свойства модуля гладкости получим, что

$$\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} = \omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2}^{\frac{\gamma}{\beta_1}} \, \omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2}^{1-\frac{\gamma}{\beta_1}} \leq$$

$$\leq c_{107}\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2}^{\frac{\gamma}{\beta_1}} \, \omega_{k_2}(f,\delta_2)_{p_1,p_2}^{1-\frac{\gamma}{\beta_1}} \leq c_{108}\delta_1^{\beta_1\frac{\gamma}{\beta_1}}\delta_2^{\beta_2\frac{\gamma}{\beta_1}}\delta_2^{\alpha_2\left(1-\frac{\gamma}{\beta_1}\right)} \leq c_{108}\delta_1^{\gamma_1}\delta_2^{\gamma_2},$$

где постоянные c_{107} и c_{108} не зависят от δ_1 и δ_2.
Следовательно, имеет место вложение:

$$SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) \subseteq SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2).$$

Так как числа $p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2$ удовлетворяют условиям теоремы 2.11, то функция f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1^*}$, где $\alpha_1^* = \alpha_1 - \frac{\alpha_1-\gamma_1}{\gamma_2 p_2} = \alpha_1 - \frac{\alpha_1-\beta_1\frac{\gamma-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}}{\gamma p_2}$.

Теорема 2.15. *Пусть $f \in SH\left(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\right)$, где $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1,2$*

$$\alpha_2 > \frac{1}{p_2},\ 0 < \beta_2 \leq \frac{1}{p_2},\ \beta_1 > \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \frac{1}{p_2}}(\alpha_2 - \beta_2),$$

тогда f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1) \in H_{p_1}^{\alpha_1}$.

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел $M(\beta_1,\beta_2)$ из области IV, изображённой на рисунке 22.

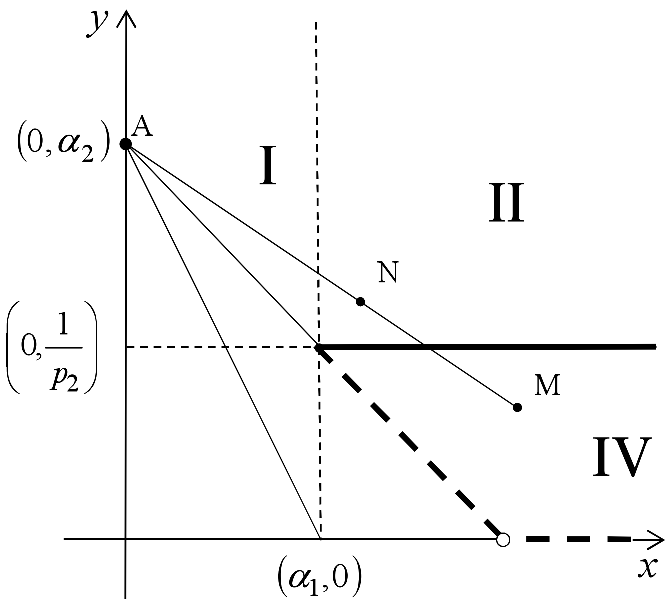

Рисунок 22

Область IV ограниченна прямыми: $y = 0$ снизу, $y = \frac{1}{p_2}$ сверху, прямой, соединяющей точки $A(0,\alpha_2)$ и $(\alpha_1,\frac{1}{p_2})$, слева.

Доказательство. Если зафиксировать произвольное $\gamma_1 = \gamma$ из промежутка $\left(\alpha_1,\frac{\beta_1\left(\frac{1}{p_2}-\alpha_2\right)}{\beta_2-\alpha_2}\right)$, то найдётся γ_2 такое, что точка $N(\gamma_1,\gamma_2)$ лежит на прямой AM (т.е. $\gamma_2 = \frac{\gamma}{\beta_1}(\beta_2-\alpha_2)+\alpha_2$) и находится в области II.

Обозначим $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \frac{\gamma}{\beta_1}(\beta_2-\alpha_2)+\alpha_2$, тогда используя свойства модуля гладкости получим, что

$$\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{p_1,p_2} = \omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)^{\frac{\gamma}{\beta_1}}_{p_1,p_2}\,\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)^{1-\frac{\gamma}{\beta_1}}_{p_1,p_2} \leq$$
$$\leq c_{109}\omega_{k_1,k_2}(f,\delta_1,\delta_2)^{\frac{\gamma}{\beta_1}}_{p_1,p_2}\,\omega_{k_2}(f,\delta_1,\delta_2)^{1-\frac{\gamma}{\beta_1}}_{p_1,p_2} \leq c_{110}\delta_1^{\beta_1\frac{\gamma}{\beta_1}}\delta_2^{\beta_2\frac{\gamma}{\beta_1}}\delta_2^{\alpha_2\left(1-\frac{\gamma}{\beta_1}\right)} \leq c_{110}\delta_1^{\gamma_1}\delta_2^{\gamma_2},$$

где постоянные c_{109} и c_{110} не зависят от δ_1 и δ_2.
Следовательно, имеет место вложение:

$$SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2) \subseteq SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2).$$

Так как числа $p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\gamma_1,\gamma_2$ удовлетворяют условиям теоремы 2.10, то f имеет на оси Ox_1 след $\varphi(x_1) \in H^{\alpha_1}_{p_1}$.

Теорема 2.16. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1,2$, $\alpha_1 > \frac{1}{p_1}$,

$$0 < \beta_1 \leq \frac{1}{p_1},\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\alpha_1-\beta_1) \leq \beta_2 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1-\frac{1}{p_1}}(\alpha_1-\beta_1),\ 0 < \gamma < \frac{\beta_2\left(\frac{1}{p_1}-\alpha_1\right)}{\beta_1-\alpha_1},$$

тогда f *имеет на оси* Ox_2 *след* $\varphi(x_2) \in H^{\alpha_2^*}_{p_2}$, *где* $\alpha_2^* = \alpha_2 - \frac{\alpha_2-\beta_2\frac{\gamma-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}}{\gamma p_1}$.

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел $M(\beta_1,\beta_2)$ из области III, изображённой на рисунке 23.

Область III ограниченна прямыми: $x = 0$ – слева, $x = \frac{1}{p_1}$ – справа, прямой, соединяющей точки $A(\alpha_1,0)$ и $(0,\alpha_2)$ – снизу и прямой, соединяющей точки $A(\alpha_1,0)$ и $(\frac{1}{p_1},\alpha_2)$ – сверху.

Доказательство теоремы 2.16 проводится аналогично доказательство теоремы 2.14.

Теорема 2.17. *Пусть* $f \in SH\,(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, *где* $1 \leq p_i \leq \infty$, $i = 1,2$

$$\alpha_1 > \frac{1}{p_1},\ 0 < \beta_1 \leq \frac{1}{p_1},\ \beta_2 > \frac{\alpha_2}{\alpha_1-\frac{1}{p_1}}(\alpha_1-\beta_1),$$

тогда f *имеет на оси* Ox_2 *след* $\varphi(x_2) \in H^{\alpha_2}_{p_2}$.

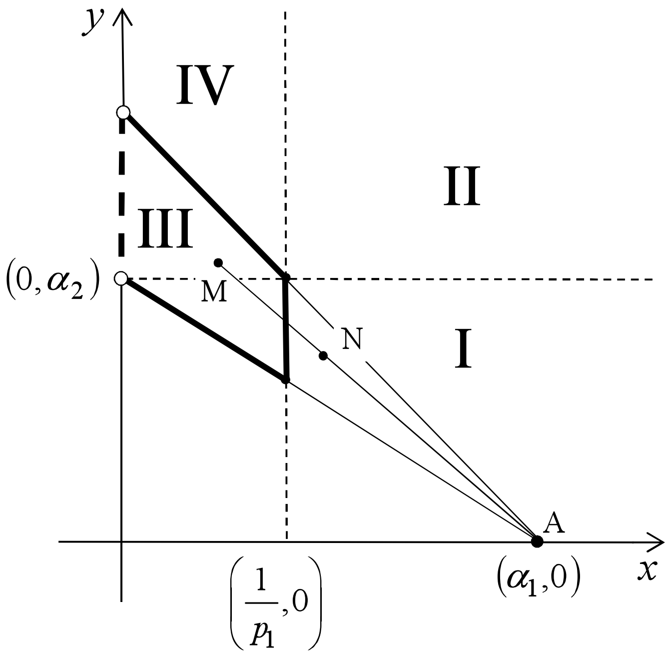

Рисунок 23

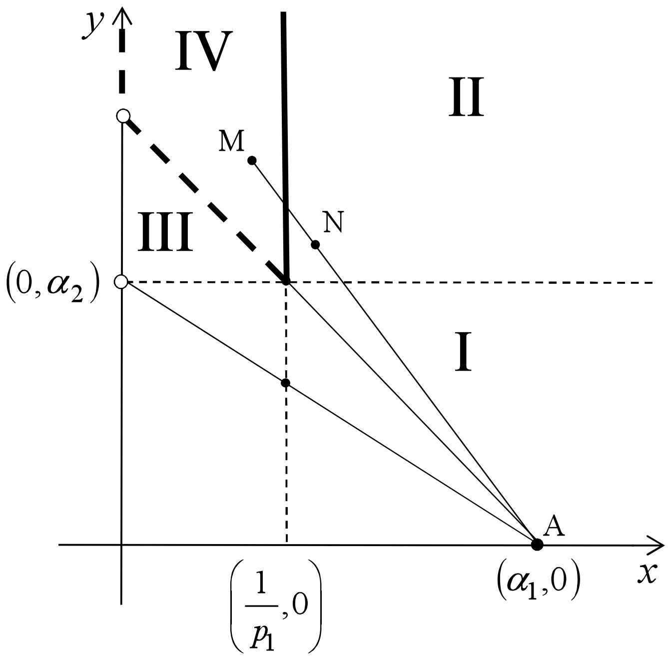

Рисунок 24

Условиям теоремы удовлетворяют пары чисел $M(\beta_1,\beta_2)$ из области IV, изображённой на рисунке 24.

