МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Кафедра теории упругости

На правах рукописи

УДК 539.3

Фасхеев Игорь Олегович

Моделирование механических процессов в пористых наполненных средах с учетом интерактивных сил

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф-м.н., профессор Бровко Г.Л.

Москва – 2017

Оглавление

Введение **5**

1 Основные понятия и краткий обзор известных моделей механики пористых наполненных сред **11**

1.1 Основные понятия механики пористых сред 11

1.2 Классификация режимов течения жидкости в пористой среде 15

1.3 Модели пористых наполненных сред 18

1.3.1 Модель Био 18

1.3.2 Модель В.Н. Николаевского 20

1.3.3 Модель О. Косси 22

1.3.4 Модель К. Вильманского 24

1.4 Модель Г. Л. Бровко 27

1.4.1 Структура интерактивных сил 27

1.4.2 Модель Г. Л. Бровко 30

1.4.3 Модель с интерактивными силами для малых деформаций каркаса 31

1.5 Краткий сравнительный анализ моделей 34

2 Движения с малыми деформациями пористого каркаса **36**

2.1 Задачи о поперечном течении сквозь плоский пористый слой 36

2.1.1 Общая постановка задач о поперечном течении сквозь плоский пористый слой при малых деформациях каркаса 36

2.1.2 Аналитическое решение задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края 39

2.1.3 Численное решение одномерной задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края 43

2.1.4 Альтернативная постановка задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края 46
2.1.5 Аналитические построения для задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом сил Дарси и фронтального напора при закреплении входного края 47
2.1.6 Численное решение задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора при закреплении входного края 50
2.1.7 Задача о течении жидкости сквозь плоский пористый слой при закреплении выходного края 51
2.1.8 Аналитическое решение одномерной задачи о течении газа сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси 53
2.1.9 Численное решение одномерной задачи о течении газа сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси 56
2.2 Задачи о течении жидкости сквозь сферический пористый слой 58
2.2.1 Общая постановка задач о течении жидкости сквозь сферический пористый слой 58
2.2.2 Численное решение задачи о течении жидкости сквозь сферический пористый слой 61
2.3 Задачи о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой 64
2.3.1 Общая постановка задач о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой 64
2.3.2 Численное решение задачи о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой при закреплении внутренней границы каркаса 67
2.3.3 Задача о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой в случае закрепления внешней границы каркаса 68
2.4 Основные результаты раздела 71

3 Движения с конечными деформациями пористого каркаса 74
3.1 Модель интерактивных сил в случае конечных деформаций 74

3.2 Задача о поперечном течении жидкости через плоский пористый слой при конечных деформациях каркаса в случае закрепления входного края 75
3.3 Задача о поперечном течении жидкости через плоский пористый слой при конечных деформациях каркаса в случае закрепления выходного края 81
3.4 Основные результаты раздела 82

Заключение **85**

Список литературы **86**

Введение

Данная работа посвящена моделированию механических процессов в пористых наполненных средах.

Актуальность проблемы

Механические процессы течения жидкостей (газов) сквозь пористые твердые тела широко распространены в различных сферах жизнедеятельности человека: в промышленности (добыча нефти и природного газа из подземных пластов, функционирование очистных сооружений заводов), строительстве (сбор и отвод грунтовых вод от сооружений с помощью системы дренажных труб, каналов, скважин и других устройств), сельском хозяйстве (миграция влаги в плодородных почвах).

Широкое использование в инженерной практике процессов переноса массы в пористых насыщенных средах требует модернизации технологий на основе более совершенных моделей течений и взаимодействий в пористых средах.

Краткая историческая справка

Одним из первых ученых в области механики грунтов был австрийский (позднее американский) геолог и инженер-строитель Карл Терцаги (1883-1963). Его работы [60–62] внесли неоценимый вклад в научное понимание фундаментальных свойств грунтов, а также выделили механику грунтов как самостоятельную науку. Терцаги в работе [62] рассмотрел задачу об одномерном плоском сжатии насыщенного водой грунта. К. Терцаги исследовал вопрос о протекании жидкости через проницаемую границу пористой среды. Он показал, что величина массы, проникшей через единицу площади за единицу времени, зависит от перепада давления в порах.

Основателем механики пористых сред считается бельгийский (позднее американский) ученый Морис Био (1905–1985). Его работы затрагивают широкий спектр вопросов: линейная теория механики насыщенных жидкостью пористых сред с учетом вязко-упругих свойств и релаксационных

эффектов [5], теория распространения акустических волн в пористых средах [5–7], теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды [8] и др.

Крупнейшими советскими учеными в области механики пористых наполненных сред можно назвать Н. М. Герсеванова, П. Я. Полубаринову-Кочину, Г. И. Баренблатта, В.Н. Николаевского, Х.А. Рахматулина, Р. И. Нигматулина, С. А. Христиановича.

Построение моделей многофазных (гетерогенных) сред требует строгого математического описания их механических свойств, закономерностей движений и фазовых превращений, видов внешних нагрузок, определяющих условия для движений и внутренних взаимодействий.

Механические свойства моделей многофазных сред включают свойства сопротивления деформированию отдельных фаз, характеристики связности, выражающие взаимное влияние фаз друг на друга, соотношения, описывающие взаимное превращение фаз, а также соотношения, выражающие внутренние кинематические связи гетерогенной системы и силовые интерактивные взаимодействия фаз при их относительном движении. Интерактивные взаимодействия играют важную роль в подобных моделях, определяя характер механических процессов, происходящих в многофазных средах [13].

Тип и структура интерактивных взаимодействий в многофазных средах, включая силы типа Дарси и типа инерционного сопротивления Био в насыщенных пористых средах, рассматривались в работах [9–13, 27, 34, 47, 82, 83, 87, 88, 91, 101].

В работах [13, 14, 91, 101] применялись термодинамические принципы и свойства инвариантности силовых и кинематических характеристик.

Отдельно отметим, что в работе [101] был проведен анализ анализ сил инерционного сопротивления типа Био и проведены верные выкладки. Однако, как отмечено в [13], вывод о независимости объемных интерактивных сил от ускорений движения фаз является неточным.

Основные цели диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Решение задач о течении жидкости через пористый твердый каркас при малых деформациях каркаса для различных режимов течения жидкости и типов геометрии каркаса с использованием модели с интерактивными силами [10, 12, 13].

2. Исследование влияния интерактивных сил на основные характеристики протекания.

3. Разработка дополнений к модели [10, 12, 13] и решение на их основе задач о течении жидкости в пористом каркасе при конечных деформациях каркаса.

Структура работы

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы.

В **первой** главе приведены основные понятия и гипотезы рассматриваемого раздела механики сплошных сред (гипотеза взаимопроникающих континуумов, пористость, проницаемость пористой среды, закон фильтрации Дарси, нелинейный закон фильтрации Форхгеймера и др.) и дан краткий обзор известных моделей пористых наполненных сред: классической модели М. А. Био, модели В.Н. Николаевского, модели О. Косси, модели К. Вильманского, а также модели Г.Л. Бровко и ее частного случая — модели А. Г. Гришаева. Также в данном разделе разъяснено ключевое понятие данной работы — понятие *интерактивной силы*, даны классификации интерактивных сил и режимов движения жидкостей (газов) в пористой среде.

Вторая глава посвящена задачам о протекании жидкости (газа) сквозь пористый каркас из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил в случае малых деформаций каркаса. В этой главе рассмотрено несколько типов задач для различных видов геометрии каркаса (плоский, шаровой и цилиндрический пористые деформируемые слои) при различных граничных условиях и различных режимах течения. Все задачи поставлены на основе модели А.Г. Гришаева [27] и численно решены при помощи пакета Maple. Для некоторых задач помимо численных получены и аналитические решения при дополнительном предположении о равенстве нулю инерционного члена.

Третья глава посвящена задачам об одномерном протекании жидкости (газа) сквозь плоский пористый слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил в случае конечных деформаций каркаса. В этой главе предложены новые соотношения для интерактивных сил, позволяющие решать задачи в случае конечных деформаций каркаса. Даны постановка и численное решение задачи об одномерном поперечном протекании жидкости (газа) сквозь плоский бесконечный пористый слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил в случае конечных деформаций каркаса при прямом и обратном протеканиях. Для этой цели использован частный случай модели [10] для случая двухфазной среды (”каркас–жидкость”).

Список литературы содержит названия статей и книг, использо-

ванных автором при подготовке настоящей работы. Он содержит как классические источники по механике сплошных сред и математике, так и работы современных авторов.

Научная новизна

1. Проведен анализ постановок задач об одномерном протекании жидкости (газа) сквозь пористый деформируемый слой при малых деформациях каркаса.

2. Разработана расчетная схема для численного решения задач об одномерном протекании жидкости (газа) сквозь пористый деформируемый слой при малых деформациях каркаса на основе модели с интерактивными силами для различных режимов протекания и различных видов геометрии слоя (плоский, сферический, цилиндрический слои).

3. Предложены модификации модели интерактивных сил для случая конечных деформаций каркаса. Данный результат дополняет модель с инерактивными силами, полученную ранее.

4. Поставлена и численно решена задача об одномерном протекании жидкости сквозь плоский пористый деформируемый слой в случае конечных деформаций каркаса. Данный результат является наиболее новым. Автору неизвестны решения аналогичных задач для конечных деформаций каркаса.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается использованием строго обоснованных методов математики и механики сплошных сред, физической и математической корректностью постановок задач.

Личный вклад. Модель для пористой наполненной среды с интерактивными силами предложена Г. Л. Бровко. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

1. Научная конференция "Ломоносовские чтения", секция механики, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва 2011-2014, 2016.

2. Конференция-конкурс молодых ученых института механики МГУ, Москва, 2012-2014.

3. Международный молодежный научный форум "ЛОМОНОСОВ", Москва, 2012-2014.

4. Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики", Тула, 2012–2013.

5. Аспирантский семинар кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Кийко И.А., 2010–2013.

6. Аспирантский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством проф. Горбачева В.И., м.н.с. Вакулюка В.В., 2014, 2016.

7. Научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН Ломакина Е. В., академика РАН Горячевой И. Г., 2014.

8. Научно-исследовательский семинар кафедры волновой и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством академика РАН Р. И. Нигматулина, 2014.

9. Семинар НИИ механики МГУ по механике деформируемого твердого тела под руководством проф. Р.А. Васина., 2017.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в [17–19, 65–70]. Из них [65–67] включены в перечень ВАК.

Положения, выносимые на защиту

1. На основе модели с интерактивными силами разработаны численные и аналитические подходы к решению широкого класса задач об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый деформируемый каркас для различных режимов течения жидкости (с большими и малыми числами Рейнольдса) и различных видов геометрии пористого тела (плоский, шаровой, цилиндрический деформируемые слои). На основе этих решений исследовано влияние интерактивных сил на основные характеристики протекания;

2. Предложены модельные зависимости для коэффициентов интерактивных сил от пористости каркаса, применительно к задаче об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый каркас при конечных деформациях каркаса;

3. Поставлена и численно решена задача об одномерном поперечном стационарном протекании сжимаемой жидкости сквозь твердый пористый плоский слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора в случае конечных деформаций каркаса с использованием предложенных автором соотношений для коэффициентов интерактивных сил.

Глава 1

Основные понятия и краткий обзор известных моделей механики пористых наполненных сред

В данном разделе приведены основные понятия механики пористых сред, разъяснено понятие *интерактивной силы*, приведена классификация интерактивных сил и режимов течения жидкостей в пористой среде.

Также в данном разделе приведен краткий обзор моделей пористых наполненных сред: классической модели Био [82], модели В. Н. Николаевского [47], модели О. Косси [88], модели К. Вильманского [103], модели Г. Л. Бровко [10, 12, 13] и ее частного случая — модели А. Г. Гришаева [26, 27].

1.1 Основные понятия механики пористых сред

Твердый пористый каркас, наполненный жидкостью (газом), в механике сплошных сред принято рассматривать как двухфазную сплошную среду. Одной фазой являются твердые частицы каркаса, а другой — частицы жидкости (газа). Такое рассмотрение позволяет эффективно исследовать движение сложной среды, состоящей из частиц с различными механическими свойствами. Ключевой гипотезой, используемой в механике пористых сред, является *гипотеза взаимопроникающих континуумов*, состоящая в том, что все пространство элементарного макрообъема рассматривается как пространство, заполненное двумя сплошными средами, взаимопроникающими и взаимодействующими друг с другом [9–13, 27, 47]. Разделение всех перемешанных между собой частиц на два класса, соответствующих каждой фазе, основано на том, что различие между частицами одного класса гораздо менее существенно, нежели отличие каждой из них от частицы, принадлежащей к другой фазе [47].

Как и во всех разделах механики сплошных сред в механике пористых сред принято выделять из среды некоторый макрообъем.

Элементарный макрообъем $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, т.е. рассматриваемая макроточка среды x_1, x_2, x_3, характеризуется некоторыми средними (по находящимся в нем частицам) значениями деформации, напряжения, перемещения и т.д. В естественных пористых средах микрочастицы существенно различаются по своим свойствам, форме, размерам и образуют хаотически сложенный конгломерат [47]. Для преодоления таких трудностей в механике пористых сред используются различные способы осреднения. В большинстве случаев характерный размер макрообъема l удовлетворяет соотношению:

$$d \ll l \ll L, \tag{1.1}$$

где d — характерный размер пор (обычно доли миллиметра), а L — характерный размер пористого каркаса (обычно десятки метров).

Одной из основных характеристик пористой среды является *пористость* m. Пористость определяет максимальное количество жидкости, которое может содержаться в некотором объеме пористой среды. Для однородного образца из пористого материала пористость определяется по формуле [39, 47, 88]:

$$m = \frac{V_{\text{p}}}{V}, \tag{1.2}$$

где V_{p} – объем пор, а V — объем образца.

Из уравнения (1.2) следует, что пористость — безразмерная величина, лежащая в диапазоне:

$$0 < m < 1. \tag{1.3}$$

Отметим, что для почв пористость лежит в диапазоне 0,3 – 0,7; песка — 0,3 – 0,55; нефтегазоносных пластов — 0,1 – 0,2 [39].

Некоторые пористые материалы имеют поры изолированные от остального связного пористого пространства.

По этой причине принято различать два типа пористости: *полную (общую) пористость* и *активную (эффективную) пористость* [39, 88]. Полная пористость определяется уравнением (1.2), а эффективная:

$$m^{\text{a}} = \frac{V_{\text{p}}^{\text{a}}}{V}, \tag{1.4}$$

где $V_{\mathrm{p}}^{\mathrm{a}}$ — объем связанных между собой пор, которые могут свободно заполниться жидкостью, поступающей в пористый каркас из внешней среды.

В настоящей работе мы будем считать $m = m^{\mathrm{a}}$.

Также стоит отметить, что пористость (аналогично другим параметрам конгломерата) определяется с помощью осреднения по области с характерным размером l, удовлетворяющим (1.1) [39, 47, 88].

Введем основные характеристики твердой и жидкой фазы: эффективные и истинные плотности жидкой и твердой фаз, истинное давление в порах. Истинная (средняя в макрообъеме) плотность жидкой среды определяется равенством

$$\rho_{\mathrm{fm}} = \frac{M_{\mathrm{f}}}{mV}, \tag{1.5}$$

где M_{f} — масса жидкости, заключенной в макрообъеме V, а истинная средняя плотность частицы каркаса — равенством

$$\rho_{\mathrm{sm}} = \frac{M_{\mathrm{s}}}{(1-m)V}, \tag{1.6}$$

где M_{s} — масса твердых частиц, заключенных в макрообъеме V; в обоих равенствах (1.5), (1.6) пористость среды (объемная доля пор в макрообъеме) обозначена через m.

Помимо истинной плотности жидкости ρ_{fm} мы будем использовать эффективную плотность жидкости ρ_{f}, определяемую по формуле:

$$\rho_{\mathrm{f}} = \frac{M_{\mathrm{f}}}{V} = m\rho_{\mathrm{fm}}. \tag{1.7}$$

Аналогично определяется эффективная плотность твердой фазы ρ_{s}:

$$\rho_{\mathrm{s}} = \frac{M_{\mathrm{s}}}{V} = (1-m)\rho_{\mathrm{sm}}. \tag{1.8}$$

Истинное давление в порах (среднее в макрообъеме) получаем с помощью осреднения гидростатического давления p_{f}:

$$p_{\mathrm{p}} = \frac{1}{mV}\int\limits_{\Omega_{\mathrm{f}}} p_{\mathrm{f}} dV. \tag{1.9}$$

где Ω_{f} — часть макрообъема, занимаемая жидкостью.

Перенос массы при движении жидкости (газа) через пористый каркас принято характеризовать векторной величиной, называемой *скоростью фильтрации*. Скорость фильтрации можно определить [1, 39] как вектор $\mathbf{u}$, проекция которого на любое направление равна объемному расходу

жидкости через единичную площадку, перпендикулярную данному направлению.

Одним из первых законов, характеризующих движение жидкости сквозь пористую среду, стал закон, полученный экспериментально французским инженером-гидравликом Анри Дарси (1803–1858) в 1856 году для случая медленного (данный термин будет уточнен ниже) стационарного движения несжимаемой жидкости под действием силы тяжести в неподвижной изотропной среде из пористого материала:

$$-\mathrm{grad}p_{\mathrm{p}} - \frac{\mu}{k}\mathbf{u} + \rho_{\mathrm{fm}}\mathbf{g} = 0, \tag{1.10}$$

где p_{p} — истинное давление в порах, ρ_{fm} — истинная плотность жидкости, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости, $k = \frac{d^2}{\psi(m)}$ — проницаемость среды, зависящая только от геометрии пористого каркаса (d — средний размер пор, $\psi(m)$ — некоторая функция пористости m) [1].

Отдельно отметим, что член $\frac{\mu}{k}\mathbf{u}$ по сути представляет собой силу взаимодействия каркаса и жидкости (*интерактивную силу*). Подробнее силы такого типа будут рассмотрены ниже.

Коэффициент проницаемости k имеет размерность площади. Его величина имеет порядок квадрата характерного размера пор d. Существуют различные формулы для определения коэффициента проницаемости [1]. Одной из наиболее распространенных является формула Козени-Кармана [34, 39]:

$$k \sim \frac{d^2 m^3}{(1-m)^2}. \tag{1.11}$$

Проницаемость принято измерять в *дарси* (1 дарси $= 1,02 \cdot 10^{-12}$ м^2).

Закон Дарси также можно получить, при дополнительных предположениях, из классического уравнения Навье-Стокса, описывающего движение вязкой несжимаемой жидкости:

$$\rho_{\mathrm{fm}}\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{dt} = -\mathrm{grad}p_{\mathrm{p}} + \rho_{\mathrm{fm}}\mathbf{g} + \mu\triangle\mathbf{v}_{\mathrm{f}} + \mathbf{f}_{\mathrm{f}}, \tag{1.12}$$

где $\mathbf{f}_{\mathrm{f}}$ — вектор силы взаимодействия между каркасом и жидкостью (действия каркаса на жидкость), $\mathbf{v}_{\mathrm{f}} = \frac{\mathbf{u}}{m}$ — скорость жидкости.

Действительно, при медленных (ползущих) движениях жидкости внутри пористой среды (именно для них Дарси получал экспериментально свой закон) инерционные силы по порядку меньше вязких, а значит членами $\rho_{\mathrm{fm}}\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{dt}$ и $\mu\triangle\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$ можно пренебречь. С учетом этих предположений (1.12) переходит в (1.10).

Закон Дарси имеет обширную область применения, и на его основе было получено большое число результатов механики пористых наполненных сред. Тем не менее существует множество случаев, когда классический закон Дарси неприменим.

Глобально можно выделить две причины нарушения классического закона Дарси.

Первая причина — большие величины скоростей движения жидкости (газа) внутри пор. При таком движении пренебрежение инерционными членами в (1.12) приводит к существенному искажению результатов, что неоднократно подтверждалось экспериментально [1].

Вторая причина — неньютоновское поведение жидкости внутри пористой среды, ввиду которого классический закон Навье-Стокса теряет свою справедливость [39].

Для случая течений жидкостей сквозь пористые среды, для которых неприменим классический закон Дарси, было предложено несколько модификаций закона (1.10), позволяющих в той или иной мере обойти вышеуказанные трудности.

В данной работе будет предложен и применен свой вариант решения первой проблемы.

Также в разделе, посвященном интерактивным силам, будет предложена классификация режимов течения жидкостей в пористой среде в соответствии с [9–13, 27].

1.2 Классификация режимов течения жидкости в пористой среде

Как было сказано выше, характер течения жидкости в пористой среде существенно влияет на вид уравнений, описывающих данное движение.

Было отмечено, что для медленных течений принято использовать линейный закон Дарси (1.10). В иных случаях пользуются более сложными моделями.

В этом разделе мы приведем классификацию режимов течения жидкости в пористой среде, принятую в классической литературе [1, 43, 47].

Отметим, что изложение в данном разделе, сходно с изложением в пособии Н. Е. Леонтьева [39].

Для простоты изложения предположим, что массовые силы отсутствуют.

Теперь проанализируем от каких параметров зависит модуль градиента давления $|\mathrm{grad} p_{\mathrm{p}}|$; приняв в рассмотрение модуль скорости фильтрации u ($u = |\mathbf{u}|$), параметры, характеризующие свойства жидкости

(истинная плотность жидкости ρ_{fm} и вязкость жидкости μ) и пористого каркаса (пористость m, характерный размер пор d). Также градиент давления может зависеть от скалярных безразмерных параметров α_k, задающих геометрию порового пространства.

Таким образом, мы получаем следующее представление для модуля градиента давления:

$$|\text{grad}p_{\text{p}}| = G(u, \rho_{\text{fm}}, \mu, m, d, \alpha_k). \tag{1.13}$$

Применяя к (1.13) π-теорему [55], получаем следующую зависимость:

$$|\text{grad}p_{\text{p}}| = \frac{\mu u}{d^2} F(\text{Re}, m, \alpha_k), \tag{1.14}$$

где Re — число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{fm}} u d}{\mu}. \tag{1.15}$$

Как было показано в [39] (в предположении об изотропности пористой среды) вектор $\text{grad}p_{\text{p}}$ параллелен и противоположен по направлению вектору $\mathbf{u}$.

Таким образом, общий вид закона фильтрации несжимаемой жидкости в изотропной пористой среде можно записать так:

$$\text{grad}p_{\text{p}} = -\frac{\mu \mathbf{u}}{d^2} F(\text{Re}, m, \alpha_k). \tag{1.16}$$

Проанализируем зависимость $F(\text{Re})$.

В случае ползущих (очень медленных) внутрипоровых течений, в которых определяющую роль играют вязкие эффекты, соотношение (1.16) не должно содержать плотность жидкости, выпадающую из уравнений вязкой жидкости в стоксовом приближении. Поэтому при $\text{Re} \ll 1$ функция $F(\text{Re})$ не должна зависеть от числа Рейнольдса, явно содержащего параметр ρ_{fm}.

Таким образом, в случае медленных течений закон (1.16) принимает вид:

$$\text{grad}p_{\text{p}} = -\frac{\mu \mathbf{u}}{k}, \tag{1.17}$$

где k в силу закона Дарси совпадает с проницаемостью и имеет вид:

$$k = \frac{d^2}{F(0, m, \alpha_k)}. \tag{1.18}$$

Теперь проанализируем другой предельный случай: быстрых внутрипоровых движений с числом $\text{Re} \gg 1$. В данном случае основную роль

должны играть инерционные эффекты. Из этого можно сделать вывод, что правая часть (1.16) не должна содержать в главных членах коэффициент вязкости μ. Поэтому при больших значениях числа Рейнольдса мы получаем линейную зависимость $F(\mathrm{Re})$ и квадратичную зависимость $|\mathrm{grad}p_\mathrm{p}|$ от u.

Далее будем считать m и α_k постоянными, и использовать краткую запись $F(\mathrm{Re})$ вместо записи $F(\mathrm{Re}, m, \alpha_k)$.

Для удобства нормируем функцию $F(\mathrm{Re})$ следующим образом:

$$\tilde{F} = \frac{F(\mathrm{Re})}{F(0)}, \tag{1.19}$$

Данная функция обладает двумя важными свойствами:

$$\tilde{F}(0) = 1, \tag{1.20}$$

$$\tilde{F}(\mathrm{Re}) = \mathrm{O}(\mathrm{Re}), \mathrm{Re} \to \infty. \tag{1.21}$$

Пользуясь (1.19), (1.20), (1.21), получаем окончательно следующий вид закона фильтрации (1.16) для быстрых течений:

$$\mathrm{grad}p_\mathrm{p} = -\frac{\mu \mathbf{u}}{k} \cdot \tilde{F}(\mathrm{Re}). \tag{1.22}$$

При практических расчетах закон $\tilde{F}(\mathrm{Re})$ часто приближают линейной зависимостью, следующего вида [39]:

$$\tilde{F}(\mathrm{Re}) = 1 + \frac{\beta\sqrt{k}}{d} \cdot \mathrm{Re}, \tag{1.23}$$

где β — безразмерный параметр, зависящий от структуры пористой среды, по порядку близкий к единице.

После подстановки (1.23) в (1.22) получаем двучленный закон фильтрации Форхгеймера:

$$\mathrm{grad}p_\mathrm{p} = -\frac{\mu}{k}\mathbf{u} - \beta\frac{\rho_\mathrm{fm} u^2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\mathbf{u}}{u}. \tag{1.24}$$

Закон фильтрации Форхгеймера применяется для описания механических процессов в насыщенных пористых средах с большими числами Рейнольдса ($\mathrm{Re} \gg 1$) [34].

1.3 Модели пористых наполненных сред

1.3.1 Модель Био

Признанным классиком в области механики пористых наполненных сред является бельгийский (впоследствии американский) механик Морис Био (1905-1985).

Приведем классическую модель пористой наполненной среды Био в обозначениях, более близких настоящей работе [5, 8, 26, 47]:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} = (\lambda_{\mathrm{s}}\mathrm{div}\mathbf{u}_{\mathrm{s}} + Q\,\mathrm{div}\mathbf{u}_{\mathrm{f}})\mathbf{I} + 2\mu\left(\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{s}} + (\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{s}})^T\right), \tag{1.25}$$

$$p_{\mathrm{f}}^b = -Q\,\mathrm{div}\mathbf{u}_{\mathrm{s}} - R\,\mathrm{div}\mathbf{u}_{\mathrm{f}}, \tag{1.26}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} + \rho_{11}\mathbf{g}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{f}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}} = \rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{f}}}{\partial t^2}, \tag{1.27}$$

$$-\mathrm{grad}\,p_{\mathrm{f}}^b + \rho_{22}\mathbf{g}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{f}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}} = \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{f}}}{\partial t^2}. \tag{1.28}$$

Первые два уравнения являются определяющими соотношениями фаз, а третье и четвертое — уравнениями движения каркаса и жидкости соответственно.

Здесь неизвестными считаются: три компоненты векторов перемещения частиц каркаса и жидкости $\mathbf{u}_{\mathrm{s}}$, $\mathbf{u}_{\mathrm{f}}$; шесть компонент эффективного тензора напряжений каркаса $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$, эффективное дополнительное (по отношению к постоянному давлению p_0) давление жидкости p_{f}^b.

Известными величинами считаются: внешние массовые силы воздействия на каркас и жидкость $\mathbf{g}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}}$, $\mathbf{g}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}$; $\mathbf{f}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{b}}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}}$ —векторы объемных сил воздействия фаз друг на друга (действия каркаса на жидкость и наоборот); эффективные характеристики упругости каркаса $\lambda_{\mathrm{s}}, \mu_{\mathrm{s}}$; R — объемный модуль упругости жидкой фазы, Q — константа взаимовлияния фаз, отражающая упругое взаимодействие между каркасом и жидкостью, эффективные плотности фаз ρ_{11}, ρ_{22} (далее, переобозначим их $\rho_{11} =: \rho_{\mathrm{s}}$, $\rho_{22} =: \rho_{\mathrm{f}}$), ρ_{12} — константа, характеризующая инерционные взаимодействия типа присоединенной массы Био.

