МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

УДК 539.3

Фасхеев Игорь Олегович

Моделирование механических процессов в пористых наполненных средах с учетом интерактивных сил

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф-м.н., профессор Бровко Г.Л.

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Бровко Георгий Леонидович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Черняев Александр Петрович** ФГАОУ ВО "Московский физико-технический институт (государственный университет)"
	кандидат физико-математических наук, с.н.с **Барышников Николай Александрович** ФГБУН Институт динамики геосфер Российской академии наук
Ведущая организация:	ФГБУН Институт прикладной механики РАН

Защита состоится 19 мая 2017 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 при Московском государственном университете им М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП – 1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, механико–математический факультет, аудитория 16–10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27, сектор А, 8 этаж, к. 812 и на сайте https://istina.msu.ru.

Автореферат разослан 29 марта 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.91,
кандидат физико-математических наук, с.н.с Чистяков П.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Механические процессы течения жидкостей (газов) сквозь пористые твердые тела широко распространены в различных сферах жизнедеятельности человека: в промышленности (добыча нефти и природного газа из подземных пластов, функционирование очистных сооружений заводов), строительстве (сбор и отвод грунтовых вод от сооружений с помощью системы дренажных труб, каналов, скважин и других устройств), сельском хозяйстве (миграция влаги в плодородных почвах), моделировании природных процессов.

Широкое практическое применение процессов переноса массы жидких фаз в пористых средах с учетом деформирования твердого скелета требует совершенствования технологий на основе более совершенных моделей пористых наполненных сред.

Построение моделей многофазных (гетерогенных) сред требует строгого математического описания их механических свойств, закономерностей движений и фазовых превращений, видов внешних нагрузок, определяющих условия для движений и внутренних взаимодействий.

Цели работы

1. Решение задач о течении жидкости через пористый твердый каркас при малых деформациях каркаса для различных режимов течения жидкости и типов геометрии каркаса с использованием модели с интерактивными силами.

2. Исследование влияния интерактивных сил на основные характеристики протекания.

3. Разработка дополнений к модели с интерактивными силами и решение на их основе задач о течении жидкости в пористом каркасе при конечных деформациях каркаса.

Научная новизна:

1. Проведен анализ постановок задач об одномерном протекании жидкости (газа) сквозь пористый деформируемый слой при малых деформациях каркаса.

2. Разработана расчетная схема для численного решения задач об одномерном протекании жидкости (газа) сквозь пористый деформируемый слой при малых деформациях каркаса на основе модели с интерактивными силами для различных режимов протекания и различных видов геометрии слоя (плоский, сферический, цилиндрический слои).

3. Предложены модификации модели интерактивных сил для случая конечных деформаций каркаса. Данный результат дополняет модель с инерактивными силами, полученную ранее.

4. Поставлена и численно решена задача об одномерном протекании жидкости сквозь плоский пористый деформируемый слой в случае конечных деформаций каркаса.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается использованием строго обоснованных методов математики и механики сплошных сред, физической и математической корректностью постановок задач.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

1. Научная конференция "Ломоносовские чтения", секция механики, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва 2011-2014, 2016.

2. Конференция-конкурс молодых ученых института механики МГУ, Москва, 2012-2014.

3. Международный молодежный научный форум "ЛОМОНОСОВ", Москва, 2012-2014.

4. Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики", Тула, 2012–2013.

5. Аспирантский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Кийко И.А., 2010–2013.

6. Аспирантский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Горбачева В.И., м.н.с. Вакулюка В.В., 2014, 2016.

7. Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН Ломакина Е. В., академика РАН Горячевой И. Г., 2014.

8. Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством академика РАН Р. И. Нигматулина, 2014.

9. Семинар НИИ механики МГУ по механике деформируемого твердого тела под руководством проф. Р.А. Васина., 2017.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения. Полный объем диссертации содержит 95 страниц текста с 12 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 107 наименований.

Личный вклад. Модель для пористой наполненной среды с интерактивными силами предложена Г. Л. Бровко. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

Положения, выносимые на защиту:

1. На основе модели с интерактивными силами разработаны численные и аналитические подходы к решению широкого класса задач об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый

деформируемый каркас для различных режимов течения жидкости (с большими и малыми числами Рейнольдса) и различных видов геометрии пористого тела (плоский, шаровой, цилиндрический деформируемые слои). На основе этих решений исследовано влияние интерактивных сил на основные характеристики протекания;

2. Предложены модельные зависимости для коэффициентов интерактивных сил от пористости каркаса, применительно к задаче об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый каркас при конечных деформациях каркаса;

3. Поставлена и численно решена задача об одномерном поперечном стационарном протекании сжимаемой жидкости сквозь твердый пористый плоский слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора в случае конечных деформаций каркаса с использованием предложенных автором соотношений для коэффициентов интерактивных сил.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткая историческая справка по изучаемой проблеме, формулируется основные цели представляемой работы.

В **первой** главе приведены основные понятия и гипотезы рассматриваемого раздела механики сплошных сред (гипотеза взаимопроникающих континуумов, пористость, проницаемость пористой среды, закон фильтрации Дарси, нелинейный закон фильтрации Форхгеймера и др.) (разделы **1.1**–**1.2**) и дан краткий обзор известных моделей пористых наполненных сред (разделы **1.3**–**1.4**): классической модели М. А. Био, модели В.Н. Николаевского, модели О. Косси, модели К. Вильманского, а также модели Г.Л. Бровко и ее частного случая — модели А. Г. Гришаева. В данном разделе разъяснено ключевое понятие данной работы — понятие *интерактивной силы*, изложены классификации интерактивных сил и режимов движения жидкостей (газов) в пористой среде (раздел **1.4.1**).

Под интерактивными силами понимаются объемные силы взаимного сопротивления жидкости и каркаса при протекании (проникновении, просачивании) жидкости сквозь каркас.