Область IV ограниченна прямыми: $x = 0$ слева, $x = \frac{1}{p_1}$ справа, прямой, соединяющей точки $A(\alpha_1,0)$ и $(\frac{1}{p_1},\alpha_2)$, снизу.

Доказательство теоремы 2.17 проводится аналогично доказательство теоремы 2.15.

Глава 3. Класс функций $S_n^m H_p^r$

Напомним определение *класса функций H_p^r Никольского.* Будем писать $f \in H_p^r$, если $1 \le p \le \infty$, $r > 0$ и $\forall \delta_{i_1} \in (0,1)$ выполнены условия:

0) $f \in L_p(n)$;

1) $\omega_{k_{i_1}}(f,\delta_{i_1})_p \le c_1 \delta_{i_1}^r$, $\forall\ i_1 = 1,\dots,n$, где $k_{i_1} > r$ и постоянная c_1 не зависит от δ_{i_1}.

Напомним определение *класса функций SH_p^r Никольского.* Будем писать $f \in SH_p^r$, если $1 \le p \le \infty$, $r > 0$ и $\forall \delta_{i_j} \in (0,1)$ выполнены условия:

0) $f \in L_p(n)$;

1) $\omega_{k_{i_1}}(f,\delta_{i_1})_p \le c_2 \delta_{i_1}^r$, $\forall\ i_1 = 1,\dots,n$, где $k_{i_1} > r$;

2) $\omega_{k_{i_1}k_{i_2}}(f,\delta_{i_1},\delta_{i_2})_p \le c_3 \delta_{i_1}^r \delta_{i_2}^r$, $\forall\ (i_1,i_2) \subset (1,\dots,n)$, где $k_{i_1} > r$, $k_{i_2} > r$;

$\vdots$

n) $\omega_{k_1\dots k_n}(f,\delta_1,\dots,\delta_n)_p \le c_4 \delta_1^r \dots \delta_n^r$, где $k_i > r$,

постоянные c_2, c_3 и c_4 не зависят от δ_{i_j}.

Будем писать $f \in S_n^m H_p^r$, если $1 \le p \le \infty$, $r > 0$, $1 \le m \le n$ и $\forall \delta_{i_j} \in (0,1)$ выполнены условия:

0) $f \in L_p(n)$;

1) $\omega_{k_{i_1}}(f,\delta_{i_1})_p \le c_5 \delta_{i_1}^r$, $\forall\ i_1 = 1,\dots,n$;

2) $\omega_{k_{i_1}k_{i_2}}(f,\delta_{i_1},\delta_{i_2})_p \le c_6 \delta_{i_1}^r \delta_{i_2}^r$, $\forall\ (i_1,i_2) \subset (1,\dots,n)$;

$\vdots$

m) $\omega_{k_{i_1}\dots k_{i_m}}(f,\delta_{i_1},\dots,\delta_{i_m})_p \le c_7 \delta_{i_1}^r \dots \delta_{i_m}^r$, $\forall\ (i_1,\dots,i_m) \subset (1,\dots,n)$,

где $k_{i_j} > r$ и постоянные c_5, c_6 и c_7 не зависят от δ_{i_j}.

Класс $S_n^m H_p^r$ совпадает с классом H_p^r, если $m = 1$, и совпадает с классом SH_p^r, если $m = n$.

3.1 Вспомогательные утверждения

Лемма 3.1. *Пусть $f \in L_p(n)$, $1 \le p \le \infty$ задан набор $(i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n)$ и $k_{i_j} \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le s$, тогда $\forall l_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедливы неравенства*

$$Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f)_p \le c_8 \omega_{k_{i_1},\dots,k_{i_s}}(f,\frac{1}{l_{i_1}+1},\dots,\frac{1}{l_{i_s}+1})_p \le$$

$$\leq c_9 \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{(l_{i_j}+1)^{k_{i_j}}} \sum_{\nu_{i_1}=0}^{l_{i_1}} \sum_{\nu_{i_2}=0}^{l_{i_2}} \dots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{l_{i_s}} \prod_{j=1}^{s} (\nu_{i_j}+1)^{k_{i_j}-1} Y_{\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s}}(f)_p,$$

где постоянные c_8 и c_9 не зависят от f и l_{i_j}.

Лемма 3.1 доказана в работе [23].

Лемма 3.2. *Пусть $f \in L_p^0(n)$, $1 \leq p < q \leq \infty$, и*

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} 2^{\nu_i\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} Y_{2^{\nu_1}-1\dots 2^{\nu_n}-1}(f)_p < \infty,$$

тогда

1) $f \in L_q^0(n)$;

2) $Y_{2^{N_1}-1\dots 2^{N_n}-1}(f)_q \leq c_{10} \sum\limits_{\nu_1=N_1}^{\infty} \dots \sum\limits_{\nu_n=N_n}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} 2^{\nu_i\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} Y_{2^{\nu_1}-1\dots 2^{\nu_n}-1}(f)_p,$

где постоянная c_{10} не зависит от f и N_i.

Лемма 3.2 доказана в работе [14].

Лемма 3.3. *Если $f \in L_p^0(n), 1 \leq p \leq \infty, r_i > 0, l_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1,2,\dots,n$, и*

$$Y_{l_1,\dots,l_n}(f)_p \leq c_{11} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(l_i+1)^{r_i}},$$

то для любых натуральных s и i_j, таких, что $1 \leq s \leq n$, $(i_1,\dots,i_s) \subset (1,\dots,n)$, справедливо неравенство

$$Y_{l_{i_1},\dots,l_{i_s}}(f)_p \leq c_{12} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{(l_{i_j}+1)^{r_{i_j}}},$$

где постоянные c_{11} и c_{12} не зависят от f и l_i.

Лемма 3.3 доказана в работе [14]

Лемма 3.4. *Если функция $f \in S_n^m H_p^r$, где $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq m \leq n$, то каждая функция $f_{i_1,\dots,i_s}$, $s = 1,\dots,n$ представления (1.1) принадлежит классу $S_s^s H_p^r$, если $s \leq m$ или принадлежит классу $S_s^m H_p^r$, если $s > m$.*

Доказательство. Используя утверждение 2) теоремы 1.3 для функции $f_{i_1,\dots,i_s}$, имеем:

$$\omega_{k_{j_1},\dots,k_{j_k}}(f_{i_1,\dots,i_s},\delta_{j_1},\dots,\delta_{j_k})_p \leq c_{13}\omega_{k_{j_1},\dots,k_{j_k}}(f,\delta_{j_1},\dots,\delta_{j_k})_p,$$

$\forall(j_1,\ldots,j_k)\in(i_1,\ldots,i_s)$, где $k\le s$ и постоянная c_{13} не зависит от f и δ_{j_i}.

Пусть сначала $s\le m$. Используя определение класса $S_n^m H_p^r$, имеем:

$$\omega_{k_{j_1},\ldots,k_{j_k}}(f_{i_1,\ldots,i_s},\delta_{j_1},\ldots,\delta_{j_k})_p\le c_{14}\prod_{i=1}^{k}\delta_{j_i}^r,\ \forall(j_1,\ldots,j_k)\in(i_1,\ldots,i_s),\ k\le s,$$

и постоянная c_{14} не зависит от δ_{j_i}.

Так как это неравенство выполнено для $\forall k\le s$, то по определению обобщенного класса Никольского $S_s^s H_p^r$ имеем:

$$f_{i_1,\ldots,i_s}\in S_s^s H_p^r,\ \text{если}\ s\le m.$$

Пусть теперь $s>m$. Используя определение класса $S_n^m H_p^r$, имеем:

$$\omega_{k_{j_1},\ldots,k_{j_k}}(f_{i_1,\ldots,i_s})_p\le c_{15}\prod_{i=1}^{k}\delta_{j_i}^r,\ \forall(j_1,\ldots,j_k)\in(1,\ldots,s),\ k\le m<s,$$

где постоянная c_{15} не зависит от δ_{j_i}.

Так как это неравенство выполнено для $\forall k\le s$, то по определению обобщенного класса Никольского $S_m^s H_p^r$ имеем:

$$f_{i_1,\ldots,i_s}\in S_s^m H_p^r,\ \text{если}\ s>m.$$

Лемма 3.5. *Пусть $f\in L_p^0(n)$, $1\le p\le\infty$, $1\le k<n$. Если выполнено неравенство*

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_n=0}^{\infty}\prod_{j=k+1}^{n}2^{\frac{\nu_j}{p}}Y_{2^{\nu_1}-1,\ldots,2^{\nu_n}-1}(f)_p<\infty,$$

то функция f имеет след $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ на подпространство $R_k\equiv R_k(x_1,\ldots,x_k)$, причем

$$Y_{2^{N_1}-1,\ldots,2^{N_k}-1}(\varphi(x_1,\ldots,x_k))_p\le$$
$$\le c_{16}\sum_{\nu_1=N_1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_k=N_k}^{\infty}\sum_{\nu_{k+1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_n=0}^{\infty}\prod_{j=k+1}^{n}2^{\frac{\nu_j}{p}}Y_{2^{\nu_1}-1,\ldots,2^{\nu_n}-1}(f)_p,$$

где постоянная c_{16} не зависит от f и N_i.

Лемма 3.5 доказана в работе [14].

Лемма 3.6. *Пусть на пространстве R_n задана функция $f\in S_n^n H_p^r$, $1\le p\le\infty$, $r>\frac{1}{p}$, $1\le k<n$, тогда на любом подпространстве $R_k\equiv R_k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, где $(i_1,\ldots,i_k)\subset(1,\ldots,n)$, у функции f существует след $\phi=\phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, такой, что $\phi\in S_k^k H_p^r$.*

Лемма 3.5 доказана в работе [23].