Таким образом получается система из 13 скалярных уравнений для 13 скалярных величин. Подставив уравнение (1.25) в (1.27), а (1.26) в (1.28); получим уравнения аналогичные классическим уравнениям Ламе для линейно-упругого тела [49]:

$$(\lambda_{\mathrm{s}} + \mu_{\mathrm{s}})\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_{\mathrm{s}} + \triangle\,\mathbf{u}_{\mathrm{s}} + Q\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_{\mathrm{f}} + \rho_{11}\mathbf{g}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}} + \mathbf{f}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{b}} = \\ = \rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{f}}}{\partial t^2}, \tag{1.29}$$

$$Q\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_\mathrm{s} + R\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_\mathrm{f} + \rho_{22}\mathbf{g}_\mathrm{f}^\mathrm{b} + \mathbf{f}_\mathrm{f}^\mathrm{b} = \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}_\mathrm{s}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{u}_\mathrm{f}}{\partial t^2}. \quad (1.30)$$

Модель Био широко используется и в настоящее время. Данная модель в целом хорошо описывает одномерные движения жидкости при малых деформациях каркаса с малыми по сравнению с единицей числами Рейнольдса. Модель широко используется для описания распространения упругих волн в пористой среде.

Однако стоит отметить, что многие крупные специалисты в области механики пористых наполненных сред отмечают ряд ее существенных недостатков.

Подробный анализ модели Био был дан К. Вильманским в [102]. Вильманский отмечает, что несмотря на то, что огромное количество теоретических и экспериментальных работ, основанных на модели Био, подтвердили правоту построений и идей Био, опыт последних пятидесяти лет порождает следующие вопросы:

1. Допустимо ли с точки зрения термодинамики соединение напряжений посредством параметра Q?

2. Допустим ли вклад относительных ускорений с точки зрения материальной объективности?

3. Как изменение пористости учитывается моделью?

4. Как математически корректно записать частотно-зависимую проницаемость?

5. Возможно ли распространить модель Био на случай конечных деформаций каркаса и другие нелинейные эффекты?

Первый вопрос возник при изучении теории смесей идеальных жидкостей. Для таких смесей невозможно включить в модель связь между парциальными давлениями без учета зависимости от градиентов высшего порядка (higher gradients) [96].

Отметим, что в большинстве современных моделей эффективные тензоры напряжений записываются отдельно для жидкой и твердой фаз, поэтому параметр Q исключается из системы.

Одним из фундаментальных принципов построения модели любого макроскопического континуума является *принцип материальной объективности* [64, 98]. Данный принцип гласит: определяющие соотношения должны быть инвариантны по отношению к замене системы отсчета. Как отмечает Вильманский, относительные ускорения в модели Био нарушают данный принцип [104].

Как отмечено в работе [47], присоединенная масса Био ρ_{12} вносит неточности при решении конкретных задач, и поэтому многие специалисты принимают $\rho_{12} = 0$.

Вильманский отмечает, что вклад присоединенной массы ρ_{12} необъективен, но эта необъективность вызвана пренебрежением нелинейными членами объективных относительных ускорений (принятых при построении Био своей модели).

В работах [10, 12, 13] эта проблема решается путем введения дополнительной интерактивной силы (силы типа Био), учитывающей инерционные взаимодействия между фазами с соблюдением принципа материальной объективности. Данный вопрос будет рассмотрен в разделе, посвященном интерактивным силам.

Огромным открытием Био стала зависимость градиента давления не только от относительных скоростей (диффузии), но и от структуры пор и вязкости жидкости.

Био не делал дополнительных предположений для описания изменения пористости. Но как отмечали и Вильманский, и Николаевский, изменение пористости в ряде случаев (в частности, при неоднородном напряженном состоянии) существенно влияет на точность результатов [47,102]. Модель [10, 12, 13], которая будет использоваться в настоящей работе, позволяет учесть изменение пористости.

В работах [9, 10, 12, 13] приведены основы для волновых постановок, однако, данный вопрос не входит в тематику настоящей работы.

Также отметим, что модель [9,10,12,13] позволяет решать задачи как для малых, так и для конечных деформаций твердого каркаса.

1.3.2 Модель В.Н. Николаевского

Крупным ученым в области механики насыщенных пористых сред является Виктор Николаевич Николаевский. Николаевский разработал теорию ускоренного переноса примесей в подземных потоках, теорию выноса песка из скважин, теорию течений газоконденсатной смеси, теорию сейсмики насыщенных горных массивов, теорию трещиноватой расслоенности земной коры, теорию мезо-масштабной турбулентности, теорию тектонических волн (включающих повороты в системе блоков коры), основы теории вибровоздействия на нефтеотдачу пласта (данная информация взята с официального сайта Института физики земли имени О.Ю. Шмидта РАН).

В первой части [47] были приведены уравнения динамики насыщенных пористых сред (несколько систем уравнений и их сравнительная характеристика), теория звуковых монохроматических волн в насыщен-

ных пористых средах, теория нестационарных движений насыщенных пористых сред.

Вторая часть [47] посвящена упругому режиму фильтрации жидкости и газа: предпосылки упругого режима, основные уравнения процесса фильтрации, основные автомодельные задачи и их решения.

При построении своей модели Николаевский использует статистический способ осреднения (по множеству реализаций рассматриваемых полей): величины смещений микрочастиц рассматриваются как случайные внутри макрообъема ΔV.

Приведем основные уравнения модели В.Н. Николаевского (упрощенные в предположениях о независимости всех величин от температуры и о малости деформаций каркаса). Модель включает в себя уравнение движения твердой фазы

$$(1-m_0)\left(\rho^0_{\rm sm}\frac{\partial \mathbf{v}_{\rm s}}{\partial t}-\rho^0_{\rm fm}\frac{\partial \mathbf{v}_{\rm f}}{\partial t}\right)-{\rm div}\boldsymbol{\sigma}_{\rm s}-\frac{\mu_0}{a_0}m_0(1-m_0)(\mathbf{v}_{\rm f}-\mathbf{v}_{\rm s}) \quad (1.31)$$
$$+(m_0(\rho^0_{\rm sm}-\rho^0_{\rm fm})-(1-m_0)(\rho_{\rm sm}-\rho_{\rm fm}))\mathbf{g}=0,$$

уравнение движения жидкой фазы

$$\rho^0_{\rm fm}\frac{\partial \mathbf{v}_{\rm f}}{\partial t}+{\rm grad}p+\frac{\mu}{a_0}m_0(1-m_0)(\mathbf{v}_{\rm f}-\mathbf{v}_{\rm s})+\rho_{\rm fm}\mathbf{g}=0, \quad (1.32)$$

уравнение неразрывности твердой фазы

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\frac{\beta_{\rm s}}{3}\frac{\partial \theta}{\partial t}-\beta_{\rm s}(1-m_0)\frac{\partial p}{\partial t}-(1-m_0){\rm div}\mathbf{v}_{\rm s}=0, \quad \text{где}\,\theta={\rm tr}\boldsymbol{\sigma}_{\rm s}, \quad (1.33)$$

уравнение неразрывности жидкой фазы

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\beta_{\rm f}m_0\frac{\partial p}{\partial t}+m_0{\rm div}\mathbf{v}_{\rm f}=0, \quad (1.34)$$

связь между истинным давлением в порах и истинной плотностью каркаса (вид функции $\psi(\rho_{\rm sm})$ считается известным)

$$p=\psi(\rho_{\rm sm}), \quad (1.35)$$

связь между истинным давлением в порах и истинной плотностью жидкости (вид функции $\varphi(\rho_{\rm fm})$ считается известным)

$$p=\varphi(\rho_{\rm fm}), \quad (1.36)$$

определяющее соотношения твердой фазы

$$\boldsymbol{\sigma}_{\rm s}=(1-m_0)(\lambda_{\rm s}e\mathbf{I}+2\mu_{\rm s}\mathbf{e}+\beta_{\rm s}Kp\mathbf{I}), \quad \text{где} \quad e={\rm tr}\,\mathbf{e}, \quad (1.37)$$

соотношения, связывающие деформации твердой фазы и перемещения точек каркаса

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u}_{\mathrm{s}} + (\nabla \mathbf{u}_{\mathrm{s}})^T\right), \tag{1.38}$$

связь скорости твердой фазы и вектора перемещения точек каркаса

$$\mathbf{v}_{\mathrm{s}} = \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t}. \tag{1.39}$$

Здесь известными величинами считаются: вектор внешних массовых сил $\mathbf{g}$; пористость каркаса в ненапряженном состоянии m_0; эффективные характеристики упругости каркаса λ_{s}, μ_{s}; начальные истинные плотности фаз ρ^0_{sm}, ρ^0_{fm}, коэффициенты объемного температурного расширения фаз α_{f}, α_{s}; изотермические сжимаемости фаз β_{f}, β_{s}; модуль всестороннего сжатия скелета K.

Таким образом, соотношения (1.31)–(1.39) составляют систему 25 скалярных уравнений для 25 неизвестных скалярных функций: шесть компонент симметричного тензора эффективных напряжений каркаса $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$, шесть компонент симметричного тензора деформаций каркаса $\mathbf{e}$, три компоненты вектора перемещений каркаса $\mathbf{u}_{\mathrm{s}}$, три компоненты вектора скорости жидкой среды $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, три компоненты вектора скорости твердой среды $\mathbf{v}_{\mathrm{s}}$, пористость m, истинные плотности фаз ρ_{fm}, ρ_{sm}; истинное давление жидкости p.

Николаевский показал сводимость своей модели к классическим моделям Х. А. Рахматулина и Я. И. Френкеля, тем самым обобщая данные модели пористых наполненных сред.

Модель В. Н. Николаевского позволяет решать широкий спектр задач: распространение монохроматических волн в насыщенной пористой среде, линейные задачи о слабых динамических воздействиях на мягкие среды, задачи неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористых средах, расчет системы скважин и многие другие.

Модель В. Н. Николаевского устраняет некоторые недостатки модели Био: неточность, вносимую в ряде случаев введением присоединенной массы (ρ_{12}) и постоянство пористости m.

1.3.3 Модель О. Косси

Видным современным специалистом в области механики пористых наполненных сред является французский ученый Оливье Косси. В своей книге [88] Косси рассматривает проблемы из разных областей поромеханики: термопороупругость, поровязкоупругость, пороластичность.

Приведем модель пористой наполненной среды, предложенную Косси [88].

Данная модель включает связь тензора деформаций Грина и вектора перемещений точек каркаса

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_{\mathrm{s}} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_{\mathrm{s}})^T + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_{\mathrm{s}})^T \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_{\mathrm{s}}\right), \tag{1.40}$$

уравнение неразрывности жидкости

$$\frac{d(Jm\rho_{\mathrm{fm}})}{dt} + \mathrm{div}_{\mathbf{x}}\mathbf{M} = 0, \quad \text{где} \quad J = \det\boldsymbol{A}, \tag{1.41}$$

уравнение движения конгломерата

$$\mathrm{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\pi}) + \rho_{\mathrm{sm0}}(1 - Jm_0)\left(\mathbf{g}_{\mathrm{full}} - \mathbf{w}_{\mathrm{s}}\right) + \rho_{\mathrm{fm}}Jm\left(\mathbf{g}_{\mathrm{full}} - \mathbf{w}_{\mathrm{f}}\right) = 0, \tag{1.42}$$

$$\text{где} \quad \mathbf{w}_{\mathrm{s}} = \frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{s}}}{dt}, \mathbf{w}_{\mathrm{f}} = \frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{dt}$$

уравнение притока тепла

$$T\frac{d\left(S_{\mathrm{s}} + Jm\rho_{\mathrm{fm}}s_{\mathrm{f}}\right)}{dt} = -T\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\left(s_{\mathrm{f}}\mathbf{M} + \mathbf{q}\right) + \Phi_{\mathrm{M}}, \tag{1.43}$$

уравнения состояния каркаса

$$\pi_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial\Psi_{\mathrm{s}}}{\partial\varepsilon_{\mathrm{ij}}}, \tag{1.44}$$

$$p = \frac{\partial\Psi_{\mathrm{s}}}{\partial\phi}, \quad \text{где} \quad \phi = J\cdot m, \tag{1.45}$$

$$S_{\mathrm{s}} = \frac{\partial\Psi_{\mathrm{s}}}{\partial T}, \tag{1.46}$$

закон Дарси

$$\frac{\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{M}}{\rho_{\mathrm{fm}}} = Jk(\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^T\left(-\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}p_{\mathrm{p}} + \rho_{\mathrm{fm}}\boldsymbol{A}^T\cdot\left(\mathbf{g}_{\mathrm{full}} - \mathbf{w}_{\mathrm{f}}\right)\right), \tag{1.47}$$

закон Фурье

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{q} = Jk\boldsymbol{A}^{-1}\nabla_{\mathbf{x}}T, \tag{1.48}$$

уравнения состояния жидкости

$$s_{\mathrm{f}} = -\frac{dG_{\mathrm{f}}}{dT} \tag{1.49}$$

$$\frac{1}{\rho_{\mathrm{fm}}} = \frac{dG_{\mathrm{f}}}{dp_{\mathrm{p}}}. \tag{1.50}$$

Неизвестными функциями являются шесть компонент тензора деформации Грина твердого каркаса $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, три компоненты вектора перемещений каркаса $\mathbf{u}_{\mathrm{s}}$, три компоненты вектора переноса массы жидкости $\mathbf{M} =$

$J\boldsymbol{A}^{-1}\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{v}_{\mathrm{f}}-\mathbf{v}_{\mathrm{s}})$, пористость каркаса m, шесть компонент полного тензора напряжений Пиолы–Кирхгоффа второго рода $\boldsymbol{\pi} = J\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{T}$ (где $\boldsymbol{\sigma}$ — полный тензор напряжений Коши), три компоненты вектора притока тепла $\mathbf{q}$, истинное давление в порах p_{p}, истинная плотность жидкости ρ_{fm}, энтропия жидкости s_{f}, энтропия скелета S_{s}, температура T.

Истинная плотность каркаса ρ_{sm0}, лагранжева механическая плотность диссипации Φ_{M},вектор массовых внешних сил $\mathbf{g}_{\mathrm{full}}$, потенциал Гиббса жидкости G_{f}, свободная энергия скелета Ψ_{s}, проницаемость каркаса k считаются известными.

Таким образом получается система из 27 скалярных уравнений для 27 неизвестных функций.

Данная модель описывает произвольные движения жидкости и конечные деформации твердого каркаса.

Несмотря на общность модели (1.40)–(1.50), при рассмотрении конкретных задач Косси ограничивается случаем малых деформаций каркаса (малых перемещений и градиентов перемещений точек каркаса). Также Косси предполагает малость изменения пористости каркаса и плотности жидкости.

С учетом этих предположений в квазистатическом приближении Косси сводит решение системы (1.40)–(1.50) к решению уравнения диффузии:

$$\frac{\partial p_{\mathrm{p}}}{\partial t} = c_{\mathrm{f}}\nabla^2 p_{\mathrm{p}}, \tag{1.51}$$

где c_{f} — коэффициент диффузии, зависящий от вязких свойств жидкости и геометрии каркаса.

Отметим, что данный подход к решению общей системы уравнений является общепринятым в механике пористых наполненных сред [1, 47, 101].

1.3.4 Модель К. Вильманского

Крупным современным ученым, занимающимся механикой пористых наполненных сред, является К. Вильманский. В своих работах (часть из них в соавторстве с Б. Альберс) он рассмотрел различные вопросы по данной тематике: распространение акустических волн в пористой наполненной среде [101], анализ классической модели Био с выявлением области ее применимости [102], учет завихренности (”tortuosity effect”) движения жидкости в пористой наполненной среде [105], а также различные аспекты материальной объективности, применительно к поромеханике [100, 104, 105].

В работе [60] К. Терцаги рассмотрел вопрос о протекании жидкости через проницаемую границу пористой среды. Он показал, что величина массы, проникшей через единицу площади за единицу времени, зависит от перепада давления в порах.

В работе [105] была предложена следующая модель пористой наполненной среды:

$$\rho_{\mathrm{s}}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{s}})\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \mu_{\mathrm{s}}\nabla^2\mathbf{u} - \alpha\,\mathrm{grad}\,p + \rho_{\mathrm{s}}\mathbf{b}, \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c\nabla^2 p - KB\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\mathbf{u}, \tag{1.53}$$

где неизвестными функциями считаются вектор перемещений точек каркаса $\mathbf{u}$ и истинное давление в порах p.

Известными функциями считаются эффективные характеристики упругости каркаса λ_{s}, μ_{s}, эффективная плотность каркаса ρ_{s}, вектор внешней объемной силы $\mathbf{b}$, коэффициент Био-Уиллиса α, коэффициент Скемптона B, коэффициент диффузии c. Коэффициент $K = \dfrac{\lambda_{\mathrm{s}} + \frac{2}{3}\mu_{\mathrm{s}}}{1-\alpha B}$.

Данная модель применяется для описания движений для которых справедлив линейный закон Дарси, на основе которого она и была получена. Для более сложных процессов необходимо использование более совершенных моделей.

В работе [103] приводится модель пористой наполненной среды для случая одномерного протекания жидкости и приводится решение задачи, подобной классической задаче Терцаги, упоминавшейся выше.

Рассматривается полубесконечная пористая среда, к которой в плоскости $x = 0$ приложена постоянная нагрузка $p_{\mathrm{a}} + q_0$ в направлении, перпендикулярном границе, где p_{a} — атмосферное давление, а q_0 — внешняя нагрузка, приложенная в момент времени $t = 0$, и действующая одновременно на обе компоненты пористой среды.

Приведем уравнения и основные предположения модели К. Вильманского [103]. В модели предполагается малость деформаций каркаса и малость изменений плотности жидкой фазы, что в одномерном случае обозначает:

$$|e_{\mathrm{s}}| \ll 1, \left|\frac{\rho_{\mathrm{fm}} - \rho_{\mathrm{fm0}}}{\rho_{\mathrm{fm0}}}\right| \ll 1, \tag{1.54}$$

где e_{s} — удлинение каркаса в направлении x (направлении приложения нагрузки), ρ_{fm} — текущее значение истинной плотности жидкости, ρ_{fm0} — значение истинной плотности жидкости в начальный момент времени.

Истинная плотность ρ_{sm} и пористость каркаса m принимаются постоянными.

Внешние массовые силы отсутствуют.

Задача считается одномерной:

$$(x,t) \mapsto \{\rho_{\mathrm{fm}}, v_{\mathrm{f}}, u_{\mathrm{s}}\} \in \mathrm{R}^3, \quad 0 \le x < \infty, \quad 0 \le t < \infty, \tag{1.55}$$

где искомыми величинами (помимо ρ_{fm}) являются скорость жидкости и перемещение точек каркаса в направлении оси x.

Основные уравнения модели включают:

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{fm}}}{\partial t} + \rho_{\mathrm{fm_{in}}} \frac{\partial v_{\mathrm{f}}}{\partial x} = 0, \tag{1.56}$$

$$\frac{\partial p_{\mathrm{f}}}{\partial x} + \pi(v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{s}}) = 0, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\mathrm{s}}}{\partial x} + \pi(v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{s}}) = 0, \tag{1.58}$$

$$p_{\mathrm{f}} = p_{\mathrm{f_{in}}} + k(\rho_{\mathrm{fm}} - \rho_{\mathrm{fm_{in}}}), \tag{1.59}$$

$$\sigma_{\mathrm{s}} = \sigma_{\mathrm{s_{in}}} + (\lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}}) e_{\mathrm{s}}, \tag{1.60}$$

$$v_{\mathrm{s}} := \frac{\partial u_{\mathrm{s}}}{\partial t}, \tag{1.61}$$

$$e_{\mathrm{s}} := \frac{\partial u_{\mathrm{s}}}{\partial x}. \tag{1.62}$$

Неизвестными функциями являются: истинная плотность жидкости ρ_{fm}, эффективное давление p_{f}, эффективное нормальное напряжение в каркасе σ_{s}, скорости жидкой и твердой фаз v_{s}, v_{f}; перемещение точек каркаса u_{s}, удлинение каркаса в направлении x (направлении приложения нагрузки) e_{s}. Начальные значения вышеуказанных величин $\sigma_{\mathrm{s_{in}}}$, $p_{\mathrm{f_{in}}}$, $\rho_{\mathrm{fm_{in}}}$; эффективный коэффициент сжимаемости k и эффективные константы Ламе λ_{s}, μ_{s}, константа π, характеризующая взаимодействие фаз, считаются известными. Таким образом, система уравнений (1.56) – (1.62) является системой из семи скалярных уравнений на семь скалярных неизвестных.

Для вышеуказанной задачи Вильманским были приняты следующие начально-краевые условия:

$$\sigma_{\mathrm{s}} - p_{\mathrm{f}} = -p_{\mathrm{a}} - q_0, \quad \text{при}\, x = 0, \tag{1.63}$$

$$\rho_{\mathrm{fm_{in}}}(v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{s}}) = -\alpha(p_{\mathrm{f}} - m p_{\mathrm{a}}), \quad \text{при}\, x = 0, \tag{1.64}$$

где материальный параметр α — поверхностная проницаемость;

$$\rho_{\mathrm{fm}} = \rho_{\mathrm{fm_{in}}}, e_{\mathrm{s}} = 0, v_{\mathrm{s}} = 0, v_{\mathrm{f}} = 0 \quad \text{при}\, t = 0. \tag{1.65}$$

Вильманский сводит решение задачи к решению линейного уравнения параболического типа для неизвестной плотности ρ_{fm}:

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{fm}}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho_{\mathrm{fm}}}{\partial x^2}, \quad D := \frac{k\rho_{\mathrm{fm_{in}}}}{\pi}\left(1 + \frac{k\rho_{\mathrm{fm_{in}}}}{\lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}}}\right) > 0. \tag{1.66}$$

Далее, пользуясь преобразованием Лапласа, Вильманский получает решение задачи.

Отметим важную для настоящей работы аналогию. В уравнениях движения жидкой и твердой фаз (1.57) и (1.58) вторым слагаемым (одинаковым для обоих уравнений) является член $\pi(v_{\mathrm{f}} - v_{\mathrm{s}}) = 0$, представляющий собой произведение константы π на относительную скорость движения жидкости в конгломерате. Данный член можно трактовать как объемную силу взаимодействия твердой и жидкой фазы (интерактивную силу), которая является частным случаем более общей интерактивной силы типа Дарси, которая будет рассмотрена в следующем разделе.

1.4 Модель Г. Л. Бровко

1.4.1 Структура интерактивных сил

Введем одно из ключевых понятий настоящей работы: понятие интерактивной силы [9, 13, 26].

В настоящей работе в развитие результатов работ [9, 10, 12, 13, 26] рассматриваются интерактивные силы в наполненной пористой среде, составленной пористым каркасом и жидкостью, способной протекать сквозь поры каркаса. Под интерактивными силами понимаются объемные силы взаимного сопротивления жидкости и каркаса при протекании (проникновении, просачивании) жидкости сквозь каркас.

Рассмотрим для двухфазной пористой среды зависимость вектора объемной плотности интерактивной силы $\mathbf{f}$ (действия жидкости на каркас) в виде функции от скоростей $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{v}_{\mathrm{s}}$ и ускорений движения фаз $\mathbf{w}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{w}_{\mathrm{s}}$ — жидкости и каркаса (скелета) соответственно:

$$\mathbf{f} = \mathbf{p}(\mathbf{v}_{\mathrm{f}}, \mathbf{v}_{\mathrm{s}}, \mathbf{w}_{\mathrm{f}}, \mathbf{w}_{\mathrm{s}}). \tag{1.67}$$

В работах [9, 13] с использованием принципа материальной независимости от системы отсчета [64] выведена приведенная форма определяющего соотношения для интерактивной объемной силы $\mathbf{f}$, показывающая, что эта система зависит лишь от относительных скоростей $\mathbf{v}_{\mathrm{r}} \equiv \mathbf{v}_{\mathrm{f}} - \mathbf{v}_{\mathrm{s}}$ и относительных ускорений $\mathbf{w}_{\mathrm{r}} \equiv \mathbf{w}_{\mathrm{f}} - \mathbf{w}_{\mathrm{s}}$ взаимного движения жидкости и каркаса:

$$\mathbf{f} = p(v_{\mathrm{r}}, \dot{v}_{\mathrm{r}}) \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{r}}^0, \tag{1.68}$$

где $\mathbf{v}_\mathrm{r}^0$ — единичный вектор скорости $\mathbf{v}_\mathrm{r}$, v_r — ее величина (модуль), $\dot{v}_\mathrm{r} = \mathbf{w}_\mathrm{r} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{r}^0$ — ее производная по времени (проекция вектора на направление вектора скорости), а p — некоторая скалярнозначная (неотрицательная) функция, значение которой есть модуль $|\mathbf{f}|$ интерактивной объемной силы $\mathbf{f}$ воздействия жидкости на каркас.

Вид функции p определяется структурой пористой среды, свойствами фазовых сред (жидкости и каркаса), а также режимом протекания жидкости сквозь каркас [10].

Зависимость (1.68) имеет вид, отличный от вида силы в модели Био [5, 7] и от тривиальной зависимости, указанной в работе Вильманского и Альберс [100], рассмотренной выше.

При помощи методов теории размерностей [55] в работах [9, 13] был получен принципиальный вид функции (1.68):

$$p(\rho, v, d, m, \mu, w) \equiv \frac{\rho v^2}{d} \varphi \left(m, \frac{1}{\mathrm{Re}}, \frac{1}{B} \right). \tag{1.69}$$

Здесь $\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\mu} \equiv \frac{v d}{\nu}$ — число Рейнольдса [34, 55, 56]; $B = \dfrac{v^2}{wd}$ — безразмерный параметр; μ, ν — соответственно, динамическая и кинематическая вязкости жидкости [34, 55, 56]; $\rho \equiv \rho_\mathrm{f}$ — плотность жидкости, d — характерный размер пористой структуры, $v_\mathrm{r} \equiv v$; $\dot{v}_\mathrm{r} \equiv w$.

В предположении о линейности функции φ из (1.69) по двум последним аргументам (в некоторой окрестности их значений) в работах [9, 13] была получена количественная оценка членов, входящих в (1.68), для различных режимов движения среды:

$$|\mathbf{f}| \equiv \mathrm{f} \equiv \mathrm{f_F} + \mathrm{f_D} + \mathrm{f_B}, \tag{1.70}$$

где

$$\mathrm{f_F} := \frac{\rho v^2}{d} \varphi_\mathrm{F}(m) \equiv \rho \varphi_\mathrm{F}(m) \frac{v^2}{d}, \tag{1.71}$$

$$\mathrm{f_D} := \frac{\rho v^2}{d} \varphi_\mathrm{D}(m) \frac{1}{\mathrm{Re}} \equiv \rho \varphi_\mathrm{D}(m) \frac{\nu v}{d^2}, \tag{1.72}$$

$$\mathrm{f_B} := \frac{\rho v^2}{d} \varphi_\mathrm{B}(m) \frac{1}{B} \equiv \rho \varphi_\mathrm{B}(m) w. \tag{1.73}$$

Слагаемые $\mathrm{f_F}$, $\mathrm{f_D}$, $\mathrm{f_B}$ можно трактовать соответственно как силы *динамического напора*, *вязкого сопротивления* (закон Дарси), *инерционного сопротивления* (типа присоединенных масс Био).

