ISBN 5-201-09777-4

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

Часть 2

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2001

УДК 531.36

О МЕХАНИКЕ ГАМЕЛЯ

А.А.Буров

Обсуждаются некоторые свойства уравнений механики, предложенных Г.Гамелем в связи с описанием движения релятивистских систем. В частности, исследуются первые интегралы, положения равновесий таких систем и достаточные условия их устойчивости. Для систем Гамеля, связанных с натуральными механическими системами, показывается, как осуществляется переход к гамильтонову описанию динамики, а также вопросы интегрируемости соответствующих гамильтоновых систем методом разделения переменных.

Ключевые слова: релятивистские системы, устойчивость, интегрируемость.

1. Общие свойства механики Гамеля. В монографии [1] Г.Гамель, обсуждая вариационные методы описания релятивистской механики, предложил рассматривать наряду с механическими системами, описываемыми в классической механике уравнениями Лагранжа с лагранжианом $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, лагранжевы системы с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \sqrt{E - 2L}, \tag{1.1}$$

где $E > 0$ - постоянная, имеющая размерность энергии. Если $E >> 2L$, то *функцию Гамеля* $\mathcal{L}$ можно разложить

в ряд по степеням параметра $2L/E$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + ... \\ &= \sqrt{E}\left(1 - \frac{L}{E} - \frac{L^2}{2E^2} + ...\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Первый член разложения - постоянная. Второй член с точностью до множителя, не играющего роли для уравнений движения, совпадает с лагранжианом исходной задачи классической механики. Разница с уравнениями классической механики, а при определенных условиях - и с постклассическим приближением релятивистской механики, начинает проявляться за счет слагаемого $\mathcal{L}_2$.

Рассмотрим некоторые свойства уравнений механики Гамеля. Они имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{E-2L}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{1}{\sqrt{E-2L}}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \quad . \tag{1.3}$$

Если функция Лагранжа L не зависит явно от времени, то и функция Гамеля $\mathcal{L}$ также не зависит явно от времени, и уравнения механики Гамеля допускают интеграл Якоби

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_H &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}}\right) - \mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{E-2L}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}}\right) - \sqrt{E-2L} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{E-2L}}\left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}}\right) + (E-2L)\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если L не зависит явно хотя бы от одной из координат, например, φ, то $\mathcal{L}$ также явно не зависит от этой координаты, и уравнения механики Гамеля допускают первый интеграл

$$\mathcal{J}_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{E-2L}}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \tag{1.5}$$

Согласно общей теории равновесий систем, описываемых уравнениями Лагранжа, равновесные конфигурации в механике Гамеля могут быть найдены как критические точки "потенциала"

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = -\mathcal{L}(\mathbf{q}, 0)\,. \tag{1.6}$$

Обозначим

$$U(\mathbf{q}) = -L(\mathbf{q}, 0) \tag{1.7}$$

потенциал исходной системы. Тогда уравнения критических точек функции (1.6) имеют вид

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{E+2U}\cdot\frac{\partial L(\mathbf{q},0)}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{1}{E+2U}\cdot\frac{\partial U(\mathbf{q},0)}{\partial \mathbf{q}} = 0\,. \tag{1.8}$$

Так как первый сомножитель отличен от нуля, то множества равновесий исходной системы и равновесий в механике Гамеля совпадают.

Согласно теореме Рауса, положение равновесия исходной системы устойчиво в вековом смысле, если вторая вариация соответствующего интеграла Якоби

$$\mathcal{J} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}}\right) - L, \tag{1.9}$$

имеющая вид

$$2\delta^2\mathcal{J} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}\delta\dot{\mathbf{q}}, \delta\dot{\mathbf{q}}\right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{q}^2}\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{q}\right), \tag{1.10}$$

знакоопределена.

Вторая вариация интеграла Якоби в механике Гамеля имеет вид $2\delta^2\mathcal{J}_H =$

$$= -\frac{1}{(E-2L)^{3/2}}\left((E-2L)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2}\delta\dot{\mathbf{q}}, \delta\dot{\mathbf{q}}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \delta\dot{\mathbf{q}}\right)^2\right)$$
$$- \frac{1}{(E-2L)^{3/2}}\left((E-2L)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{q}^2}\delta\mathbf{q}, \delta\mathbf{q}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \delta\mathbf{q}\right)^2\right). \tag{1.11}$$

На равновесиях последнее слагаемое обращается в нуль. Поэтому если квадратичная форма (1.10) положительна определена, то квадратичная форма (1.11) отрицательно определена, и в данном случае из вековой устойчивости равновесия исходной системы следует вековая устойчивость того же равновесия в механике Гамеля. Обратное верно, если составляющая квадратичной формы (1.10), зависящая от вариаций скоростей, положительно определена.

2. Свойства механики Гамеля для натуральных механических систем. В случае, когда исходная механическая система натуральна, т.е. функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}$ - матрица положительно определенной квадратичной формы, удается установить некоторые дополнительные свойства механики Гамеля.