3.2 Конструктивная характеристика класса $S_n^m H_p^r$

Теорема 3.1. *Для того, чтобы функция* $f \in S_n^m H_p^r$, *где* $1 \le p < q \le \infty$, $1 \le m \le n$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall l_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *выполнялись следующие условия:*

0) $f \in L_p(n)$;

1) $Y_{l_{i_1}}(f)_p \le c_{17} \frac{1}{(l_{i_1}+1)^r}, \ \forall i_1 = 1, \dots, n$;

2) $Y_{l_{i_1}, l_{i_2}}(f)_p \le c_{18} \frac{1}{(l_{i_1}+1)^r (l_{i_2}+1)^r}, \ \forall (i_1, i_2) \subset (1, \dots, n)$;

$\vdots$

m) $Y_{l_{i_1} \dots l_{i_m}}(f)_p \le c_{19} \frac{1}{(l_{i_1}+1)^r \dots (l_{i_m}+1)^r}, \ \forall (i_1, \dots, i_m) \subset (1, \dots, n)$,

где постоянные c_{17}, c_{18} *и* c_{19} *не зависят от* l_{i_j}.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f \in S_n^m H_p^r$ тогда, подставляя в оценки из леммы 3.1 оценки для модуля гладкости из определения класса $S_n^m H_p^r$, для любого набора $(i_1, \dots, i_s) \in (1, \dots, n), 1 \le s \le m \le n$ имеем

$$Y_{l_{i_1}, \dots, l_{i_s}}(f)_p \le c_{20} \omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f, \frac{1}{l_{i_1}+1}, \dots, \frac{1}{l_{i_s}+1})_p \le c_{21} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{(l_{i_j}+1)^r},$$

где постоянные c_{20} и c_{21} не зависят от l_{i_j}.
Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Для любого набора $(i_1, \dots, i_s) \in (1, \dots, n)$, $1 \le s \le m \le n$, применяя лемму 3.1 имеем

$$\omega_{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}}(f, \frac{1}{l_{i_1}+1}, \dots, \frac{1}{l_{i_s}+1})_p \le$$

$$\le c_{22} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{(l_{i_j}+1)^{k_{i_j}}} \sum_{\nu_{i_1}=0}^{l_{i_1}} \dots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{l_{i_s}} \prod_{j=1}^{s} (\nu_{i_j}+1)^{k_{i_j}-1} Y_{\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_s}}(f)_p \le$$

$$\le c_{23} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{(l_{i_j}+1)^{k_{i_j}}} \sum_{\nu_{i_1}=0}^{l_{i_1}} \dots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{l_{i_s}} \prod_{j=1}^{s} (\nu_{i_j}+1)^{k_{i_j}-r-1} \le c_{24} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{(l_{i_j}+1)^r},$$

где постоянные c_{22}, c_{23} и c_{24} не зависят от l_{i_j}.

Теорема 3.1 доказана.

3.3 Теорема вложения разных метрик

Теорема 3.2. *Если* $f \in S_n^m H_p^r$, $1 \le p < q \le \infty$, $r^* = r - \frac{n}{m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0$, *то* $f \in S_n^m H_q^{r^*}$.

Доказательство. Из определения наилучшего приближения углом следует, что для любого набора m индексов $(i_{j_1}, \dots, i_{j_m}) \subseteq (i_1, \dots, i_s) \subseteq (1, \dots, n)$, где $1 \le m \le s \le n$, выполнена оценка

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1 \dots 2^{\nu_{i_s}}-1}(f)_p \le Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}}-1 \dots 2^{\nu_{i_{j_m}}}-1}(f)_p.$$

Применяя теорему 3.1 для наилучшего приближения m-мерным углом, получим, что

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1 \dots 2^{\nu_{i_s}}-1}(f)_p \le c_{25} \prod_{k=1}^{m} 2^{-\nu_{i_{j_k}} r},$$

где постоянная c_{25} не зависит от $\nu_{i_{j_k}}$.
Это неравенство верно для каждого из C_s^m наборов индексов $(i_{j_1}, \dots, i_{j_m}) \subseteq \subseteq (i_1, \dots, i_s)$. Перемножив эти неравенства, получим

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1 \dots 2^{\nu_{i_s}}-1}(f)_p^{C_s^m} \le c_{26} \prod_{(i_{j_1}, \dots, i_{j_m}) \subseteq (i_1, \dots, i_s)} \prod_{k=1}^{m} 2^{-\nu_{i_{j_k}} r},$$

где постоянная c_{26} не зависит от $\nu_{i_{j_k}}$.

Так как каждое i_k $(\forall k = 1, \dots, s)$ встречается в C_{s-1}^{m-1} наборов из всех наборов вида $(i_{j_1}, \dots, i_{j_m}) \subseteq (i_1, \dots, i_s)$, то

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1 \dots 2^{\nu_{i_s}}-1}(f)_p^{C_s^m} \le c_{27} \prod_{k=1}^{s} 2^{-C_{s-1}^{m-1} \nu_{i_k} r},$$

где постоянная c_{27} не зависит от ν_{i_k}.
Извлекая корень степени C_s^m из произведения и учитывая, что $\frac{C_{m-1}^{s-1}}{C_m^s} = \frac{m}{s}$, получим

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1 \dots 2^{\nu_{i_s}}-1}(f)_p \le c_{28} \prod_{k=1}^{s} 2^{-\frac{m}{s} \nu_{i_k} r}, \tag{3.1}$$

где постоянная c_{28} не зависит от ν_{i_k}.

Теперь докажем, что $f \in L_q(n)$, для этого покажем, что каждое слагаемое представления (1.1) теоремы 1.1 принадлежит пространству $L_q(n)$.

Так как f_0-постоянная, то $\|f_0\|_q \leq c_{29}|f_0| < \infty$, где постоянная c_{29} не зависит от f_0.

Обозначим

$$S = \sum_{\nu_{i_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{\nu_{i_j}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s})_p.$$

(а) Пусть $s \geq m$. Используя для $Y_{2^{\nu_{i_1}}-1\dots 2^{\nu_{i_s}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s})_p$ утверждение 2 теоремы 1.2, а затем неравенство (3.1), получим

$$S \leq c_{30} \sum_{\nu_{i_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{-\nu_{i_j}\left(\frac{m}{s}r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)},$$

где постоянная c_{30} не зависит от ν_{i_j}.
Этот ряд сходится, если $r > \frac{s}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

(б) Пусть $s \leq m$. Используя для $Y_{2^{\nu_{i_1}}-1\dots 2^{\nu_{i_s}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s})_p$ утверждение 2 теоремы 1.2, а затем теорему 3.1, получим

$$S \leq c_{31} \sum_{\nu_{i_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} 2^{-\nu_{i_j}\left(r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)},$$

где постоянная c_{31} не зависит от ν_{i_j}.
Этот ряд сходится, если $r > \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$.

Применяя первое утверждение леммы 3.2, получим, что каждая функция представления (1.1) принадлежит $L_q^0(n)$, если $r > \frac{s}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ для $m \leq s \leq n$ и $r > \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ для $1 \leq s \leq m$. Следовательно, если $r > \frac{n}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, то

$$f \in L_q. \tag{3.2}$$

Теперь докажем, что f удовлетворяет условиям 1)-m) определения класса $S_n^m H_q^r$.

Зафиксируем произвольный набор переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_s}$, такой, что $(i_1,\dots,i_s) \subseteq (1,\dots,n)$.

1) Пусть $s \geq m$. Оценим $Y_{2^{N_{i_{j_1}}}-1,\dots,2^{N_{i_{j_m}}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s})_q$ для любого набора $(i_{j_1},\dots,i_{j_m}) \subseteq (i_1,\dots,i_s)$.

Применим к $Y_{2^{N_{i_{j_1}}-1},\dots,2^{N_{i_{jm}}-1}}(f_{i_1,\dots,i_s})_q$ лемму 2.5, а затем лемму 3.2, получим

$$Y_{2^{N_{i_{j_1}}-1},\dots,2^{N_{i_{jm}}-1}}(f_{i_1\dots i_s})_q \le$$
$$\le c_{32}\sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_{jm}}=N_{i_{jm}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=0}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}-1},\dots,2^{\nu_{i_{j_s}}-1}}(f_{i_1\dots i_s})_p \equiv I, \quad (3.3)$$

где постоянная c_{32} не зависит от ν_{i_j} и N_{i_j}.
Запишем I следующим образом: оставим неизмеными суммы по $\nu_{i_{j_1}},\dots,\nu_{i_{jm}}$ и разобьем каждую из сумм по $\nu_{i_{j_{m+1}}},\dots,\nu_{i_{j_s}}$ на 2 суммы от 0 до K и от $K+1$ до ∞; получим

$$I = I_0 + I_1 + \dots + I_{s-m-1},$$

где I_l – сумма всех сумм, в каждой из которых l пределов суммирования из $\nu_{i_{j_{m+1}}},\dots,\nu_{i_{j_s}}$ берутся от $K+1$ до ∞, то есть

$$I_0 = \sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_{jm}}=N_{i_{jm}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=0}^{K}\dots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=0}^{K}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}-1},\dots,2^{\nu_{i_{j_s}}-1}}(f_{i_1\dots i_s})_p,$$

$$I_1 = \sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_{jm}}=N_{i_{jm}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=0}^{K}\dots\sum_{\nu_{i_{j_{s-1}}}=0}^{K}\sum_{\nu_{i_{j_s}}=K+1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}-1},\dots,2^{\nu_{i_{j_s}}-1}}(f_{i_1\dots i_s})_p + \dots + \sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_{jm}}=N_{i_{jm}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=K+1}^{\infty}\left(\sum_{\nu_{i_{j_{m+2}}}=0}^{K}\dots\right.$$
$$\left.\dots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=0}^{K}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}-1},\dots,2^{\nu_{i_{j_s}}-1}}(f_{i_1\dots i_s})_p\right),$$