Предположив,что величины функций φ_F, φ_D, φ_B имеют один порядок, получаем таблицу представления величины f при различных режимах движения [9, 13]:

Таблица 1.1: Таблица эффективного представления величины f

	$\mathrm{Re} \ll 1$	$\mathrm{Re} \sim 1$	$\mathrm{Re} \gg 1$
$\mathrm{B} \ll 1$	$0 + \mathrm{f_D} + \mathrm{f_B}$	$0 + 0 + \mathrm{f_B}$	$0 + 0 + \mathrm{f_B}$
$\mathrm{B} \sim 1$	$0 + \mathrm{f_D} + 0$	$\mathrm{f_F} + \mathrm{f_D} + \mathrm{f_B}$	$\mathrm{f_F} + 0 + \mathrm{f_B}$
$\mathrm{B} \gg 1$	$0 + \mathrm{f_D} + 0$	$\mathrm{f_F} + \mathrm{f_D} + 0$	$\mathrm{f_F} + 0 + 0$

Первый столбец таблицы ($\mathrm{Re} \ll 1$) соответствует случаю "медленного" течения жидкости, для которого справедлив линейный закон сопротивления Дарси (при отсутствии силы тяжести) [1, 34, 47]:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}\mathrm{grad}\, p. \tag{1.74}$$

Второй столбец ($\mathrm{Re} \sim 1$) соответствует пограничному случаю.

Третий столбец таблицы ($\mathrm{Re} \gg 1$) соответствует случаю "быстрого" течения жидкости, для которого линейный закон сопротивления Дарси (1.74) теряет справедливость [47]. Слагаемое $\mathrm{f_F}$ соответствует квадратичному члену в двучленном законе фильтрации Форхгеймера, справедливому для течений с числом Рейнольдса $\mathrm{Re} \gg 1$ [1, 34]:

$$\mathrm{grad}p = -\frac{\mu}{k}\mathbf{u} - \beta\rho\frac{|\mathbf{u}|}{\sqrt{k}}\mathbf{u}, \tag{1.75}$$

где β — безразмерный параметр, зависящий от геометрии внутрипорового пространства (порядка единицы).

Таким, образом для произвольных движений вектор объемной плотности интерактивной силы имеет в соответствии с (1.70)–(1.73) вид:

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{f_F} + \mathbf{f_D} + \mathbf{f_B} \equiv \left(c_0(\rho_\mathrm{f}, m, d)v + d_0(m, d, \mu_\mathrm{f}) + b_0(\rho_\mathrm{f}, m)\frac{\dot{v}}{v} \right) \mathbf{v}_\mathrm{r}, \tag{1.76}$$

где коэффициенты

$$c_0(\rho_\mathrm{f}, m, d) = \frac{\rho_\mathrm{f}\varphi_\mathrm{F}(m)}{d},\ d_0(m, d, \mu_\mathrm{f}) = \frac{\mu_\mathrm{f}\varphi_\mathrm{D}(m)}{d^2},\ b_0(\rho_\mathrm{f}, m) = \rho_\mathrm{f}\varphi_\mathrm{B}(m). \tag{1.77}$$

можно в конкретных случаях считать постоянными.

Стоит отметить, что большинство авторов, при рассмотрении режимов течения ограничиваются вычислением числа Рейнольдса, в то время как параметр B существенно влияет на режим течения жидкости, в особенности при наличии существенных по величине ускорений.

1.4.2 Модель Г. Л. Бровко

В развитие классических моделей [1, 5, 6, 45, 47], предложена модель [12], учитывающая материальные межфазные взаимодействия [13] и различные режимы движения жидкости и каркаса [10].

В работе [10] предложена модель трехфазной жидкогазонаполненной пористой среды, учитывающая произвольное движение жидкой и газовой фаз и конечные деформации твердого пористого скелета.

Ограничиваясь рассмотрением двухфазной среды ("каркас-жидкость" или "каркас-газ"), в рамках модели [10] приходим к замкнутой системе уравнений, включающей уравнения кинематики каркаса

$$\boldsymbol{A} = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}, \tag{1.78}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\text{-}\boldsymbol{I}\right), \tag{1.79}$$

$$J = |\det\boldsymbol{A}|, \tag{1.80}$$

уравнение сохранения массы каркаса

$$J = \frac{1-m_0}{1-m}, \tag{1.81}$$

уравнение сохранения массы жидкости

$$\frac{d\rho_{\mathrm{f}}}{dt} + \rho_{\mathrm{f}}\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{v}_{\mathrm{f}}) = 0, \tag{1.82}$$

уравнение движения каркаса

$$\mathrm{div}_{\mathbf{x}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right) + \rho_{\mathrm{s}}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} + \mathbf{f}_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{s}}\frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}, \tag{1.83}$$

уравнение движения жидкости

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{f}}\mathbf{g}_{\mathrm{f}} + \mathbf{f}_{\mathrm{f}} = \rho_{\mathrm{f}}\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{dt}, \tag{1.84}$$

определяющее соотношение каркаса

$$\boldsymbol{P} = -(1-m)p_{\mathrm{p}}\mathbf{I} + \frac{dU}{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \tag{1.85}$$

определяющее соотношение жидкости

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} = -mp_{\mathrm{p}}\mathbf{I} + \lambda_{\mathrm{f}}\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{f}}\mathbf{I} + 2\mu_{\mathrm{f}}\mathrm{sym}(\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}}\,\mathbf{v}_{\mathrm{f}}), \tag{1.86}$$

уравнение, связывающие эффективную плотность ρ_{s} твердой фазы с истинной плотностью ρ_{sm0} материала каркаса и пористостью m:

$$\rho_{\mathrm{s}} = (1-m)\rho_{\mathrm{sm0}}, \tag{1.87}$$

а также уравнения связи истинного давления в порах p_{p} и истинной плотности жидкости:

$$p_{\mathrm{p}} = \varphi\left(\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{m}\right). \tag{1.88}$$

Здесь известными величинами считаются: внешние массовые силы $\mathbf{g}_{\mathrm{s}}$, $\mathbf{g}_{\mathrm{f}}$ воздействия на каркас и жидкость; пористость каркаса при нулевой скорости жидкости m_0; эффективные вязкости, протекающей в конгломерате жидкости λ_{f}, μ_{f}; $\mathbf{f}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{s}}$ — векторы объемных сил воздействия фаз друг на друга (действия каркаса на жидкость и наоборот); постоянная плотность несжимаемого материала каркаса ρ_{sm}, U — упругий потенциал деформаций каркаса.

Неизвестными скалярными функциями считаются: девять компонент аффинора деформации $\boldsymbol{A}$, шесть компонент эффективного тензора деформаций Грина для каркаса $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, шесть компонент эффективного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода $\boldsymbol{P}$ для каркаса, шесть компонент эффективного тензора напряжений Коши $\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}$ для жидкости, три компоненты вектора положения точек каркаса в актуальной конфигурации $\mathbf{f}$ ($\boldsymbol{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$), пористость каркаса m, три компоненты вектора скорости жидкой среды $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, эффективные плотности фаз ρ_{f}, ρ_{s}; истинное давление жидкости в порах p_{p}, детерминант аффинора деформации J.

Таким образом имеем систему из 38 скалярных уравнений для 38 неизвестных скалярных функций.

Данная модель описывает произвольные движения жидкости как при малых, так и при конечных деформациях пористого каркаса, что выделяет ее среди моделей, в большинстве случаев ограничивающихся описанием малых деформаций.

Важной отличительной чертой данной модели является использование интерактивных сил, введенных и классифицированных выше, для описания взаимодействия между каркасом и просачивающейся сквозь него жидкостью (жидкостями, газами или смесью жидкостей и газов). Использование интерактивных сил позволяет более точно и аккуратно описывать взаимодействие и классифицировать режимы течения.

1.4.3 Модель с интерактивными силами для малых деформаций каркаса

Предлагаемая к рассмотрению модель двухфазной жидконаполненной пористой среды [27] построена на гипотезе взаимопроникающих континуумов и предусматривает описание малых деформаций каркаса (лагранжево описание), а также произвольных или малых перемещений жидкости сквозь каркас (эйлерово описание). Материал каркаса предполагает-

ся несжимаемым, а жидкость либо сжимаемой, либо несжимаемой.

Основные соотношения модели [26,27] включают уравнение движения твердой компоненты среды

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} + \rho_{\mathrm{s}}\mathbf{g}_{\mathrm{s}} + \mathbf{f}_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{s}}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t^2}, \tag{1.89}$$

уравнение движения жидкой компоненты среды

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{f}}\mathbf{g}_{\mathrm{f}} + \mathbf{f}_{\mathrm{f}} = \rho_{\mathrm{f}}\frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{dt}, \tag{1.90}$$

уравнение сохранения массы твердой компоненты

$$m = m_0 + (1 - m_0)\operatorname{div}\mathbf{u}_{\mathrm{s}}, \tag{1.91}$$

уравнение сохранения массы жидкой компоненты

$$\frac{\partial\rho_{\mathrm{f}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{\mathrm{f}}\mathbf{v}_{\mathrm{f}}) = 0, \tag{1.92}$$

определяющие соотношения компонент

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} = -(1 - m)p_{\mathrm{p}}\mathbf{I} + \lambda_{\mathrm{s}}\operatorname{div}\mathbf{u}_{\mathrm{s}}\mathbf{I} + 2\mu_{\mathrm{s}}\operatorname{sym}(\operatorname{grad}\mathbf{u}_{\mathrm{s}}), \tag{1.93}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} = -mp_{\mathrm{p}}\mathbf{I} + \lambda_{\mathrm{f}}\operatorname{div}\mathbf{v}_{\mathrm{f}}\mathbf{I} + 2\mu_{\mathrm{f}}\operatorname{sym}(\operatorname{grad}\mathbf{v}_{\mathrm{f}}), \tag{1.94}$$

уравнения, связывающие эффективные плотности ρ_{s} твердой и ρ_{f} жидкой фаз с истинными плотностями ρ_{sm} материала каркаса и ρ_{fm} жидкости

$$\rho_{\mathrm{s}} = (1 - m)\rho_{\mathrm{sm}}, \tag{1.95}$$

$$\rho_{\mathrm{f}} = m\rho_{\mathrm{fm}}, \tag{1.96}$$

а также уравнения связи истинного давления в порах p_{p} и истинной плотности жидкости для сжимаемой жидкости

$$p_{\mathrm{p}} = \varphi(\rho_{\mathrm{fm}}), \tag{1.97}$$

либо условие

$$\rho_{\mathrm{fm}} = \rho_{\mathrm{fm0}} \equiv \mathrm{const}, \tag{1.98}$$

для несжимаемой жидкости.

Здесь известными величинами считаются: внешние массовые силы $\mathbf{g}_{\mathrm{s}}$, $\mathbf{g}_{\mathrm{f}}$, воздействия на каркас и жидкость; пористость каркаса в ненапряженном состоянии m_0; эффективные характеристики упругости каркаса λ_{s}, μ_{s}; эффективные вязкости, протекающей в конгломерате жидкости λ_{f}, μ_{f}; $\mathbf{f}_{\mathrm{f}}$, $\mathbf{f}_{\mathrm{s}}$ —векторы объемных сил воздействия фаз друг на друга (действия каркаса на жидкость и наоборот); постоянная плотность несжимаемого материала каркаса ρ_{sm}.

Неизвестными величинами считаются: тензоры эффективных напряжений каркаса $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$ и жидкости $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}$, вектор перемещений каркаса $\mathbf{u}_{\mathrm{s}}$, вектор скорости жидкой среды $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, пористость m, эффективные плотности фаз ρ_{f}, ρ_{s}, истинное давление жидкости в порах p_{p}.

Замечание: здесь и в дальнейшем нижний индекс "f" относится к жидкости, а "s" — к каркасу.

Таким образом, соотношения (1.89)–(1.97) составляют систему 23 скалярных уравнений для 23 неизвестных скалярных функций: шесть компонент симметричного тензора эффективных напряжений каркаса $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$, шесть компонент симметричного тензора эффективных напряжений жидкости $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}$, три компоненты вектора перемещений каркаса $\mathbf{u}_{\mathrm{s}}$, три компоненты вектора скорости жидкой среды $\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$, пористость m, эффективные плотности фаз ρ_{f}, ρ_{s}; истинная плотность жидкости ρ_{fm}, истинное давление жидкости в порах p_{p}.

Приведем уравнения модели [12, 27] (1.89)-(1.97) к уравнениям аналогичным уравнениям (1.29)-(1.30). Подставим уравнение (1.93) в (1.89), а (1.94) — в (1.90). После стандартных преобразований получим систему из двух уравнений:

$$-\mathrm{grad}((1-m)\,p_0)+(\lambda_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{s}})\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{u}_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{s}}\triangle\mathbf{u}_{\mathrm{s}}+\rho_{\mathrm{s}}\mathbf{g}_{\mathrm{s}}+\mathbf{f}_{\mathrm{s}}=\rho_{\mathrm{s}}\frac{\partial^2\mathbf{u}_{\mathrm{s}}}{\partial t^2},\quad(1.99)$$

$$-\mathrm{grad}(m\,p_0)+(\lambda_{\mathrm{f}}+\mu_{\mathrm{f}})\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{v}_{\mathrm{f}}+\mu_{\mathrm{f}}\triangle\mathbf{v}_{\mathrm{f}}+\rho_{\mathrm{f}}\mathbf{g}_{\mathrm{f}}+\mathbf{f}_{\mathrm{f}}=\rho_{\mathrm{f}}\frac{\partial\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{\partial t}.\quad(1.100)$$

Здесь первое уравнение соответствует классическому уравнению Ламе для линейно-упругого тела, а второе — классическому уравнению Навье-Стокса для жидкости.

Существенная часть задач о движении жидкостей и газов сквозь пористую среду [1, 47, 88] решается путем сведения замкнутой системы уравнений к уравнению параболического типа (диффузии) [23]:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x},t)}{\partial t}=a^2\triangle p(\mathbf{x},t)+h(\mathbf{x},t).\quad(1.101)$$

Покажем, что при дополнительных предположениях система уравнений (1.89)–(1.97) также сводится к уравнению диффузии.

Примем зависимость (1.97) линейной:

$$p_{\mathrm{p}}=p_0+c_{\mathrm{fm}}(\rho_{\mathrm{fm}}-\rho_{\mathrm{fm0}}),\quad(1.102)$$

с известными константами p_0, ρ_{fm0}, c_{fm}.

Будем считать, что из интерактивных сил действует только сила типа Дарси (сила действия жидкости на каркас), взятая в соответствии с (1.76)–(1.77) в виде $\mathrm{f}_{\mathrm{D}}=d_0\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$.

Также будем, считать, что эффективные вязкости жидкости равны нулю $\lambda_{\mathrm{f}} = 0$, $\mu_{\mathrm{f}} = 0$, полная производная $\dfrac{d\mathbf{v}_{\mathrm{f}}}{dt}$ равна нулю; а пористость и истинную плотность жидкости примем приближенно постоянными величинами: $m \simeq m_0$, $\rho_{\mathrm{fm}} \simeq \rho_{\mathrm{fm0}}$. Тогда уравнение (1.94) примет вид:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} = -m\, p_{\mathrm{p}} \mathbf{I}. \tag{1.103}$$

С учетом вышесказанных предположений уравнение (1.90) примет вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{f}} \mathbf{g}_{\mathrm{f}} - d_0 \mathbf{v}_{\mathrm{f}} = 0. \tag{1.104}$$

Подставляя (1.103) в уравнение движения жидкой среды (1.104) получаем:

$$-m \operatorname{grad} p_{\mathrm{p}} - d_0 \mathbf{v}_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{f}} \mathbf{g}_{\mathrm{f}} = 0. \tag{1.105}$$

Откуда получаем соотношение, соответствующее классическому линейному закону Дарси (1.74):

$$\mathbf{v}_{\mathrm{f}} = -\frac{m}{d_0} \operatorname{grad} p_{\mathrm{p}} + \frac{\rho_{\mathrm{f}} \mathbf{g}_{\mathrm{f}}}{d_0}. \tag{1.106}$$

Далее при помощи (1.102), (1.104) и (1.106) с учетом вышеуказанных дополнительных предположений получаем уравнение параболического типа (диффузии):

$$\frac{\partial p_{\mathrm{p}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \xi \triangle p_{\mathrm{p}}(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x}, t), \tag{1.107}$$

где

$$\xi = \frac{m \rho_{\mathrm{fm}} c_{\mathrm{fm}}}{d_0}, \quad h(\mathbf{x}, t) = -\frac{m \rho_{\mathrm{fm}}^2 c_{\mathrm{fm}}}{d_0} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{g}_{\mathrm{f}}). \tag{1.108}$$

1.5 Краткий сравнительный анализ моделей

В данном разделе были приведены уравнения и основные предположения моделей М. Био, В. Н. Николаевского, О. Косси, К. Вильманского, Г. Л. Бровко (и ее частного случая модели А. Г. Гришаева).

Безусловно, приведенные выше модели не охватывают всего множества моделей пористых наполненных сред, но представляют собой различные этапы развития механики гетерогенных сред.

Модель Био — классическая модель, являющаяся отправной точкой при построении большинства других моделей.

Модель Николаевского — модель, охватывающая (обобщающая или дополняющая) большинство результатов советского периода (не только советских ученых, но и западных): модель Био, модель Баренблатта-Желтова, модель Х. А. Рахматуллина и другие.

Модели О. Косси и К. Вильманского представляет современный период развития развития науки.

Основными достоинствами модели с интерактивными силами можно назвать следующие:

1. Рассмотрение взаимного влияния фаз в виде сил внутреннего взаимодействия позволяет учесть влияние нескольких факторов: фильтрации (сила Дарси), фронтального (динамического) напора (одноименная сила) и инерции масс (сила Био). Данное рассмотрение восполняет проблему присоединенных масс Био, обозначенную выше.

2. Благодаря введению второго безразмерного параметра B (в дополнение к классическому числу Рейнольдса) обеспечена возможность более аккуратной дифференциации режимов течения жидкости.

3. Модель позволяет описывать случай не только малых, но и конечных деформаций твердого каркаса. Что существенно выделяет ее среди моделей, рассчитанных в основном на малые деформации каркаса.

Таким образом модель с интерактивными силами уточняет взаимодействия фаз, принятые в моделях Био, Николаевсого, Косси и позволяет охватить более широкий класс задач (как для малых деформаций каркаса, так и для конечных).

Глава 2

Движения с малыми деформациями пористого каркаса

Данная глава посвящена задачам об одномерном стационарном протекании жидкости (газа) сквозь пористый каркас из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил в случае малых деформаций каркаса. В главе рассмотрено несколько типов задач для различных геометрий каркаса (плоский слой, сферический слой, цилиндрический слой) при различных граничных условиях и различных режимах течения. Все задачи поставлены на основе уравнений модели А.Г. Гришаева и численно решены при помощи пакета Maple. Для некоторых задач получены аналитические решения.

2.1 Задачи о поперечном течении сквозь плоский пористый слой

2.1.1 Общая постановка задач о поперечном течении сквозь плоский пористый слой при малых деформациях каркаса

В данном разделе рассматриваются задачи об одномерном поперечном стационарном протекании сжимаемой жидкости (газа) сквозь плоский пористый деформируемый слой конечной толщины L из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил.

Во всех задачах данного раздела мы будем считать, что перемещения и градиенты перемещений каркаса малы.

Сформулируем наиболее общую постановку данного типа задач.

Введем декартову ось x по направлению течения жидкости. С учетом одномерности все векторные величины будут иметь только одну ненулевую компоненту (проекцию на ось x). В частности для вектора скорости

жидкости и вектора перемещений точек каркаса справедливы представления:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{f}} = (v, 0, 0); \quad \mathbf{u}_{\mathrm{s}} = (u, 0, 0). \tag{2.1}$$

Эффективные тензоры напряжений жидкости и каркаса примут вид (в силу одномерности задач все элементы вне диагонали будут нулевыми):

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mathrm{f}}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{\mathrm{f}}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\mathrm{f}}_{33} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mathrm{s}}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{\mathrm{s}}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\mathrm{s}}_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Во всех задачах мы будем предполагать, что интерактивные силы (силы действия жидкости на каркас) присутствуют в виде:

$$f = d_0 v + c_0 v^2, \tag{2.3}$$

где $d_0 v$ — интерактивная сила типа Дарси (сила действия жидкости на каркас), а $c_0 v^2$ — интерактивная сила типа фронтального напора (сила действия жидкости на каркас). Коэффициенты d_0 и c_0 будем принимать постоянными.

С учетом одномерности и стационарности задачи (зависимости всех величин только от координаты x) большинство скалярных уравнений системы (1.89)-(1.97) выполнится тождественно ($0 \equiv 0$). Остальные примут следующий вид:

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{s}}}{dx} + d_0 v + c_0 v^2 = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{f}}}{dx} - d_0 v - c_0 v^2 = m\rho_{\mathrm{fm}} v \frac{dv}{dx}, \tag{2.5}$$

$$\frac{d(m\rho_{\mathrm{fm}} v)}{dx} = 0, \tag{2.6}$$

$$m = m_0 + (1 - m_0)\frac{du}{dx}, \tag{2.7}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}} = -(1 - m)p_{\mathrm{p}} + (\lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}})\frac{du}{dx}, \tag{2.8}$$

$$\sigma^{\mathrm{f}} = -mp_{\mathrm{p}} + (\lambda_{\mathrm{f}} + 2\mu_{\mathrm{f}})\frac{dv}{dx}, \tag{2.9}$$

$$\rho_{\mathrm{s}} = (1 - m)\rho_{\mathrm{sm}}, \tag{2.10}$$

$$\rho_{\mathrm{f}} = m\rho_{\mathrm{fm}}, \tag{2.11}$$

$$p_{\mathrm{p}} = \varphi(\rho_{\mathrm{fm}}), \tag{2.12}$$

где неизвестными функциями являются: ненулевые компоненты эффективных тензоров напряжений каркаса и жидкости $\sigma^{\mathrm{s}} = \sigma^{\mathrm{s}}_{11}$, $\sigma^{\mathrm{f}} = \sigma^{\mathrm{f}}_{11}$; скорость жидкости v, перемещение точек каркаса u, истинное давление в порах p_{p}, истинная плотность жидкости ρ_{fm}, эффективная плотность жидкости ρ_{f}, эффективная плотность каркаса ρ_{s}, пористость каркаса m.

Коэффициент силы Дарси d_0, коэффициент силы фронтального напора c_0, эффективные характеристики упругого каркаса λ_{s}, μ_{s}, эффективные вязкости жидкости λ_{f}, μ_{f}, пористость скелета до проникновения жидкости m_0, истинная плотность каркаса ρ_{sm} считаются известными.

Таким образом, имеем систему из девяти уравнений для девяти неизвестных функций.

Решение задачи в целом повторяет вывод классических уравнений теории упругости и гидромеханики: уравнения Ламе и уравнения Навье-Стокса. Подставив определяющее соотношения для упругого каркаса (2.8) в уравнение движения скелета (2.4), приходим к уравнению, подобному уравнению Ламе:

$$-\frac{d}{dx}\left((1-m)\varphi\left(\frac{c_1}{mv}\right)\right) + (\lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}})\frac{d^2u}{dx^2} + d_0 v + c_0 v^2 = 0. \tag{2.13}$$

Подставив определяющее соотношения для жидкости (2.9) в уравнение движения жидкой фазы (2.5), приходим к уравнению, подобному уравнению Навье-Стокса:

$$-\frac{d}{dx}\left(m\varphi\left(\frac{c_1}{mv}\right)\right) + (\lambda_{\mathrm{f}} + 2\mu_{\mathrm{f}})\frac{d^2v}{dx^2} - d_0 v - c_0 v^2 = c_1\frac{dv}{dx}. \tag{2.14}$$

Неизвестная константа c_1 в уравнениях (2.13) и (2.14), выражающая расход жидкости, получена интегрированием уравнения (2.6):

$$m\rho_{\mathrm{fm}} v = c_1. \tag{2.15}$$

Граничные условия, необходимые для завершения полной постановки задачи, будут рассмотрены в последующих разделах.

Дальнейшее исследование задачи проведем для ряда частных случаев.

Перед тем как перейти к непосредственному решению задач выразим коэффициенты интерактивных сил Дарси и фронтального напора через известные в механике пористых сред величины.

Для этого перепишем закон Форхгеймера (1.75) в следующем виде (с учетом вышесказанных упрощающих предположений):

$$\frac{dp_{\mathrm{p}}}{dx} = -\frac{\mu m}{k}v - \frac{\beta\rho_{\mathrm{fm}}m^2}{\sqrt{k}}v^2. \tag{2.16}$$

Теперь выразим производную истинного давления в порах из уравнений (2.5) и (2.9) (при выводе данного уравнения пористость принята постоянной, а эффективные вязкости жидкости — нулевыми):

$$\frac{dp_{\mathrm{p}}}{dx} = -\frac{d_0}{m}v - \frac{c_0}{m}v^2 - \rho_{\mathrm{fm}}v\frac{dv}{dx}. \tag{2.17}$$

Сопоставляя (2.16) и (2.17), получаем следующие выражения для коэффициентов интерактивных сил Дарси и фронтального напора:

$$d_0 = \frac{\mu m^2}{k}, \tag{2.18}$$

$$c_0 = \frac{\beta\rho_{\mathrm{fm}}m^3}{\sqrt{k}}. \tag{2.19}$$

2.1.2 Аналитическое решение задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края

Рассмотрим задачу об одномерном стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый слой конечной толщины L из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил в случае закрепления от перемещений входного сечения каркаса.

Сохраняя все предположения вышеизложенной общей постановки, примем дополнительные упрощающие предположения:

1. Отсутствие эффективных вязкостей, т.е. $\lambda_{\mathrm{f}} = 0, \mu_{\mathrm{f}} = 0$;
2. Из интерактивных сил [13] действует только сила Дарси (сила действия жидкости на каркас), взятая в виде: $\mathbf{f}_{\mathrm{D}} = d_0\mathbf{v}_{\mathrm{f}}$ (где d_0 — известная константа);
3. пористость m приближенно постоянна: $m = m_0$;
4. соотношение (1.97) имеет линейный вид $p_{\mathrm{p}} = p_0 + c_{\mathrm{fm}}(\rho_{\mathrm{fm}} - \rho_{\mathrm{fm0}})$ с известными константами p_0, ρ_{fm0}, c_{fm}.

Сделаем важное замечание. Отсутствие эффективных вязкостей жидкой фазы при осредненном описании не означает "идеальности" жидкости. В области применимости закона Дарси объемная сила сопротивления, действующая на жидкость, принципиально связана с действием сил вязкого трения на межфазной границе. В области квадратичного закона сопротивления возникновение сопротивления (в стационарном режиме)

также в конечном итоге связано с действием вязкой диссипации. Подразумевается, что "вязкие эффекты" учитываются интерактивной силой типа Дарси [100, 102, 103].

С учетом дополнительных предположений уравнения системы (2.4)–(2.12) примут вид:

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{s}}}{dx} + d_0 v = 0, \tag{2.20}$$

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{f}}}{dx} - d_0 v = m_0 \rho_{\mathrm{fm}} v \frac{dv}{dx} \tag{2.21}$$

$$\frac{d(m\rho_{\mathrm{fm}} v)}{dx} = 0, \tag{2.22}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}} = -(1-m)p_{\mathrm{p}} + (\lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}})\frac{du}{dx}, \tag{2.23}$$

$$\sigma^{\mathrm{f}} = -m p_{\mathrm{p}}, \tag{2.24}$$

$$p_{\mathrm{p}} = p_0 + c_{\mathrm{fm}}(\rho_{\mathrm{fm}} - \rho_{\mathrm{fm0}}), \tag{2.25}$$

где неизвестными функциями являются: компоненты эффективных тензоров напряжений каркаса и жидкости $\sigma^{\mathrm{s}} = \sigma^{\mathrm{s}}_{11}$, $\sigma^{\mathrm{f}} = \sigma^{\mathrm{f}}_{11}$; скорость жидкости v, перемещение точек каркаса u, истинное давление в порах p_{p}, истинная плотность жидкости ρ_{fm}.

