**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ВСЕРОССИЙСКИЙ
СЪЕЗД УЧИТЕЛЕЙ
МАТЕМАТИКИ
В МГУ

# ТЕЗИСЫ
## ВСЕРОССИЙСКОГО СЪЕЗДА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

**(28–30 октября 2010 г.)**

## СЕКЦИЯ
## «Математика для будущих исследователей (Углубленное изучение математики)»

# О применении теоремы Фалеса при решении задач по геометрии

*Афанасьев А.Н.*

Теорему Фалеса в средней школе проходят в восьмом классе. Но как показывает опыт, в дальнейшем эта теорема большинством учащихся забывается. Возможно, это происходит из-за того, что в отличие от теоремы Пифагора, она редко применяется при решении задач. А между тем теорема Фалеса – «рабочая» теорема. Она применима и при решении задач на доказательство, и при решении задач на вычисление.

Приведем (без доказательства) одну из формулировок этой теоремы.

**Теорема** (теорема Фалеса). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне [2].

Наряду с этой теоремой обычно рассматривают и более общую теорему, которая называется теоремой о пропорциональных отрезках.

**Теорема** (теорема о пропорциональных отрезках). Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки [2].

Последнюю теорему иногда называют обобщенной теоремой Фалеса.

Многие теоремы школьной геометрии можно доказывать с применением теоремы Фалеса. Хорошо работает она, например, при доказательстве теоремы о медианах треугольника, при доказательстве того, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, теоремы Чевы, а также при доказательстве того, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

В качестве примера рассмотрим доказательство следующей теоремы.

**Теорема.** Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**Доказательство.** Вначале, в качестве леммы, докажем следующее, известное утверждение.

**Лемма.** Если $AA_1$ биссектриса треугольника $ABC$, то $BA_1 : A_1C = BA : AC$.**Доказательство леммы.** Пусть $C_1$ точка прямой $AB$ такая, что прямая $CC_1$ параллельна биссектрисе $AA_1$(см. рис.1) Из параллельности прямых $AA_1$ и $CC_1$

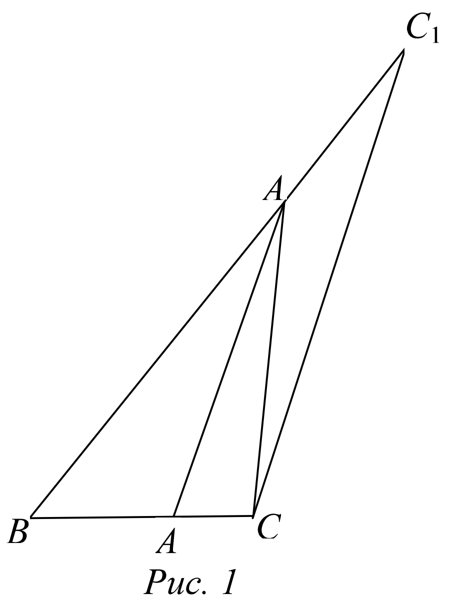


*Рис. 1*

следует,
что $\angle BAA_1 = \angle BC_1C$ и $\angle A_1AC = \angle ACC_1$, а так как $AA_1$ – биссектриса, то получаем что $\angle AC_1C = \angle ACC_1$, и поэтому $AC = AC_1$.

По обобщенной теореме Фалеса $BA_1 : A_1C = BA : AC_1 = BA : AC$.

**Доказательство теоремы.** Пусть $O$ точка пересечения биссектрис $AA_1$ и $BB_1$, а $O_1$ – точка пересечения биссектрис $AA_1$ и $CC_1$ (см. рис. 2). По лемме, для

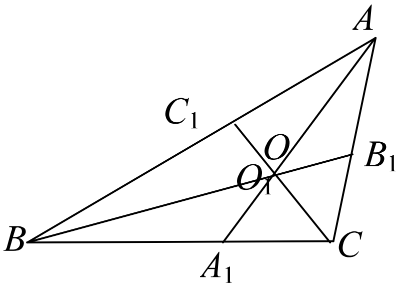


*Рис. 2*

треугольника $BAA_1$ верно равенство

$$A_1O : OA = BA_1 : BA, \qquad (1)$$

для треугольника $CAA_1$

$$A_1O_1 : O_1A = CA_1 : CA, \qquad (2)$$

а для треугольника $ABC$

$$BA_1 : A_1C = BA : AC,$$

или

$$BA_1 : BA = A_1C : AC \qquad (3).$$

Из (1), (2) и (3) получаем:

$$A_1O : OA = A_1O_1 : O_1A.$$

А это и означает, что точки $O$ и $O_1$ совпадают.

В статье также рассматриваются примеры решения геометрических задач на доказательство и вычисление.