$\vdots$

$$I_l = \sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_{jm}}=N_{i_{jm}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=0}^{K}\dots\sum_{\nu_{i_{j_{s-l}}}=0}^{K}\left(\sum_{\nu_{i_{j_{s-l+1}}}=K+1}^{\infty}\dots\right.$$
$$\left.\dots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=K+1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}-1},\dots,2^{\nu_{i_{j_s}}-1}}(f_{i_1\dots i_s})_p\right) + \dots +$$

$$+\sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_m}}=N_{i_{j_m}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=K+1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_{m+l}}}=K+1}^{\infty}\left(\sum_{\nu_{i_{j_{m+l+1}}}=0}^{K}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=0}^{K}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_{j_s}}}-1}(f_{i_1\ldots i_s})_p\right),$$

$\vdots$

$$I_{s-m-1}=\sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_m}}=N_{i_{j_m}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=K+1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=K+1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\times$$

$$\times Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_{j_s}}}-1}(f_{i_1\ldots i_s})_p.$$

Оценим сумму I_l, в ней C_{s-m}^l сумм. Рассмотрим одну из них

$$I_{l1}=\sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_m}}=N_{i_{j_m}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=0}^{K}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_{s-l}}}=0}^{K}\left(\sum_{\nu_{i_{j_{s-l+1}}}=K+1}^{\infty}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=K+1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_{j_s}}}-1}(f_{i_1\ldots i_s})_p\right).$$

Оценив $Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}}-1\ldots2^{\nu_{i_{j_s}}}-1}(f_{i_1\ldots i_s})_p$ большим по величине приближением $m+l$ мерным $(m+1\le m+l\le s)$ углом $Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_{j_m}}}-1,2^{\nu_{i_{j_{s-l+1}}}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_{j_s}}}-1}(f_{i_1\ldots i_s})_p$, а затем воспользовавшись утверждением 2 теоремы 1.2, имеем

$$I_{l1}\le c_{33}\sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_m}}=N_{i_{j_m}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=0}^{K}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_{s-l}}}=0}^{K}\left(\sum_{\nu_{i_{j_{s-l+1}}}=K+1}^{\infty}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=K+1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_k}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}Y_{2^{\nu_{i_{j_1}}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_{j_m}}}-1,2^{\nu_{i_{j_{s-l+1}}}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_{j_s}}}-1}(f)_p\right).$$

где постоянная c_{33} не зависит от ν_{i_j}, N_{i_j}, l и K.
Пользуясь оценкой (3.1) для наилучшего приближения $(m+l)$-мерным углом, получим

$$I_{l1}\le c_{34}\sum_{\nu_{i_{j_1}}=N_{i_{j_1}}-1}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_m}}=N_{i_{j_m}}-1}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{j_{m+1}}}=0}^{K}\cdots\sum_{\nu_{i_{j_{s-l}}}=0}^{K}\left(\sum_{\nu_{i_{j_{s-l+1}}}=K+1}^{\infty}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\sum_{\nu_{i_{j_s}}=K+1}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_{j_k}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\prod_{k=1}^{m}2^{-r\nu_{i_{j_k}}\frac{m}{m+l}}\prod_{k=s-l+1}^{s}2^{-r\nu_{i_{j_k}}\frac{m}{m+l}}\right)\le$$

$$\le c_{35}2^{-\sum\limits_{k=1}^{m}N_{i_{j_k}}\left(\frac{m}{m+l}r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}2^{-lK\left(\frac{m}{m+l}r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}2^{K\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)(s-m-l)},$$

где постоянные c_{34} и c_{35} не зависят от ν_{i_j}, N_{i_j} и K.
Аналогичные оценки устанавливаются для остальных I_{lk}, где $1 \le k \le C^l_{s-m}$.

В итоге получим, что

$$I_l \le c_{36} 2^{-\sum\limits_{k=1}^{m} N_{i_k}\left(\frac{m}{m+l}r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} 2^{-lK\left(\frac{m}{m+l}r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} 2^{K\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)(s-m-l)},$$

где постоянная c_{36} не зависит от N_{i_j} и K.
Положим $K = \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{m} N_{i_{j_k}}}{m}\right]$, тогда

$$I_l \le c_{37} 2^{-\sum\limits_{k=1}^{m} N_{i_{j_k}}\left(r-\frac{s}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)},$$

где постоянная c_{37} не зависит от $N_{i_{j_k}}$.
Так как полученная оценка для I_l от l не зависит, то оценка для I будет такой же. Следовательно, подставляя эту оценку в (3.3), имеем

$$Y_{2^{N_{i_{j_1}}}-1,\dots,2^{N_{i_{j_m}}}-1}(f_{i_1\dots i_s})_q \le c_{38} 2^{-\sum\limits_{k=1}^{m} N_{i_{j_k}}\left(r-\frac{s}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} \le$$
$$\le c_{39} 2^{-\sum\limits_{k=1}^{m} N_{i_{j_k}}\left(r-\frac{n}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \quad (3.4)$$

где постоянные c_{38} и c_{39} не зависят от $N_{i_{j_k}}$.

Так как оценка (3.4) верна для любого набора $(i_{j_1}, \dots, i_{j_m}) \subseteq (i_1, \dots, i_s)$, то, применяя лемму 3.3 и учитывая, что $f_{i_1\dots i_s} \in L^0_q$, получаем

$$Y_{2^{N_{i_{e_1}}}-1,\dots,2^{N_{i_{e_t}}}-1}(f_{i_1\dots i_s})_q \le c_{40} 2^{-\sum\limits_{k=1}^{t} N_{i_{e_k}}\left(r-\frac{n}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \quad (3.5)$$

для любого набора из t неповторяющихся индексов $(i_{e_1}, \dots, i_{e_t}) \subseteq (i_1, \dots, i_s)$, где $t = 1, \dots, m$ и постоянная c_{40} не зависит от $N_{i_{e_k}}$.

2) Пусть $s < m$. Оценим $Y_{2^{N_{i_1}}-1,\dots,2^{N_{i_s}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s})_q$.

Воспользовавшись утверждением 2 леммы 3.2, имеем

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\dots,2^{N_{i_s}}-1}(f_{i_1\dots i_s})_q \le c_{41} \sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty} \prod_{k=1}^{s} 2^{\nu_{i_k}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1}(f_{i_1\dots i_s})_p,$$

постоянная c_{41} не зависит от N_{i_j} и $f_{i_1\ldots i_s}$.
Применяя утверждение 2 теоремы 1.2, а затем теорему 3.1, получим

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\ldots,2^{N_{i_s}}-1}(f_{i_1\ldots i_s})_q \le c_{42}\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty}\ldots\sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_k}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_s}}-1}(f)_p \le$$
$$\le c_{43}\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty}\ldots\sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty}\prod_{k=1}^{s}2^{\nu_{i_k}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{-\nu_{i_k}r} \le c_{44}2^{-\sum\limits_{k=1}^{s}N_{i_k}\left(r-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)} \le$$
$$\le c_{44}2^{-\sum\limits_{k=1}^{s}N_{i_k}\left(r-\frac{n}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)},$$

где постоянные c_{42}, c_{43} и c_{44} не зависят от N_{i_k}.

Так как $f_{i_1\ldots i_s}\in L_p^0(n)$, то, применяя лемму 3.3, имеем

$$Y_{2^{N_{i_{e_1}}}-1,\ldots,2^{N_{i_{e_t}}}-1}(f_{i_1\ldots i_s})_q \le c_{45}2^{-\sum\limits_{k=1}^{t}N_{i_{e_k}}\left(r-\frac{n}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \qquad (3.6)$$

для любого набора из t неповторяющихся индексов $(i_{e_1},\ldots,i_{e_t})\subseteq(i_1,\ldots,i_s)$, где $t=1,\ldots,s$ и постоянная c_{45} не зависит от $N_{i_{e_k}}$.

Применяя утверждение 3 теоремы 1.2, а затем неравенства (3.5) и (3.6), получаем, что для любого набора $(i_1,\ldots,i_t)\subseteq(1,\ldots,n)$, $1\le t\le m$, выполнено неравенство

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\ldots,2^{N_{i_t}}-1}(f)_p \le c_{46}2^{-\sum\limits_{k=1}^{t}N_{i_k}\left(r-\frac{n}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}, \qquad (3.7)$$

где постоянная c_{46} не зависит от N_{i_k}.

Применяя теорему 3.1, получаем, что $f\in S_n^mH_q^{r^*}$, что и требовалось доказать.

3.4 Теорема о следах функций

Теорема 3.3. *Пусть на R_n задана функция $f\in S_n^mH_p^r$, где $1\le p\le\infty$, $1\le m\le n$, $r>\frac{n}{mp}$, тогда на любом подпространстве $R_k=R_k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, где $(i_1,\ldots,i_k)\subset(1,\ldots,n), 1\le k<n$, у функции f существует след $\phi=\phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, такой, что:*

1. если $k\le m$, то $\phi\in S_k^kH_p^{r^*}$, $\forall\, r^*\in\left(0,r-\frac{n-m}{mp}\right]$;

2. если $k > m$, то $\phi \in S^m_k H^{r^*}_p$, $\forall\, r^* \in \left(0,r - \frac{n-k}{mp}\right)$.

Доказательство. Пусть функция $f \in S^m_n H^r_p$. Сначала для нее получим оценку для
$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p$, где $(i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t) \in (1,\dots,n)$, $t+s \geq m$.