Коэффициент силы Дарси d_0, эффективные характеристики упругого каркаса λ_{s}, μ_{s}; постоянная пористость m_0, характеристики связи давления и истинной плотности жидкости p_0, ρ_{fm0}, c_{fm} считаются известными константами.

Мы получаем систему из шести уравнений для шести неизвестных функций.

Примем следующие граничные условия:

$$u(0) = 0, \tag{2.26}$$

$$v(0) = \frac{v_{\mathrm{inc}}}{m}, \tag{2.27}$$

$$\sigma_{\mathrm{s}}(L) = -(1-m)p_{\mathrm{p}}(L), \tag{2.28}$$

$$p_{\mathrm{p}}(0) = p_{\mathrm{inc}}, \tag{2.29}$$

где p_{inc} и v_{inc} — граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости перед входом в пористый слой.

Граничное условие (2.26) означает закрепление левого (входного) края, условие (2.27) задает входное значение скорости; граничные условия (2.28)–(2.29) — силовые условия на границах каркаса (значение давления на входе и отсутствие "сухой" части напряжений каркаса на выходе).

Отдельно отметим, что четвертое граничное условие необходимо для нахождения неизвестного параметра c_1.

Выражая уравнения системы (2.20)–(2.25) через переменные u и v, приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left(\frac{c_1 c_{\text{fm}}}{v^2} - c_1\right)\frac{dv}{dx} - d_0 v = 0, \tag{2.30}$$

$$\left(\frac{(1-m_0)c_1 c_{\text{fm}}}{m_0 v^2}\right)\frac{dv}{dx} + (\lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}})\frac{d^2u}{dx^2} + d_0 v = 0. \tag{2.31}$$

Отдельно отметим, что неизвестная константа c_1, выражающая расход жидкости, вычисляется заранее при помощи уравнений (2.22), (2.25) и граничных условий (2.27) и (2.29) следующим образом:

$$c_1 = \left(\frac{p_{\text{inc}} - p_0}{c_{\text{fm}}} + \rho_{\text{fm0}}\right)\cdot v_{\text{inc}}, \tag{2.32}$$

поэтому для решения системы (2.30)–(2.31) достаточно граничных условий (2.26)–(2.28).

Теперь приведем систему (2.30)–(2.31) к безразмерному виду. Для этой цели возьмем следующие размерные величины:

$$[L] = \text{м}, \quad [\rho_{\text{fm0}} L^3] = \text{кг}, \quad \left[\frac{L}{v_{inc}}\right] = \text{с}. \tag{2.33}$$

Приведем соотношения между физическими величинами задачи и их безразмерными аналогами (тильда обозначает безразмерный аналог соответствующей физической величины):

$$\begin{gathered} v = \frac{v_{inc}}{m}\,\tilde{v},\ u = L\tilde{u},\ x = L\tilde{x},\ c_1 = \rho_{\text{fm0}}\, v_{\text{inc}}\tilde{c}_1,\ c_{\text{fm}} = v_{\text{inc}}^2\,\tilde{c}_{\text{fm}}, \\ d_0 = \frac{\rho_{\text{fm0}}\, v_{\text{inc}}}{L}\tilde{d}_0,\ \lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = \rho_{\text{fm0}}\, v_{inc}^2\,(\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}}),\ p = p_0\tilde{p}. \end{gathered} \tag{2.34}$$

В терминах безразмерных величин система (2.30)–(2.31) примет вид:

$$\left(\frac{m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{\tilde{v^2}} - \frac{\tilde{c}_1}{m}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} = 0, \tag{2.35}$$

$$\left(\frac{(1-m)\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{\tilde{v^2}}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} + (\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}})\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x^2}} + \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} = 0. \tag{2.36}$$

Граничные условия (2.26)–(2.28) примут вид:

$$\tilde{u}(0) = 0, \tag{2.37}$$

$$\tilde{v}(0) = 1, \tag{2.38}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}(1) = 0. \tag{2.39}$$

Граничное условие (2.39) получено из условия (2.28) и уравнения (2.23).

Обратим внимание на уравнение (2.35).

Оно решается отдельно от системы (2.35)–(2.36), так как является уравнением с одной неизвестной функцией $\tilde{v}(\tilde{x})$. Аналитическое решение данного уравнения:

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_1 m_0}{2\tilde{d}_0}\left(1 - \frac{1}{\tilde{v}^2}\right) - \frac{\tilde{c}_1}{m\tilde{d}_0}\ln|\tilde{v}|, \tag{2.40}$$

является трансцендентным, хотя и имеет сравнительно компактную запись с использованием трансцендентной W-функции Ламберта[1]:

$$\tilde{v}(\tilde{x}) = \exp\left(\frac{W\left(-\tilde{c}_{\text{fm}}m^2\exp\left(\frac{2\tilde{d}_0\tilde{x}}{c_1} + \frac{2\tilde{d}_0\cdot C}{\tilde{c}_1}\right)\right)\tilde{c}_1 - 2\tilde{d}_0\tilde{x} - 2\tilde{d}_0\cdot C}{2\tilde{c}_1}\right), \tag{2.41}$$

Здесь C — константа интегрирования.

Ввиду весьма сложных математических свойств функции Ламберта, работа с решением (2.41) представляется крайне затруднительной.

Для упрощения уравнения (2.35) воспользуемся тем фактом, что член $\frac{\tilde{c}_1}{m}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}$ в большинстве реальных течений [47] пренебрежимо мал по сравнению с членом $\frac{m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{\tilde{v}^2}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}$. Сравним безразмерный член $\frac{c_{\text{fm}}}{v^2}$ в уравнении (2.35) с единицей. Коэффициент c_{fm} равен квадрату скорости звука в жидкости c. С учетом этого факта получаем следующее условие:

$$\frac{c}{v} \gg 1. \tag{2.42}$$

Отдельно отметим, что в данной работе мы будем рассматривать течения, для которых условие (2.42) будет выполняться.

Пренебрегая инерционным членом $\frac{\tilde{c}_1}{m}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}$, получим упрощенный вариант уравнения (2.35):

$$\left(\frac{m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{\tilde{v}^2}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} = 0. \tag{2.43}$$

[1] W-функция Ламберта определяется как обратная функция к $f(w) = we^w$, для комплексных w. Для любого комплексного z она определяется функциональным уравнением:

$$z = W(z)e^{W(z)}.$$

Уравнение (2.43) имеет два противоположных решения:

$$\tilde{v}_{1,2}(\tilde{x}) = \pm\sqrt{\frac{m^2\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{m^2\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}\cdot C_1 - 2\tilde{d}_0\tilde{x}}}, \tag{2.44}$$

где C_1 — константа интегрирования.

Отрицательное решение можно трактовать, как скорость жидкости при обратном движении жидкости. В данном разделе ограничимся рассмотрением только положительного решения.

Рассмотрим второе уравнение системы (2.35)–(2.36).

После подстановки положительного решения для скорости и двукратного интегрирования, получаем решение для перемещения точек каркаса:

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = -\frac{\sqrt{\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}}{3\tilde{d}_0(\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}})m}\cdot(m^2\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}C_1 - 2\tilde{d}_0\tilde{x})^{\frac{3}{2}} + C_2\tilde{x} + C_3, \tag{2.45}$$

Воспользовавшись граничными условиями (2.37)–(2.39), найдем константы интегрирования:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{\sqrt{\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}}{m(\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}})}\cdot\sqrt{m^2\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}} - 2\tilde{d}_0}, \tag{2.46}$$

$$C_3 = \frac{m^2\tilde{c}_1^2\tilde{c}_{\text{fm}}^2}{3\tilde{d}_0(\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}})}.$$

Обратимся к вопросу существования вышеуказанных решений. Из требования положительности подкоренного выражения (при $C_1 = 1$) в формуле (2.44) следует ограничение на безразмерные параметры задачи:

$$\frac{2\tilde{d}_0\tilde{x}}{m^2\tilde{c}_{\text{fm}}} < \tilde{c}_1, \quad \forall\tilde{x} \in [0;1]. \tag{2.47}$$

Таким образом, параметр c_1, регулирующий расход жидкости, влияет на существование решения всей задачи (в рамках принятых предположений).

2.1.3 Численное решение одномерной задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края

Приведем численное решение вышеуказанной задачи без дополнительных предположений о пренебрежении инерционным членом $c_1\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}$.

Для численного решения системы (2.35)–(2.36) возьмем следующие размерные величины [34, 88]:

$$c_{\text{fm}} = 2,5 \cdot 10^6 \, \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, v_{\text{inc}} = 0.001 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}, L = 1 \, \text{м}, m = 0.2, \rho_{\text{fm0}} = 1000 \, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad (2.48)$$
$$\lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = 12 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \; p_0 = 10^5 \, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, p_{\text{inc}} = 30 \cdot 10^5 \, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Для каркаса возьмем два значения проницаемости $k_1 = 10^{-10}\text{м}^2$ и $k_2 = 10^{-12}\text{м}^2$. Данные значения качественно соответствуют проницаемостям почвы и песчаника соответственно [34].

Значения, взятые для жидкости, качественно соответствуют воде.

Тогда согласно (2.18) получим два значения коэффициента Дарси $d_0 = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$ и $d_0 = 4 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$ (для почвы и песчаника соответственно).

Вязкость воды μ при нормальных условиях имеет порядок 10^{-3} Па$\cdot$с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [34].

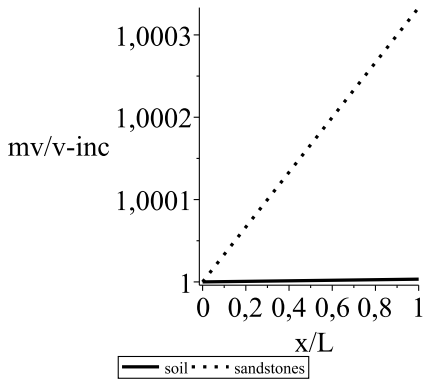
Тогда для числа Рейнольдса $\text{Re} = \dfrac{\rho_{\text{fm}} v_{\text{inc}} d}{\mu}$ получим оценку $\text{Re} \ll 1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил [13] при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будет вносить сила типа Дарси.

Расход c_1 согласно (2.32) примет значение $1,0011 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

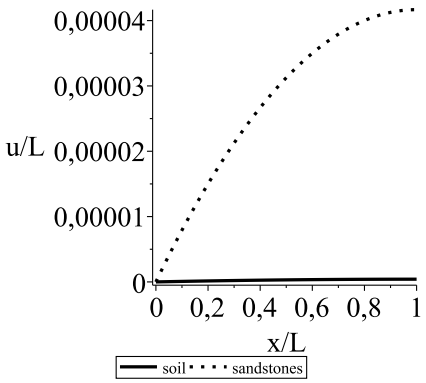
Для вышеуказанных параметров численно решим систему (2.35)–(2.36) с граничными условиями (2.37)–(2.39).

Приведем графики основных величин (рис. 2.1) (скорости жидкости, перемещения точек каркаса, истинного давления в порах, истинного значения плотности жидкости, ненулевых компонент тензоров напряжений каркаса и жидкости) для двух значений параметра d_0.

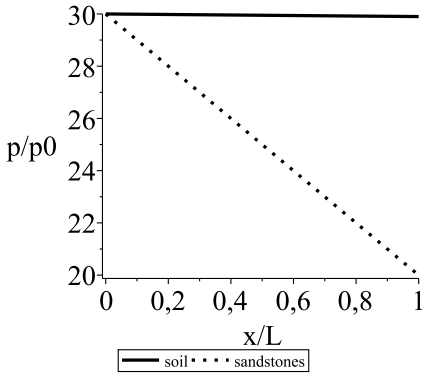
График, изображенный на рисунке 2.1а), иллюстрирует тот факт, что скорость течения жидкости на границе проникновения в пористый каркас несколько меньше скорости на выходе. Это соответствует механическому смыслу, так как истинное давление и истинная плотность жидкости на входе выше истинного давления на выходе (что иллюстрируют рисунки 2.1в) и 2.1г)). Рисунок 2.1б) иллюстрирует тот факт, что перемещения несколько возрастают от входа к выходу (в силу наличия сопротивления Дарси) и имеют нулевую производную по $\tilde{x}$ при $\tilde{x} = 1$ (что соответствует граничному условию (2.39)). Рисунок 2.1д) показывает, что напряжения каркаса убывают от входа к выходу, в то время как напряжения в жидкости возрастают 2.1е). Также отметим, что увеличение коэффициента Дарси приводит к существенному увеличению



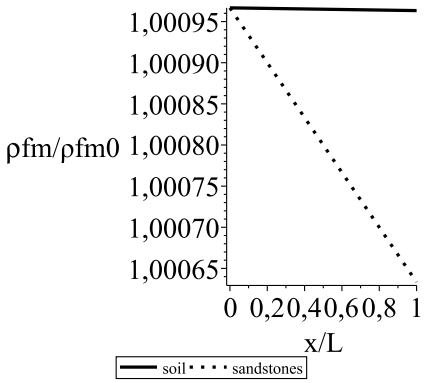
а)



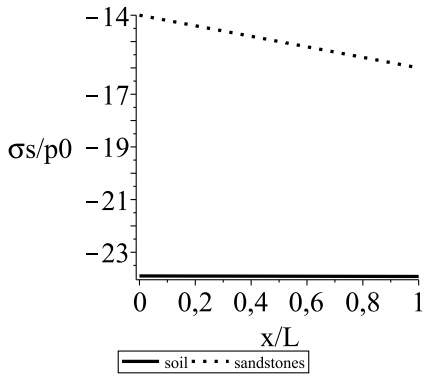
б)



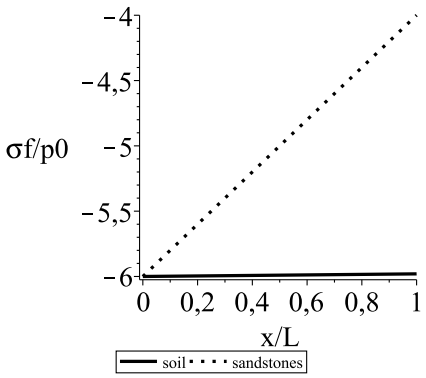
в)



г)



д)



е)

Рис. 2.1: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси для двух значений коэффициента Дарси (протекания через почву (”soil”) и песчаник (”sandstones”)) при закреплении входного края и малых деформациях каркаса: а) график скорости жидкости, б) график перемещения точек каркаса, в) график истинного давления, г) график истинной плотности жидкости, д) график ненулевой компоненты тензора напряжений каркаса, е) график ненулевой компоненты тензора напряжений жидкости.

перепада (разницы значений на входе и выходе) всех основных параметров задачи.

2.1.4 Альтернативная постановка задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края

Возможна иная постановка вышеуказанной задачи о стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый слой конечной толщины L из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил при закреплении от перемещений входного сечения каркаса.

В ряде практических задач требуется обеспечить заданный расход жидкости. В этом случае вместо граничного условия (2.29) следует использовать условие:

$$\tilde{c_1} = \check{c_1}. \tag{2.49}$$

Сделаем важное замечание. Константа c_1, заданная нами при решении задачи, является параметром, влияющим на существование решения системы (2.35)–(2.36) с граничными условиями (2.37)–(2.39). Данная задача аналогичная классической задаче Штурма-Лиувилля. [2] Отметим, что задача, решаемая в данной работе, является более сложной ввиду нелинейности дифференциального оператора.

Приведем численное решение задачи о стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый слой конечной толщины L при отсутствии внешних массовых сил в случае, когда сечение каркаса на входе жидкости закреплено от перемещений с использованием условия (2.49).

[2] *Задача Штурма-Лиувилля.* Найти нетривиальные (т.е. отличные от тождественного нуля) решения на промежутке $(a;b)$ однородного уравнения

$$L[y] + \lambda\theta(x)y(x) = 0,$$

удовлетворяющих однородным граничным условиям

$$\alpha_1\frac{dy}{dx}(a) + \beta y(a) = 0, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0; \quad \alpha_2\frac{dy}{dx}(b) + \beta y(b) = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0;$$

и значения параметра λ, при которых такие удовлетворяющие указанным граничным условиям решения существуют.

Оператор $L[y]$ имеет вид $L[y] \equiv \frac{d}{dx}\left[l(x)\frac{dy}{dx}\right] - s(x)y(x)$, где функции $l(x), \frac{dl(x)}{dx}, s(x), \theta(x)$ предполагаются непрерывными на $(a;b)$. Также считается, что $l(x)$ и $\theta(x)$ положительны на $(a;b)$ [31].

Для численного решения системы (2.35)–(2.36) с граничными условиями (2.37)–(2.39) и условием (2.49) возьмем размерные величины (2.48).

Для каркаса возьмем значение проницаемости $k_2 = 10^{-12}$, соответствующее грунту.

Таким образом, оценки для коэффициента силы Дарси и числа Рейнольдса совпадут с предыдущим рассмотрением.

Для параметров (2.48) численно решим систему (2.35)-(2.36) с граничными условиями (2.37)–(2.39) и условием (2.49). Для расхода возьмем два последовательных значения $\check{c}_1 = 1.0007$ и $\check{c}_1 = 1.007$.

Приведем графики основных величин (рисунки 2.2) (скорости жидкости, перемещения точек каркаса, истинного давления в порах, истинного значения плотности жидкости, ненулевых компонент тензоров напряжений каркаса и жидкости для $\check{c}_1 = 1.0007$ и $\check{c}_1 = 1.007$).

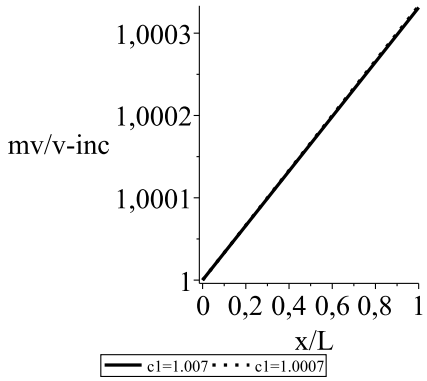
Как видно из графиков, выводы о характере поведения основных величин задачи совпадают с полученными в предыдущем разделе.

Отдельно отметим, что увеличение расхода жидкости приводит к существенному увеличению входных и выходных значений всех основных параметров задачи.

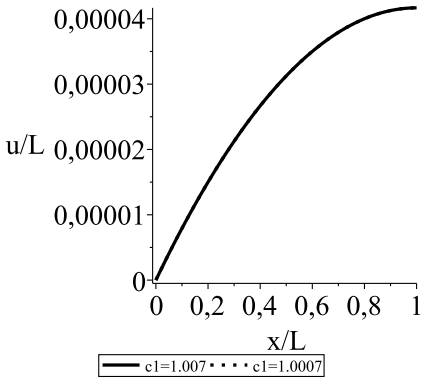
2.1.5 Аналитические построения для задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом сил Дарси и фронтального напора при закреплении входного края

Рассмотрим задачу об одномерном стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый слой конечной толщины L из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил при закреплении от перемещений входного сечения каркаса для другого режима течения жидкости ($\mathrm{Re} \gg 1$). Примем те же упрощающие предположения, что и в аналогичной задаче с учетом силы типа Дарси, рассмотренной выше, но также будем считать, что из интерактивных сил (воздействия жидкости на каркас) [13] действуют сила Дарси (сила воздействия жидкости на каркас) и сила фронтального напора (сила воздействия жидкости на каркас), взятые в виде: $\mathbf{f}_\mathrm{D} = d_0\mathbf{v}_\mathrm{f}$, $\mathbf{f}_\mathrm{F} = c_0|\mathbf{v}_\mathrm{f}| \cdot \mathbf{v}_\mathrm{f}$ (где d_0, c_0 — известные константы, $\mathbf{v}_\mathrm{f}$ — скорость жидкости) соответственно.

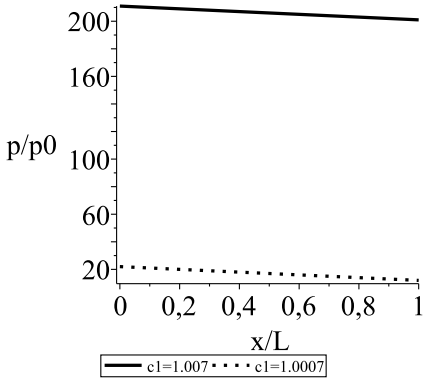
Наличие данных интерактивных сил соответствует двучленному закону сопротивления Форхгеймера [34], справедливому для процессов фильтрации как при больших, так и при малых (по сравнению с единицей) числах Рейнольдса.



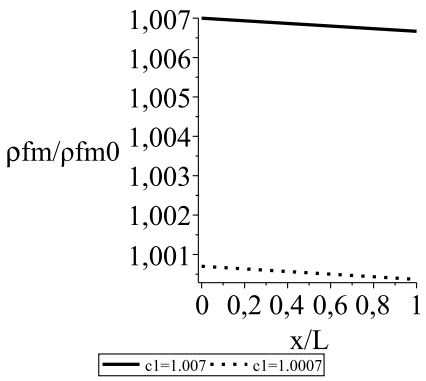
а)



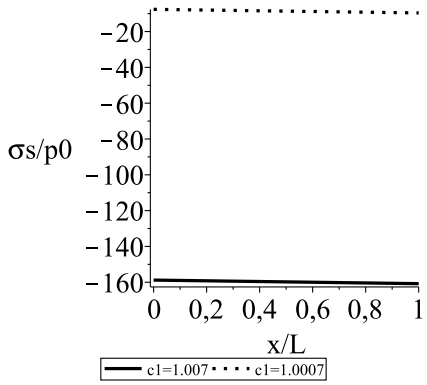
б)



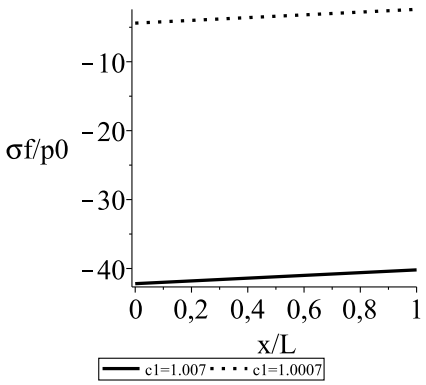
в)



г)



д)



е)

Рис. 2.2: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси для двух значений расхода $\check{c}_1 = 1.0007$ и $\check{c}_1 = 1.007$ при закреплении входного края при малых деформациях каркаса: а) график скорости жидкости, б) график перемещения точек каркаса, в) график истинного давления, г) график истинной плотности жидкости, д) график ненулевой компоненты тензора напряжений каркаса, е) график ненулевой компоненты тензора напряжений жидкости.

Воспользуемся системой уравнений (2.20)–(2.25) с граничными условиями (2.26)–(2.29), но заменим уравнение (2.20) на уравнение:

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{s}}}{dx} + d_0 v + c_0 v^2 = 0, \tag{2.50}$$

а уравнение (2.21) — на уравнение:

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{f}}}{dx} - d_0 v - c_0 v^2 = m\rho_{\mathrm{fm}} v \frac{dv}{dx}, \tag{2.51}$$

Проделав аналогичные предыдущему случаю преобразования, снова приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными u, v:

$$\left(\frac{c_1 c_{\mathrm{fm}}}{v^2} - c_1\right)\frac{dv}{dx} - d_0 v - c_0 v^2 = 0, \tag{2.52}$$

$$\left(\frac{(1-m)c_1 c_{\mathrm{fm}}}{mv^2}\right)\frac{dv}{dx} + (\lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}})\frac{d^2u}{dx^2} + d_0 v + c_0 v^2 = 0. \tag{2.53}$$

Неизвестное значение расхода найдем при помощи условия (2.32).

В терминах безразмерных величин (2.34) ($c_0 = \frac{\rho_{\mathrm{fm}0}}{L}\,\tilde{c_0}$) система (2.52)–(2.53) примет вид:

$$\left(\frac{m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\mathrm{fm}}}{\tilde{v^2}} - \frac{\tilde{c}_1}{m}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} - \left(\frac{\tilde{c_0}}{m^2}\right)\tilde{v^2} = 0, \tag{2.54}$$

$$\left(\frac{(1-m)\tilde{c}_1\tilde{c}_{\mathrm{fm}}}{\tilde{v^2}}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} + (\tilde{\lambda}_{\mathrm{s}} + 2\tilde{\mu}_{\mathrm{s}})\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x^2}} + \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} + \left(\frac{\tilde{c_0}}{m^2}\right)\tilde{v^2} = 0. \tag{2.55}$$

Система (2.54)–(2.55) допускает аналитическое решение.

Обратим внимание на уравнение (2.54). Оно решается отдельно от системы (2.54)–(2.55), так как является уравнением с одной неизвестной функцией $\tilde{v}(\tilde{x})$. Аналитическое решение данного уравнения, записывается в виде трансцендентной зависимости, но имеет чрезмерно громоздкую запись, поэтому мы не будем ее приводить, а перейдем к упрощенной форме.

Для упрощения уравнения (2.35), предполагая выполнение условия (2.42), пренебрежем инерционным членом $c_1\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}$.

Отбросив инерционный член, получим упрощенный вариант уравнения (2.54):

$$\left(\frac{m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\mathrm{fm}}}{\tilde{v^2}}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} - \left(\frac{\tilde{c_0}}{m^2}\right)\tilde{v^2} = 0. \tag{2.56}$$

Уравнение (2.56) имеет решение:

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_0^2 \ln|\tilde{v}|}{\tilde{d}_0^3} + \frac{m\tilde{c}_0}{\tilde{d}_0^2 v} - \frac{m^2\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{2\tilde{d}_0\tilde{v}^2} + \frac{\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_0^2 \ln(m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{d}_0 + \tilde{v}\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_0)}{\tilde{d}_0^3} + C_4, \tag{2.57}$$

где (с учетом граничного условия $\tilde{v}(0) = 1$):

$$C_4 = \frac{m^2\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}}{2\tilde{d}_0} - \frac{m\tilde{c}_0}{\tilde{d}_0^2} - \frac{\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_0^2 \ln(m\tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{d}_0 + \tilde{c}_1\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_0)}{\tilde{d}_0^3}. \tag{2.58}$$

Данная зависимость также носит трансцендентный характер (хотя и более простой, чем зависимость с инерционным членом), что не позволяет получить аналитическое решение для перемещения точек каркаса.

Перейдем к численному решению данной задачи.

2.1.6 Численное решение задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора при закреплении входного края

Для численного решения системы (2.54)–(2.55) возьмем следующие размерные величины, качественно соответствующие протеканию невязкой сравнительно тяжелой жидкости (физически сходной с бензолом или ацетоном) сквозь песчаниковый ("sandstones") каркас и грунт ("soil") [88]:

$$c_{\text{fm}} = 3,24 \cdot 10^6 \,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},\ v_{\text{inc}} = 0.01\ \frac{\text{м}}{\text{с}},\ L = 1\,\text{м},\ m = 0.07, \tag{2.59}$$
$$\rho_{\text{fm}0} = 800\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},\ \lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = 12 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},\ p_0 = 10^5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Для каркаса возьмем два значения проницаемости $k_1 = 10^{-10}\text{м}^2$ и $k_2 = 10^{-12}\text{м}^2$. Данные значения качественно соответствуют проницаемости почвы и песчаника соответственно [34].

Тогда согласно (2.18) и (2.19) получим две пары значений коэффициента Дарси и коэффициента силы фронтального напора $(d_0, c_0) = (490\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 24010\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ и $(d_0, c_0) = (4,9 \cdot 10^4\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 2,4 \cdot 10^5\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ (для почвы и песчаника соответственно).

Для почвы и песчаника расчет проведем как с наличием силы фронтального напора, так и при ее отсутствии (при фиксированном значении коэффициента силы Дарси).

