Алгоритмические проблемы, связанные с морфическими последовательностями

Иван Митрофанов

МГУ им. М.В.Ломоносова

17 февраля 2017

Определения

Алфавит – это конечное множество, его элементы называются *буквами*. *Слово* над конечным алфавитом $A = \{a_i\}$ — это конечная последовательность букв: $a_{i_1} a_{1_2} \dots a_{i_n}$. Бесконечное вправо слово, или *сверхслово* – элемент $A^{\mathbb{Z}_+}$, т.е. последовательность букв. *Длина* $|u|$ конечного слова u – число букв в нем. *Пустое слово* ε – слово длины 0. *Конкатенация* $u_1 u_2$ конечного слова u_1 и слова u_2 – результат приписывания u_2 к u_1 справа. Слово u – *подслово* слова (сверхслова) v, если $v = v_1 u v_2$ для некоторых v_1, v_2.

Обозначения

A^* – множество всех конечных слов над алфавитом A, включая пустое. A^ω – множество всех сверхслов над алфавитом A.

Морфизмы

A^* – моноид относительно операции конкатенации, единица – ε.

Определение

Пусть A, B – два алфавита. Отображение $f : A^* \to B^*$ называется *морфизмом*, если оно сохраняет структуру моноида, т.е. $f(xy) = f(x)f(y)$ для любых x, y.

Морфизмы

A^* – моноид относительно операции конкатенации, единица – ε.

Определение

Пусть A, B – два алфавита. Отображение $f : A^* \to B^*$ называется *морфизмом*, если оно сохраняет структуру моноида, т.е. $f(xy) = f(x)f(y)$ для любых x, y.

Пример

$A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f(0) = aac, f(1) = b$

Морфизмы

A^* – моноид относительно операции конкатенации, единица – ε.

Определение

Пусть A, B – два алфавита. Отображение $f : A^* \to B^*$ называется *морфизмом*, если оно сохраняет структуру моноида, т.е. $f(xy) = f(x)f(y)$ для любых x, y.

Пример

$A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f(0) = aac, f(1) = b$
Тогда $f(10010) = f(1)f(0)f(0)f(1)f(0) = baacaacbaac$

Морфизмы

A^* – моноид относительно операции конкатенации, единица – ε.

Определение

Пусть A, B – два алфавита. Отображение $f : A^* \to B^*$ называется *морфизмом*, если оно сохраняет структуру моноида, т.е. $f(xy) = f(x)f(y)$ для любых x, y.

Пример

$A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$, $f(0) = aac, f(1) = b$
Тогда $f(10010) = f(1)f(0)f(0)f(1)f(0) = baacaacbaac$

Определение

Морфизм вида $f : A^* \to A^*$ называется *подстановкой*.

Естественным образом морфизмы продолжаются на сверхслова.

Неподвижные точки подстановок

Определение

Сверхслово W называется *неподвижной точкой подстановки* f, если $f(W) = W$.

Неподвижные точки подстановок

Определение

Сверхслово W называется *неподвижной точкой подстановки* f, если $f(W) = W$.

Слово Фибоначчи

$A = \{0,1\}$, $\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 0$

$$W = 01001010010\dots$$

$$\varphi(W) = 01|0|01|01|0|01|0\dots$$

Слово Туэ-Морса

$A = \{0,1\}$, $\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 10$.

$W = \varphi(W) = 0110100110010110\dots$

Слово Туэ

$A = \{a,b,c\}$, $f(a) = abcab$, $f(b) = acabcb$, $f(c) = acbcacb$.