Оценивая $(t+s)$-мерный угол сверху всеми возможными m-мерными углами, имеем

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p \leq c_{47} Y_{2^{\nu_{k_1}}-1,\dots,2^{\nu_{k_m}}-1}(f)_p,$$
$$\forall\, (k_1,\dots,k_m) \in (i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t),$$

где постоянная c_{47} не зависит от f и ν_{i_j}.
Применяя теорему 3.1, получим

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p \leq$$
$$\leq c_{48} \prod_{u=1}^{m} 2^{-\nu_{k_u} r}, \forall\, (k_1,\dots,k_m) \in (i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t),$$

где постоянная c_{48} не зависит от ν_{i_j}.
Перемножая полученные неравенства и извлекая корень степени C^m_{s+t}, имеем

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p \leq c_{49} \prod_{u=1}^{s} 2^{-\nu_{i_u} r \frac{m}{t+s}} \prod_{u=1}^{t} 2^{-\nu_{j_u} r \frac{m}{t+s}}, \tag{3.8}$$

где постоянная c_{49} не зависит от ν_{i_j}

Рассмотрим вопрос о следе каждой функции из представления (1.1) на $R_k \equiv R_k(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$.

Каждая функция представления (1.1) попадает в одну из следующих трех групп функций:

1. $f_{i_1,\dots,i_s}$, $1 \leq s \leq k$, зависящих от всех или части переменных $(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$;
2. $f_{j_1,\dots,j_t}$, $1 \leq t \leq n-k$, зависящих от всех или части переменных $(x_{i_{k+1}},\dots,x_{i_n})$;
3. $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}$, $1 \leq s \leq k, 1 \leq t \leq n-k$, зависящих от всех или части переменных $(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$ и зависящих от всех или части переменных $(x_{i_{k+1}},\dots,x_{i_n})$.

Обозначим через $\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$, где $1 \leq t+s \leq n$, $0 \leq s \leq k$, $0 \leq t \leq n-k$, след произвольной функции $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}$ представления (1.1) на R_k.

1. След любой функции из первой группы на R_k совпадает с самой этой функцией, то есть $\varphi_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) = f_{i_1,\dots,i_s}$ Применяя лемму 3.4, получаем:

$$\varphi_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in S_s^s H_p^r, \text{ если } s \le m;$$
$$\varphi_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in S_s^m H_p^r, \text{ если } s > m.$$

2. Применяя лемму 3.4 к каждой функции $f_{j_1,\dots,j_t}$ второй группы, получаем, что:

$$f_{j_1,\dots,j_t} \in S_t^t H_p^r, \text{ если } t \le m;$$
$$f_{j_1,\dots,j_t} \in S_t^m H_p^r, \text{ если } t > m;$$

Пользуясь теоремой 3.2, имеем:

$$\begin{aligned} f_{j_1,\dots,j_t} &\in S_t^t H_\infty^{r^*}, \text{ если } t \le m \text{ и } r^* = r - \frac{1}{p} > 0; \\ f_{j_1,\dots,j_t} &\in S_t^m H_\infty^{r^*}, \text{ если } t > m \text{ и } r^* = r - \frac{t}{mp} > 0; \end{aligned} \tag{3.9}$$

(Так как $t \le n - k$ и $k \ge 1$, то $\frac{t}{mp} \le \frac{n}{mp}$ и $\frac{1}{p} \le \frac{n}{mp}$. Следовательно, неравенства $r > \frac{t}{mp}$ и $r > \frac{1}{p}$ выполняются при $r > \frac{n}{mp}$.)

Из (3.9) следует, что после изменения функции $f_{j_1,\dots,j_t}$ на множестве t-мерной меры нуль она станет непрерывной функцией (хотя бы в окрестности точки$(0,\dots,0)$), а это означает, что $f_{j_1,\dots,j_t}(0,\dots,0) = C_{j_1,\dots,j_t}$, где $C_{j_1,\dots,j_t}$–константа, и при этом $|f_{j_1,\dots,j_t} - C_{j_1,\dots,j_t}| \to 0$ при $\sum\limits_{l=1}^{t} x_{j_l}^2 \to 0$. Естественно считать, что постоянная $C_{j_1,\dots,j_t}$ и будет следом функции $f_{j_1,\dots,j_t}$ на R_k, то есть $\varphi_{j_1,\dots,j_t} = C_{j_1,\dots,j_t}$.

3. Рассмотрим теперь произвольную функцию $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}$ третьей группы.

3.а. Начнём со случая, когда $(t+s) \le m$. Используя лемму 3.4, имеем, что $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t} \in S_{t+s}^{t+s} H_p^r$. Значит, применяя лемму 3.5, получаем, что если $r > \frac{1}{p}$, то функция $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}$ имеет след $\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in S_s^s H_p^r$ на $R_s \equiv R_s(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$. Так как функция $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}$ не зависит от переменных $x_{i_{s+1}},\dots,x_{i_k}$, то её след на R_s будет совпадать со следом на R_k.

3.б. Рассмотрим случай, когда $t + s > m$. Обозначим

$$I = \sum_{\nu_{i_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty} \prod_{u=1}^{t} 2^{\nu_{j_u}/p} \times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t})_p. \tag{3.10}$$

Применяя утверждение 2 теоремы 1.2, а затем пользуясь оценкой (3.8), получаем

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t})_p \le$$
$$\le c_{50} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p \le c_{51}\prod_{u=1}^{s} 2^{-\nu_{i_u} r\frac{m}{t+s}}\prod_{u=1}^{t} 2^{-\nu_{j_u} r\frac{m}{t+s}},$$

где постоянные c_{50} и c_{51} не зависят от ν_{i_j}.
Подставляя в равенство (3.10) полученную оценку, получаем, что если $r > \frac{t+s}{mp}$, то $I < \infty$. Тогда из утверждения леммы 3.5 вытекает существование следа $\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$ функции $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}$на $R_s(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$.

Так как функция $f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}$ не зависит от переменных $x_{i_{s+1}},\dots,x_{i_k}$, то её след на $R_s(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$ будет совпадать со следом на R_k.

Так как $t+s \le n$, то выполнено неравенство $\frac{t+s}{mp} \le \frac{n}{mp}$. Поэтому, при $r > \frac{n}{mp}$ каждая функция третьей группы будет иметь след на R_k.

По лемме 3.5 выполнено неравенство

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\dots,2^{N_{i_s}}-1}(\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}))_p \le$$
$$\le c_{52}\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty}\sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty}\prod_{u=1}^{t} 2^{\nu_{j_u}/p}\times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t})_p,$$

где постоянная c_{52} не зависит от f и N_{i_j}.

Применяя утверждение 2 теоремы 1.2, получаем

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\dots,2^{N_{i_s}}-1}(\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}))_p \le$$
$$\le c_{53}\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty}\sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty}\prod_{u=1}^{t} 2^{\nu_{j_u}/p} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p, \quad (3.11)$$

где постоянная c_{53} не зависит от N_{i_j} и f.

3.б.1.Теперь рассмотрим подслучай, когда $s \le m$ и $t+s > m$. Разобьем сумму, стоящую в правой части неравенства (3.11), следующим образом: оставим неизменными суммы по $\nu_{i_1},\dots,\nu_{i_s},\nu_{j_1},\dots,\nu_{j_{m-s-1}}$ и разобьём каждую из сумм по $\nu_{j_{m-s}},\dots,\nu_{j_t}$ на две суммы (от 0 до K и от $K+1$ до ∞, где K —

произвольное натуральное число). Получим

$$\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty} \prod_{u=1}^{t} 2^{\nu_{j_u}/p} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p =$$

$$= I_0 + \ldots + I_l + \ldots + I_{t+s-m}, \quad (3.12)$$

где I_l - сумма всех сумм, в которой l пределов суммирования (из $\nu_{j_{m-s}}, \ldots, \nu_{j_t}$) берутся от $K+1$ до ∞.

Рассмотрим I_l. Так как I_l - сумма всех сумм, где l пределов суммирования берутся от $K+1$ до ∞, то I_l состоит из C^l_{t+s-m} сумм, а именно $I_l = I_{l,1} + \ldots + I_{l,C^m_{t+s-m}}$. Рассмотрим одну из этих сумм $I_{l,1}$:

$$I_{l,1} = \sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{j_{m-s}}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_{m-s+1}}=K+1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{j_{m-s+l}}=K+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_{j_{m-s+l+1}}=0}^{K} \dots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{K} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p \right).$$

Применяя оценку приближения $(t+s)$-мерным углом бо́льшим приближением $(m+l)$-мерным углом, получаем

$$I_{l,1} \le c_{54} \sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{j_{m-s}}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_{m-s+1}}=K+1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{j_{m-s+l}}=K+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_{j_{m-s+l+1}}=0}^{K} \dots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{K} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_{m-s+l}}}-1}(f)_p \right),$$

где постоянная c_{54} не зависит от N_{i_j}, K и f.
Пользуясь оценкой (3.8) (при $t = m - s + l$), получаем для $r > \frac{m+l}{mp}$:

$$I_{l,1} \le c_{55} \sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{j_{m-s-1}}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_{m-s}}=K+1}^{\infty} \dots \sum_{\nu_{j_{m-s+l}}=K+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_{j_{m-s+l+1}}=0}^{K} \dots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{K} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} \prod_{u=1}^{s} 2^{-\nu_{i_u} r \frac{m}{m+l}} \prod_{u=1}^{m-s+l} 2^{-\nu_{j_u} r \frac{m}{m+l}} \right) \le$$

$$\le c_{56} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{s} N_{i_u} r \frac{m}{m+l}} 2^{-lK\left(r\frac{m}{m+l}-\frac{1}{p}\right)} 2^{(t+s-m-l)\frac{K}{p}},$$

где постоянные c_{55} и c_{56} не зависят от N_{i_j} и K.
Заметим,что так как $l \leq t+s-m$, то $\frac{l+m}{mp} \leq \frac{t+s}{mp} \leq \frac{n}{mp}$, то неравенство $r > \frac{l+m}{mp}$ выполняется при $r > \frac{n}{mp}$.