Вязкость жидкости μ примем равной 10^{-3} Па $\cdot$ с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [34].

Тогда для числа Рейнольдса Re получим оценку $\mathrm{Re} \gg 1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил [13] при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будут вносить силы типа Дарси и фронтального напора, причем при увеличении числа Рейнольдса влияние силы Дарси будет уменьшаться по сравнению с силой фронтального напора.

Расход c_1 согласно (2.32) примет значение $8,03\frac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$.

Для параметров (2.59) численно решим систему (2.54)–(2.55) с граничными условиями (2.37)–(2.39).

Графики основных величин (для четырех пар значений $(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0)$): скорости жидкости $\tilde{v}$, перемещения точек каркаса $\tilde{u}$, истинного давления в порах $\tilde{p}_\text{p}$, истинного значения плотности жидкости $\tilde{\rho}_\text{fm}$ в зависимости от $\tilde{x}$ — представлены на (рис 2.3).

Как видно из графиков, выводы о величинах перепада основных численных характеристик совпадают со случаем $\mathrm{Re} \ll 1$. Графики показывают, что учет силы типа фронтального напора существенно влияет на значения перепадов всех величин, что согласуется с таблицей влияния интерактивных сил [13].

2.1.7 Задача о течении жидкости сквозь плоский пористый слой при закреплении выходного края

В предыдущих разделах данной главы рассматривались задачи об одномерном течении жидкости сквозь пористый каркас при закреплении входного края.

В данном разделе рассматривается задача об одномерном стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый слой конечной толщины L из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивной силы типа Дарси для случая закрепления выходного края.

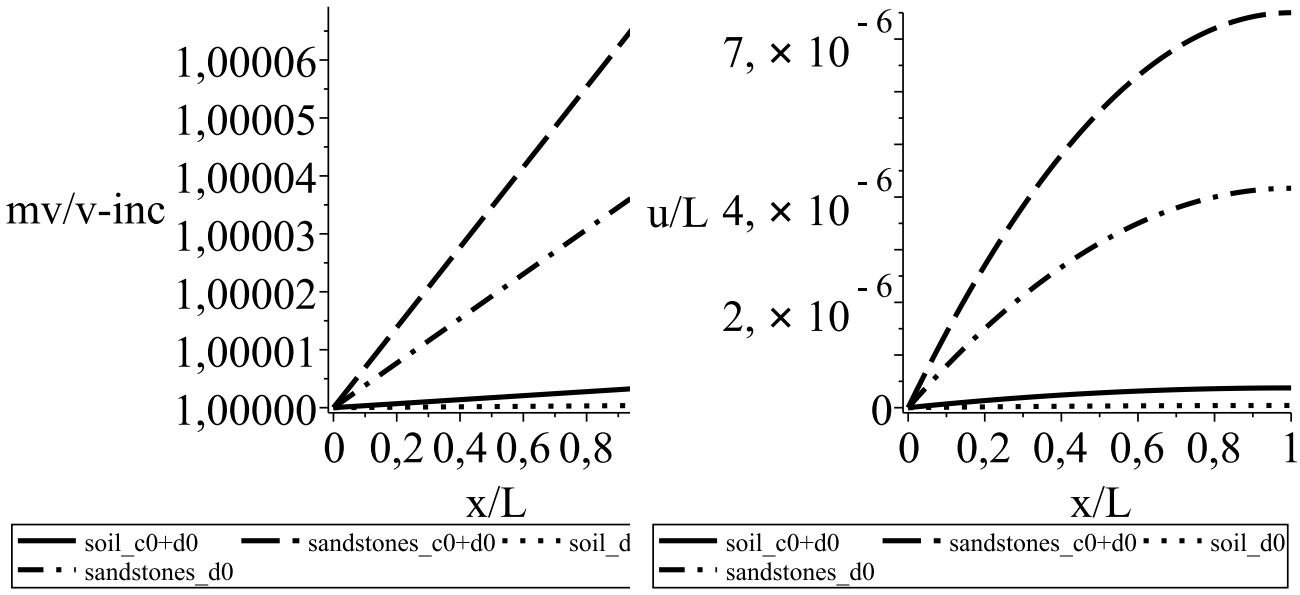
Примем в точности те же предположения, систему уравнений, параметры обезразмеривания и численные характеристики (2.59), что и в аналогичной задаче при закреплении входного края, но заменим граничные условия (2.26) – (2.29) на следующие:

$$u(L) = 0, \tag{2.60}$$

$$v(0) = \frac{v_\text{inc}}{m}, \tag{2.61}$$

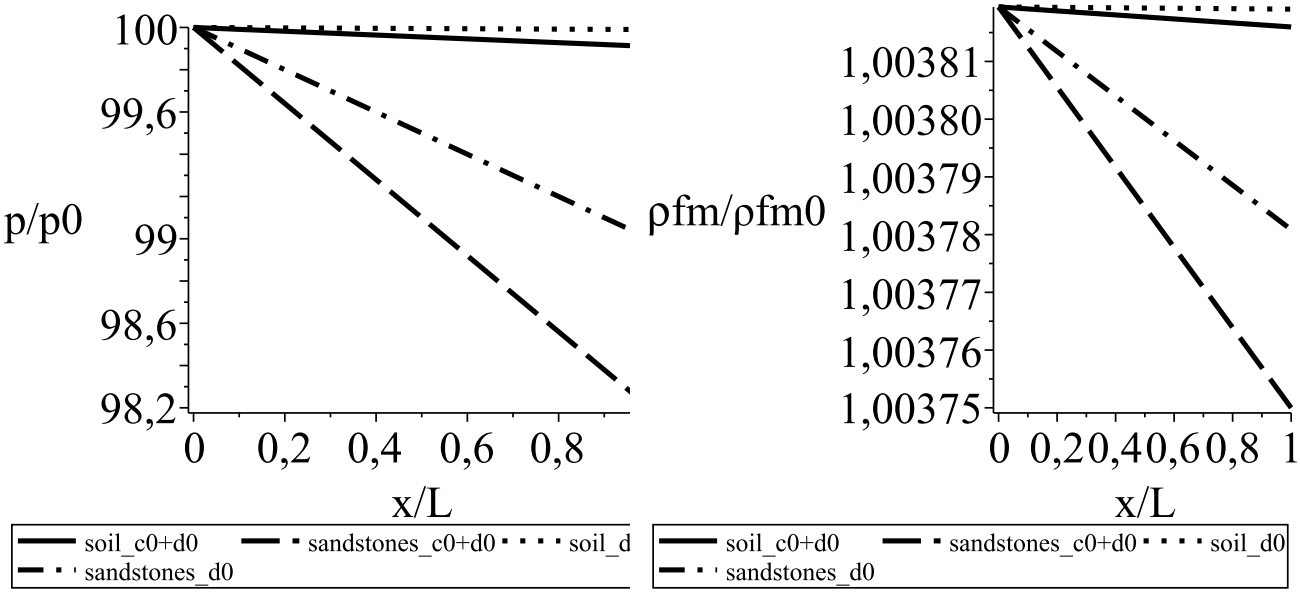
$$\sigma^\text{s}(0) = -(1 - m_0)p_\text{p}(L), \tag{2.62}$$

$$p_\text{p}(0) = p_\text{inc}, \tag{2.63}$$



а)

б)



в)

г)

Рис. 2.3: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора при закреплении входного края для четырех пар значений коэффициентов сил Дарси и фронтального напора при малых деформациях каркаса: а) скорость жидкости $\tilde{v}$, б) перемещения точек каркаса $\tilde{u}$, в) истинное давление в порах $\tilde{p}$, г) истинная плотность жидкости $\tilde{\rho}_{\mathrm{fm}}$.

где p_{inc} и v_{inc} — граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости.

Или в безразмерном виде:

$$\tilde{u}(1) = 0, \tag{2.64}$$

$$\tilde{v}(0) = 1, \tag{2.65}$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}(0) = 0, \tag{2.66}$$

$$\tilde{p}_{\text{p}}(0) = \tilde{p}_{\text{inc}}. \tag{2.67}$$

Оценки величин расхода жидкости, числа Рейнольдса и коэффициентов интерактивной силы типа Дарси совпадают со случаем закрепления входного края.

Численно решая систему (2.35)–(2.36) с граничными условиями (2.64)–(2.66), получаем графики основных параметров задачи (рисунок 2.4).

Характер поведения основных параметров задачи совпадает с аналогичной задачей при закреплении входного края, за исключением перемещения (ввиду другого характера закрепления перемещения имеют нулевую производную в нуле, а не в единице; и убывают от входа к выходу).

2.1.8 Аналитическое решение одномерной задачи о течении газа сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси

Рассмотрим задачу об одномерном стационарном поперечном течении газа сквозь плоский пористый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края.

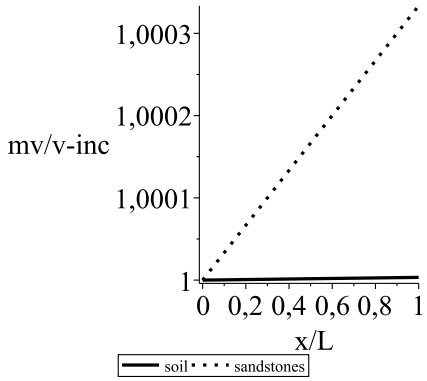
Линейная зависимость (2.25) между истинной плотностью жидкости ρ_{fm} и истинным давлением в порах p_{p}, применяемая для описания движения слабосжимаемых жидкостей, неприменима для описания движения газов [2].

Для описания движения газов мы будем использовать степенную зависимость между истинной плотностью жидкости ρ_{fm} и истинным давлением в порах p_{p}:

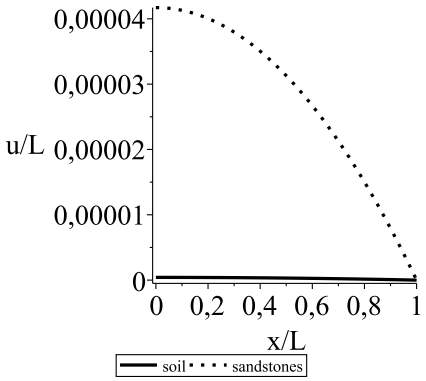
$$\frac{p_{\text{p}}}{p_0} = \left(\frac{\rho_{\text{fm}}}{\rho_{\text{fm}0}}\right)^{\gamma}, \tag{2.68}$$

или в безразмерном виде (согласно системе (2.33)):

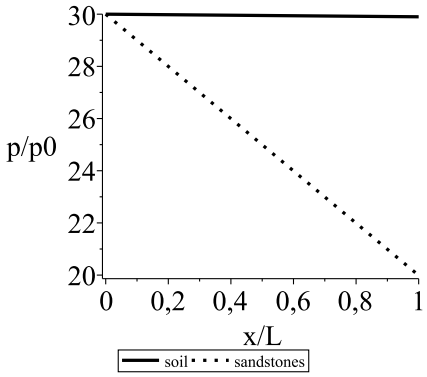
$$\tilde{p}_{\text{p}} = \left(\tilde{\rho}_{\text{fm}}\right)^{\gamma}. \tag{2.69}$$



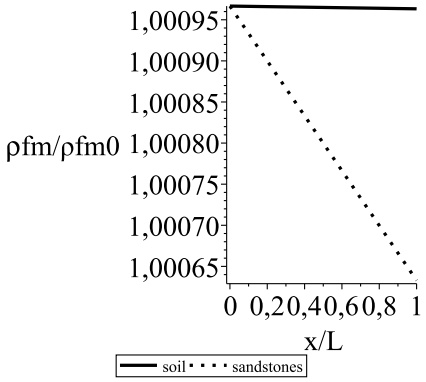
а)



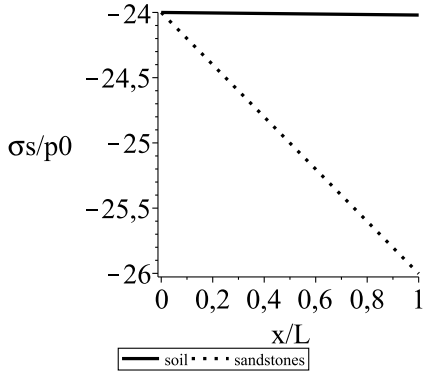
б)



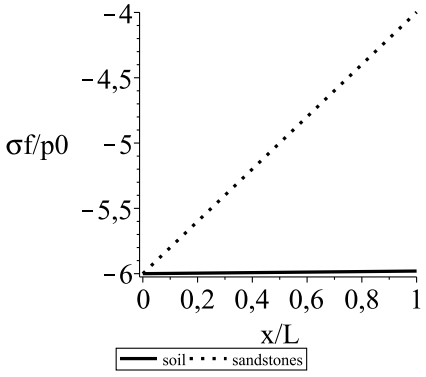
в)



г)



д)



е)

Рис. 2.4: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси для двух значений коэффициента Дарси при закреплении выходного края при малых деформациях каркаса: а) график скорости жидкости, б) график перемещения точек каркаса, в) график истинного давления, г) график истинной плотности жидкости, д) график ненулевой компоненты тензора напряжений каркаса, е) график ненулевой компоненты тензора напряжений жидкости.

Здесь p_0, $\rho_{\text{fm}0}$ — значения истинного давления и истинной плотности газа при нормальных условиях, а γ — показатель степени, который экспериментально определяется для конкретного газа.

Остальные уравнения системы (2.20)–(2.24) примем без изменений. Также примем граничные условия (2.26)–(2.29) и все дополнительные упрощающие предположения аналогичной задачи для случая течения жидкости.

Проделав преобразования аналогичные преобразованиям задачи о течении жидкости, приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными u, v:

$$\left(\frac{\gamma p_0 m\,\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_1^{\gamma}}{\rho_{\text{fm}0} v_{\text{inc}}^2}\cdot\frac{1}{\tilde{v}^{1+\gamma}}-\frac{\tilde{c}_1}{m}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}-\left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v}=0, \tag{2.70}$$

$$\left(\frac{\gamma p_0(1-m)\,\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_1^{\gamma}}{\rho_{\text{fm}0} v_{\text{inc}}^2}\cdot\frac{1}{\tilde{v}^{1+\gamma}}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}+\left(\tilde{\lambda}_{\text{s}}+2\tilde{\mu}_{\text{s}}\right)\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x^2}}+\left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v}=0. \tag{2.71}$$

Значение расхода вычислим заранее по формуле:

$$\tilde{c}_1=(\tilde{p}_{\text{inc}})^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{2.72}$$

полученной при помощи граничного условия (2.29).

Уравнение (2.70) имеет решение, записываемое с помощью трансцендентных функций. Для получения более простого аналитического решения снова пренебрежем инерционным членом $\frac{\tilde{c}_1}{m}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}$ (в предположении о его малости по сравнению с членом $\frac{\gamma p_0 m\,\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_1^{\gamma}}{\rho_{\text{fm}0} v_{\text{inc}}^2}\cdot\frac{1}{\tilde{v}^{1+\gamma}}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}$). Уравнение (2.70) перейдет в уравнение

$$\left(\frac{\gamma p_0 m\,\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_1^{\gamma}}{\rho_{\text{fm}0} v_{\text{inc}}^2}\cdot\frac{1}{\tilde{v}^{1+\gamma}}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}}-\left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v}=0, \tag{2.73}$$

имеющее (с учетом граничного условия $\tilde{v}(0)=1$) аналитическое решение, не содержащее трансцендентных функций:

$$v(x)=\left(\frac{t_1 m-(\gamma+1)d_0 x}{t_1 m}\right)^{-\frac{1}{1+\gamma}},\quad \text{где}\quad t_1=\frac{\gamma m\tilde{c}_{\text{fm}}\tilde{c}_1^{\gamma}}{\rho_{\text{fm}0} v_{\text{inc}}^2\left(\tilde{\lambda}_{\text{s}}+2\tilde{\mu}_{\text{s}}\right)}. \tag{2.74}$$

Подставляя (2.74) в (2.71), получаем (с использованием граничных условий $\tilde{u}(0)=0$ и $\frac{d\tilde{u}}{dx}(1)=0$) выражение для перемещения:

$$u(x)=t_2\cdot(t_1 m-d_0 x)^{2-\frac{1}{\gamma+1}}+d_0 t_2\left(2-\frac{1}{\gamma+1}\right)(t_1 m-d_0)^{1-\frac{1}{\gamma+1}}-t_2\cdot(t_1 m)^{2-\frac{1}{\gamma+1}}, \tag{2.75}$$

где $t_2=\dfrac{(\gamma+1)((1-m)p_0 c_1^{\gamma}-\rho_{\text{fm}0} v_{\text{inc}}^2 t_1(\gamma+1))}{d_0\gamma(2\gamma+1)\rho_{\text{fm}0} v_{\text{inc}}^2 t_1 m}$.

2.1.9 Численное решение одномерной задачи о течении газа сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси

Для численного решения системы (2.70)–(2.71) возьмем следующие размерные величины [34, 88]:

$$v_{\text{inc}} = 0.01\ \frac{\text{м}}{\text{с}},\ L = 10\,\text{м},\ m = 0,2,\ \rho_{\text{fm0}} = 1,3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \qquad (2.76)$$
$$\lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = 12 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},\ p_0 = 10^5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \gamma = \frac{4}{3}.$$

Для каркаса возьмем два значения проницаемости $k_1 = 10^{-10}\text{м}^2$ и $k_2 = 10^{-12}\text{м}^2$. Данные значения качественно соответствуют проницаемости почвы и песчаника соответственно [34].

Значения, взятые для жидкости, качественно соответствуют воздуху.

Тогда согласно (2.18) получим два значения коэффициента Дарси $d_0 = 2,8 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$ и $d_0 = 2,8 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$ (для почвы и песчаника соответственно).

Вязкость воздуха μ при нормальных условиях имеет порядок $10^{-4} - -10^{-5}$ Па $\cdot$ с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [34].

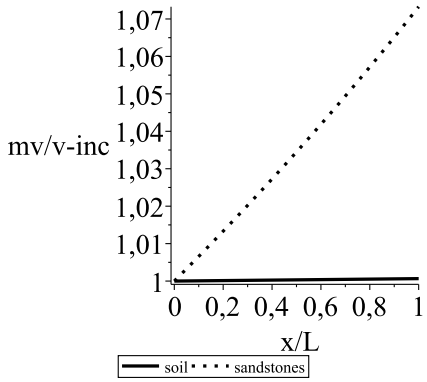
Тогда для числа Рейнольдса Re получим оценку $\text{Re} \ll 1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил [13] при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будет вносить сила типа Дарси.

Расход c_1 согласно (2.72) примет значение $0,013 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

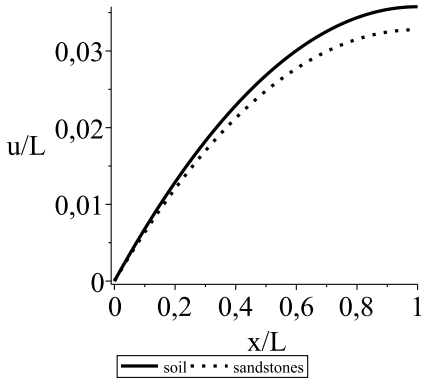
Для параметров (2.76) численно решим систему (2.70)–(2.71) с граничными условиями (2.37)–(2.39).

Приведем графики основных величин (рис. 2.5) (скорости жидкости, перемещения точек каркаса, истинного давления в порах, истинного значения плотности жидкости, ненулевых компонент тензоров напряжений каркаса и жидкости).

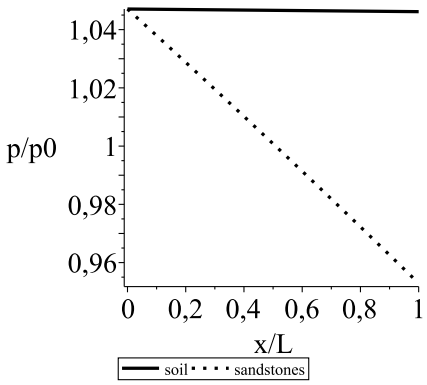
Качественные результаты в целом повторяют случай течения жидкости.



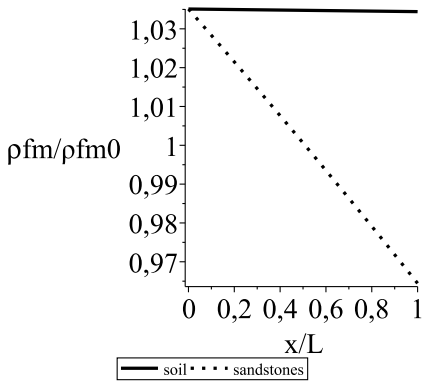
а)



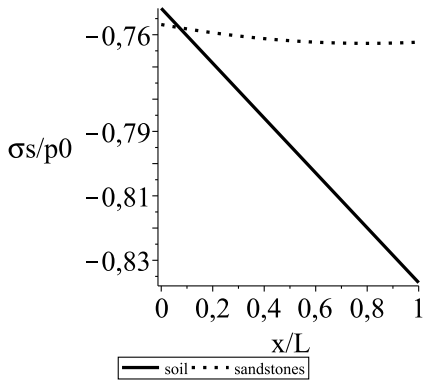
б)



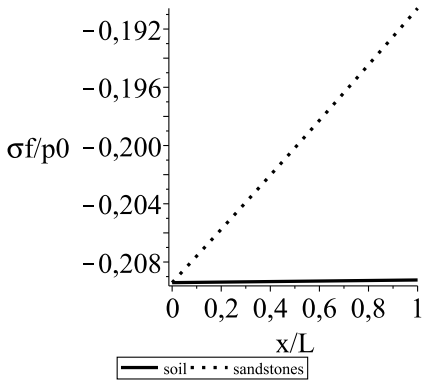
в)



г)



д)



е)

Рис. 2.5: Графики основных величин задачи о течении газа сквозь плоский пористый слой с учетом интерактивной силы типа Дарси для двух значений коэффициента Дарси (протекания через почву (”soil”) и песчаник (”sandstones”)) при закреплении входного края и малых деформациях каркаса: а) график скорости жидкости, б) график перемещения точек каркаса, в) график истинного давления, г) график истинной плотности жидкости, д) график ненулевой компоненты тензора напряжений каркаса, е) график ненулевой компоненты тензора напряжений жидкости.

2.2 Задачи о течении жидкости сквозь сферический пористый слой

2.2.1 Общая постановка задач о течении жидкости сквозь сферический пористый слой

Рассмотрим плоскую задачу о стационарном течении сжимаемой жидкости в сферическом пористом слое (с внутренним радиусом a и внешним радиусом b) из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил. Жидкость поступает из внутренней полой сферы в пористый слой и вытекает наружу; при этом будем считать, что мы умеем регулировать входную скорость жидкости v_{inc}. Будем считать, что внутренняя сфера закреплена от перемещений. Введем стандартную сферическую систему координат (r, φ, θ) и будем считать, что в силу симметрии задачи все функции будут зависеть только от радиуса r (единственными нетривиальными компонентами вектора перемещений и вектора скорости будут компоненты $u = u_{\text{r}}$ и $v = v_{\text{r}}$ соответственно).

Тензоры эффективных напряжений жидкости и каркаса примут вид (в силу симметрии задачи все элементы вне диагонали будут нулевыми):

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{f}} = \begin{pmatrix} \sigma^{\text{f}}_{\text{rr}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{\text{f}}_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\text{f}}_{\theta\theta} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{s}} = \begin{pmatrix} \sigma^{\text{s}}_{\text{rr}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{\text{s}}_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\text{s}}_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \tag{2.77}$$

В данном разделе мы сохраним все упрощающие предположения, принятые для одномерных задач: малость перемещений и градиентов перемещений точек каркаса, постоянство пористости, отсутствие эффективных характеристик жидкости и внешних сил, а также линейность связи между давлением в порах и истинной плотностью жидкости.

Для описания движения воспользуемся моделью [27].

С учетом всех вышесказанных упрощений система уравнений (1.89)–(1.97) примет вид:

$$\frac{d\sigma^{\text{s}}_{\text{rr}}}{dr} + \frac{2(\sigma^{\text{s}}_{\text{rr}} - \sigma^{\text{s}}_{\varphi\varphi})}{r} + d_0 v + c_0 v^2 = 0, \tag{2.78}$$

$$\frac{d\sigma^{\text{f}}_{\text{rr}}}{dr} - d_0 v - c_0 v^2 = m\rho_{\text{fm}} v \frac{dv}{dx}, \tag{2.79}$$

$$\frac{d(m\rho_{\text{fm}} v r^2)}{dr} = 0, \tag{2.80}$$

$$\sigma^{\text{s}}_{\text{rr}} = -(1-m)p_{\text{p}} + \frac{2}{r}\lambda_{\text{s}}\, u + (\lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}})\frac{du}{dr}, \tag{2.81}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}}_{\varphi\varphi} = \sigma^{\mathrm{s}}_{\theta\theta} = -(1-m)p_{\mathrm{p}} + \lambda_{\mathrm{s}}\frac{du}{dr} + 2(\lambda_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{s}})\frac{u}{r}, \tag{2.82}$$

$$\sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{rr}} = \sigma^{\mathrm{f}}_{\varphi\varphi} = \sigma^{\mathrm{f}}_{\theta\theta} = -mp_{\mathrm{p}}, \tag{2.83}$$

$$p_{\mathrm{p}} = p_0 + c_{\mathrm{fm}}(\rho_{\mathrm{fm}} - \rho_{\mathrm{fm0}}), \tag{2.84}$$

где неизвестными функциями являются: компоненты эффективных тензоров напряжений каркаса и жидкости $\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}}$, $\sigma^{\mathrm{s}}_{\varphi\varphi}$, $\sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{rr}}$; скорость жидкости v, перемещение точек каркаса u, истинное давление в порах p_{p}, истинная плотность жидкости ρ_{fm}.

Коэффициенты сил Дарси d_0 и фронтального напора c_0, эффективные характеристики упругого каркаса λ_{s}, μ_{s}; постоянная пористость m, характеристики связи давления и истинной плотности жидкости p_0, ρ_{fm0}, c_{fm} считаются известными константами.

С учетом одномерности мы получаем семь скалярных уравнений для семи неизвестных функций.

Примем следующие граничные условия:

$$u(a) = 0, \tag{2.85}$$

$$v(a) = \frac{v_{\mathrm{inc}}}{m}, \tag{2.86}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}}(b) = -(1-m)p_{\mathrm{p}}(b), \tag{2.87}$$

$$p_{\mathrm{p}}(a) = p_{\mathrm{inc}}, \tag{2.88}$$

где p_{inc} и v_{inc} — граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости.

Граничное условие (2.85) означает закрепление внутренней (входной) сферы, (2.86) — задает значение входной скорости жидкости; граничные условия (2.87)–(2.88) — силовые условия на границах сферы (отсутствие "сухой" части напряжений на выходе и значение давления на входе).