$W = f(W) = abcab\dots$

Морфические последовательности

Обозначения

$f^k(x) := f(f^{k-1})(x)$, где $f^0(x) = x$

Морфические последовательности

Обозначения

$f^k(x) := f(f^{k-1})(x)$, где $f^0(x) = x$
Пусть $a \in A$, $f(a) = aU$

Морфические последовательности

Обозначения

$f^k(x) := f(f^{k-1})(x)$, где $f^0(x) = x$
Пусть $a \in A$, $f(a) = aU$
$f^2(a) = aUf(U)$

Морфические последовательности

Обозначения

$f^k(x) := f(f^{k-1})(x)$, где $f^0(x) = x$
Пусть $a \in A$, $f(a) = aU$
$f^2(a) = aUf(U)$
$f^3(a) = aUf(U)f^2(U)$

Морфические последовательности

Обозначения

$f^k(x) := f(f^{k-1})(x)$, где $f^0(x) = x$
Пусть $a \in A$, $f(a) = aU$
$f^2(a) = aUf(U)$
$f^3(a) = aUf(U)f^2(U)$
Если $|f^k(a)|$ стремится к бесконечности, то
$f^\infty(a) := aUf(U)f^2(U)f^3(U)\ldots$ – неподвижная точка f.

Морфические последовательности

Обозначения

$f^k(x) := f(f^{k-1})(x)$, где $f^0(x) = x$
Пусть $a \in A$, $f(a) = aU$
$f^2(a) = aUf(U)$
$f^3(a) = aUf(U)f^2(U)$
Если $|f^k(a)|$ стремится к бесконечности, то
$f^\infty(a) := aUf(U)f^2(U)f^3(U)\ldots$ – неподвижная точка f.

Определения

Кодирование – морфизм, сохраняющий длины слов.
Чисто морфическая последовательность – вида $f^\infty(a)$
Морфическая последовательность – вида $h(f^\infty(a))$, где h – кодирование.

Примеры

Морфическая, но не чисто морфическая последовательность

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$,
$s(1) = 12, s(2) = 13, s(3) = 1$
$h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 2.$
$s^\infty(1) = 12131211213\dots$

Примеры

Морфическая, но не чисто морфическая последовательность

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$,
$s(1) = 12, s(2) = 13, s(3) = 1$
$h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 2.$
$s^{\infty}(1) = 12131211213\dots$
$h(s^{\infty}(1)) = 12121211212\dots$
Доля единиц – кубическая иррациональность

Примеры

Морфическая, но не чисто морфическая последовательность

$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2\},$
$s(1) = 12, s(2) = 13, s(3) = 1$
$h(1) = 1, h(2) = 3, h(3) = 2.$
$s^{\infty}(1) = 12131211213\ldots$
$h(s^{\infty}(1)) = 12121211212\ldots$
Доля единиц – кубическая иррациональность

Последовательность Рудина – Шапиро

$A = \{a, b, c, d\},\ B = \{+1, -1\}$
$f(a) = ab,\ f(b) = ac,\ f(c) = db, f(d) = cd$
$h(a) = h(b) = +1, h(c) = h(d) = -1$
$h(f^{\infty}(a)) = +1+1+1-1+1+1-1+1+1+1+1-1-1-1+1-1\ldots$

Основные вопросы, рассматриваемые в диссертации

- Описание комбинаторной структуры конечных подслов морфических последовательностей
- По данной *подстановочной системе* $(A, B, a \in A, \varphi : A^* \to A^*, h : A^* \to B^*)$ алгоритмически определить свойства сверхслова $h(\varphi^\infty(a))$.

Периодичность

Определение

Сверхслово W называется *периодичным*, если оно представляется в виде u^∞, т.е. $uuu\dots uu\dots$ для некоторого слова u. Сверхслово W называется *заключительно периодичным*, если $W = vu^\infty$ для некоторых u и v.
u – *период*, v – *предпериод*.

Периодичность

Определение

Сверхслово W называется *периодичным*, если оно представляется в виде u^∞, т.е. $uuu\dots uu\dots$ для некоторого слова u. Сверхслово W называется *заключительно периодичным*, если $W = vu^\infty$ для некоторых u и v.
u – период, v – предпериод.

Пример

$A = \{1, 2, 3\}$, $f(1) = 12, f(2) = 31, f(3) = 23$
$f^\infty(1) = 123123123\cdots = (123)^\infty$

Пример

Слово Фибоначчи не является периодичным.