Положим $K = \frac{\sum\limits_{u=1}^{s} N_{i_u}}{m}$, тогда

$$I_{l,1} \leq c_{57} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{s} N_{i_u}\left(r - \frac{t+s-m}{mp}\right)},$$

где постоянная c_{57} не зависит от N_{i_u}.

Очевидно, что такие же оценки верны для каждой $I_{l,1}, \ldots, I_{l,C^m_{t+s-m}}$. Так как $I_l = I_{l,1} + \ldots + I_{l,C^m_{t+s-m}}$, то, пользуясь полученными оценками, имеем

$$I_l \leq c_{58} 2^{-\sum\limits_{j=1}^{s} N_j\left(r - \frac{t+s-m}{mp}\right)},$$

где постоянная c_{58} не зависит от N_j.
Так как оценка для каждого I_l не зависит от l, то оценка правой части равенства (3.12) будет такой же, а именно

$$\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_s}=N_{i_s}}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty} \prod_{u=1}^{t} 2^{\nu_{j_u}/p} Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p \leq$$
$$\leq c_{59} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{s} N_{i_u}\left(r - \frac{t+s-m}{mp}\right)} \leq c_{59} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{s} N_{i_u}\left(r - \frac{n-m}{mp}\right)},$$

где постоянная c_{59} не зависит от N_{i_u}.
Подставляя полученную оценку в неравенство (3.11), имеем

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\ldots,2^{N_{i_s}}-1}(\varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}))_p \leq c_{60} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{s} N_{i_u}\left(r - \frac{n-m}{mp}\right)},$$

где постоянная c_{59} не зависит от N_{i_u}.
Так как $f_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t} \in L^0_p$, то её след $\varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) \in L^0_p$. Поэтому, применяя лемму 3.3, получим оценки для всех углов размерности меньшей, чем s:

$$Y_{2^{N_{k_1}}-1,\ldots,2^{N_{k_l}}-1}(\varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}))_p \leq c_{61} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{l} N_{k_u}\left(r - \frac{n-m}{mp}\right)}, \tag{3.13}$$

$\forall (k_1,\ldots,k_l) \in (i_1,\ldots,i_s)$, $\forall l \in (1,\ldots,s)$, постоянная c_{61} не зависит от N_{k_u}.
Пользуясь неравенствами (3.13) и применяя теорему 3.1, получим, что

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) \in S^s_s H^{r^*}_p, \text{ где } r^* = r - \frac{n-m}{mp}.$$

3.б.2. Теперь рассмотрим подслучай, когда $s > m$ и $t+s > m$. Рассмотрим неравенство (3.11) при $N_{i_{m+1}} = \ldots = N_{i_s} = 0$, получим

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\ldots,2^{N_{i_m}}-1,0,\ldots,0}(\varphi_{x_{i_1},\ldots,x_{i_s},x_{j_1},\ldots,x_{j_t}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}))_p \leq$$
$$\leq c_{53} \sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_m}=N_{i_m}}^{\infty} \sum_{\nu_{i_{m+1}}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} \times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p, \quad (3.14)$$

где постоянная c_{53} не зависит от N_{i_j} и f.
Разобьем сумму, стоящую в правой части неравенства (3.14), следующим образом: оставим неизменными суммы по $\nu_{i_1},\ldots,\nu_{i_s}$ и разобьём каждую из сумм по $\nu_{j_1},\ldots,\nu_{j_t}$ на две суммы (от 0 до K и от $K+1$ до ∞, где K — произвольное натуральное число). Получим

$$\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_m}=N_{i_m}}^{\infty} \sum_{\nu_{i_{m+1}}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} \times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p =$$
$$= J_0 + \ldots + J_l + \ldots + J_t, \quad (3.15)$$

где J_l - сумма всех сумм, в которой l пределов суммирования (по $\nu_{j_1},\ldots,\nu_{j_t}$) берутся от $K+1$ до ∞.

Рассмотрим J_l. Так как J_l - сумма всех сумм, где l пределов суммирования берутся от $K+1$ до ∞, то J_l состоит из C_t^l сумм, а именно $J_l = J_{l,1} + \ldots + J_{l,C_t^m}$. Рассмотрим одну из этих сумм $J_{l,1}$:

$$J_{l,1} = \sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_m}=N_{i_m}}^{\infty} \sum_{\nu_{i_{m+1}}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=K+1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{j_l}=K+1}^{\infty} \sum_{\nu_{j_{l+1}}=0}^{K} \cdots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{K} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} \times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p.$$

Применяя оценку приближения $(s+t)$-мерным углом бóльшим приближением $(s+l)$-мерным углом, получаем

$$J_{l,1} \leq \sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_m}=N_{i_m}}^{\infty} \sum_{\nu_{i_{m+1}}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=K+1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{j_l}=K+1}^{\infty} \sum_{\nu_{j_{l+1}}=0}^{K} \cdots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{K} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} \times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p. \quad (3.16)$$

Найдём оценку для $Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p$. Оценим $(l+s)$-мерный угол сверху одномерными углами по переменным $x_{i_{m+1}},\dots,x_{i_s}$, а именно

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p \le Y_{2^{\nu_u}-1}(f)_p,\ \forall u \in (i_{m+1},\dots,i_s).$$

Применяя к правой части теорему 3.1, имеем

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p \le c_{62}2^{-\nu_u r},\ \forall u \in (i_{m+1},\dots,i_s),$$

где постоянная c_{62} не зависит от ν_u.

Перемножая полученные неравенства и извлекая корень степени $(s-m)$, имеем для $s>m$

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p \le c_{63}\prod_{u=m+1}^{s} 2^{-\frac{\nu_{i_u} r}{s-m}}, \tag{3.17}$$

где постоянная c_{63} не зависит от ν_{i_u}.

Оценивая $(l+s)$-мерный угол сверху m-мерными углами по переменным $x_{i_1},\dots,x_{i_m},x_{j_1},\dots,x_{j_l}$, получим

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p \le Y_{2^{\nu_{k_1}}-1,\dots,2^{\nu_{k_m}}-1}(f)_p,$$
$$\forall (k_1,\dots,k_m)\subset(i_1,\dots,i_m,j_1,\dots,j_l).$$

Применяя теорему 3.1, получаем

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p \le$$
$$\le c_{64}\prod_{u=1}^{m} 2^{-\nu_{k_u} r}, \forall\,(k_1,\dots,k_m)\in(i_1,\dots,i_m,j_1,\dots,j_l),$$

где постоянная c_{64} не зависит от ν_{i_u}.

Перемножая полученные неравенства и извлекая корень степени C_{m+l}^m, имеем

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p \le c_{65}\prod_{u=1}^{m} 2^{-\nu_{i_u} r\frac{m}{l+m}}\prod_{u=1}^{l} 2^{-\nu_{j_u} r\frac{m}{l+m}}, \tag{3.18}$$

где постоянная c_{65} не зависит от ν_{i_u}.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon\in(0,\frac{k-m}{n})$. Возведем в степень ε левую и правую часть неравенства (3.17), а в степень $(1-\varepsilon)$ — левую и правую часть неравенства (3.18) , получим

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p^{\varepsilon} \le c_{66}\prod_{u=m+1}^{s} 2^{-\nu_{i_u}\frac{\nu_{i_u} r\varepsilon}{s-m}},$$

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p^{1-\varepsilon} \le c_{67}\prod_{u=1}^{m} 2^{-\nu_{i_u} r(1-\varepsilon)\frac{m}{l+m}}\prod_{u=1}^{l} 2^{-\nu_{j_u} r(1-\varepsilon)\frac{m}{l+m}},$$

где постоянные c_{66} и c_{67} не зависят от ν_{i_u} и ν_{j_u}.
Перемножив полученные неравенства, имеем

$$Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\dots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\dots,2^{\nu_{j_l}}-1}(f)_p \le$$
$$\le c_{68}\prod_{u=1}^{m} 2^{-\nu_{i_u} r(1-\varepsilon)\frac{m}{l+m}} \prod_{u=m+1}^{s} 2^{-\nu_{i_u}\frac{r\varepsilon}{s-m}} \prod_{u=1}^{l} 2^{-\nu_{j_u} r(1-\varepsilon)\frac{m}{l+m}},$$

где постоянная c_{68} не зависит от ν_{i_u} и ν_{j_u}.

Подставляя полученную оценку в неравенство (3.16), имеем для $r > \frac{l+m}{mp(1-\varepsilon)}$

$$J_{l,1} \le$$
$$\le c_{68}\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_m}=N_{i_m}}^{\infty}\sum_{\nu_{i_{m+1}}=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty}\sum_{\nu_{j_1}=K+1}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{j_l}=K+1}^{\infty}\sum_{\nu_{j_{l+1}}=0}^{K}\dots\sum_{\nu_{j_t}=0}^{K}\prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}}\times$$
$$\times\prod_{u=1}^{m} 2^{-\nu_{i_u} r\frac{m}{l+m}(1-\varepsilon)} \prod_{u=m+1}^{s} 2^{-\nu_{i_u}\frac{\varepsilon}{s-m}} \prod_{u=1}^{l} 2^{-\nu_{j_u} r\frac{m}{l+m}(1-\varepsilon)} \le$$
$$\le c_{69}\prod_{u=1}^{m} 2^{-N_{i_u} r\frac{m}{l+m}(1-\varepsilon)} \times 2^{-lK(r\frac{m}{l+m}(1-\varepsilon)-\frac{1}{p})} 2^{K\frac{t-l}{p}} \le$$
$$\le c_{69}\prod_{u=1}^{m} 2^{-N_{i_u} r\frac{m}{l+m}(1-\varepsilon)} \times 2^{-mK(r\frac{l}{l+m}(1-\varepsilon)-\frac{t}{mp})}.$$

Отметим, что постоянная c_{69} в полученном неравенстве не зависит от N_i и K, но зависит от ε, причём так как при $\varepsilon \to 0$ ряд

$$\sum_{\nu_{i_{m+1}}=0}^{\infty}\dots\sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty}\prod_{u=m+1}^{s} 2^{-\nu_{i_u}\frac{\varepsilon}{s-m}} \to \infty,$$

то и постоянная стремится к бесконечности, т.е. $c_{69} = c_{69}(\varepsilon) \to \infty$ при при $\varepsilon \to 0$.