Для двухфазной пористой среды в работе рассмотрена зависимость вектора объемной плотности интерактивной силы $\mathbf{f}$ (действия жидкости на каркас) в виде функции от скоростей $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{v}_{\mathrm{s}}$ и ускорений движения фаз $\mathbf{w}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{w}_{\mathrm{s}}$ — жидкости и каркаса (скелета) соответственно:

$$\mathbf{f} = \mathbf{p}(\mathbf{v}_{\mathrm{f}}, \mathbf{v}_{\mathrm{s}}, \mathbf{w}_{\mathrm{f}}, \mathbf{w}_{\mathrm{s}}). \tag{1}$$

Ранее Г. Л. Бровко была получена количественная оценка для модуля вектора $\mathbf{f}$:

$$|\mathbf{f}| \equiv \mathrm{f} \equiv \mathrm{f}_{\mathrm{F}} + \mathrm{f}_{\mathrm{D}} + \mathrm{f}_{\mathrm{B}}, \tag{2}$$

где

$$\mathrm{f_F} := \frac{\rho v^2}{d}\varphi_{\mathrm{F}}(m) \equiv \rho\varphi_{\mathrm{F}}(m)\frac{v^2}{d}, \tag{3}$$

$$\mathrm{f_D} := \frac{\rho v^2}{d}\varphi_{\mathrm{D}}(m)\frac{1}{\mathrm{Re}} \equiv \rho\varphi_{\mathrm{D}}(m)\frac{\nu v}{d^2}, \tag{4}$$

$$\mathrm{f_B} := \frac{\rho v^2}{d}\varphi_{\mathrm{B}}(m)\frac{1}{B} \equiv \rho\varphi_{\mathrm{B}}(m)w. \tag{5}$$

причем $v \equiv |\mathbf{v}_{\mathrm{r}}| \equiv |\mathbf{v}_{\mathrm{f}} - \mathbf{v}_{\mathrm{s}}|$ и $w \equiv |\mathbf{w}_{\mathrm{f}} - \mathbf{w}_{\mathrm{s}}|$ соответственно модули относительной скорости и относительного ускорения взаимного движения жидкости и каркаса; $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v d}{\mu} \equiv \dfrac{vd}{\nu}$ — число Рейнольдса; $B = \dfrac{v^2}{wd}$ – безразмерный параметр; μ, ν — соответственно, динамическая и кинематическая вязкости жидкости; ρ — плотность жидкости, d — характерный размер пористой структуры.

Слагаемые $\mathrm{f_F}$, $\mathrm{f_D}$, $\mathrm{f_B}$ можно трактовать соответственно как силы *динамического напора*, *вязкого сопротивления* (закон Дарси), *инерционного сопротивления* (типа присоединенных масс Био).

Предположив,что величины функций φ_{F}, φ_{D}, φ_{B} имеют один порядок, получаем таблицу представления величины f при различных режимах движения:

Таблица 1: Таблица эффективного представления величины f

	$\mathrm{Re} \ll 1$	$\mathrm{Re} \sim 1$	$\mathrm{Re} \gg 1$
$\mathrm{B} \ll 1$	$0 + \mathrm{f_D} + \mathrm{f_B}$	$0 + 0 + \mathrm{f_B}$	$0 + 0 + \mathrm{f_B}$
$\mathrm{B} \sim 1$	$0 + \mathrm{f_D} + 0$	$\mathrm{f_F} + \mathrm{f_D} + \mathrm{f_B}$	$\mathrm{f_F} + 0 + \mathrm{f_B}$
$\mathrm{B} \gg 1$	$0 + \mathrm{f_D} + 0$	$\mathrm{f_F} + \mathrm{f_D} + 0$	$\mathrm{f_F} + 0 + 0$

Для произвольных движений вектор объемной плотности интерактивной силы имеет в соответствии с (2)–(5) вид:

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_{\mathrm{F}} + \mathbf{f}_{\mathrm{D}} + \mathbf{f}_{\mathrm{B}} \equiv \left(c_0(\rho_{\mathrm{f}}, m, d)v + d_0(m, d, \mu_{\mathrm{f}}) + b_0(\rho_{\mathrm{f}}, m)\frac{\dot{v}}{v}\right)\mathbf{v}_{\mathrm{r}}, \tag{6}$$

$$c_0(\rho_{\mathrm{f}}, m, d) = \frac{\rho_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{F}}(m)}{d},\ d_0(m, d, \mu_{\mathrm{f}}) = \frac{\mu_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{D}}(m)}{d^2},\ b_0(\rho_{\mathrm{f}}, m) = \rho_{\mathrm{f}}\varphi_{\mathrm{B}}(m). \tag{7}$$

можно в конкретных случаях считать постоянными.

В настоящей работе получены следующие выражения для связи коэффициентов интерактивных сил Дарси и фронтального напора с общепринятыми в механике пористых сред величинами:

$$d_0 = \frac{\mu m^2}{k}, \tag{8}$$

$$c_0 = \frac{\beta \rho m^3}{\sqrt{k}}. \tag{9}$$

Здесь k — проницаемость пористого каркаса, β — безразмерный параметр порядка единицы.

В развитие классических моделей, Г. Л. Бровко была предложена следующая модель двухфазной жидконаполненной пористой среды, учитывающая материальные межфазные взаимодействия и различные режимы движения жидкости и каркаса:

$$\boldsymbol{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{I}\right), \tag{11}$$

$$J = |\det \boldsymbol{A}|, \tag{12}$$

уравнение сохранения массы каркаса

$$J = \frac{1 - m_0}{1 - m}, \tag{13}$$

уравнение сохранения массы жидкости

$$\frac{d\rho_{\mathrm{f}}}{dt} + \rho_{\mathrm{f}} \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{v}_{\mathrm{f}}) = 0, \tag{14}$$

уравнение движения каркаса

$$\mathrm{div}_{\mathbf{x}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right) + \rho_{\mathrm{s}} \mathbf{g}_{\mathrm{s}} + \mathbf{f}_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{s}} \frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2}, \tag{15}$$

уравнение движения жидкости

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{f}} \mathbf{g}_{\mathrm{f}} + \mathbf{f}_{\mathrm{f}} = \rho_{\mathrm{f}} \frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{dt}, \tag{16}$$

определяющее соотношение каркаса

$$\boldsymbol{P} = -(1 - m) p_{\mathrm{p}} \mathbf{I} + \frac{dU}{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \tag{17}$$

определяющее соотношение жидкости

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} = -m p_{\mathrm{p}} \mathbf{I} + \lambda_{\mathrm{f}} \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\, \mathbf{v}_{\mathrm{f}} \mathbf{I} + 2\mu_{\mathrm{f}} \mathrm{sym}(\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\, \mathbf{v}_{\mathrm{f}}), \tag{18}$$

уравнение, связывающие эффективную плотность ρ_{s} твердой фазы с истинной плотностью ρ_{sm0} материала каркаса и пористостью m:

$$\rho_{\mathrm{s}} = (1 - m)\rho_{\mathrm{sm0}}, \tag{19}$$

а также уравнения связи истинного давления в порах p_{p} и истинной плотности жидкости:

$$p_{\mathrm{p}} = \varphi\left(\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{m}\right). \tag{20}$$

Здесь известными величинами считаются: внешние массовые силы $\mathbf{g}_\mathrm{s}$, $\mathbf{g}_\mathrm{f}$ воздействия на каркас и жидкость; пористость каркаса при нулевой скорости жидкости m_0; эффективные вязкости, протекающей в конгломерате жидкости λ_f, μ_f; $\mathbf{f}_\mathrm{f}$, $\mathbf{f}_\mathrm{s}$ — векторы объемных сил воздействия фаз друг на друга (действия каркаса на жидкость и наоборот); постоянная плотность несжимаемого материала каркаса ρ_sm, U — упругий потенциал деформаций каркаса.