Выражая уравнения системы (2.78)–(2.84) через переменные u и v приходим к системе двух дифференциальных уравнений для двух неизвестных функций u, v:

$$c_{\mathrm{fm}}\, c_1 \left(\frac{1}{r^2\, v^2}\frac{dv}{dr} + \frac{2}{r^3\, v}\right) - d_0\, v - c_0\, v^2 = \frac{c_1}{r^2}\left(\frac{dv}{dr} + \frac{2\, v}{r}\right), \tag{2.89}$$

$$c_{\mathrm{fm}}\, c_1\, \frac{1-m}{m}\left(\frac{1}{r^2\, v^2}\frac{dv}{dr} + \frac{2}{r^3\, v}\right) + (\lambda_{\mathrm{s}}+2\mu_{\mathrm{s}})\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \frac{2}{r^2}u\right) + d_0\, v + c_0\, v^2 = 0. \tag{2.90}$$

Неизвестная константа c_1 характеризует расход жидкости:

$$m\rho_{\mathrm{fm}} v = \frac{c_1}{r^2}. \tag{2.91}$$

Данная константа вычисляется при помощи граничных условий (2.86), (2.88) и уравнения (2.84) по формуле:

$$c_1 = \left(\frac{p_{\text{inc}} - p_0}{c_{\text{fm}}} + \rho_{\text{fm0}} \right) \cdot v_{\text{inc}} \cdot a^2. \tag{2.92}$$

Для приведения системы (2.89)–(2.90) к безразмерному виду возьмем следующие величины величины:

$$[a] = \text{м}, \quad [\rho_{\text{fm0}} a^3] = \text{кг}, \quad \left[\frac{a}{v_{inc}} \right] = \text{с}. \tag{2.93}$$

Приведем соотношения между физическими величинами задачи и их безразмерными аналогами (тильда обозначает безразмерный аналог соответствующей физической величины):

$$b = a\tilde{b}, \quad v = \frac{v_{inc}}{m}\,\tilde{v}, \quad u = a\tilde{u}, \quad x = a\tilde{x}, \quad c_1 = \rho_{\text{fm0}}\, v_{\text{inc}} \tilde{c}_1, \quad c_{\text{fm}} = v_{\text{inc}}^2\, \tilde{c}_{\text{fm}},$$
$$d_0 = \frac{\rho_{\text{fm0}}\, v_{\text{inc}}}{a}\, \tilde{d}_0, \quad \lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = \rho_{\text{fm0}}\, v_{inc}^2\, (\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}}), \quad p = p_0 \tilde{p}. \tag{2.94}$$

В терминах безразмерных параметров система (2.89)–(2.90) примет вид:

$$\tilde{c}_{\,\text{fm}} \tilde{c}_1 m \left(\frac{1}{\tilde{r}^2\, \tilde{v}^2}\, \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}^3\, \tilde{v}} \right) - \frac{\tilde{d}_0}{m}\, \tilde{v} - \frac{\tilde{c}_0}{m}\, \tilde{v}^2 = \frac{\tilde{c}_1}{m\, \tilde{r}^2} \left(\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} + \frac{2\, \tilde{v}}{\tilde{r}} \right) \tag{2.95}$$

$$\tilde{c}_{\,\text{fm}}\, \tilde{c}_1 (1-m) \left(\frac{1}{\tilde{r}^2\, \tilde{v}^2}\, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}^3\, \tilde{v}} \right) + (\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}}) \left(\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}\, \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} - \frac{2}{\tilde{r}^2}\, \tilde{u} \right) + \frac{\tilde{d}_0\, \tilde{v}}{m} + \frac{\tilde{c}_0}{m}\, \tilde{v}^2 = 0 \tag{2.96}$$

Граничные условия (2.85)–(2.87) примут вид:

$$\tilde{u}(1) = 0, \tag{2.97}$$

$$\tilde{v}(1) = 1, \tag{2.98}$$

$$\left(\tilde{\lambda}_{\text{s}} + 2\tilde{\mu}_{\text{s}} \right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}}(\tilde{b}) + \frac{2\tilde{\lambda}_{\text{s}}}{\tilde{b}} \tilde{u}(\tilde{b}) = 0. \tag{2.99}$$

Отдельно отметим, что граничное условие (2.88) необходимо исключительно для нахождения неизвестного расхода $\tilde{c}_1$. Для решения системы (2.95)– (2.96) (после подстановки значения $\tilde{c}_1$) достаточно граничных условий (2.97)–(2.99).

В данном разделе все решения будут проведены численно.

2.2.2 Численное решение задачи о течении жидкости сквозь сферический пористый слой

Для численного решения системы (2.95)–(2.96) возьмем следующие размерные величины [34, 88]:

$$c_{\text{fm}} = 2,5 \cdot 10^6 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},\ v_{\text{inc}} = 0.01\ \frac{\text{м}}{\text{с}},\ a = 1\,\text{м}, b = 5\,\text{м},\ m = 0,05, \quad (2.100)$$
$$\rho_{\text{fm0}} = 1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},\ \lambda_{\text{s}} + 2\mu_{\text{s}} = 12 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},\ p_0 = 10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Для каркаса возьмем два значения проницаемости $k_1 = 10^{-10}\text{м}^2$ и $k_2 = 10^{-12}\text{м}^2$. Данные значения качественно соответствуют проницаемостям почвы и песчаника соответственно [34].

Значения, взятые для жидкости, качественно соответствуют воде.

Тогда согласно (2.18) и (2.19) получим две пары значений коэффициента Дарси и коэффициента силы фронтального напора $(d_0, c_0) = (2500\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 12500\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ и $(d_0, c_0) = (2,5 \cdot 10^5\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 1,25 \cdot 10^5\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ (для почвы и песчаника соответственно).

Вязкость жидкости μ примем равной 10^{-4} Па$\cdot$с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [34].

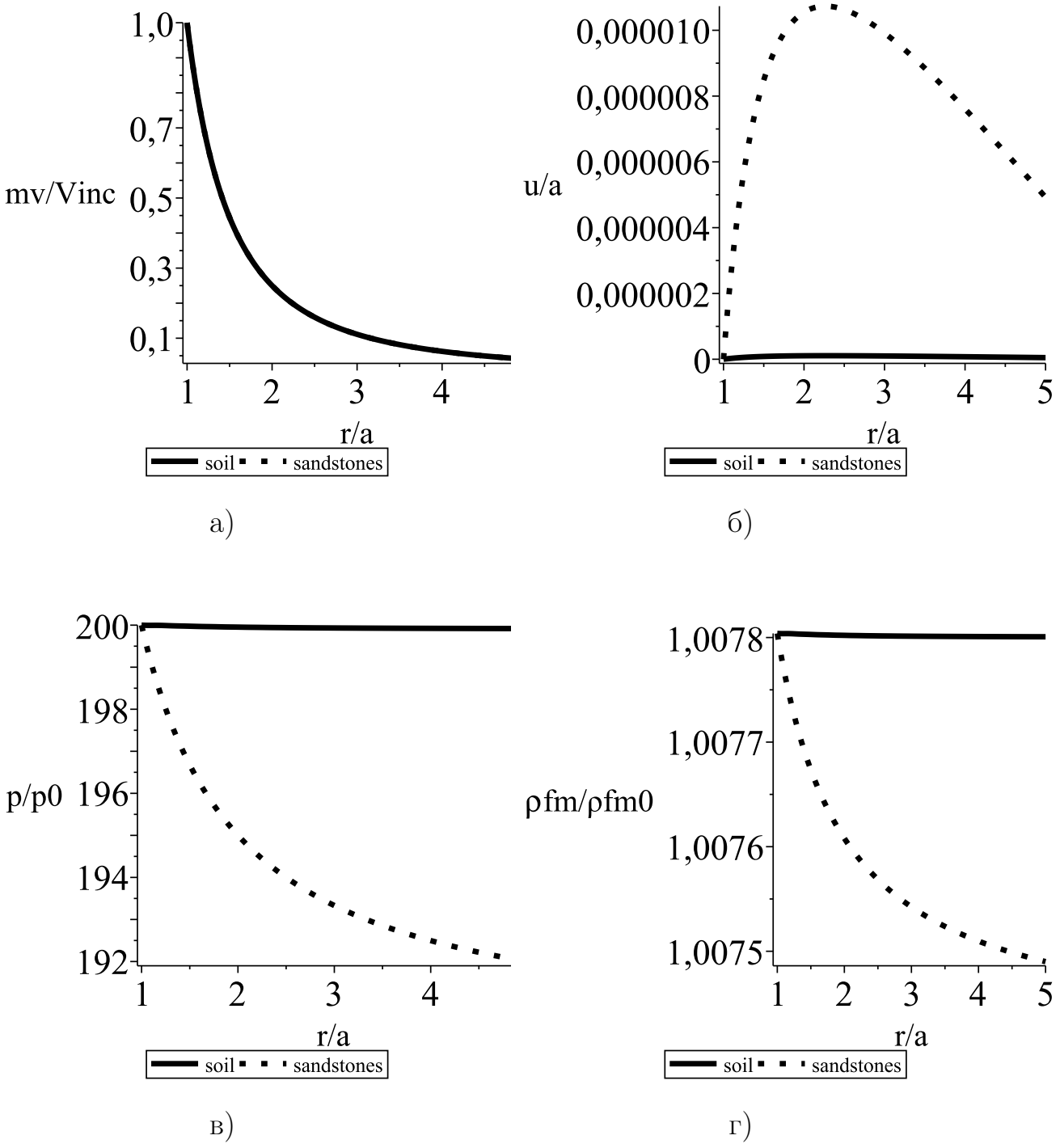
Тогда для числа Рейнольдса Re получим оценку $\text{Re} \gg 1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил [13] при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будут вносить сила типа Дарси и сила типа фронтального напора.

Расход c_1 согласно (2.92) примет значение $10,078\frac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$.

Для параметров (2.100) численно решим систему (2.95)–(2.96) с граничными условиями (2.97)–(2.99).

Приведем графики основных величин (рис 2.6–2.7) (скорости жидкости, перемещения точек каркаса, истинного давления в порах, истинного значения плотности жидкости, ненулевых компонент тензоров напряжений каркаса и жидкости) для двух вышеуказанных пар значений коэффициентов интерактивных сил.

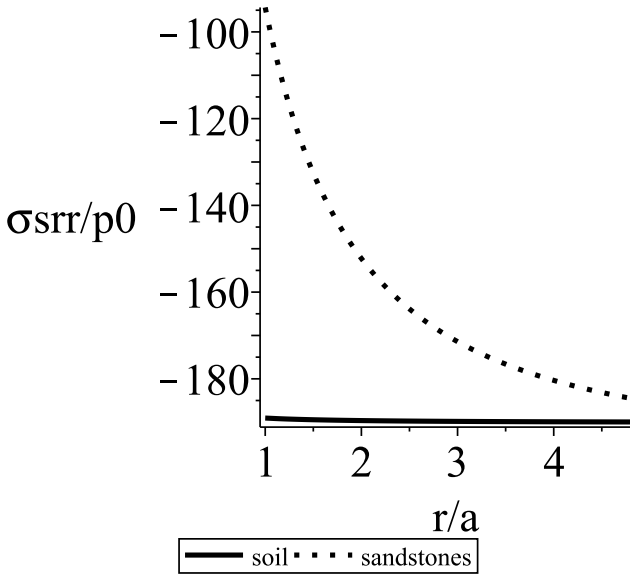
График, изображенный на рисунке 2.6 а), иллюстрирует тот факт, что скорость течения жидкости на границе проникновения в пористый каркас больше скорости на выходе. Это соответствует механическому смыслу, так как расход жидкости постоянен, а площадь сечения увеличивается при росте радиуса сферы. Рисунок же 2.6 б) иллюстрирует тот факт, что перемещения несколько возрастают от входа к выходу (в силу наличия сопротивления Дарси и сопротивления типа фронтального напора). Давление и истинная плотность жидкости падают (рис 2.6 в) и



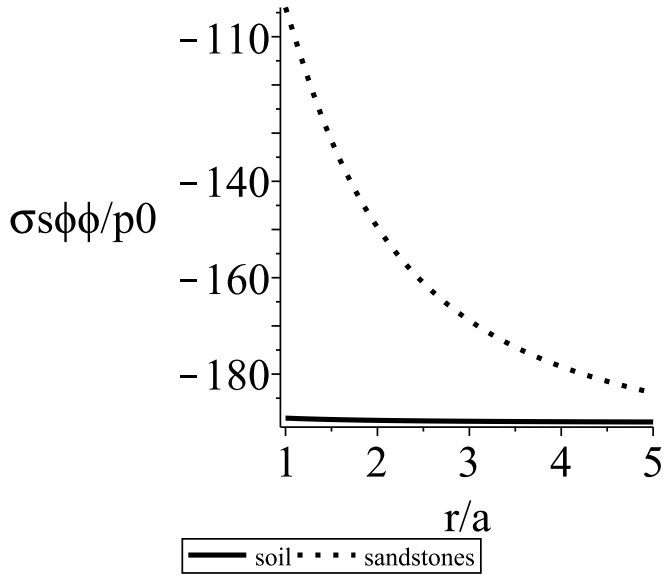
а) б)

в) г)

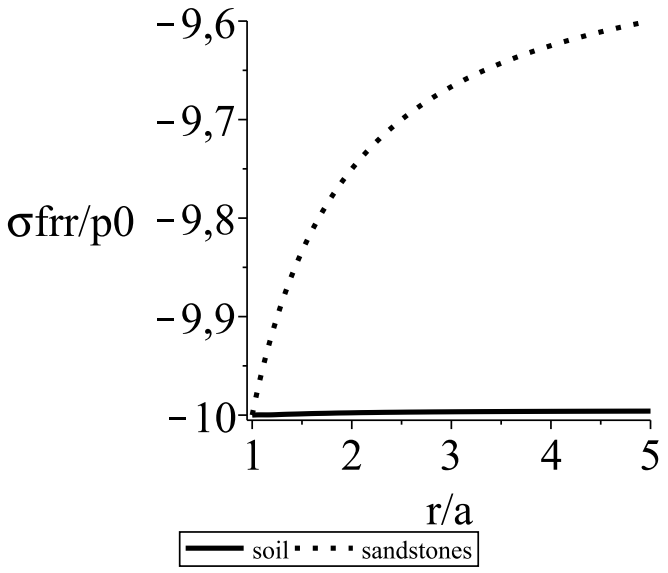
Рис. 2.6: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь сферический пористый слой в случае закрепления внутренней границы каркаса с учетом интерактивной силы типа Дарси и силы типа фронтального напора для двух пар значений интерактивных сил ($(d_0, c_0) = (2500\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 12500\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ для почвы (”soil”) и $(d_0, c_0) = (2,5\cdot10^5\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 1,25\cdot10^5\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ для песчаника (”sandstones”)): а) график скорости жидкости, б) график перемещения точек каркаса, в) график истинного давления, г) график истинной плотности жидкости.



а)



б)



в)

Рис. 2.7: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь сферический пористый слой в случае закрепления внутренней границы каркаса с учетом интерактивной силы типа Дарси и силы типа фронтального напора для двух пар значений интерактивных сил ($(d_0, c_0) = (2500\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 12500\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ для почвы (”soil”) и $(d_0, c_0) = (2,5\cdot10^5\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 1,25\cdot10^5\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$ для песчаника (”sandstones”)): а)график компоненты $\sigma_{\text{s}_{\text{rr}}}$ тензора эффективных напряжений каркаса, б) график компоненты $\sigma_{\text{s}_{\varphi\varphi}}$ тензора эффективных напряжений каркаса, в) график компоненты $\sigma_{\text{f}_{\text{rr}}}$ тензора эффективных напряжений жидкости.

2.6 г)) ввиду наличия сопротивления Дарси и сопротивления типа фронтального напора.

Отдельно скажем о характере поведения перемещений точек каркаса. Как видно из рисунка 2.6 б) перемещения возрастают от нулевых (ввиду закрепления внутренней сферы) до некоторого максимального значения, а затем начинают убывать до некоторого выходного значения, определяемого из решения задачи.

Увеличение величин коэффициентов обеих интерактивных сил влечет за собой увеличение перепада (разницы входного и выходного значений) всех основных характеристик задачи.

Немонотонный характер изменения компонент тензоров эффективных напряжений каркаса и жидкости можно объяснить уплотнением каркаса вдоль радиуса (участок возрастания перемещений на рисунке 2.6 б) соответствует положительным радиальным деформациям ($\varepsilon_{\mathrm{rr}} > 0$), а убывания — отрицательным ($\varepsilon_{\mathrm{rr}} < 0$)).

2.3 Задачи о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой

2.3.1 Общая постановка задач о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой

Рассмотрим плоскую осесимметричную задачу о стационарном течении сжимаемой жидкости в цилиндрическом пористом слое (с внутренним радиусом a и внешним радиусом b) из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил. Жидкость поступает из внутреннего полого цилиндра в пористый слой и вытекает наружу; при этом будем считать, что мы умеем регулировать входную скорость жидкости v_{inc}. Будем считать, что внутренний цилиндр закреплен от перемещений. Введем стандартную цилиндрическую систему координат (r, θ, z) и будем считать, что в силу симметрии задачи все функции будут зависеть только от радиуса r (единственными нетривиальными компонентами вектора перемещений и вектора скорости будут компоненты $u = u_{\mathrm{r}}$ и $v = v_{\mathrm{r}}$ соответственно).

Тензоры эффективных напряжений жидкости и каркаса примут вид (в силу симметрии задачи все элементы вне диагонали будут нулевыми):

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{f}} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{rr}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{\mathrm{f}}_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{zz}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{\mathrm{s}}_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{zz}} \end{pmatrix}. \tag{2.101}$$

В данном разделе мы сохраним упрощающие предположения, принятые для одномерных задач: малость перемещений и градиентов перемещений точек каркаса, постоянство пористости, отсутствие эффективных характеристик жидкости и внешних сил, а также линейность связи между давлением в порах и истинной плотностью жидкости.

Для описания движения воспользуемся моделью [27].

С учетом всех вышесказанных упрощений система уравнений (1.89)–(1.97) примет вид:

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}}}{dr} + \frac{\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}} - \sigma^{\mathrm{s}}_{\theta\theta}}{r} + d_0 v + c_0 v^2 = 0, \tag{2.102}$$

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{rr}}}{dr} - d_0 v - c_0 v^2 = m\rho_{\mathrm{fm}} v \frac{dv}{dx}, \tag{2.103}$$

$$\frac{d(m\rho_{\mathrm{fm}} v r)}{dr} = 0, \tag{2.104}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}} = -(1-m)p_{\mathrm{p}} + \lambda_{\mathrm{s}}\left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right) + 2\mu_{\mathrm{s}}\frac{du}{dr}, \tag{2.105}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}}_{\theta\theta} = -(1-m)p_{\mathrm{p}} + \lambda_{\mathrm{s}}\left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right) + 2\mu_{\mathrm{s}}\frac{u}{r}, \tag{2.106}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{zz}} = -(1-m)p_{\mathrm{p}} + \lambda_{\mathrm{s}}\left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right), \tag{2.107}$$

$$\sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{rr}} = \sigma^{\mathrm{f}}_{\theta\theta} = \sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{zz}} = -mp_{\mathrm{p}}, \tag{2.108}$$

$$p_{\mathrm{p}} = p_0 + c_{\mathrm{fm}}(\rho_{\mathrm{fm}} - \rho_{\mathrm{fm0}}), \tag{2.109}$$

где неизвестными функциями являются: компоненты эффективных тензоров напряжений каркаса и жидкости: $\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}}$, $\sigma^{\mathrm{s}}_{\theta\theta}$, $\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{zz}}$, $\sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{rr}}$; скорость жидкости v, перемещение точек каркаса u, истинное давление в порах p_{p}, истинная плотность жидкости ρ_{fm}.

Коэффициенты сил Дарси d_0 и фронтального напора c_0, эффективные характеристики упругого каркаса λ_{s}, μ_{s}; постоянная пористость m, характеристики связи давления и истинной плотности жидкости p_0, ρ_{fm0}, c_{fm} считаются известными константами.

С учетом одномерности мы получаем восемь скалярных уравнений для восьми неизвестных функций.

Примем следующие граничные условия:

$$u(a) = 0, \tag{2.110}$$

$$v(a) = \frac{v_{\mathrm{inc}}}{m}, \tag{2.111}$$

$$\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}}(b) = -(1-m)p_{\mathrm{p}}(b), \tag{2.112}$$

$$p_{\mathrm{p}}(a) = p_{\mathrm{inc}}, \tag{2.113}$$

где p_{inc} и v_{inc} — граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости.

Граничное условие (2.110) означает закрепление внутренней (входной) полости, (2.111) задает значение входной скорости жидкости; граничные условия (2.112)–(2.113) — силовые условия на границах каркаса.

Выражая уравнения системы (2.102)–(2.109) через переменные u и v приходим к системе двух уравнений для двух неизвестных функций u, v:

$$c_{\mathrm{fm}}\, c_1 \left(\frac{1}{r\, v^2}\,\frac{dv}{dr} + \frac{1}{r^2\, v}\right) - d_0\, v - c_0\, v^2 = \frac{c_1}{r}\,\left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}\right), \tag{2.114}$$

$$c_{\mathrm{fm}}\, c_1\, \frac{1-m}{m}\,\left(\frac{1}{r\, v^2}\,\frac{dv}{dr} + \frac{1}{r^2\, v}\right) + (\lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}})\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right) \tag{2.115}$$
$$+ d_0\, v + c_0\, v^2 = 0.$$

Константа c_1 характеризует расход жидкости:

$$m\rho_{\mathrm{fm}} v = \frac{c_1}{r}, \tag{2.116}$$

Данная константа вычисляется при помощи граничных условий (2.111), (2.113) и уравнения (2.109) по формуле:

$$c_1 = \left(\frac{p_{\mathrm{inc}} - p_0}{c_{\mathrm{fm}}} + \rho_{\mathrm{fm0}}\right) \cdot v_{\mathrm{inc}} \cdot a. \tag{2.117}$$

Теперь приведем систему (2.114)–(2.115) к безразмерному виду.

Для приведения системы (2.114)–(2.115) возьмем следующие величины величины:

$$[a] = \text{м}, \quad [\rho_{\mathrm{fm0}} a^3] = \text{кг}, \quad \left[\frac{a}{v_{inc}}\right] = \text{с}. \tag{2.118}$$

Приведем соотношения между физическими величинами задачи и их безразмерными аналогами (тильда обозначает безразмерный аналог соответствующей физической величины):

$$b = a\tilde{b}, \quad v = \frac{v_{inc}}{m}\,\tilde{v}, \quad u = a\tilde{u}, \quad x = a\tilde{x}, \quad c_1 = \rho_{\mathrm{fm0}}\, v_{\mathrm{inc}} a\, \tilde{c}_1, \tag{2.119}$$
$$c_{\mathrm{fm}} = v_{\mathrm{inc}}^2\, \tilde{c}_{\mathrm{fm}}, d_0 = \frac{\rho_{\mathrm{fm0}}\, v_{\mathrm{inc}}}{a}\,\tilde{d}_0, \quad \lambda_{\mathrm{s}} + 2\mu_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{fm0}}\, v_{inc}^2\,(\tilde{\lambda}_{\mathrm{s}} + 2\tilde{\mu}_{\mathrm{s}}), \quad p = p_0\tilde{p}.$$

В терминах безразмерных параметров система (2.114)–(2.115) примет вид:

$$m\tilde{c}_{\mathrm{fm}}\, \tilde{c}_1 \left(\frac{1}{\tilde{r}\,\tilde{v}^2}\,\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2\,\tilde{v}}\right) - \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} - + \frac{\tilde{c}_0}{m^2}\tilde{v}^2 = \frac{\tilde{c}_1}{m\,\tilde{r}}\,\left(\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}}\right), \tag{2.120}$$

$$\tilde{c}_{\mathrm{fm}}\tilde{c}_1(1-m)\left(\frac{1}{\tilde{r}\tilde{v}^2}\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}}+\frac{1}{\tilde{r}^2\tilde{v}}\right)+ \qquad (2.121)$$

$$+\left(\tilde{\lambda}_{\mathrm{s}}+2\tilde{\mu}_{\mathrm{s}}\right)\left(\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}}-\frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2}\right)+\left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v}+\frac{\tilde{c}_0}{m^2}\tilde{v}^2=0.$$

Граничные условия (2.110)–(2.113) примут вид:

$$\tilde{u}(1)=0, \qquad (2.122)$$

$$\tilde{v}(1)=1, \qquad (2.123)$$

$$\left(\tilde{\lambda}_{\mathrm{s}}+2\tilde{\mu}_{\mathrm{s}}\right)\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}}(\tilde{b})+\tilde{\lambda}_{\mathrm{s}}\frac{\tilde{u}(\tilde{b})}{\tilde{b}}=0. \qquad (2.124)$$

Отдельно отметим, что граничное условие (2.113) необходимо исключительно для нахождения неизвестного расхода $\tilde{c}_1$. Для решения системы (2.120)– (2.121) (после подстановки значения $\tilde{c}_1$) достаточно граничных условий (2.122)–(2.124).

В данном разделе все решения будут проведены численно.

2.3.2 Численное решение задачи о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой при закреплении внутренней границы каркаса

Для численного решения системы (2.120)–(2.121) возьмем следующие размерные величины [34, 88]:

$$c_{\mathrm{fm}}=2,5\cdot10^6\,\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},\ v_{\mathrm{inc}}=0.01\,\frac{\text{м}}{\text{с}},\ a=1\,\text{м}, b=5\,\text{м},\ m=0,05, \qquad (2.125)$$

$$\rho_{\mathrm{fm0}}=1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},\ \lambda_{\mathrm{s}}+2\mu_{\mathrm{s}}=12\cdot10^9\frac{\text{Н}}{\text{м}^2},\ p_0=10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Для каркаса возьмем значение проницаемости $k=10^{-10}\text{м}^2$. Данное значение качественно соответствует проницаемости почвы [34].

Значения, взятые для жидкости, качественно соответствуют воде.

Тогда согласно (2.18) и (2.19) получим следующие значения коэффициента Дарси и коэффициента силы фронтального напора $(d_0, c_0) = (250\frac{\text{кг}}{\text{м}^3\cdot\text{с}}, 12,5\frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$.

Вязкость жидкости μ примем равной 10^{-4} Па$\cdot$с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d=\sqrt{\frac{k}{m}}$ [34].

Тогда для числа Рейнольдса Re получим оценку $\mathrm{Re}\gg1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил [13] при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будут вносить сила типа Дарси и сила типа фронтального напора.

Расход c_1 согласно (2.117) примет значение $10,038\frac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$.

Для параметров (2.125) численно решим систему (2.120)–(2.121) с граничными условиями (2.122)–(2.124), причем проведем расчеты как при наличии силы типа фронтального напора, так и при ее отсутствии (значение коэффициента интерактивной силы типа Дарси примем одним и тем же).

Приведем графики основных величин (рис 2.8–2.9) (скорости жидкости, перемещения точек каркаса, истинного давления в порах, истинного значения плотности жидкости, ненулевых компонент тензоров напряжений каркаса и жидкости) для двух вышеуказанных пар значений коэффициентов интерактивных сил.

Выводы, которые можно сделать из полученных графиков в целом дублируют случай протекания через сферический каркас, однако дополнительно отметим, что учет силы типа фронтального напора при значениях числа Рейнольдса много больших единицы существенно влияет на величины перепадов всех величин, характеризующих задачу.

2.3.3 Задача о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой в случае закрепления внешней границы каркаса

Рассмотрим задачу о стационарном течении сжимаемой жидкости сквозь цилиндрический пористый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил при закреплении внешней границы каркаса (жидкость вытекает изнутри слоя).