Периодичность

Доказательство.
Предположим, что $\varphi^\infty(0) = u^\infty$, где $\varphi(0) = 01, \varphi(1) = 0$.
Пусть в u n символов 0 и m символов 1.
Тогда существует предел отношения числа нулей и единиц в начальных кусках $\varphi^\infty(0)$, и этот предел равен n/m. С другой стороны, для любого k слово $\varphi^\infty(0)$ начинается с $\varphi(u)^k$ – слова, в котором $kn + km$ нулей и kn единиц.
Переходя к пределу, получаем равенство $\frac{n+m}{n} = \frac{n}{m}$, т.е. $\frac{n}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, чего не может быть при целых m и n.

Доказательство.
Предположим, что $\varphi^\infty(0) = u^\infty$, где $\varphi(0) = 01, \varphi(1) = 0$.
Пусть в u n символов 0 и m символов 1.
Тогда существует предел отношения числа нулей и единиц в начальных кусках $\varphi^\infty(0)$, и этот предел равен n/m. С другой стороны, для любого k слово $\varphi^\infty(0)$ начинается с $\varphi(u)^k$ – слова, в котором $kn + km$ нулей и kn единиц.
Переходя к пределу, получаем равенство $\frac{n+m}{n} = \frac{n}{m}$, т.е. $\frac{n}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, чего не может быть при целых m и n.

Проблема заключительной периодичности (The HD0L ultimate periodicity problem)

Дано: *два алфавита A и B, подстановка $\varphi : A^* \to A^*$, продолжающаяся над буквой a и морфизм $h : A^* \to B^*$.*
Определить: *существуют ли такие конечные слова u и v, что $h(\varphi^\infty(a)) = uv^\infty$*

Периодичность, история вопроса.

Теорема (T. Harju и M. Linna, 1986; независимо J.-J. Pansiot, 1986)

Проблема заключительной периодичности алгоритмически разрешима для чисто морфических последовательностей.

Периодичность, история вопроса.

Теорема (T. Harju и M. Linna, 1986; независимо J.-J. Pansiot, 1986)

Проблема заключительной периодичности алгоритмически разрешима для чисто морфических последовательностей.

Определение

Автоматная последовательность – сверхслово вида $h(\varphi^\infty(a))$, где $|\varphi(a_i)| = |\varphi(a_j)|$ для любых двух букв a_i и a_j.

Теорема (J. Honkala, 1986)

Проблема заключительной периодичности алгоритмически разрешима для автоматных последовательностей.

Периодичность, история вопроса

Теорема (J. Honkala и M. Rigo, 2004)

Алгоритмическая разрешимость проблемы заключительной периодичности эквивалентна алгоритмической разрешимости следующей задачи:

Дано: Абстрактная система счисления $(L, X, <)$, нумерующая слова регулярного языка L над алфавитом X натуральными числами, и регулярный язык $K \subseteq L$.

Определить: образуют ли при этой нумерации номера слов языка K объединение конечного числа арифметических прогрессий?

Периодичность, история вопроса

Теорема (J. Honkala и M. Rigo, 2004)

Алгоритмическая разрешимость проблемы заключительной периодичности эквивалентна алгоритмической разрешимости следующей задачи:
Дано: Абстрактная система счисления $(L, X, <)$, нумерующая слова регулярного языка L над алфавитом X натуральными числами, и регулярный язык $K \subseteq L$.
Определить: образуют ли при этой нумерации номера слов языка K объединение конечного числа арифметических прогрессий?

Теорема (Bell, Charlier, Fraenkel, Rigo 2009)

Эта (см. выше) задача алгоритмически разрешима для абстрактных систем счисления с некоторыми специальными условиями на вид языка L.

Теорема (И.Митрофанов и независимо F.Durand, 2011)

Проблема заключительной периодичности алгоритмически разрешима.

Почти периодичность

Определение

Сверхслово W называется *почти периодичным* (*равномерно рекуррентным*), если для любого его подслова v существует такое число $k(v, W)$, что если u – подслово W и $|u| \geq k(v, W)$, то v – подслово u.