Неизвестными скалярными функциями считаются: девять компонент аффинора деформации $\boldsymbol{A}$, шесть компонент эффективного тензора деформаций Грина для каркаса $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, шесть компонент эффективного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода $\boldsymbol{P}$ для каркаса, шесть компонент эффективного тензора напряжений Коши $\boldsymbol{S}_\mathrm{f}$ для жидкости, три компоненты вектора положения точек каркаса в актуальной конфигурации $\mathbf{f}$ $(\boldsymbol{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t))$, пористость каркаса m, три компоненты вектора скорости жидкой среды $\mathbf{v}_\mathrm{f}$, эффективные плотности фаз ρ_f, ρ_s; истинное давление жидкости в порах p_p, детерминант аффинора деформации J.

Таким образом имеем систему из 38 скалярных уравнений для 38 неизвестных скалярных функций.

Данная модель описывает произвольные движения жидкости как при малых, так и при конечных деформациях пористого каркаса, что выделяет ее среди моделей, в большинстве случаев ограничивающихся описанием малых деформаций.

Важной отличительной чертой данной модели является использование интерактивных сил, введенных и классифицированных выше, для описания взаимодействия между каркасом и просачивающейся сквозь него жидкостью (жидкостями, газами или смесью жидкостей и газов). Использование интерактивных сил позволяет более точно и аккуратно описывать взаимодействие и классифицировать режимы течения.

Для случая малых деформаций каркаса в диссертации использована более простая модель, полученная на основе модели (10)–(20).

Данная модель двухфазной жидконаполненной пористой среды построена на гипотезе взаимопроникающих континуумов и предусматривает описание малых деформаций каркаса (лагранжево описание), а также произвольных или малых перемещений жидкости сквозь каркас (эйлерово описание). Материал каркаса предполагается несжимаемым, а жидкость либо сжимаемой, либо несжимаемой.

Основные соотношения модели включают уравнение движения твердой компоненты среды

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\mathrm{s} + \rho_\mathrm{s}\mathbf{g}_\mathrm{s} + \mathbf{f}_\mathrm{s} = \rho_\mathrm{s}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\mathrm{s}}{\partial t^2}, \tag{21}$$

уравнение движения жидкой компоненты среды

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{f}\mathbf{g}_\mathrm{f} + \mathbf{f}_\mathrm{f} = \rho_\mathrm{f}\frac{d\mathbf{v}_\mathrm{f}}{dt}, \tag{22}$$

уравнение сохранения массы твердой компоненты

$$m = m_0 + (1 - m_0)\operatorname{div}\mathbf{u}_\mathrm{s}, \tag{23}$$

уравнение сохранения массы жидкой компоненты

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_{\mathrm{f}} \mathbf{v}_{\mathrm{f}}) = 0, \tag{24}$$

определяющие соотношения компонент

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} = -(1-m)p_{\mathrm{p}}\mathbf{I} + \lambda_{\mathrm{s}}\mathrm{div}\,\mathbf{u}_{\mathrm{s}}\mathbf{I} + 2\mu_{\mathrm{s}}\mathrm{sym}(\mathrm{grad}\,\mathbf{u}_{\mathrm{s}}), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} = -mp_{\mathrm{p}}\mathbf{I} + \lambda_{\mathrm{f}}\mathrm{div}\,\mathbf{v}_{\mathrm{f}}\mathbf{I} + 2\mu_{\mathrm{f}}\mathrm{sym}(\mathrm{grad}\,\mathbf{v}_{\mathrm{f}}), \tag{26}$$

уравнения, связывающие эффективные плотности ρ_{s} твердой и ρ_{f} жидкой фаз с истинными плотностями ρ_{sm} материала каркаса и ρ_{fm} жидкости

$$\rho_{\mathrm{s}} = (1-m)\rho_{\mathrm{sm}}, \tag{27}$$

$$\rho_{\mathrm{f}} = m\rho_{\mathrm{fm}}, \tag{28}$$

а также уравнения связи истинного давления в порах p_{p} и истинной плотности жидкости для сжимаемой жидкости

$$p_{\mathrm{p}} = \varphi(\rho_{\mathrm{fm}}), \tag{29}$$

либо условие

$$\rho_{\mathrm{fm}} = \rho_{\mathrm{fm0}} \equiv \mathrm{const}, \tag{30}$$

для несжимаемой жидкости.

Здесь известными величинами считаются: внешние массовые силы $\mathbf{g}_{\mathrm{s}}$, $\mathbf{g}_{\mathrm{f}}$, воздействия на каркас и жидкость; пористость каркаса в ненапряженном состоянии m_0; эффективные характеристики упругости каркаса λ_{s}, μ_{s}; эффективные вязкости, протекающей в конгломерате жидкости λ_{f}, μ_{f}; $\mathbf{f}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{s}}$ —векторы объемных сил воздействия фаз друг на друга (действия каркаса на жидкость и наоборот); постоянная плотность несжимаемого материала каркаса ρ_{sm}.

Неизвестными величинами считаются: тензоры эффективных напряжений каркаса $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$ и жидкости $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}$, вектор перемещений каркаса $\mathbf{u}_{\mathrm{s}}$, вектор скорости жидкой среды $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, пористость m, эффективные плотности фаз ρ_{f}, ρ_{s}, истинное давление жидкости в порах p_{p}.

Замечание: здесь и в дальнейшем нижний индекс "f" относится к жидкости, а "s" — к каркасу.

Таким образом, соотношения (21)–(29) составляют систему 23 скалярных уравнений для 23 неизвестных скалярных функций: шесть компонент симметричного тензора эффективных напряжений каркаса $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$, шесть компонент симметричного тензора эффективных напряжений жидкости $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}$, три компоненты вектора перемещений каркаса $\mathbf{u}_{\mathrm{s}}$, три компоненты вектора скорости жидкой среды $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, пористость m, эффективные плотности фаз ρ_{f}, ρ_{s}; истинная плотность жидкости ρ_{fm}, истинное давление жидкости в порах p_{p}.

Вторая глава посвящена задачам об одномерном протекании жидкости (газа) сквозь пористый каркас из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил в случае малых деформаций каркаса. В данной главе рассмотрены следующие задачи:

1. Поперечное одномерное стационарное течение сжимаемой жидкости (газа) сквозь деформируемый пористый плоский слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края.

2. Поперечное одномерное стационарное течение сжимаемой жидкости сквозь пористый плоский деформируемый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора при закреплении входного края.

3. Поперечное одномерное стационарное течение сжимаемой жидкости сквозь пористый плоский деформируемый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении выходного края.