Интеграл Якоби в этом случае имеет вид

$$\mathcal{J}_H = -\frac{E+2U}{\sqrt{E+2U-(\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}} \tag{2.2}$$

Зафиксируем уровень этого интеграла $\mathcal{J}_H = -h$. Тогда неравенство

$$h^2(\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = (E + 2U) \cdot \left(h^2 - (E + 2U)\right) \geq 0 \qquad (2.3)$$

определяет *область возможного движения* системы, имеющую вид

$$Q = \left\{\mathbf{q}: \quad 0 \leq E + 2U \leq h^2\right\}. \qquad (2.4)$$

Импульс системы имеет вид

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = -\frac{\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}}{\sqrt{E + 2U - (\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}}. \qquad (2.5)$$

Тогда

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p} = -\frac{\dot{\mathbf{q}}}{\sqrt{E + 2U - (\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}},$$

$$\left(\mathbf{p}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}\right) = \frac{(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}{E + 2U - (\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})},$$

$$(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}) \cdot (E + 2U)}{1 + (\mathbf{p}\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{p})}.$$

Тогда функция Гамильтона имеет вид

$$H = -\sqrt{(E + 2U) \cdot (1 + (\mathbf{p}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}))} = h \quad . \qquad (2.6)$$

Можно указать два случая, когда возникающая гамильтонова система лиувиллева и интегрируется разделением переменных.

1. Пусть $\mathbf{A} = diag(A_1, A_2, ..., A_n)$. Тогда разделение переменных имеет место, если

$$U = \sum U_i(q_i), \quad A_i = \frac{E + 2U}{a_i(q_i)}. \qquad (2.7)$$

2. Вновь пусть $\mathbf{A} = diag(A_1, A_2, ..., A_n)$. Тогда разделение переменных также имеет место, если

$$A_i = b_i(q_i), \quad E + 2U = \frac{1}{\sum V_i(q_i)}. \qquad (2.8)$$

Полезно сравнить условия (2.7), (2.8) с соответствующими условиями, возникающими в релятивистской механике. Для сходных систем релятивистской механики с лагранжианом

$$\mathcal{L}_r = -\sqrt{E - (\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})} - U(\mathbf{q})$$

функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}_r = \sqrt{E + (\mathbf{p}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p})} + U(\mathbf{q}) \; . \qquad (2.9)$$

Тогда на данном уровне интеграла энергии $\mathcal{H}_r = h$ имеет место соотношение

$$E + \left(\mathbf{p}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}\right) = (h - U)^2,$$

и для $\mathbf{A} = diag(A_1, A_2, ..., A_n)$ система интегрируется разделением переменных, если

$$A_i = A_i(q_i), \quad (h - U)^2 = \sum U_i(q_i) \qquad (2.10)$$

или если

$$\frac{1}{(h - U)^2} = \sum V_i(q_i), \quad A_i = \frac{\sum V_j(q_j)}{b_i(q_i)}. \qquad (2.11)$$

В отличие от механики Гамеля, в условия разделения переменных (2.10), (2.11) явно входит постоянная интеграла энергии, т.е. разделение переменных осуществимо лишь на специальных уровнях интеграла энергии.

3. Вариационные принципы Лагранжа и Якоби. Уравнения движения в механике Гамеля, порожденной натуральной механической системой, могут быть также получены из вариационных принципов Лагранжа и Якоби. Укороченное действие в принципе Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{S} = \int \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}} \right) dt = - \int \frac{(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}})}{\sqrt{E + 2U - (\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})}} dt \ .$$

Функционал действия в принципе Якоби представим как

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{\frac{(h^2 - (E + 2U))\,(d\mathbf{q}, \mathbf{A}d\mathbf{q})}{E + 2U}} \ .$$

Траектории системы - геодезические метрики Якоби

$$ds^2 = \frac{h^2 - (E + 2U)}{E + 2U} (d\mathbf{q}, \mathbf{A}d\mathbf{q}).$$

4. Уравнения движения частицы. Выпишем теперь в явном виде уравнения движения частицы в трехмерном евклидовом пространстве в потенциальном поле сил. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \sqrt{E + 2U - (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})} \ .$$

Выписывая стандартным образом уравнения Лагранжа, имеем

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\dot{\mathbf{x}}}{E + 2U - (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})} \left[(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \right) \right] = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \ .$$

Пусть

$$\mathbf{M}_I = \mathbf{I} + \frac{\dot{\mathbf{x}} \otimes \dot{\mathbf{x}}}{E + 2U - (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})}, \quad \mathbf{M}_G = \mathbf{I} - \frac{\dot{\mathbf{x}} \otimes \dot{\mathbf{x}}}{E + 2U - (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}})},$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица 3×3. Тогда уравнения движения можно представить в виде

$$\mathbf{M}_I \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}_G \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \cdot$$

Тензору $\mathbf{M}_I$ можно придать смысл тензора “инертной” массы, в то время как тензору $\mathbf{M}_G$ можно придать смысл тензора “гравитационной” (в данном случае - “потенциальной”) массы.

Работа выполнена при поддержке Hochschule Jubilaüm-stiftung der Stadt Wien, РФФИ - гранты 99-01-00785, 00-15-96150, ФЦП “ИНТЕГРАЦИЯ”и Бельгийского министерства иностранных дел. Автор выражает благодарность проф. Хансу Трогеру за предоставленную возможность исследовательской деятельности в Institut für mechanik, Technische Universitaet Wien, в стенах которого и зародилась идея написания этой работы.

Литература

1. *Hamel, G.* Theoretische Mechanik; eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. Berlin: Springer. 1949. xv + 796 p.