Это препринт материалов, принятых для публикации в журнале “Доклады Академии Наук”,

Сайт издательства http://www.maik.ru

Математика

УДК 517.956.32

Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами.

Рогожников А. М.

В настоящей работе исследуется задача о продольных колебаниях, возбуждаемых в стержне, состоящем из нескольких участков из материалов с произвольными плотностями и упругостями. Исследование проводится в терминах обобщенного решения.

В работах [2, 3] была исследована эта задача при дополнительном условии в виде равенства импедансов всех участков, в работах [4, 5] было получено решение для случая, когда время прохождения волны по каждому из участков было одинаковым. Случай двух участков с произвольными характеристиками рассмотрен в [6].

В данной работе мы откажемся от этих ограничений и предъявим явный вид решения смешанной задачи о возбуждении колебаний в стержне, состоящем из n произвольных участков. Также утверждается единственность полученного решения.

Постановка задачи, обозначения

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль отрезка $0 \le x \le l$, внутренние точки $x_1 < x_2 < .. < x_{n-1}$ которого делят его на n участков. Дополним их граничными точками $x_0 = 0$ и $x_n = l$. В введенных обозначениях i-тому ($i \in \overline{1,n}$) участку соответствует отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, на нем линейная плотность материала — ρ_i, модуль Юнга — k_i, скорость распространения сигнала — $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$, время прохождения сигнала по i-тому отрезку обозначим через $t_i = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{a_i}$.

При рассмотрении классической формулировки задачи о возбуждении колебаний в этом стержне, управляемом с обоих концов смещениями $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, требуется найти в прямоугольнике $Q = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ решение $u(x,t)$ смешанной задачи для следующего разрывного волнового уравнения

$$u_{tt} = \begin{cases} a_i^2 u_{xx}(x,t) & \text{в прямоугольнике } Q_i = [x_{i-1} \le x \le x_i] \times [0 \le t \le T] \end{cases} \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t) \qquad u(l,t) = \mu_2(t) \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = 0 \tag{3}$$

с условиями сопряжения в точках стыка:

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \qquad \forall i \in \overline{1, n-1} \tag{4}$$

$$k_i u_x(x_i - 0, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) \qquad \forall i \in \overline{1, n-1} \tag{5}$$

Будем рассматривать обобщенное решение из класса[1] $\widehat{W}_2^1(Q)$, введенное в работе [5], где была доказана

Теорема 1. *Может существовать только одно обобщенное решение задачи* (1)-(5) *из класса* $\widehat{W}_2^1(Q)$.

Вспомогательные определения

Перед тем, как сформулировать теорему о виде решения, нам придется ввести вспомогательные обозначения.

Определение 1. V *- линейное пространство всех непрерывных функций, заданных на всей вещественной оси и равных нулю при* $t < t_0$ *для некоторого* $t_0 \in \mathbb{R}$.

Определение 2. V^n *- множество n-мерных векторов из элементов* V.

Приведем примеры: пусть $f_1(t) = \Theta(t)\, t$, $f_2(t) = \Theta(t)\, \sin(t)$, $f_3(t) = 0$, где $\Theta(t)$ - функция Хевисайда. В таком случае $f_1, f_2, f_3 \in V$ (когда говорим о функции как об элементе V, аргумент будем опускать).

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_2 + f_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2f_1 + 7f_3 \\ 0 \\ f_3 \end{bmatrix} \in V^3$$

Определение 3 (умножение матрицы на вектор)**.** *Пусть* $f = [f_1 \dots f_n]^\top \in V^n$, *а матрица* $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Вектор* $g = [g_1 \dots g_m]^\top \in V^m$, *элементы которого определены как* $g_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} f_j$, *назовем их произведением. Операцию будем записывать как* $g = Af$.

Определение 4 (оператор запаздывания)**.** *Пусть* $f \in V$, $\tau \in \mathbb{R}$. *Оператором запаздывания назовем* P_τ, *действующий следующим образом:*

$$g = P_\tau f, \qquad g(t) = f(t - \tau)$$

Более всего нас будет интересовать оператор запаздывания P, *действующий на элементы* V^n:

$$P \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{t_1} f_1 \\ \vdots \\ P_{t_n} f_n \end{bmatrix}$$

то есть к каждому элементу вектора применяется свой оператор запаздывания. В дальнейшем будем считать, что n *в этой формуле совпадает с количеством участков в стержне, а* t_i *- время прохождения сигналом* i*-того участка.*

[1] Класс $\widehat{W}_2^1(Q)$ был впервые введен В.А. Ильиным в [1]

Определение 5 (оператор эха)**.** *Пусть $f \in V$, $\beta \in \mathbb{R}$. Оператором эха назовем E_β, строящий отраженную волну по пришедшей при граничном условии третьего рода и действующий следующим образом:*

$$g = E_\beta f,\ g(t) = f(t) - 2\beta \int\limits_0^{+\infty} f(t-\tau)\, e^{-\beta\tau} d\tau$$

Решение задачи о возбуждении колебаний

Теорема 2. *Для задачи* (1)-(5) *при* ***четном*** *n решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ определяется равенствами* [2]

$$u(x,t) = \begin{cases} U_i(t - \dfrac{x-x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(t + \dfrac{x-x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i, \text{ при } i\text{-нечетных} \\ \tilde{U}_i(t - \dfrac{x-x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \dfrac{x-x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i, \text{ при } i\text{-четных} \end{cases} \tag{6}$$