Покажем, что при заданном $\varepsilon \in (0, \frac{k-m}{n})$ и при $r > \frac{n}{mp}$ выполнено неравенство $r > \frac{l+m}{mp(1-\varepsilon)}$. Используя сначала условие $l \le t$, а затем ограничение $\varepsilon < \frac{k-m}{n}$, имеем

$$\frac{l+m}{mp(1-\varepsilon)} \le \frac{t+m}{mp(1-\varepsilon)} \le \frac{(t+m)n}{mp(n-k+m)}.$$

Так как $t \le n-k$, то $\frac{(t+m)n}{mp(n-k+m)} \le \frac{n}{mp}$. Следовательно, при $\varepsilon \in \left(0, \frac{k-m}{n}\right)$ неравенство $r > \frac{l+m}{mp(1-\varepsilon)}$ выполняется при $r > \frac{n}{mp}$.

Положим $K = \frac{\sum\limits_{u=1}^{m} N_{i_u}}{m}$, тогда

$$J_{l,1} \leq c_{69} \prod_{u=1}^{m} 2^{-N_{i_u}\left(r(1-\varepsilon)-\frac{t}{mp}\right)}.$$

Очевидно, что такие же оценки верны для каждого $J_{l,1}, \ldots, J_{l,C_t^m}$. Так как $J_l = J_{l,1} + \ldots + J_{l,C_t^m}$, то, пользуясь полученными оценками, имеем

$$J_l \leq C_t^m c_{69} \prod_{u=1}^{m} 2^{-N_{i_u}\left(r(1-\varepsilon)-\frac{t}{mp}\right)}.$$

Так как оценка для кадого J_l не зависит от l, то оценка суммы из равенства (3.15) будет такой же, а именно

$$\sum_{\nu_{i_1}=N_{i_1}}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_m}=N_{i_m}}^{\infty} \sum_{\nu_{i_{m+1}}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_s}=0}^{\infty} \sum_{\nu_{j_1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{j_t}=0}^{\infty} \prod_{u=1}^{t} 2^{\frac{\nu_{j_u}}{p}} \times$$
$$\times Y_{2^{\nu_{i_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{i_s}}-1,2^{\nu_{j_1}}-1,\ldots,2^{\nu_{j_t}}-1}(f)_p \leq c_{70} \prod_{u=1}^{m} 2^{-N_{i_u}\left(r(1-\varepsilon)-\frac{t}{mp}\right)},$$

где постоянная c_{70} не зависит от N_{i_j}, но зависит ε и стремится к ∞ при $\varepsilon \to 0$.

Подставляя полученную оценку в неравенство (3.14) (учитывая, что постоянная c_{53} не зависит от N_{i_j} и ε), имеем

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\ldots,2^{N_{i_m}}-1,0,\ldots,0}(\varphi_{x_{i_1},\ldots,x_{i_s},x_{j_1},\ldots,x_{j_t}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}))_p \quad \leq \quad c_{71} \prod_{u=1}^{m} 2^{-N_{i_u}\left(r(1-\varepsilon)-\frac{t}{mp}\right)}.$$

где постоянна c_{71} не зависит от N_{i_u} и $c_{71} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Так как $t \leq n-k$, то

$$Y_{2^{N_{i_1}}-1,\ldots,2^{N_{i_m}}-1,0,\ldots,0}(\varphi_{x_{i_1},\ldots,x_{i_s},x_{j_1},\ldots,x_{j_t}}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}))_p \leq c_{71} \prod_{u=1}^{m} 2^{-N_{i_u}\left(r(1-\varepsilon)-\frac{n-k}{mp}\right)},$$

где постоянная c_{71} не зависит от N_{i_j}, но зависит от ε: $c_{71} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как $f_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t} \in L_p^0$, то её след $\varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) \in L_p^0$, поэтому, используя лемму 3.3, получаем оценки для всех углов размерностей не превосходящих m:

$$Y_{2^{N_{k_1}}-1,\ldots,2^{N_{k_l}}-1}(\varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}))_p \leq c_{72} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{l} N_{k_u}\left(r(1-\varepsilon)-\frac{n-k}{mp}\right)},$$

$\forall (k_1,\ldots,k_l) \in (i_1,\ldots,i_s)$, $\forall l = 1,\ldots,m$, где постоянная c_{72} не зависит от N_{i_j}, но зависит от ε: $c_{72} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как полученное неравенство выполнено для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{k-m}{n}\right)$, то $\forall r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right)$ выполнено неравенство

$$Y_{2^{N_{k_1}}-1,\dots,2^{N_{k_l}}-1}(\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}))_p \leq c_{73} 2^{-\sum\limits_{u=1}^{l} N_{k_u} r^*}, \tag{3.19}$$

$\forall (k_1,\dots,k_l) \in (i_1,\dots,i_s)$, $\forall l = 1,\dots,m$, где постоянная c_{73} не зависит от N_{i_j}, но зависит от ε, точнее зависит от r^*: $c_{73} \to \infty$ при $r^* \to r - \frac{n-k}{mp}$.

Используя неравенства (3.19) и теорему 3.1, получаем

$$\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in S_s^m H_p^{r^*},\ \forall r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right).$$

Подведем итог. При $r > \frac{n}{mp}$ функции первой группы имеют следы $\varphi_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$ на R_k:

$$\begin{cases} \varphi_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) = f_{i_1,\dots,i_s} \in S_s^s H_p^r \text{ , если } s \leq m, \\ \varphi_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) = f_{i_1,\dots,i_s} \in S_s^m H_p^r \text{ , если } s > m, \end{cases}$$

$\forall (i_1,\dots,i_s) \in (i_1,\dots,i_k), 1 \leq s \leq k;$
функции второй группы имеют следы $\varphi_{j_1,\dots,j_t}$ на R_k:

$$\varphi_{j_1,\dots,j_t} = C_{j_1,\dots,j_t}\ \forall (j_1,\dots,j_t) \in (i_{k+1},\dots,i_n), 1 \leq t \leq n-k; \tag{3.20}$$

функции третьей группы имеют следы $\varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$ на R_k:

$$\begin{cases} \varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in S_s^s H_p^r, & \text{если } t+s \leq m, \\ \varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in S_s^s H_p^{r^*}, & \text{где } r^* = r - \frac{n-m}{mp}, \\ & \text{если } \ t+s > m \text{ и } s \leq m, \\ \varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) \in S_s^m H_p^{r^*}, & \forall\, r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right), \\ & \text{если } t+s > m \text{ и } s > m. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \phi(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) = f_0 + \sum_{\forall (i_1,\dots,i_s) \in (i_1,\dots,i_k)} f_{i_1,\dots,i_s}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}) + \\ + \sum_{\forall (j_1,\dots,j_t) \in (i_{k+1},\dots,i_n)} C_{j_1,\dots,j_t} + \\ + \sum_{\forall (i_1,\dots,i_s) \in (i_1,\dots,i_k)} \sum_{\forall (j_1,\dots,j_t) \in (i_{k+1},\dots,i_n)} \varphi_{i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_t}(x_{i_1},\dots,x_{i_s}), \end{aligned} \tag{3.21}$$

представляющую из себя сумму следов каждой из функций представления (1.1) и постоянной f_0. Покажем, что определённая таким образом функция $\phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$ и будет следом функции f на R_k.

Проверим свойство 1 определения следа функции. Выписывая представление (1.1) в точке $(x_{i_1},\ldots,x_{i_k},0,\ldots,0)$, получим

$$f(x_{i_1},\ldots,x_{i_k},0,\ldots,0) = f_0 + \sum_{\forall(i_1,\ldots,i_s)\in(i_1,\ldots,i_k)} f_{i_1,\ldots,i_s}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s}) + \\ + \sum_{\forall(j_1,\ldots,j_t)\in(i_{k+1},\ldots,i_n)} f_{j_1,\ldots,j_t}(0,\ldots,0) + \\ + \sum_{\forall(i_1,\ldots,i_s)\in(i_1,\ldots,i_k)} \sum_{\forall(j_1,\ldots,j_t)\in(i_{k+1},\ldots,i_n)} f_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s},0,\ldots,0).$$

Так как каждая из функций в правой части равенства является следом соответствующей функции представления (1.1) в точке $(x_{i_1},\ldots,x_{i_k},0,\ldots,0)$, то $f(x_{i_1},\ldots,x_{i_k},0,\ldots,0) = \phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$. Таким образом, свойство 1 определения следа выполнено.

Проверим свойство 2 определения следа функции. Так как каждая из функций представления (1.1) имеет след на R_k, то все они удовлетворяют свойству 2 определения следа, а именно для любых фиксированных x_{i_j}, $k+1 \le j \le n$, таких, что $x^2_{i_{k+1}} + \ldots + x^2_{i_n} < \delta$ (где δ достаточно мало), каждая функция из представления (1.1) принадлежит $L_p(k)$. Так как функция f является их суммой, то она принадлежит $L_p(k)$ при любых фиксированных x_{i_j}, $k+1 \le j \le n$, таких, что $x^2_{i_{k+1}} + \ldots + x^2_{i_n} < \delta$ (где δ достаточно мала). Таким образом, свойство 2 определения следа выполнено.