4. Стационарное течение сжимаемой жидкость сквозь сферический пористый деформируемый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора в случае закрепления внутренней границы каркаса.

5. Стационарное течение сжимаемой жидкости сквозь цилиндрический пористый деформируемый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора (в случае закрепления внутренней границы каркаса и в случае закрепления внешней границы каркаса).

В данной главе проведен анализ постановок задач о протекании жидкости (газа) сквозь твердый пористый деформируемый каркас при малых деформациях каркаса.

Для каждой задачи применена собственная схема расчета, реализованная при помощи пакета Maple. Получены графики основных величин, характеризующих задачу: скорости жидкости (газа), перемещений точек каркаса, истинного давления в порах, истинной плотности жидкости (газа), напряжений возникающих в обеих фазах.

Исследовано влияние расхода жидкости и коэффициентов интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора на основные параметры задачи.

Для изложения расчетной схемы приведем постановку и решение задачи о стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый деформируемый слой конечной толщины L (сечение каркаса на входе жидкости закреплено от перемещений) при отсутствии внешних массовых сил (разделы **2.1.5** – **2.1.6** диссертации).

Введем декартову систему координат с началом в точке проникновения жидкости в каркас; ось x направим в сторону течения жидкости. Будем считать движение одномерным (т.е. все функции зависят только от координаты x).

Для описания движения воспользуемся моделью с интерактивными силами.

Примем ряд упрощений: отсутствие эффективных вязкостей жидкой фазы ($\lambda_{\rm f} = 0, \mu_{\rm f} = 0$); малость перемещений и градиентов перемещений каркаса; пористость m ($m = m_0 + (1 - m_0)\mathrm{div}\mathbf{u}_{\rm s}$, где m_0 — пористость каркаса в ненапряженном состоянии, $u_{\rm s}$ — поле перемещений каркаса) положим приближенно постоянной: $m = m_0$, $\mathbf{v}_{\rm f} = \mathbf{v}_{\rm r}$ (в силу стационарности течения).

Также будем считать, что из интерактивных сил действуют только сила Дарси и сила фронтального напора, взятые в виде: $\mathbf{f}_{\rm D} = d_0\mathbf{v}_{\rm f}$, $\mathbf{f}_{\rm F} = c_0|\mathbf{v}_{\rm f}| \cdot \mathbf{v}_{\rm f}$ (где d_0, c_0 — известные константы, $\mathbf{v}_{\rm f}$ — скорость жидкости), соответственно.

Связь между истинным давлением в порах $p_{\rm p}$ и истинной плотностью жидкости $\rho_{\rm fm}$ примем линейной.

С учетом этих предположений большинство скалярных уравнений модели с интерактивными выполнится тождественно ($0 \equiv 0$). Остальные уравнения для рассматриваемого стационарного течения жидкости примут вид:

$$\frac{d\sigma^{\rm s}}{dx} + d_0 v + c_0 v^2 = 0, \tag{31}$$

$$\frac{d\sigma^{\rm f}}{dx} - d_0 v - c_0 v^2 = m\rho_{\rm fm} v \frac{dv}{dx}, \tag{32}$$

$$\frac{d(m\rho_{\rm fm} v)}{dx} = 0, \tag{33}$$

$$\sigma^{\rm s} = -(1-m)p_{\rm p} + (\lambda_{\rm s} + 2\mu_{\rm s})\frac{du}{dx}, \tag{34}$$

$$\sigma^{\rm f} = -mp_{\rm p}, \tag{35}$$

$$p_{\rm p} = p_0 + c_{\rm fm}(\rho_{\rm fm} - \rho_{\rm fm0}), \tag{36}$$

где неизвестными функциями являются: компоненты эффективных тензоров напряжений каркаса и жидкости $\sigma^{\rm s} = \sigma^{\rm s}_{11}$, $\sigma^{\rm f} = \sigma^{\rm f}_{11}$; скорость жидкости v, перемещение точек каркаса u, истинное давление в порах $p_{\rm p}$, истинная плотность жидкости $\rho_{\rm fm}$.

Коэффициент силы Дарси d_0, эффективные характеристики упругого каркаса $\lambda_{\rm s}$, $\mu_{\rm s}$; постоянная пористость m_0, характеристики связи давления и истинной плотности жидкости p_0, $\rho_{\rm fm0}$, $c_{\rm fm}$ считаются известными константами.

Мы получаем систему из шести уравнений для шести неизвестных функций.

Примем следующие граничные условия:

$$u(0) = 0, \tag{37}$$

$$v(0) = \frac{v_{\rm inc}}{m}, \tag{38}$$

$$\sigma_{\rm s}(L) = -(1-m)p_{\rm p}(L), \tag{39}$$

$$p_{\rm p}(0) = p_{\rm inc}, \tag{40}$$

где $p_{\rm inc}$ и $v_{\rm inc}$ — граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости перед входом в пористый слой.

Граничное условие (37) означает закрепление левого (входного) края, условие (38) задает входное значение скорости; граничные условия (39)–(40) — силовые условия на границах каркаса (значение давления на входе и отсутствие "сухой" части напряжений каркаса на выходе).

Выражая уравнения системы (31)–(36) через переменные u и v, приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left(\frac{c_1 c_{\text{fm}}}{v^2} - c_1\right)\frac{dv}{dx} - d_0 v - c_0 v^2 = 0, \tag{41}$$

$$\left(\frac{(1-m)c_1 c_{\text{fm}}}{mv^2}\right)\frac{dv}{dx} + (\lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}})\frac{d^2u}{dx^2} + d_0 v + c_0 v^2 = 0. \tag{42}$$

Неизвестная константа c_1 в уравнениях (41) и (42), выражающая расход жидкости, получена интегрированием уравнения (33):

$$m\rho_{\text{fm}} v = c_1. \tag{43}$$

Данная константа интегрирования вычисляется заранее при помощи уравнений (33), (36) и граничных условий (38) и (40) следующим образом:

$$c_1 = \left(\frac{p_{\text{inc}} - p_0}{c_{\text{fm}}} + \rho_{\text{fm0}}\right)\cdot v_{\text{inc}}, \tag{44}$$

поэтому для решения системы (41)–(42) достаточно граничных условий (37)–(39).