Очевидно, что система (2.120)–(2.121), использованная выше при решении аналогичной задачи в случае закрепления внутренней границы каркаса, будет описывать и случай закрепления внешней границы при замене граничных условий на следующие:

$$\tilde{u}(\tilde{b}) = 0, \tag{2.126}$$

$$\tilde{v}(\tilde{b}) = 1, \tag{2.127}$$

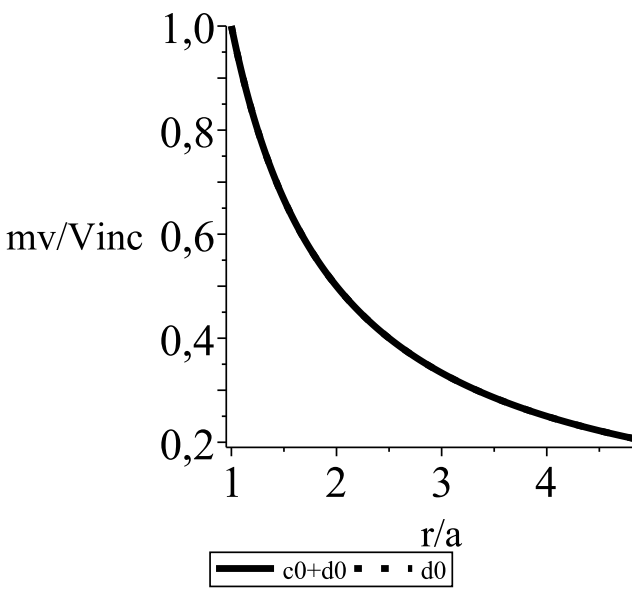
$$\left(\tilde{\lambda}_\text{s} + 2\tilde{\mu}_\text{s}\right)\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}}(1) + \tilde{\lambda}_\text{s}\tilde{u}(1) = 0. \tag{2.128}$$

Для вычисления неизвестного расхода c_1 дополнительно примем граничное условие:

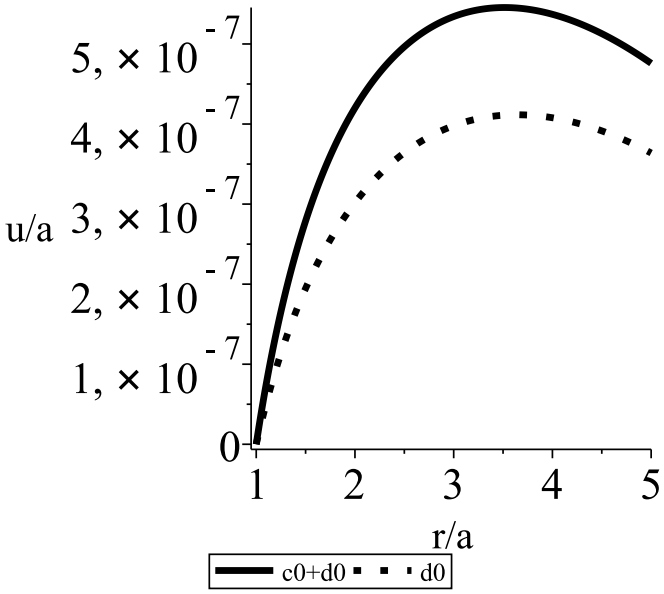
$$\tilde{p}_\text{p}(\tilde{b}) = \tilde{p}_\text{inc}. \tag{2.129}$$

Тогда расход будет вычисляться по формуле:

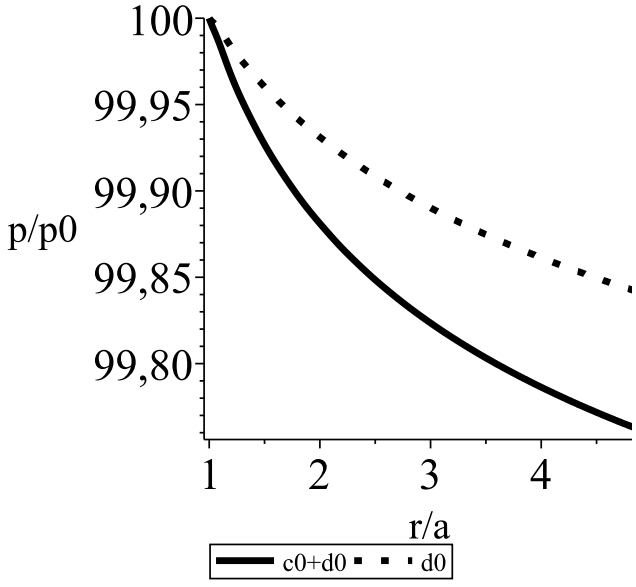
$$c_1 = \left(\frac{p_\text{inc} - p_0}{c_\text{fm}} + \rho_\text{fm0}\right)\cdot v_\text{inc}\cdot b. \tag{2.130}$$



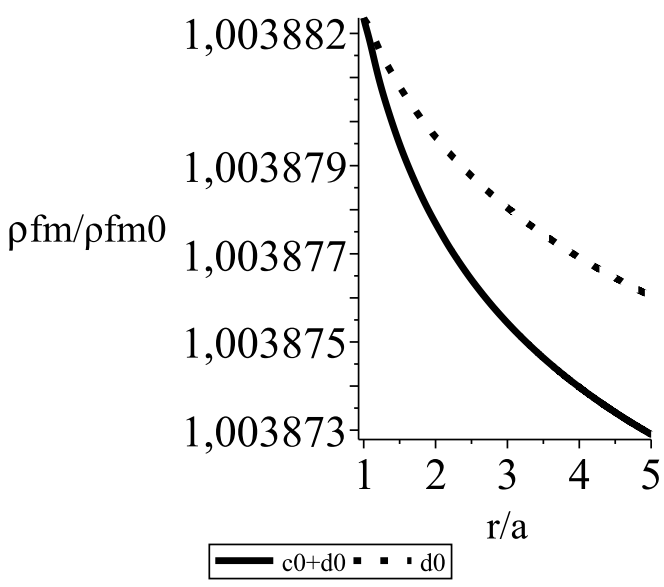
а)



б)



в)



г)

Рис. 2.8: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой в случае закрепления внутренней границы каркаса с учетом интерактивной силы типа Дарси и силы типа фронтального напора (при наличии силы типа фронтального напора и ее отсутствии): а) график скорости жидкости, б) график перемещения точек каркаса, в) график истинного давления, г) график истинной плотности жидкости.

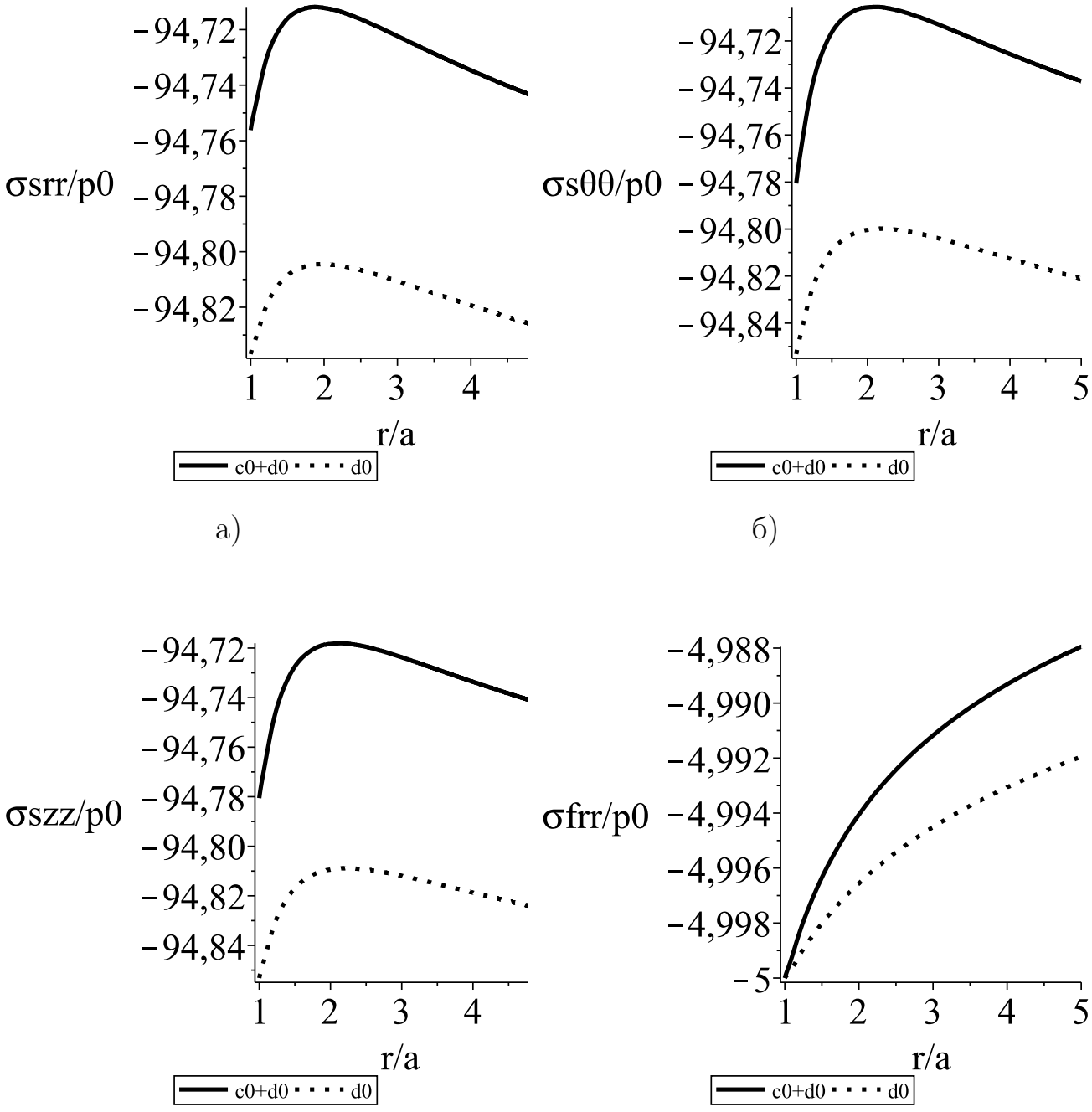


Рис. 2.9: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой в случае закрепления внутренней границы каркаса с учетом интерактивной силы типа Дарси и силы типа фронтального напора (при наличии силы типа фронтального напора и ее отсутствии): а) компоненты $\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{rr}}$ тензора эффективных напряжений каркаса, б) компоненты $\sigma^{\mathrm{s}}_{\theta\theta}$ тензора эффективных напряжений каркаса, в) компоненты $\sigma^{\mathrm{s}}_{\mathrm{zz}}$ тензора эффективных напряжений каркаса г) компоненты $\sigma^{\mathrm{f}}_{\mathrm{rr}}$ тензора эффективных напряжений жидкости.

Для численного решения задачи возьмем ровно те же параметры, которые были использованы нами для аналогичной задачи при закреплении внутренней границы каркаса. Все оценки для числа Рейнольдса и коэффициентов интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора сохранят силу.

Расход c_1 согласно (2.130) примет значение $10,038 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Для параметров (2.125) численно решим систему (2.120)–(2.121) с граничными условиями (2.126)–(2.128).

Проведем расчеты как при наличии силы типа фронтального напора, так и при ее отсутствии (значение коэффициента интерактивной силы типа Дарси примем одним и тем же).

Приведем графики основных величин (рис 2.10) (скорости жидкости, перемещения точек каркаса, истинного давления в порах, истинного значения плотности жидкости).

Графики качественно совпадают со случаем закрепления за исключением характера перемещений точек каркаса (ввиду другого характера закрепления).

2.4 Основные результаты раздела

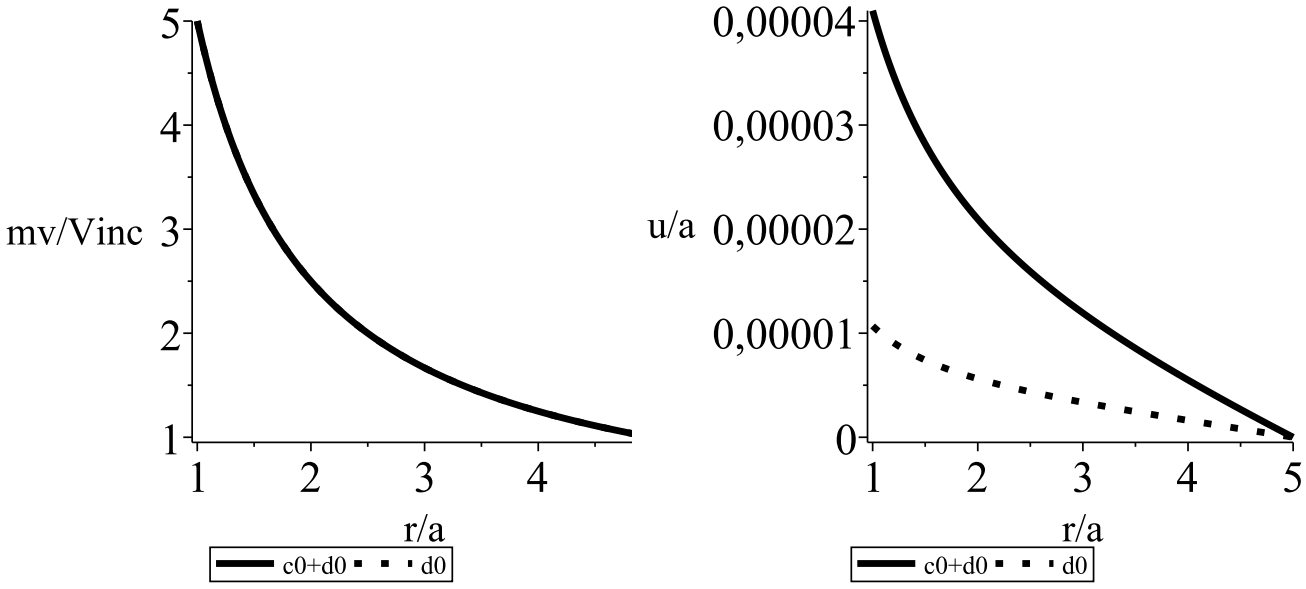
В данном разделе рассмотрены следующие задачи о стационарном течении жидкости в пористой наполненной среде:

1. поперечное одномерное стационарное течение сжимаемой жидкости (газа) сквозь пористый плоский слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении входного края;

2. поперечное одномерное стационарное течение сжимаемой жидкости сквозь пористый плоский слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора при закреплении входного края;

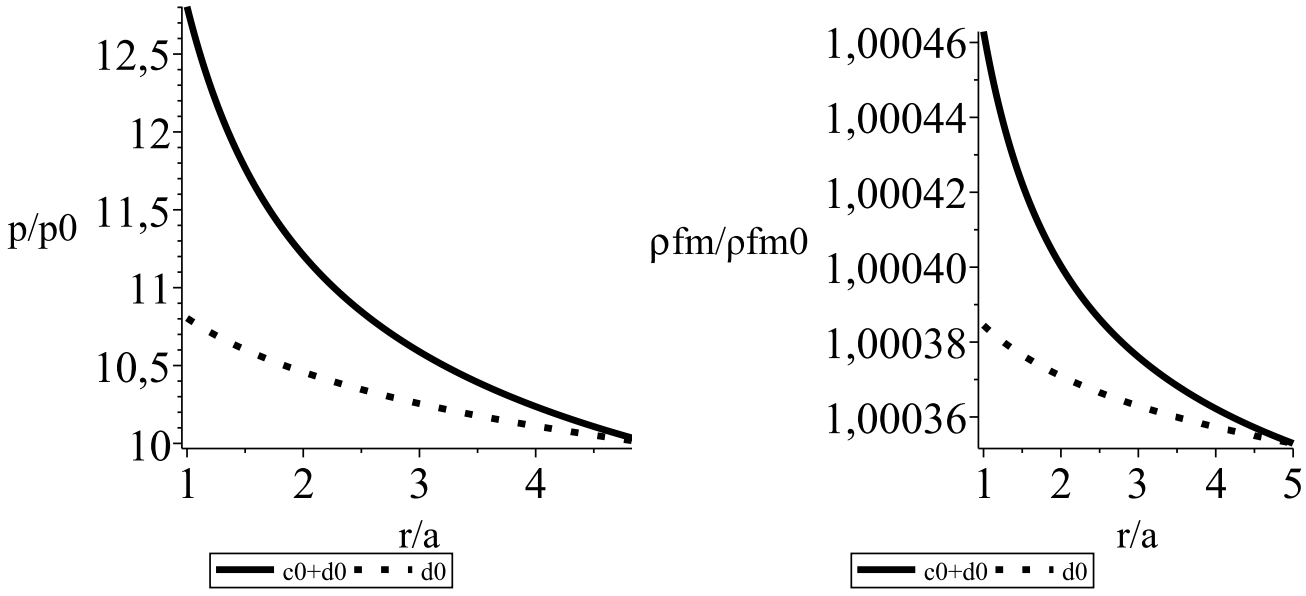
3. поперечное одномерное стационарное течение сжимаемой жидкости сквозь пористый плоский слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивной силы типа Дарси при закреплении выходного края;

4. стационарное течение сжимаемой жидкость сквозь сферический пористый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора в случае закрепления внутренней границы каркаса;



а)

б)



в)

г)

Рис. 2.10: Графики основных величин задачи о течении жидкости сквозь цилиндрический пористый слой в случае закрепления внешней границы каркаса с учетом интерактивной силы типа Дарси и силы типа фронтального напора (при наличии силы типа фронтального напора и при ее отсутствии): а) график скорости жидкости, б) график перемещения точек каркаса, в) график истинного давления, г) график истинной плотности жидкости.

5. стационарное течение сжимаемой жидкости сквозь цилиндрический пористый слой из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора (в случае закрепления внутренней границы каркаса и в случае закрепления внешней границы каркаса).

Для всех задач приведены полная постановка и численное решение.

Для каждой задачи применена собственная схема расчета, реализованная при помощи пакета Maple. Получены графики основных величин, характеризующих задачу: скорости жидкости (газа), перемещений точек каркаса, истинного давления в порах, истинной плотности жидкости (газа), напряжений возникающих в обеих фазах.

Исследовано влияние расхода жидкости и коэффициентов интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора на основные параметры задачи.

Для некоторых задач помимо численных получены аналитические решения.

Глава 3

Движения с конечными деформациями пористого каркаса

В практических расчетах, связанных с движением жидкостей (газов) в пористых средах, перемещения каркаса в большинстве случаев либо принимаются малыми, либо вообще равными нулю. Безусловно, в масштабах естественных сред такое рассмотрение является вполне эффективным. Тем не менее, существуют наполненные пористые среды, в которых деформации пористого каркаса могут быть существенными (примером могут служить различные биологические системы человека).

На рубеже двадцатого и двадцать первого веков начали появляться работы, в которых рассматриваются модели пористых наполненных сред при конечных деформациях твердого каркаса [85, 86, 88, 95].

Цель данного раздела — рассмотрение задач о движении жидкости в пористой наполненной среде при конечных деформациях каркаса на основе модели (1.78)–(1.88).

3.1 Модель интерактивных сил в случае конечных деформаций

Обратимся к представлению (1.76) для вектора объемной плотности интерактивной силы, где коэффициенты (1.77) можно в конкретных случаях считать постоянными.

Такой подход применялся в настоящей работе при решении задач в случае малых деформаций пористого каркаса.

Однако такой подход неприменим в случае конечных деформаций каркаса, ввиду того, что существенное изменение пористости сильно влияет на характер взаимодействия каркаса и жидкости.

Предложим иную модель интерактивных сил для случая конечных деформаций каркаса.

В случае конечных деформаций каркаса будем считать коэффициенты (1.77) функциями пористости каркаса m.

В качестве функции $d(m)$, характеризующей интерактивную силу типа Дарси (силу действия жидкости на каркас) в случае конечных деформаций, возьмем функцию:

$$d(m) = d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \frac{1-m}{1-m_0}, \tag{3.1}$$

удовлетворяющую трем естественным условиям:

$$m = m_0 \Rightarrow d = d_0, \tag{3.2}$$

$$m \to 1 \Rightarrow d \to 0, \tag{3.3}$$

$$m \to 0 \Rightarrow d \to \infty. \tag{3.4}$$

Первое условие задает значение функции для пористости каркаса m_0 (при $\mathbf{v}_\mathrm{f} = 0$). Второе условие означает, что при единичной пористости каркаса отсутствует фильтрационное сопротивление (свободное протекание жидкости). Третье условие означает, что при "схлопывании" пор фильтрационное сопротивление "бесконечно возрастает".

Аналогичным образом зададим коэффициенты силы фронтального напора и силы типа Био (сил действия жидкости на каркас):

$$c(m) = c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \frac{1-m}{1-m_0}, \tag{3.5}$$

$$b(m) = b_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot \frac{1-m}{1-m_0}, \tag{3.6}$$

Отдельно подчеркнем, что данные функции являются модельными и, вообще говоря, для их точного определения нужно решать задачу о деформации скелета на микроуровне и течении вязкой жидкости внутри пор.

3.2 Задача о поперечном течении жидкости через плоский пористый слой при конечных деформациях каркаса в случае закрепления входного края

Рассмотрим задачу о стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости через плоский бесконечный деформируемый пористый слой

конечной толщины L (входной край закреплен от перемещений) из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил и конечных деформациях каркаса.

В качестве функции $d(m)$, характеризующей интерактивную силу типа Дарси (силу воздействия жидкости на каркас) в случае конечной деформации, возьмем функцию (3.1).

В качестве функции $c(m)$, характеризующей интерактивную силу типа фронтального напора (силу воздействия жидкости на каркас) в случае конечной деформации, возьмем функцию (3.5).

Для описания движения воспользуемся моделью (1.78)–(1.88).

Будем считать, что эффективные вязкости жидкой фазы отсутствуют ($\lambda_{\mathrm{f}} = 0, \mu_{\mathrm{f}} = 0$).

Связь между истинным давлением в порах p_{p} и истинной плотностью жидкости ρ_{fm} примем линейной.

За отсчетную конфигурацию каркаса примем конфигурацию, которую занимает конгломерат при $v = 0$.

Движение будем считать одномерным (ось координат x введем в направлении течения жидкости).

С учетом этих предположений большинство скалярных уравнений модели (1.78)–(1.88) выполнится тождественно ($0 \equiv 0$). Остальные уравнения для рассматриваемого стационарного течения жидкости с учетом одномерности движения (x — лагранжева координата отсчетной конфигурации) примут следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}}\right)^2 - 1\right), \tag{3.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dx}} = \frac{1 - m_0}{1 - m}, \tag{3.8}$$

$$\frac{d(\rho_{\mathrm{f}} v)}{d\mathrm{x}} = 0, \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{d\mathrm{x}}\left(P \cdot \frac{1 - m_0}{1 - m}\right) + d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v + c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{dS_{\mathrm{f}}}{d\mathrm{x}} - d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v - c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = \rho_{\mathrm{f}} v \frac{dv}{d\mathrm{x}}, \tag{3.11}$$

$$P = -(1 - m) p_{\mathrm{p}} \left(\frac{df}{d\mathrm{x}}\right)^{-1} + \frac{dU}{d\varepsilon}, \tag{3.12}$$

$$S_{\mathrm{f}} = -m p_{\mathrm{p}}, \tag{3.13}$$

$$p_{\mathrm{p}} = p_0 + c_{\mathrm{fm}} \left(\frac{\rho_{\mathrm{f}}}{m} - \rho_{\mathrm{fm0}} \right). \tag{3.14}$$

Неизвестными скалярными функциями являются: компонента вектора положения точек каркаса в актуальной конфигурации f, компонента эффективного тензора деформаций Грина ε для каркаса, пористость m, скорость жидкости v, истинное давление в порах p_{p}, эффективная плотность жидкости ρ_{f}, компонента эффективного тензора напряжений Коши $S_{\mathrm{f}} = S_{\mathrm{f}\,11}$ для жидкости, компонента эффективного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода $P = P_{11}$ для каркаса.

Коэффициент силы Дарси d_0, коэффициент силы фронтального напора c_0, пористость каркаса при нулевой скорости жидкости m_0, упругий потенциал деформаций каркаса U считаются известными.

Таким образом, имеем систему из восьми скалярных уравнений для восьми неизвестных скалярных функций.

Примем следующие граничные условия:

$$f(0) = 0, \tag{3.15}$$

$$v(L) = \frac{v_{\mathrm{outc}}}{m(L)}, \tag{3.16}$$

$$P(L) = -(1 - m(L))p_{\mathrm{p}}(L), \tag{3.17}$$

$$p_{\mathrm{p}}(L) = p_{\mathrm{outc}}. \tag{3.18}$$

Где p_{outc} и v_{outc} — известные граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости снаружи каркаса.

Граничное условие в (3.15) означает закрепление левого (входного) края, (3.16) задает выходное значение скорости; (3.17) и (3.18) — силовые условия на правом (выходном) краю каркаса (отсутствие "сухих" напряжений и значение давления на выходе).

В качестве упругого потенциала каркаса U, возьмем потенциал для неогукова сжимаемого упругого материала [59]:

$$U(\boldsymbol{A}) = a \cdot \|\boldsymbol{A}\|^2 + cJ^2 - h \ln J, \quad J = |\det \boldsymbol{A}|, \quad a > 0; c > 0; h > 0, \tag{3.19}$$

где $\boldsymbol{A}$ — аффинор деформации, а $\|\boldsymbol{A}\|^2 = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)$.

Выражая уравнения системы (3.7)–(3.14) через переменные v и m приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с

двумя неизвестными функциями v и m:

$$\left(p_0 + c_{\text{fm}}\left(\frac{c_1}{mv} - \rho_{\text{fm0}}\right) + \frac{h}{1-m_0} + \frac{2(a+c)(1-m_0)}{(1-m)^2}\right)\frac{dm}{d\text{x}} + \frac{c_{\text{fm}}c_1(1-m)}{mv^2}\frac{dv}{d\text{x}} + d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v + c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = 0, \tag{3.20}$$

$$\left(\frac{c_{\text{fm}}c_1}{mv} - \left(p_0 + c_{\text{fm}}\left(\frac{c_1}{mv} - \rho_{\text{fm0}}\right)\right)\right)\frac{dm}{d\text{x}} + \left(\frac{c_{\text{fm}}c_1}{v^2} - c_1\right)\frac{dv}{d\text{x}} - d_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v - c_0 \cdot \frac{m_0}{m} \cdot v^2 = 0. \tag{3.21}$$

Неизвестная константа c_1, выражающая расход жидкости, получается из уравнения (3.9):

$$\rho_{\text{f}} v = c_1. \tag{3.22}$$

Значение расхода найдем из уравнения (3.14) при помощи граничных условий (3.16) и (3.18) по формуле:

$$c_1 = \left(\frac{p_{\text{outc}} - p_0}{c_{\text{fm}}} + \rho_{\text{fm0}}\right) \cdot v_{\text{outc}}. \tag{3.23}$$

Отдельно отметим, что граничное условие (3.18) было принято для нахождения неизвестного расхода c_1.

Для приведения системы (3.20)–(3.21) к безразмерному виду возьмем (в качестве параметров обезразмеривания) следующие постоянные величины:

$$L, \quad \rho_{\text{fm0}} L^3, \quad \frac{L}{v_{\text{outc}}}. \tag{3.24}$$

Приведем соотношения между физическими величинами задачи и их безразмерными аналогами (знак "˜" обозначает безразмерный аналог соответствующей физической величины):

$$v = \frac{v_{\text{outc}}}{m}\,\tilde{v},\ x = L\,\tilde{x},\ c_1 = \rho_{\text{fm0}} v_{\text{outc}} \tilde{c}_1,$$
$$c_{\text{fm}} = v_{\text{inc}}^2\,\tilde{c}_{\text{fm}},\ c_0 = \frac{\rho_{\text{fm0}}}{L}\,\tilde{c}_0,\ d_0 = \frac{\rho_{\text{fm0}}\, v_{\text{outc}}}{L}\,\tilde{d}_0,\ p = p_0 \tilde{p}. \tag{3.25}$$

Граничные условия (3.15)–(3.17) примут вид:

$$\tilde{f}(0) = 0, \tag{3.26}$$

$$\tilde{v}(1) = 1, \tag{3.27}$$

$$m(1) = m_0. \tag{3.28}$$

Граничное условие (3.28) получено из граничного условия (3.17) и уравнения (3.12).

Для численного решения системы (3.20)–(3.21) (после приведения ее к безразмерному виду) возьмем следующие размерные величины, качественно соответствующие протеканию воды сквозь резиновый каркас:

$$c_{\text{fm}} = 2.5 \cdot 10^6 \, \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \; v_{\text{outc}} = 1 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}, \; L = 1 \, \text{м}, \; m = 0,3,$$
$$\rho_{\text{fm0}} = 1000 \, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, p_0 = 10^5 \, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, a = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, c = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, h = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \tag{3.29}$$

Для каркаса возьмем значение проницаемости $k = 10^{-12} \, \text{м}^2$.