Проверим свойство 3 определения следа функции. Рассмотрим

$$\|f(x_1,\ldots,x_n - \phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}))\|_p \le \|f_0 - f_0\|_p + \sum_{\forall(i_1,\ldots,i_s)\in(i_1,\ldots,i_k)} \|f_{i_1,\ldots,i_s} - f_{i_1,\ldots,i_s}\|_p + \\ + \sum_{\forall(j_1,\ldots,j_t)\in(i_{k+1},\ldots,i_n)} \|f_{j_1,\ldots,j_t} - C_{j_1,\ldots,j_t}\|_p + \\ + \sum_{\forall(i_1,\ldots,i_s)\in(i_1,\ldots,i_k)} \sum_{\forall(j_1,\ldots,j_t)\in(i_{k+1},\ldots,i_n)} \|f_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t} - \varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})\|_p.$$

Так как $f_{i_1,\ldots,i_s}, C_{j_1,\ldots,j_t}$ и $\varphi_{i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_t}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})$ являются следами соответствующих функций представления (1.1), то используя свойство 3 определения следа функции для каждой функции представления (1.1), имеем $\|f(x_1,\ldots,x_n - \phi(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}))\|_p \to 0$ для $x^2_{i_{k+1}} + \ldots + x^2_{i_n} \to 0$.

Для функции $\phi = \phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ все свойства следа функции выполняются, следовательно, она будет следом функции f на R_k.

Проверим, что $\begin{cases} \phi \in S_k^k H_p^{r^*}, \forall\, r^* \in \left(0, r - \frac{n-m}{mp}\right], \text{если } k \le m; \\ \phi \in S_k^m H_p^{r^*}, \forall\, r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right), \text{если } k > m. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} 1 \le s \le m, \text{ если } k \ge m; \\ 1 \le s \le k, \text{ если } k < m. \end{cases}$

Так как $\forall (i_1, \ldots, i_s) \in (i_1, \ldots, i_k)$, $\omega_{k_{i_1} \ldots k_{i_s}}(\phi, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_p$, не превосходит суммы модулей гладкости каждой функции из равенства (3.21), зависящих от $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, то

$$\omega_{k_{i_1} \ldots k_{i_s}}(\phi, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_p \le \omega_{k_{i_1} \ldots k_{i_s}}(f_{i_1, \ldots, i_s}, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_p + \\ + \sum_{\forall (j_1, \ldots, j_t) \in (i_{k+1}, \ldots, i_n)} \omega_{k_{i_1} \ldots k_{i_s}}(\varphi_{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_t}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_p,$$

$\forall\, (i_1, \ldots, i_s) \subset (i_1, \ldots, i_k)$, где $\begin{cases} s \le k, \text{ если } k \le m; \\ s \le m, \text{ если } k > m. \end{cases}$

Так как

$$\begin{cases} \varphi_{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_t}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in S_k^k H_p^{r^*}, \forall\, r^* \in \left(0, r - \frac{n-m}{mp}\right], \text{если } k \le m; \\ \varphi_{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_t}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in S_k^m H_p^{r^*}, \forall\, r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right), \text{если } k > m \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \varphi_{i_1, \ldots, i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in S_k^k H_p^{r}, \text{если } k \le m; \\ \varphi_{i_1, \ldots, i_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in S_k^m H_p^{r}, \text{если } k > m, \end{cases}$$

то, пользуясь определением обобщённого класса Никольского, имеем

$$\omega_{k_{i_1} \ldots k_{i_s}}(\phi, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_s})_p \le c_{74} \left(\prod_{u=1}^{s} \delta_{i_u}^{r^*} + \sum_{\forall (j_1, \ldots, j_t) \in (i_{k+1}, \ldots, i_n)} \prod_{u=1}^{s} \delta_{i_u}^{r^*} \right) \le c_{75} \prod_{u=1}^{s} \delta_{i_u}^{r^*}, \\ \forall\, (i_1, \ldots, i_s) \subset (i_1, \ldots, i_k),$$

где $\begin{cases} s \le k, \text{ если } k \le m; \\ s \le m, \text{ если } k > m, \end{cases}$ и постоянные c_{74} и c_{75} не зависят от δ_{i_j} и стремятся к ∞ при $r^* \to r - \frac{n-k}{mp}$.

Значит, из определения обобщённого класса Никольского вытекает

$$\begin{cases} \phi \in S_k^k H_p^{r^*}, \forall\, r^* \in \left(0, r - \frac{n-m}{mp}\right], \text{если } k \le m; \\ \phi \in S_k^m H_p^{r^*}, \forall\, r^* \in \left(0, r - \frac{n-k}{mp}\right), \text{если } k > m. \end{cases}$$

Что и завершает доказательство.

Заключение

В работе рассмотрены актуальные вопросы теории функций, в частности, исследованы классы функций с некоторыми ограничениями на смешанные модули гладкости, обобщающие хорошо известные классы Никольского. Основные результаты данной работы:

1. Получены оценки приближений углом и модулей гладкости для функций распасовки;
2. При помощи приближений углом получены конструктивные характеристики обобщённых классов Никольского $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ и $S_n^m H_p^r$;
3. Для указанных классов функций получены теоремы вложения разных метрик;
4. Для указанных классов функций получены теоремы о следах.

В дальнейшем для исследуемых классов могут быть получены теоремы о продолжении. Класс $S_n^m H_p^r$ может быть обобщён на случай смешанной метрики. Вопрос об обобщении результатов, полученных для класса $SH(p_1,p_2,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$, на n-мерный случай также открыт.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Потапову Михаилу Константиновичу, за постановку интересных задач, неоценимую помощь и постоянное внимание.

Список литературы

1. *Чебышев П. Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций // ПСС Чебышева. — 1947. — № 2. — С. 152—236.
2. *Чебышев П. Л.* Теория механизмов, известных под именем параллелограммов // ПСС Чебышева. — 1947. — № 2. — С. 23—51.
3. *Lebesgue H.* Sur la représentation approchée des fonctions // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1908. — No. 26. — Pp. 325–328.
4. *Vallée Poussin C. J. d. l.* Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée // Bull. Soc. Math. Belgo. — 1908. — No. 3. — Pp. 403–410.
5. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. — Göttingen : Dieterich, 1911.
6. *Бернштейн С.* О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй посредствомъ многочленовъ данной степени // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1912. — С. 49—194.
7. *Hardy G. H.*, *Littlewood J. E.* A convergence criterion for Fourier series // Math. Z. — 1928. — Vol. 28, no. 4. — Pp. 612–634.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике / под ред. О. А. Олейник. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1988. — 336 с.
9. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теоремах вложения в смешанной норме // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1951. — № 38. — С. 191—202.
10. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. матем. журн. — 1963. — № 6. — С. 1342—1364.

11. *Бахвалов Н. С.* Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1963. — № 3. — С. 7—16.

12. *Потапов М. К.* Приближение “углом” и теоремы вложения // Math. balk. — 1972. — № 2. — С. 183—198.

13. *Потапов М. К.* Теоремы вложения в смешанной метрике // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1980. — № 156. — С. 143—156.

14. *Потапов М. К.* О приближении углом // Proc. Conf. on Constructive Theory of Functions (Approximation Theory). 1969. Budapest: Akad. Kiadó. — 1972. — С. 371—399.

15. *Потапов М. К.*, *Симонов Б. В.* О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. — 2009. — № 3. — С. 36—43.

16. *Потапов М. К.*, *Симонов Б. В.*, *Тихонов С.* Теоремы вложения классов С.М.Никольского // Современные проблемы анализа и преподавания математики, Материалы Международной научной конференции, посвященной 105-летию академика С.М.Никольского. — Изд-во МГУ, 2010. — С. 33—34.

17. *Potapov M.*, *Simonov B.*, *Tikhonov S.* Mixed Moduli of Smoothness in $L_p, 1 < p < \infty$ // Surveys in Approximation Theory. — 2013. — No. 8. — Pp. 1–57.

18. *Потапов М. К.*, *Симонов Б. В.*, *Тихонов С.* Дробные модули гладкости. — Москва : МАКСПресс, 2016. — 338 с.

19. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — Москва : Наука, 1977. — 456 с.

20. *Лизоркин П. И.*, *Никольский С. М.* Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей смешанной производной // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1965. — № 77. — С. 143—167.

21. *Унинский А. П.* Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени // Материалы Всесоюзного симпозиума по теоремам вложения. — 1966. — № 77. — С. 143—167.

22. *Бесов О. В.*, *Ильин В. П.*, *Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — Москва : Наука, 1975. — 480 с.

23. *Потапов М. К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения “углом” // Труды МИАН СССР. — 1972. — № 117. — С. 256—291.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Исмагилов Т. Ф.* Теоремы о следах функций из обобщенных классов Никольского // Труды механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова "Современные проблемы математики и механики". Математика. Выпуск 1. К 60-летию семинара тригонометрические и ортогональные ряды. Т. 10. — 2014. — С. 12—25.
2. *Исмагилов Т. Ф.* О свойствах распасовки функций из пространства L_p // Труды механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова "Современные проблемы математики и механики". Математика. Выпуск 2. К столетию лузинского семинара по теории функций. Т. 10. — 2015. — С. 69—92.
3. *Исмагилов Т. Ф.* Теоремы вложения классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости. // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. — 2013. — № 5. — С. 3—9.
4. *Исмагилов Т. Ф.* Теоремы вложения разных метрик для классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. — 2014. — № 6. — С. 59—62.
5. *Исмагилов Т. Ф.* Теорема вложения разных метрик для обобщенного класса Никольского // Вестник московского университета, Серия 1 Матем. Механ. — 2015. — № 4. — С. 27—31.
6. *Исмагилов Т. Ф.* О вложении разных метрик обобщенных классов Никольского // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". — Россия, Тула. — 15-19 сентября 2014.

7. *Исмагилов Т. Ф.* О вложении класса функций с доминирующим смешанным модулем гладкости // Материалы XIX международной молодёжной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов". — Россия, Москва, 2012. — URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1790/41352_7005.pdf.