Теперь приведем систему (41)–(42) к безразмерному виду. Для этой цели возьмем следующие размерные величины:

$$[L] = \text{м}, \quad [\rho_{\text{fm0}} L^3] = \text{кг}, \quad \left[\frac{L}{v_{inc}}\right] = \text{с}. \tag{45}$$

Приведем соотношения между физическими величинами задачи и их безразмерными аналогами (тильда обозначает безразмерный аналог соответствующей физической величины):

$$v = \frac{v_{inc}}{m}\,\tilde{v},\ u = L\tilde{u},\ x = L\tilde{x},\ c_1 = \rho_{\text{fm0}}\, v_{\text{inc}}\tilde{c}_1,\ c_{\text{fm}} = v_{\text{inc}}^2\,\tilde{c}_{\text{fm}},$$
$$d_0 = \frac{\rho_{\text{fm0}}\, v_{\text{inc}}}{L}\tilde{d}_0,\ c_0 = \frac{\rho_{\text{fm0}}}{L}\,\tilde{c}_0,\ \lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = \rho_{\text{fm0}}\, v_{inc}^2\,(\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}}),\ p = p_0\tilde{p}. \tag{46}$$

В терминах безразмерных величин (46) система (41)–(42) примет вид:

$$\left(\frac{m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{\tilde{v}^2} - \frac{\tilde{c}_1}{m}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} - \left(\frac{\tilde{c}_0}{m^2}\right)\tilde{v}^2 = 0, \tag{47}$$

$$\left(\frac{(1-m)\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{\tilde{v}^2}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} + (\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}})\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} + \left(\frac{\tilde{c}_0}{m^2}\right)\tilde{v}^2 = 0. \tag{48}$$

Граничные условия (37)–(39) примут вид:

$$\tilde{u}(0) = 0, \tag{49}$$

$$\tilde{v}(0) = 1, \tag{50}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}(1) = 0. \tag{51}$$

Для численного решения системы (47)–(48) возьмем следующие размерные величины, качественно соответствующие протеканию невязкой сравнительно тяжелой жидкости (физически сходной с бензолом или ацетоном) сквозь песчаниковый ("sandstones") каркас и грунт ("soil"):

$$c_{\text{fm}} = 3,24 \cdot 10^6 \, \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \; v_{\text{inc}} = 0.01 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}, \; L = 1 \, \text{м}, \; m = 0.07, \tag{52}$$
$$\rho_{\text{fm0}} = 800 \, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \; \lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = 12 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \; p_0 = 10^5 \, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Для каркаса возьмем два значения проницаемости $k_1 = 10^{-10}\text{м}^2$ и $k_2 = 10^{-12}\text{м}^2$. Данные значения качественно соответствуют проницаемости почвы и песчаника соответственно.

Тогда согласно (8) и (9) получим две пары значений коэффициента Дарси и коэффициента силы фронтального напора $(d_0, c_0) = (490 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}, 24010 \frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ и $(d_0, c_0) = (4,9 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}, 2,4 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ (для почвы и песчаника соответственно).

Для почвы и песчаника расчет проведем как с наличием силы фронтального напора, так и при ее отсутствии (при фиксированном значении коэффициента силы Дарси).

Вязкость жидкости μ примем равной 10^{-3} Па $\cdot$ с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Тогда для числа Рейнольдса Re получим оценку $\text{Re} \gg 1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будут вносить силы типа Дарси и фронтального напора, причем при увеличении числа Рейнольдса влияние силы Дарси будет уменьшаться по сравнению с силой фронтального напора.

Расход c_1 согласно (44) примет значение $8,03 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Для параметров (52) численно решим систему (47)–(48) с граничными условиями (49)–(51).

Графики основных величин (для четырех пар значений $(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0)$): скорости жидкости $\tilde{v}$, перемещения точек каркаса $\tilde{u}$, истинного давления в порах $\tilde{p}_{\text{p}}$, истинного значения плотности жидкости $\tilde{\rho}_{\text{fm}}$ в зависимости от $\tilde{x}$ — представлены на (рис 1).

График, изображенный на рисунке 1а), иллюстрирует тот факт, что скорость течения жидкости на границе проникновения в пористый каркас несколько меньше скорости на выходе. Это соответствует механическому смыслу, так как истинное давление и истинная плотность жидкости на входе выше истинного давления на выходе (что иллюстрируют