с функциями $U_1 - U_n$, $\tilde{U}_1 - \tilde{U}_n$, определяемыми соотношениями

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Функции $\underline{\mu}_1$ и $\underline{\mu}_2$ - это функции μ_1 и μ_2, продолженные нулем при $t < 0$ и произвольным образом с сохранением непрерывности при $t > T$. В этих выражениях матрицы A и B размера $n \times n$ имеют следующий блочно-диагональный вид (совпадающий с работой [5])

$$A = \begin{bmatrix} \begin{matrix} R_{12} & T_{21} \\ T_{12} & R_{21} \end{matrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} R_{34} & T_{43} \\ T_{34} & R_{43} \end{matrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} R_{n-1,n} & T_{n,n-1} \\ T_{n-1,n} & R_{n,n-1} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

[2]Аргументы у функций в этой работе и в [5] различны.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} R_{23} & T_{32} \\ T_{23} & R_{32} \end{matrix} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} R_{n-2,n-1} & T_{n-1,n-2} \\ T_{n-2,n-1} & R_{n-1,n-2} \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

где $T_{ij} = \dfrac{2z_i}{z_i + z_j}$, $R_{ij} = \dfrac{z_i - z_j}{z_i + z_j}$ *- коэффициенты прохождения и преломления при переходе из i-той среды в j-тую. $z_i = a_i \rho_i$ - импеданс i-той среды.*

Замечание 1. *Ряды, использованные в формулах* (7)-(8)*, при вычислении значения* $u(x,t)$ *в любой конечный момент времени t можно сократить до первых* $\left\lceil \frac{t}{t_{min}} \right\rceil$ *слагаемых, потому что все остальные будут нулевыми. Здесь* $t_{min} = \min\limits_i t_i$

Теорема 3. *Для задачи* (1)-(5) *при* ***нечетном*** *n решение из класса* $\widehat{W}_2^1(Q)$ *определяется по аналогичной формуле с той разницей, что функции* $U_1 - U_n$, $\tilde{U}_1 - \tilde{U}_n$ *определены иначе*

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} BP(APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} (APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix}$$

В этих выражениях матрицы A и B размера $n \times n$ имеют следующий блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{bmatrix} \begin{matrix} R_{12} & T_{21} \\ T_{12} & R_{21} \end{matrix} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 \quad 0 & \begin{matrix} R_{n-2,n-1} & T_{n-1,n-2} \\ T_{n-2,n-1} & R_{n-1,n-2} \end{matrix} & & 0 \\ 0 \quad 0 & & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{matrix} R_{23} & T_{32} \\ T_{23} & R_{32} \end{matrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} R_{n-1,n} & T_{n,n-1} \\ T_{n-1,n} & R_{n,n-1} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Замечание 2. *Таким образом, получили обобщение формул работы [5]. Стоит отметить, что в новой форме записи в решениях более явно прослеживается симметрия.*

Граничные условия второго и третьего рода

Указанные формулы легко модифицируются для любых пар граничных условий **первого, второго и третьего** рода.

Пример 1. Продемонстрируем это на примере пары граничных условий второго и третьего рода для четного числа участков n. В классической постановке задачи изменятся только граничные условия (2):

$$\begin{aligned} u(0,t) - \alpha u_x(0,t) &= \mu_1(t), \quad \alpha \neq 0 \\ u_x(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned}$$

Решение записывается снова в виде (6). Функции $U_1 - U_n$, $\tilde{U}_1 - \tilde{U}_n$ снова определяются по формулам (7),(8).

Изменения же произойдут в определении функций $\underline{\mu}_1$ и $\underline{\mu}_2$, определяющих волны, порожденные граничными управлениями, и в матрице B:

$$\underline{\mu}_1(t) = \begin{cases} \dfrac{a_1}{\alpha} \int\limits_0^t \mu_1(t-\tau)\, exp(-a_1\tau/\alpha)\, d\tau & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\underline{\mu}_2(t) = \begin{cases} a_n \int\limits_0^t \mu_2(\tau)\, d\tau & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

где a_1, a_n - скорости распространения сигнала на первом и последнем участках. В матрице B теперь в левой верхней ячейке находится не число, а оператор эха $E_{\frac{a_1}{\alpha}}$. Договоримся, что если в ячейке вместо a_{ij} стоит оператор L_{ij}, то вместо $a_{ij}\, f_j$ в линейной комбинации должен стоять результат применения оператора $L_{ij}\, f_j$. В правой нижней ячейке теперь стоит не -1, а 1, т.к. отражение от правого конца происходит в фазе, а не в противофазе, как при условии первого рода.

Автор выражает благодарность В.А. Ильину за замечания при подготовке статьи.

Список литературы

[1] В. А. Ильин, Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, №11. с.1513-1528.

[2] В. А. Ильин, П. В. Луференко, Доклады академии наук, 2009, Т. 428, №1, с.12-15.

[3] В. А. Ильин, П. В. Луференко, Доклады Академии Наук, 2009, том 429, № 3, с. 317–321.

[4] В. А. Ильин, Дифференц. уравнения. 2009. Т.429, №6. с. 742-745.

[5] А. М. Рогожников, Доклады Академии Наук, 2011, Т. 441, № 4, С. 449-451.

[6] А. А. Кулешов, Доклады Академии Наук, 2012, Т. 442, № 4.