Тогда согласно (2.18) и (2.19) получим следующие значения коэффициента Дарси и коэффициента силы фронтального напора $(d_0, c_0) = (9 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}, 2,7 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$.

Вязкость воды μ при нормальных условиях имеет порядок 10^{-3} Па $\cdot$ с. Характерный размер пор d вычислим по формуле $d = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [34].

Расход c_1 согласно (3.23) примет значение $1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Тогда для числа Рейнольдса Re получим оценку $\text{Re} \gg 1$. Согласно таблице влияния интерактивных сил при данных значениях числа Рейнольдса основной "силовой" вклад будут вносить силы типа Дарси и фронтального напора.

Для параметров (3.29) численно решим систему (3.20)–(3.21) с граничными условиями (3.26) – (3.28).

Расчет проведем в двух случаях: при постоянных коэффициентах силы типа Дарси d_0 и силы фронтального напора c_0 и при переменных, взятых в виде (3.1) и (3.5) соответственно.

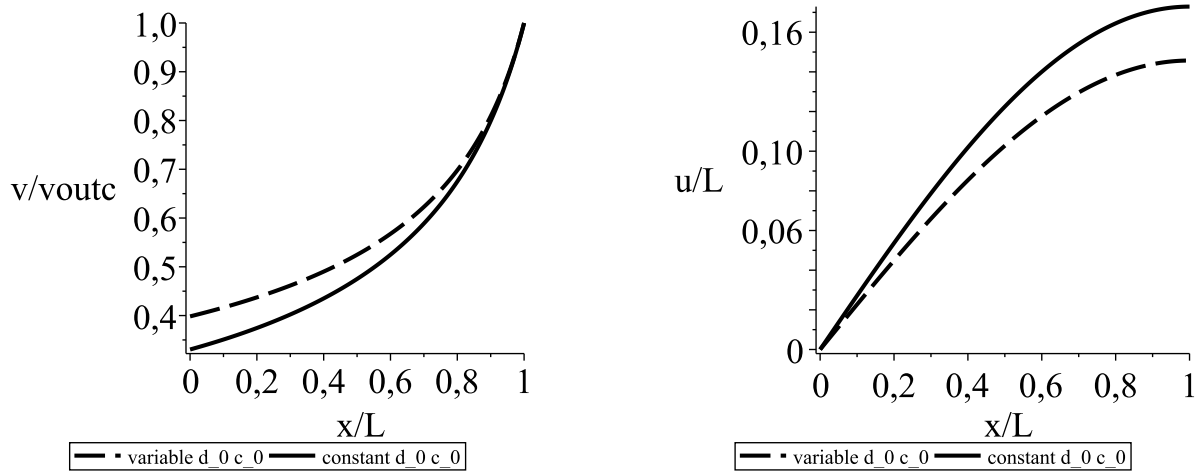
График 3.1 а) показывает, что скорость течения жидкости $\tilde{v}$ на границе проникновения в пористый каркас меньше скорости на выходе.

Рисунок 3.1 б) показывает, что перемещения точек каркаса ($u(\text{x}) = f(\text{x}) - \text{x}$) (в силу наличия сопротивлений Дарси и фронтального напора) возрастает от входа к выходу.

Истинное давление (3.1 в)) на входе выше истинного давления на выходе.

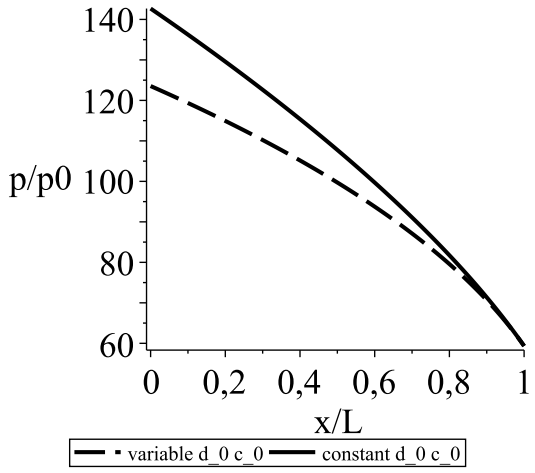
Пористость каркаса (3.1 г)) на входе больше пористости на выходе.

Как видно из графиков всех величин, учет переменной пористости для коэффициентов интерактивных сил существенно влияет на входные значения скорости жидкости, давления в порах и пористости, и выходное значение перемещения.

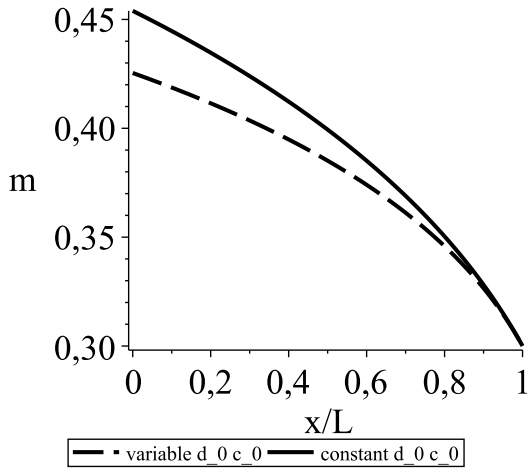


а)

б)



в)



г)

Рис. 3.1: Графики безразмерных величин в задаче о поперечном течении жидкости сквозь бесконечный пористый слой при конечных деформациях каркаса при закреплении входного края при постоянных коэффициентах интерактивных сил и при переменных: а) скорость жидкости $\tilde{v}$, б) перемещение точек каркаса $\tilde{u}$, в) истинное давление $\tilde{p}$, г) пористость m.

3.3 Задача о поперечном течении жидкости через плоский пористый слой при конечных деформациях каркаса в случае закрепления выходного края

Рассмотрим задачу об одномерном стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый слой конечной толщины L из несжимаемого материала. Будем считать, что входной край слоя не закреплен, а выходной — закреплен от перемещений. Движение будем считать стационарным, а деформации каркаса конечными. Очевидно, что система уравнений (3.20)–(3.21), полученная для аналогичной задачи в случае закрепления входного края будет описывать и настоящую задачу, если заменить граничные условия (3.15)–(3.18) на следующие:

$$f(L) = L, \tag{3.30}$$

$$v(0) = \frac{v_{\text{inc}}}{m(0)}, \tag{3.31}$$

$$P(0) = -(1-m)p_{\text{p}}(0), \tag{3.32}$$

$$p_{\text{p}}(0) = p_{\text{inc}}, \tag{3.33}$$

где p_{inc} и v_{inc} — известные граничные значения истинного давления в порах и скорости жидкости перед входом в пористый каркас.

Или в безразмерном виде (согласно системе (3.25)):

$$\tilde{f}(1) = 1, \tag{3.34}$$

$$\tilde{v}(0) = 1, \tag{3.35}$$

$$m(0) = m_0, \tag{3.36}$$

$$\tilde{p}_{\text{p}}(0) = \tilde{p}_{\text{inc}}. \tag{3.37}$$

Неизвестную константа c_1 вычислим по формуле:

$$c_1 = \left(\frac{p_{\text{inc}} - p_0}{c_{\text{fm}}} + \rho_{\text{fm0}} \right) \cdot m \cdot v_{\text{inc}}. \tag{3.38}$$

В качестве численной модели возьмем следующие размерные параметры:

$$c_{\text{fm}} = 2.55 \cdot 10^6 \, \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \, v_{\text{inc}} = 1 \, \frac{\text{м}}{\text{с}}, \, L = 1 \, \text{м}, \, m = \frac{1}{5},$$
$$\rho_{\text{fm0}} = 700 \, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, p_0 = 10^5 \, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, a = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, c = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, h = 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \quad (3.39)$$

Для каркаса возьмем значение проницаемости $k_1 = 10^{-10}\text{м}^2$.

Тогда согласно (2.18) и (2.19) получим следующие значения коэффициента Дарси и коэффициента силы фронтального напора $(d_0, c_0) = (4 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}, 5, 6 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^4})$.

Расход c_1 согласно (3.38) примет значение $700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Расчет проведем в двух случаях: с наличием силы фронтального напора и при ее отсутствии (при фиксированном значении коэффициента силы Дарси).

Для параметров (3.39) численно решим систему (3.20)–(3.21) с граничными условиями (3.34) – (3.36).

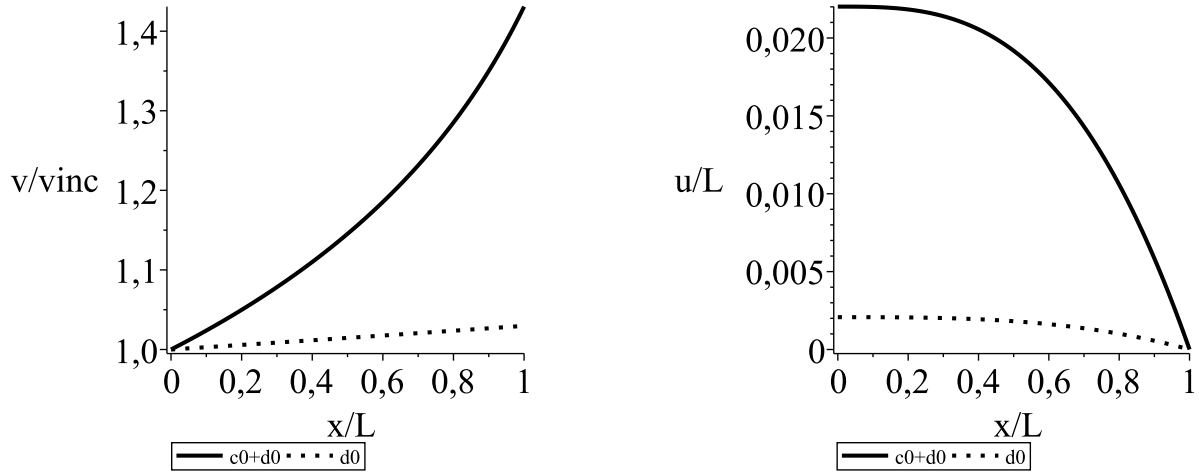
Как видно из полученных графиков (3.1), все выводы о перепадах и характере изменения основных параметров задачи совпадают с прямым поперечным протеканием, за исключением перемещений точек каркаса. Как видно из (3.1 б)) график имеет нулевую производную в точке $\tilde{x} = 0$, а не $\tilde{x} = 1$, как при прямом протекании. Также видно, что учет силы типа фронтального напора существенно влияет на величины перепадов всех параметров.

3.4 Основные результаты раздела

В данном разделе рассмотрена задача о стационарном поперечном течении сжимаемой жидкости сквозь плоский пористый слой конечной толщины L из несжимаемого материала при отсутствии внешних массовых сил и конечных деформациях каркаса (при закреплении входного края и при закреплении выходного края).

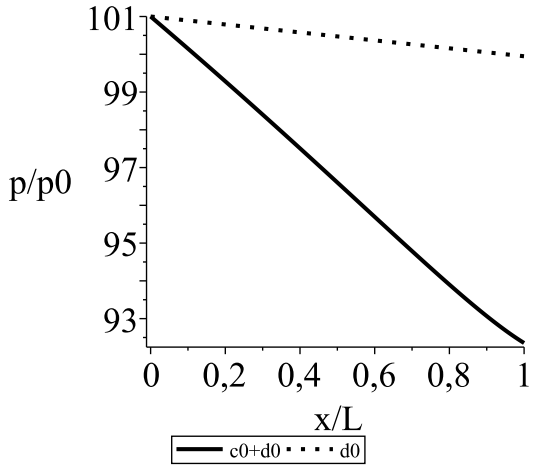
Так как изменение пористости в случае конечных деформаций каркаса существенно, автором предложены модельные функции для коэффициентов интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора, применимые для случая конечных деформаций каркаса, при которых коэффициенты рассматриваются как функции пористости.

С использованием этих функций на основе модели с интерактивными силами поставлена и численно решена вышеуказанная задача. При помощи пакет Maple получены графики основных величин: скорости жидкости, перемещения точек каркаса, истинного давления в порах, пористости каркаса.

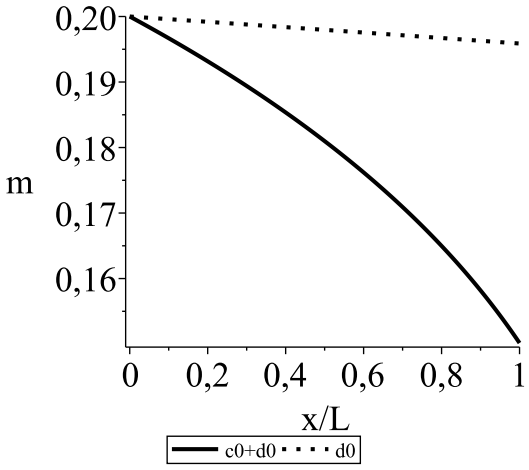


а)

б)



в)



г)

Рис. 3.2: Графики безразмерных величин в задаче о поперечном течении жидкости сквозь плоский пористый слой при конечных деформациях каркаса при закреплении выходного края (при наличии силы типа фронтального напора и ее отсутствии) : а) скорость жидкости $\tilde{v}$, б) перемещение точек каркаса $\tilde{u}$, в) истинное давление $\tilde{p}$, г) пористость m.

Было исследовано влияние коэффициентов интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора на основные характеристики задачи, и проведено сравнение между моделями с постоянными коэффициентами интерактивных сил и переменными, зависящими от пористости.

Заключение

Настоящая работа посвящена моделированию механических процессов в пористых наполненных средах с учетом интерактивных сил.

В работе проведен краткий сравнительный анализ известных моделей пористых наполненных сред (классическая модель Био, модель В. Н. Николаевского, модель О. Косси, модель К. Вильманского, модель Г. Л. Бровко и ее частный случай — модель А. Г. Гришаева). Выявлены достоинства и недостатки моделей в свете современных вопросов механики пористых наполненных сред.

В результате проведенной работы

1. На основе модели с интерактивными силами получены численные решения нескольких задач об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый каркас для различных режимов течения жидкости (при малых и больших числах Рейнольдса) и различных видов геометрии пористого тела (плоский, шаровой, цилиндрический деформируемые слои).

2. Исследовано влияние интерактивных сил на основные характеристики протекания. Показано, что увеличение коэффициентов интерактивных сил приводит к существенному увеличению перепадов всех основных характеристик протекания. Дополнительно исследовано влияние коэффициента силы фронтального напора при течениях с большими числами Рейнольдса, и показано, что учет данной силы существенно влияет на количественные параметры течения.

3. Предложены модельные зависимости для коэффициентов интерактивных сил (d_0, c_0, b_0) от пористости каркаса m, применительно к задаче об одномерном стационарном протекании жидкости сквозь пористый каркас при конечных деформациях каркаса.

4. Поставлена и численно решена задача об одномерном поперечном стационарном протекании сжимаемой жидкости сквозь твердый пористый плоский слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора в случае конечных деформаций каркаса с использованием предложенных автором

соотношений для коэффициентов интерактивных сил. На основе решения данной задачи проведено сравнение моделей с постоянными коэффициентами интерактивных сил и переменными, зависящими от пористости. Показано, что учет переменной пористости для коэффициентов интерактивных сил существенно влияет на перепады основных характеристик протекания.

Литература

[1] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.

[2] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.

[3] Барышников Н.А., Беляков Г.В., Турунтаев С.Б., Филиппов А.Н. Лабораторное моделирование двухфазных струйных течений. Труды РГУ нефти и газа имени И.М. ГУБКИНА №3, 2013. С. 15–29.

[4] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

[5] Био М. А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Сб. переводов, 1963. №4. С. 102–115.

[6] Био М. А. Обобщенная теория распространения акустических волн в диссипативных пористых средах // Механика. Сб. переводов, 1963. №6. С. 135–155.

[7] Био М. А. Распространение волн в пустой цилиндрической полости // Механика. Сб. переводов, 1953. №3. С. 142–155.

[8] Био М. А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика. Сб. переводов, 1956. №1. С. 140–146.

[9] Бровко Г. Л. Вопросы инвариантности в классических и неклассических моделях сплошных сред. // Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 19–20 января 2006 года) / Под ред. И. А. Кийко, Р. А. Васина, Г. Л. Бровко. М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 110–123.

[10] Бровко Г. Л. Модели и задачи для наполненных пористых сред // Вестник МГУ. Математика, механика. 2010. №6. С. 33–43.

[11] Бровко Г. Л. Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуума Коссера // Вестник МГУ. Математика, механика. 1996. №5. С. 55–63.

[12] Бровко Г. Л. Модель неоднородной жидкогазонаполненной среды с деформируемым твердым каркасом // Вестник МГУ. Математика, механика. 1998. №5. С. 45–52.

[13] Бровко Г. Л. Принцип материальной независимости от системы отсчета и структуры интерактивных взаимодействий в гетерогенных средах // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. Вып.2. Механика. С. 21–29.

[14] Бровко Г. Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // ПММ, 1990. 54, №5. С. 814–824.

[15] Бровко Г. Л. Основы механики сплошной среды (краткий конспект лекций, задачи, упражнения). Часть 1. Основные законы. Взаимодействия. Кинематика. Теория деформаций. Учебное пособие. М.: Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносов", 2011.

[16] Бровко Г. Л. Основы механики сплошной среды (краткий конспект лекций, задачи, упражнения). Часть 2. Теория напряжений. Основные системы соотношений начально-краевых задач. Основы теории определяющих соотношений. Учебное пособие. М.: Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова", 2013.

[17] Бровко Г. Л., Фасхеев И. О. Моделирование процессов в пористых наполненных средах: экспериментальная идентификация интерактивных сил // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Издательство Московского университета, 2012. С. 25.

[18] Бровко Г.Л., Фасхеев И.О. Моделирование процессов в пористых наполненных средах с учетом интерактивных сил // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики." Тула: Издательство ТулГУ, 2012. С. 116–117.

[19] Бровко Г.Л., Фасхеев И.О. Моделирование механических процессов в пористых наполненных средах при конечных деформациях

каркаса // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики." Тула: Издательство ТулГУ, 2013. С. 191-192.

[20] Васин С. И., Филиппов А. Н. Проницаемость сложнопористых сред // Коллоидный журнал, 2009, том 71, №1. С. 32–46.

[21] Васин С. И., Филиппов А. Н. Ячеечные модели течений в концентрированных средах, состоящих из жестких непроницаемых цилиндров, покрытых пористым слоем // Коллоидный журнал, 2009, том 71, №2. С. 149–163.

[22] Васин С. И., Филиппов А. Н., Шерышева Е. Е. Ячеечная модель биопористой среды (мембраны) // Коллоидный журнал, 2011, том 73, №3. С. 297–302.

[23] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.

[24] Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. Изд. 3-е, М.-Л.: Стройиздат, 1937.

[25] Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практическое применение. М.: Госстройиздат, 1948.

[26] Гришаев А. Г. Влияние параметров связности в моделях двухфазных сред. // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. Вып.2. Механика. С. 30–39.

[27] Гришаев А. Г. К моделированию свойств наполненных пористых сред // Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 19-20 января 2006 года) / Под ред. И. А. Кийко, Р. А. Васина, Г. Л. Бровко. М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 124–129.

[28] Желтов Ю. П. Деформации горных пород. М.: Недра, 1966.

[29] Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Издательство МГУ, 1990.

[30] Ильюшин А. А., Ленский В. С. Сопротивление материалов. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

[31] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.

[32] Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.

[33] Коротеев М. В., Черняев А. П. Плоская стационарная фильтрация несжимаемой жидкости при нелинейных законах сопротивления среды при наличии стока // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006, №6. С. 114–124.

[34] Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964.

[35] Кочин Н. Е., Кибель И. А, Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика (в двух частях). М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.

[36] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Техтериоиздат, 1954.

[37] Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947.

[38] Леонтьев Н. Е. Засорение пористого пласта при движении фронтов с конечным скачком пористости // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2009. №5. С. 75–80.

[39] Леонтьев Н. Е. Основы теории фильтрации: Учебное пособие. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009.

[40] Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.

[41] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

[42] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

[43] Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[44] Маркитантова Н. А., Черняев А. П. Фильтрация при степенном законе в случае несимметричного расположения скважины // Труды МФТИ. Том 5. №4. 2013.

[45] Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.

[46] Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. М.: Издательская группа "ГЭОТАР-Медиа", 2014.

[47] Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.

[48] Николаевский В. Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.

[49] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

[50] Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

[51] Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

[52] Рущицкий Я. Я. Элементы теории смеси. Киев: Наукова думка, 1991.

[53] Сажин В. С., Шишкин В. Я., Волох А. С. Проектирование и строительство фундаментов сооружений на пучинистых грунтах. Саратов: Издательство саратовского университета, 1988.

[54] Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.

[55] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.

[56] Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973.

[57] Сорочан Е.А. Строительство сооружений на набухающих грунтах. М.: Стройниздат, 1989.

[58] Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974.

[59] Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992.

[60] Терцаги. К. Строительная механика грунта на основе его физических свойств. М.: Госстройиздат, 1933.

[61] Терцаги К., Пек Р. Механика грунтов в инженерной практике. М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1958.

[62] Терцаги.К. Теория механики грунтов. М.: Госстройиздат, 1961.

[63] Требин Г. Ф. Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах. М.: Государственное научно-техническое издательство нефтяной и горно-топливной литературы, 1959.

[64] Труселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.

[65] Фасхеев И. О. Одномерное течение жидкости сквозь пористый каркас с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2012. №6. С. 62–66.

[66] Фасхеев И. О. Течение жидкости в цилиндрическом пористом каркасе с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора // Известия МГТУ "МАМИ". Научный рецензируемый журнал. Серия 3. Естественные науки. М., МГТУ "МАМИ" №3 (17), т. 1. С. 152–157.

[67] Фасхеев И. О. Одномерное течение жидкости сквозь плоский пористый слой при конечных деформациях // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2015. №2. С. 62–65.

[68] Фасхеев И. О. Моделирование течения жидкости сквозь пористый каркас // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2012" / Отв. ред. А. И. Андреев, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов, К. К. Андреев, М. В. Чистякова. М.: МАКС Пресс, 2012.

[69] Фасхеев И. О. Моделирование процессов в пористых насыщенных средах при конечных деформациях твердого пористого каркаса // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2013" / Отв. ред. А. И. Андреев, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов, К. К. Андреев, М. В. Чистякова. М.: МАКС Пресс, 2013.

[70] Фасхеев И.О. Стационарное течение жидкости сквозь плоский пористый слой при конечных деформациях // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2014" / Отв. ред. А. И. Андреев, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. М.: МАКС Пресс, 2014.

[71] Филиппов А. Н., Ханукаева Д. Ю., Васин С. И., Соболев В. Д., Старов В. М. Течение жидкости внутри цилиндрического капиляра, стенки которого покрыты пористым слоем (гелем) // Коллоидный журнал, 2013, том 75, №2. С. 237–249.

[72] Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.

[73] Хейфец Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах. М.: Химия, 1982.

[74] Хорошун Л. П., Солтанов Н. С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Наукова думка, 1984.

[75] Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. Т.4, вып.1. 1940. С.33–52.

[76] Чайлдс У. Физические постоянные. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

[77] Черняев А. П. Нелинейная фильтрация для специального и степенного закона сопротивления среды // Труды МФТИ. Том 2, №1. 2011. С. 156–161.

[78] Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Государственное издательство технико-теоретической лиетературы, 1951.

[79] Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.

[80] Швидлер М. И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1995.

[81] Шкадов В. Я., Запрянов З. Д. Течение вязкой жидкости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984 г.

[82] Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Low-frequency range. The Jouranl of the Acoustical Society of America. Vol. 28, №2. pp. 168-178, 1956.

[83] Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // Journal of Applied Physics. 1962. 33. №4. Pp. 1482–1498.

[84] Baryshnikov N. A., Belyakov G. V., Tairova A. A., Filippov A. N. Filtration of suspension of heavy particles through a porous medium. Petroleum Chemistry, 2016, Vol. 56, No. 4, pp. 360–366. Pleiades Publishing, Ltd., 2016.

[85] Ronaldo I. Borja, Claudio Tamagninia, Enrique Alarcon. Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation

and numerical examples. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 159, Issues 1–2, 1 July 1998, Pages 103–122.

[86] Boumediene Nedjar. Formulation of a nonlinear porosity law for fully saturated porous media at finite strains. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 2013, 61 (2), pp.537–556.

[87] Brovko G. L., Grishayev A. G., Ivanova O. A. Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions // Journal of physics: Conference Series, 62, 2007. Pp. 1–22.

[88] Coussy O. Poromechanics. Cichester, West Sussex: John Wiley and Sons Ltd, 2004.

[89] Deo S., Filippov A., Tiwari A., Vasin S., Starov V. Hydrodynamic permeability of aggregates of porous particles with an impermeable core // Advances in Coloid and Interface Science 164, 2011. Pp. 21–37.

[90] Gerasik V., Stastna M. Poroelastic acoustic wave trains excited by harmonic line tractions // Proc. R. Soc. A 2008 464. Pp. 491–511.

[91] Green A. E., Naghdi P. M. A dynamical theory of interacting continua // Int. J. Eng. Sci. 1965. 3. №2. Pp. 231–241.

[92] Green A. E., Naghdi P. M. A unified procedure for construction of theories of deformable media. 1. Classical continuum physics. London: Proc. R. Soc. Lond. A, 1995. Pp. 335–356.

[93] Green A. E., Naghdi P. M. A unified procedure for construction of theories of deformable media. 2. Generalized continua. London: Proc. R. Soc. Lond. A, 1995. Pp. 335–356.

[94] Green A. E., Naghdi P. M. A unified procedure for construction of theories of deformable media. 3. Mixtures of interacting continua. London: Proc. R. Soc. Lond. A, 1995. Pp. 379–388.

[95] Chao Li, Ronaldo I. Borja, Richard A. Regueiro. Dynamics of porous media at finite strain. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 193, Issues 36Ц38, 10 September 2004, Pages 3837–3870.

[96] Muller I. Thermodynamics. New York: Pitman, 1985.

[97] Muskat M. The flow of homogrneus fluids through porous media. New York and London: McGraw-Hill Book company, Inc.

[98] Truesdell C. Rational thermodynamics. New York: Springer, 1984.

[99] Vasin S. I., Filippov A. N., Starov V. M. Hydrodynamic permeability of membranes built up by particles covered by porous shell: Cell models // Advances in Colloid and Interface science. 139. 2008. Pp. 83–96.

[100] Wilmanski K., Albers B.A. A note on objectivity of momentum sources in porous materials. Two notes on continous modeling of porous media. Preprint №579. Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics. Berlin, 2000.

[101] Wilmanski K., Albers B.A. On modeling acoustic waves in saturated poroelastic media. Preprint №874. Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics. Berlin, 2003.

[102] Wilmanski K. A few remarks on Biot's model and linear acoustics of poroelastic saturated materials. Elsevier, 2006.

[103] Wilmanski K. A note on two-component model for Terzaghi Gedankenexperiment. In: Two notes on continuous modeling of porous media. Preprint №579. Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics. Berlin, 2000.

[104] Wilmanski K. Some questions on material objectivity arising in models of porous materials. In: Podio-Guidugli P, Brocato M, editors. Rational continua, classical and new. Italia Srl, Milano: Springer, 2001. Pp. 149–161.

[105] Wilmanski K. Tortuosity and objective relative acceleration in the theory of porous materials.Preprint №922. Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics. Berlin, 2000.

[106] Wilmanski K. Fundamentals of Solid Mechanics. IUSS Press, Pavia, 2010.

[107] Yadav P. K., Tiwari A., Deo S., Filippov A., Vasin S. Hydrodynamic permeability of membranes builit up by spherical particles covered by porous shells: effect of stress jump condition. Acta Mech 215, 2010. Pp. 193-209.