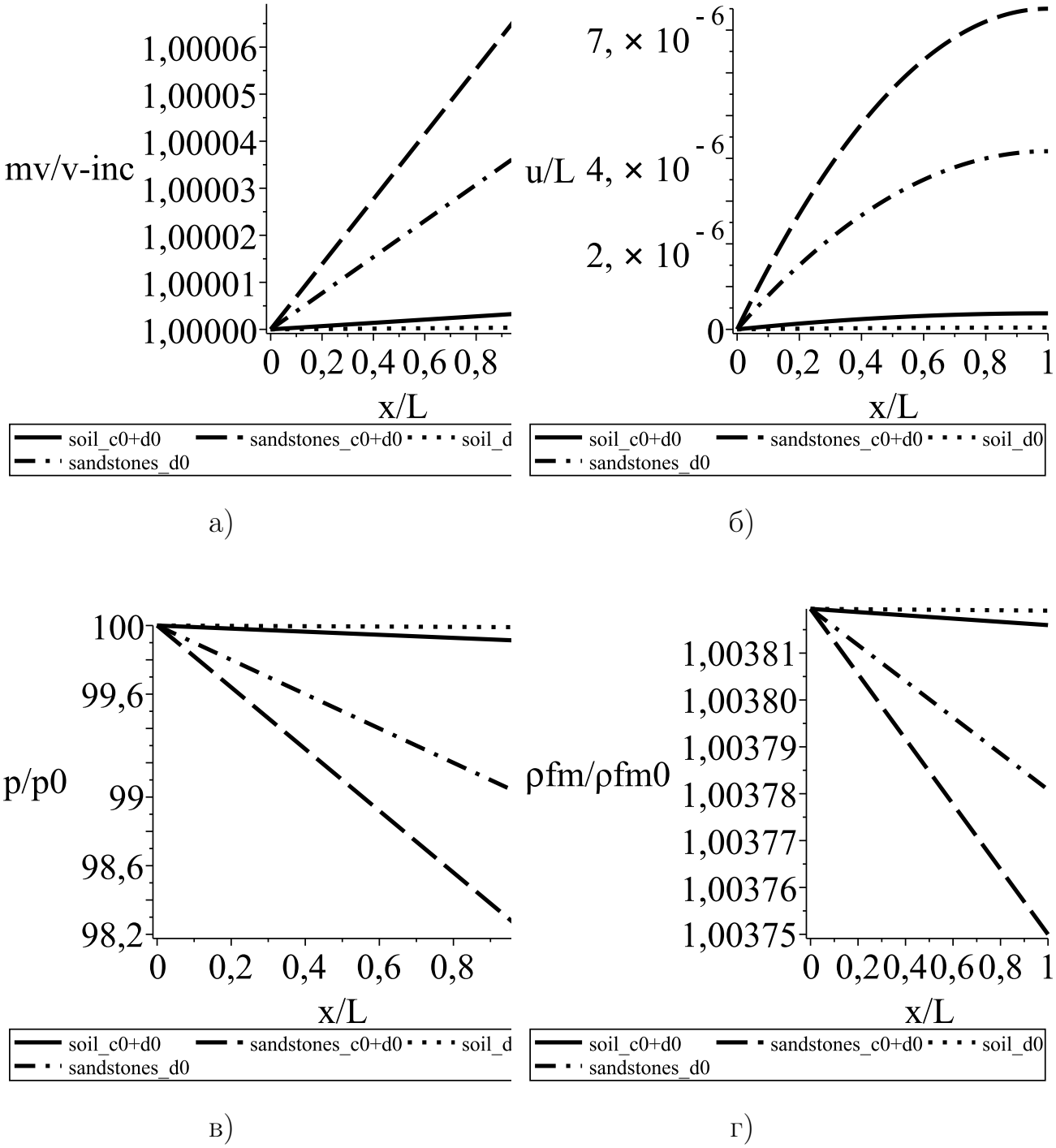

Рис. 1: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора при закреплении входного края для четырех пар значений коэффициентов сил Дарси и фронтального напора при малых деформациях каркаса: а) скорость жидкости $\tilde{v}$, б) перемещения точек каркаса $\tilde{u}$, в) истинное давление в порах $\tilde{p}$, г) истинная плотность жидкости $\tilde{\rho}_{\mathrm{fm}}$.

рисунки 1в) и 1г)). Рисунок 1б) иллюстрирует тот факт, что перемещения несколько возрастают от входа к выходу (в силу наличия сопротивления Дарси) и имеют нулевую производную по $\tilde{x}$ при $\tilde{x} = 1$ (что соответствует граничному условию (51)).

Увеличение коэффициента Дарси и коэффициента сила фронтального приводит к существенному увеличению перепадов (разницы значений на входе и выходе) всех основных параметров задачи.

Графики показывают, что учет силы типа фронтального напора существенно влияет на значения перепадов всех величин, что согласуется с таблицей влияния интерактивных сил.

Третья глава посвящена задачам об одномерном протекании жидкости (газа) сквозь пористый деформируемый каркас из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил в случае конечных деформаций каркаса. В этой главе предложены новые соотношения для интерактивных сил, позволяющие решать задачи в случае конечных деформаций каркаса.

В случае конечных деформаций каркаса коэффициенты d_0, b_0, c_0 считаются функциями пористости каркаса m.

В качестве функции $d(m)$, характеризующей интерактивную силу типа Дарси (силу действия жидкости на каркас) в случае конечных деформаций, взята предложенная автором в разделе **3.1** функция:

$$d(m) = d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \frac{1-m}{1-m_0}, \tag{53}$$

удовлетворяющая трем естественным условиям:

$$m = m_0 \Rightarrow d = d_0, \tag{54}$$

$$m \to 1 \Rightarrow d \to 0, \tag{55}$$

$$m \to 0 \Rightarrow d \to \infty. \tag{56}$$

Первое условие задает значение функции для пористости каркаса m_0 (при $\mathbf{v}_\mathrm{f} = 0$). Второе условие обозначает, что при единичной пористости каркаса отсутствует фильтрационное сопротивление (свободное протекание жидкости). Третье условие обозначает, что при "схлопывании" пор фильтрационное сопротивление "бесконечно возрастает".

Аналогичным образом заданы коэффициенты силы фронтального напора и силы типа Био (сил действия жидкости на каркас):

$$c(m) = c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \frac{1-m}{1-m_0}, \tag{57}$$

$$b(m) = b_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \frac{1-m}{1-m_0}, \tag{58}$$

В диссертации приведены постановка и численное решение задачи об одномерном поперечном протекании жидкости (газа) сквозь плоский бесконечный пористый слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил в случае конечных деформаций каркаса при прямом (раздел

3.2) и обратном (**3.3**) протеканиях. Для этой цели использован частный случай модели для случая двухфазной среды ("каркас–жидкость").

В работе рассмотрена задача о стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости через плоский бесконечный деформируемый пористый слой конечной толщины L (входной край закреплен от перемещений) из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил и конечных деформациях каркаса.

В качестве функции $d(m)$, характеризующей интерактивную силу типа Дарси (силу воздействия жидкости на каркас) в случае конечной деформации, взята функция (53).

В качестве функции $c(m)$, характеризующей интерактивную силу типа фронтального напора (силу воздействия жидкости на каркас) в случае конечной деформации, взята функция (57).

Для описания движения использована моделью с интерактивными силами.

Для простоты принято, что эффективные вязкости жидкой фазы отсутствуют ($\lambda_{\mathrm{f}} = 0, \mu_{\mathrm{f}} = 0$).

Связь между истинным давлением в порах p_{p} и истинной плотностью жидкости ρ_{fm} принята линейной.

За отсчетную конфигурацию каркаса принята конфигурация, которую занимает конгломерат при $v = 0$.

Движение считается одномерным (ось координат x введем в направлении течения жидкости).

С учетом этих предположений большинство скалярных уравнений модели с интерактивными силами выполняется тождественно. Остальные уравнения для рассматриваемого стационарного течения жидкости с учетом одномерности движения (x — лагранжева координата отсчетной конфигурации) принимают следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}\right)^2 - 1\right), \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}} = \frac{1-m_0}{1-m}, \tag{60}$$

$$\frac{d(\rho_{\mathrm{f}} v)}{d\mathrm{x}} = 0, \tag{61}$$

$$\frac{d}{d\mathrm{x}}\left(P \cdot \frac{1-m_0}{1-m}\right) + d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v + c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = 0, \tag{62}$$

$$\frac{dS_{\mathrm{f}}}{d\mathrm{x}} - d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v - c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = \rho_{\mathrm{f}} v \frac{dv}{d\mathrm{x}}, \tag{63}$$

$$P = -(1-m)p_{\mathrm{p}}\left(\frac{df}{d\mathrm{x}}\right)^{-1} + \frac{dU}{d\varepsilon}, \tag{64}$$

$$S_{\mathrm{f}} = -mp_{\mathrm{p}}, \tag{65}$$

$$p_{\mathrm{p}} = p_0 + c_{\mathrm{fm}} \left(\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{m} - \rho_{\mathrm{fm0}} \right). \tag{66}$$

Неизвестными скалярными функциями являются: компонента вектора положения точек каркаса в актуальной конфигурации f, компонента эффективного тензора деформаций Грина ε для каркаса, пористость m, скорость жидкости v, истинное давление в порах p_{p}, эффективная плотность жидкости ρ_{f}, компонента эффективного тензора напряжения Коши $S_{\mathrm{f}} = S_{\mathrm{f}\,11}$ для жидкости, компонента эффективного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода $P = P_{11}$ для каркаса.

Коэффициент силы Дарси d_0, коэффициент силы фронтального напора c_0, пористость каркаса при нулевой скорости жидкости m_0, упругий потенциал деформаций каркаса U считаются известными.

Таким образом, получена система из восьми скалярных уравнений для восьми неизвестных скалярных функций.

Для задачи приняты следующие граничные условия:

$$f(0) = 0, \tag{67}$$

$$v(L) = \frac{v_{\mathrm{outc}}}{m(L)}, \tag{68}$$

$$P(L) = -(1-m)p_{\mathrm{p}}(L), \tag{69}$$

$$p_{\mathrm{p}}(L) = p_{\mathrm{outc}}. \tag{70}$$

Где p_{outc} и v_{outc} — известные граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости после выхода.

Граничное условие в (67) означает закрепление левого (входного) края, (68) задает выходное значение скорости; (69) и (70) — силовые условия на правом (выходном) краю каркаса (отсутствие "сухих" напряжений и значение давления на выходе).

В качестве упругого потенциала каркаса U взят потенциал для неогукова сжимаемого упругого материала:

$$U(\boldsymbol{A}) = a \cdot \|\boldsymbol{A}\|^2 + cJ^2 - h \ln J, \quad J = |\det \boldsymbol{A}|, \quad a > 0; c > 0; h > 0, \tag{71}$$

где $\boldsymbol{A}$ — аффинор деформации, а $\|\boldsymbol{A}\|^2 = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)$.

После выражения уравнений системы (59)–(66) через переменные v и m, получена система двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями v и m:

$$\left(p_0 + c_{\mathrm{fm}} \left(\frac{c_1}{mv} - \rho_{\mathrm{fm0}} \right) + \frac{h}{1-m_0} + \frac{2(a+c)(1-m_0)}{(1-m)^2} \right) \frac{dm}{d\mathrm{x}} \tag{72}$$
$$+ \frac{c_{\mathrm{fm}} c_1 (1-m)}{mv^2} \frac{dv}{d\mathrm{x}} + d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v + c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = 0,$$

$$\left(\frac{c_{\mathrm{fm}}c_1}{mv} - \left(p_0 + c_{\mathrm{fm}}\left(\frac{c_1}{mv} - \rho_{\mathrm{fm0}}\right)\right)\right)\frac{dm}{d\mathrm{x}} + \left(\frac{c_{\mathrm{fm}}c_1}{v^2} - c_1\right)\frac{dv}{d\mathrm{x}} \\ -d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v - c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = 0. \tag{73}$$

Неизвестная константа c_1, выражающая расход жидкости, получается из уравнения (61):

$$\rho_{\mathrm{f}} v = c_1. \tag{74}$$

Значение расхода найдено из уравнения (66) при помощи граничных условий (68) и (70) по формуле:

$$c_1 = \left(\frac{p_{\mathrm{outc}} - p_0}{c_{\mathrm{fm}}} + \rho_{\mathrm{fm0}}\right) \cdot v_{\mathrm{outc}}. \tag{75}$$

Для приведения системы (72)–(73) к безразмерному виду взяты (в качестве параметров обезразмеривания) следующие постоянные величины:

$$L, \quad \rho_{\mathrm{fm0}} L^3, \quad \frac{L}{v_{\mathrm{outc}}}. \tag{76}$$

Соотношения между физическими величинами задачи и их безразмерными аналогами (знак " ˜ " обозначает безразмерный аналог соответствующей физической величины) имеют вид:

$$v = \frac{v_{\mathrm{outc}}}{m}\,\tilde{v}, x = L\,\tilde{x}, c_1 = \rho_{\mathrm{fm0}}\, v_{\mathrm{outc}}\tilde{c}_1, \\ c_{\mathrm{fm}} = v_{\mathrm{inc}}^2\,\tilde{c}_{\mathrm{fm}}, c_0 = \frac{\rho_{\mathrm{fm0}}}{L}\,\tilde{c}_0, d_0 = \frac{\rho_{\mathrm{fm0}}\, v_{\mathrm{outc}}}{L}\,\tilde{d}_0, p = p_0\tilde{p}. \tag{77}$$

Граничные условия (67)–(69) принимают вид:

$$\tilde{f}(0) = 0, \tag{78}$$

$$\tilde{v}(1) = 1, \tag{79}$$

$$m(1) = m_0. \tag{80}$$

Граничное условие (80) получено из граничного условия (69) и уравнения (64).

Для численного решения системы (72)–(73) (после приведения ее к безразмерному виду) взяты следующие размерные величины, качественно соответствующие протеканию воды сквозь резиновый каркас:

$$c_{\mathrm{fm}} = 2.5 \cdot 10^6\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},\ v_{\mathrm{outc}} = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}},\ L = 1\,\text{м},\ m = 0,3, \\ \rho_{\mathrm{fm0}} = 1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, p_0 = 10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, a = 10^6\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, c = 10^6\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, h = 10^6\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \tag{81}$$

Для каркаса взято значение проницаемости $k = 10^{-12}$ м^2.

Согласно (8) и (9) получены следующие значения коэффициента Дарси и коэффициента силы фронтального напора $(d_0, c_0) = (9 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}, 2,7 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$.

Вязкость воды μ при нормальных условиях имеет порядок 10^{-3} Па $\cdot$ с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Расход c_1 согласно (75) принимает значение $1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Тогда для числа Рейнольдса Re получается оценка Re $\gg 1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будут вносить силы типа Дарси и фронтального напора.

Для параметров (81) численно решена система (72)–(73) с граничными условиями (78) – (80).

Расчет проведен в двух случаях: при постоянных коэффициентах силы типа Дарси d_0 и силы фронтального напора c_0 и при переменных, взятых в виде (53) и (57) соответственно.

График 2 а) показывает, что скорость течения жидкости $\tilde{v}$ на границе проникновения в пористый каркас меньше скорости на выходе.

Рисунок 2 б) показывает, что перемещения точек каркаса ($u(\text{x}) = f(\text{x}) - \text{x}$) (в силу наличия сопротивлений Дарси и фронтального напора) возрастает от входа к выходу.

Истинное давление (2 в)) на входе выше истинного давления на выходе.

Пористость каркаса (2 г)) на входе больше пористости на выходе.

Как видно из графиков всех величин, учет переменной пористости для коэффициентов интерактивных сил существенно влияет на перепады скорости жидкости, давления в порах, пористости и перемещения.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. На основе модели с интерактивными силами получены численные решения нескольких задач об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый каркас для различных режимов течения жидкости (при малых и больших числах Рейнольдса) и различных видов геометрии пористого тела (плоский, шаровой, цилиндрический деформируемые слои).

2. Исследовано влияние интерактивных сил на основные характеристики протекания. Показано, что увеличение коэффициентов интерактивных сил приводит к существенному увеличению перепадов всех основных характеристик протекания. Дополнительно исследовано влияние коэффициента силы фронтального напора при течениях с большими числами Рейнольдса, и показано, что учет данной силы существенно влияет на количественные параметры течения.

3. Предложены модельные зависимости для коэффициентов интерактивных сил (d_0, c_0, b_0) от пористости каркаса m, применительно к задаче об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый каркас при конечных деформациях каркаса.

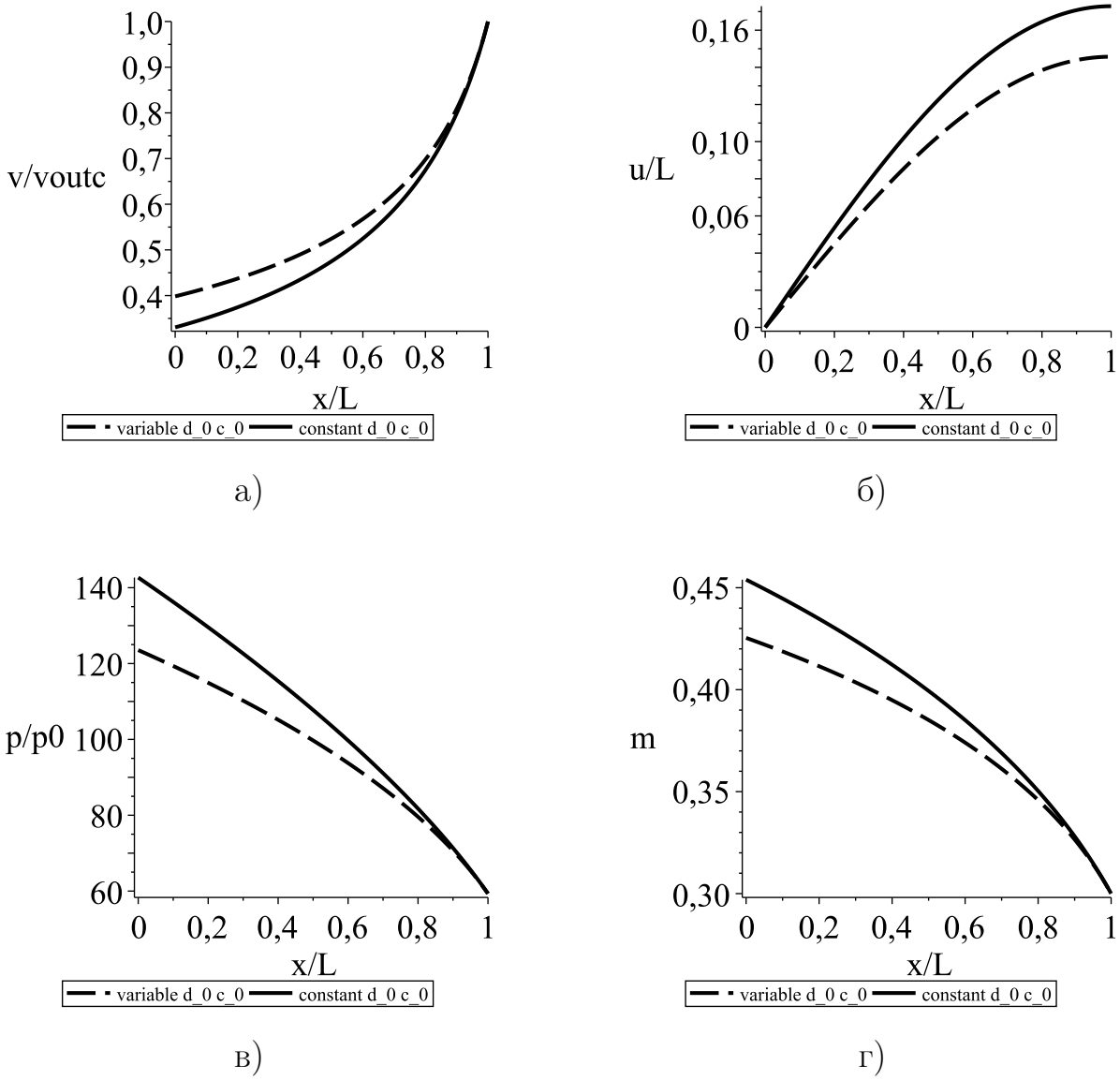

Рис. 2: Графики безразмерных величин в задаче о поперечном течении жидкости сквозь бесконечный пористый слой при конечных деформациях каркаса при закреплении входного края при постоянных коэффициентах интерактивных сил и при переменных: а) скорость жидкости $\tilde{v}$, б) перемещение точек каркаса $\tilde{u}$, в) истинное давление $\tilde{p}$, г) пористость m.

4. Поставлена и численно решена задача об одномерном поперечном стационарном протекании сжимаемой жидкости сквозь твердый пористый плоский слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора в случае конечных деформаций каркаса с использованием предложенных автором соотношений для коэффициентов интерактивных сил. На основе решения данной задачи проведено сравнение моделей с постоянными коэффициентами интерактивных сил и переменными, зависящими от пористости. Показано, что учет переменной пористости для коэффициентов интерактивных сил существенно влияет на перепады основных характеристик протекания.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Фасхеев И.О.* Одномерное течение жидкости сквозь пористый каркас с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2012. №6.

2. *Фасхеев И.О.* Течение жидкости в цилиндрическом пористом каркасе с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора. Известия МГТУ "МАМИ". Научный рецензируемый журнал. Серия 3. Естественные науки. М., МГТУ "МАМИ". 2013. №3 (17), т. 1, с. 152–157.

3. *Фасхеев И.О.* Одномерное течение жидкости сквозь плоский пористый слой при конечных деформациях // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2015. №2. С. 62–65.

4. *Бровко Г.Л., Фасхеев И.О* Моделирование процессов в пористых наполненных средах: экспериментальная идентификация интерактивных сил. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. Москва: Издательство Московского университета, 2012.

5. *Бровко Г.Л., Фасхеев И.О* Моделирование процессов в пористых наполненных средах с учетом интерактивных сил. Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики." Тула: Издательство ТулГУ, 2012. С. 116-117.

6. *Бровко Г.Л., Фасхеев И.О* Моделирование механических процессов в пористых наполненных средах при конечных деформациях каркаса. Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики." Тула: Издательство ТулГУ, 2013. С. 191-192.

7. *Фасхеев И.О.* Моделирование течения жидкости сквозь пористый каркас. Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2012" / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. М.: МАКС Пресс, 2012.

8. *Фасхеев И.О.* Моделирование процессов в пористых насыщенных средах при конечных деформациях твердого пористого каркаса. Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2013" / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, К.К. Андреев, М.В. Чистякова. М.: МАКС Пресс, 2013.

9. *Фасхеев И.О.* Стационарное течение жидкости сквозь плоский пористый слой при конечных деформациях. Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2014" / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. М.: МАКС Пресс, 2014.

Первые три публикации изданы в журналах, рекомендованных ВАК.