Пример

$A = \{a, b\}$, $\varphi(a) = aba, \varphi(b) = bb$
$\varphi^{\infty}(a) = ababbababbbbaba\dots$ – не почти периодичное, т.к. содержит сколь угодно длинные подслова без буквы a.

Почти периодичность

Определение

Сверхслово W называется *почти периодичным* (*равномерно рекуррентным*), если для любого его подслова v существует такое число $k(v, W)$, что если u – подслово W и $|u| \geq k(v, W)$, то v – подслово u.

Пример

$A = \{a, b\}$, $\varphi(a) = aba, \varphi(b) = bb$
$\varphi^\infty(a) = ababbababbbbaba\ldots$ – не почти периодичное, т.к. содержит сколь угодно длинные подслова без буквы a.

Определение

Морфическая последовательность $h(\varphi^\infty(a))$ называется *примитивной*, если существует такая итерация морфизма φ^k, что для любых двух букв a_i и a_j буква a_i содержится в $\varphi^k(a_j)$.

Почти периодичность

Пример

$\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 0$
$\varphi^2(0) = 010$, $\varphi^2(1) = 01$
Слово Фибоначчи $\varphi^\infty(0)$ примитивное.

Слова Туэ-Морса, Туэ, Рудина-Шапиро – примитивные.

Почти периодичность

Пример

$\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 0$
$\varphi^2(0) = 010$, $\varphi^2(1) = 01$
Слово Фибоначчи $\varphi^\infty(0)$ примитивное.

Слова Туэ-Морса, Туэ, Рудина-Шапиро – примитивные.

Теорема

Примитивные морфические последовательности являются почти периодичными.

Почти периодичность

Пример

$\varphi(0) = 01$, $\varphi(1) = 0$
$\varphi^2(0) = 010$, $\varphi^2(1) = 01$
Слово Фибоначчи $\varphi^\infty(0)$ примитивное.

Слова Туэ-Морса, Туэ, Рудина-Шапиро – примитивные.

Теорема

Примитивные морфические последовательности являются почти периодичными.

Проблема почти периодичности

Дано: *два конечных алфавита A и B, буква $a_1 \in A$, подстановка $\varphi : A^* \to A^*$, продолжающаяся над a_1 и морфизм $\psi : A^* \to B^*$.*
Определить: *является ли слово $\psi(\varphi^\infty(a_1))$ почти периодичным?*

Почти периодичность, история вопроса.

Вопрос (J.-P. Allouche, J. Shallit, 2003)

Разрешима ли алгоритмически проблема почти периодичности для чисто морфических последовательностей?

Теорема (F.Nicolas, Ю. Л. Притыкин 2009)

Проблема почти периодичности алгоритмически разрешима для чисто морфических и для автоматных последовательностей (есть полиномиальные алгоритмы).

Гипотеза (F.Nicolas и Ю. Л. Притыкин, а также Ю. Л. Притыкин, Ан. А. Мучник и А. Л. Семенов)

Проблема почти периодичности алгоритмически разрешима.

Почти периодичность, история вопроса.

Теорема (И.Митрофанов и независимо F.Durand, 2012))

Проблема почти периодичности алгоритмически разрешима.

Развивается подход F.Nicolas и Ю. Л. Притыкина: для данного морфического сверхслова W строится примитивное почти периодичное сверхслово W' такое, что все слова W' являются словами W. После чего сравниваются W и W'.

Совпадение факторных языков.

Проблема совпадения факторных языков.

Дано: *три конечных алфавита* A_1, B_1, A_2, *буквы* $a_1 \in A_1$ *и* $a_2 \in A_2$, *подстановки* $\varphi_1 : A_1^* \to A_1^*$ *и* $\varphi_2 : A_2^* \to A_2^*$, *морфизмы* $h_1 : A_1^* \to B^*$ *и* $h_1 : A_1^* \to B^*$.
Определить: *верно ли, что у слов* $h_1(\varphi_1^\infty(a_1))$ *и* $h_2(\varphi_2^\infty(a_2))$ *совпадают множества конечных подслов?*

Теорема (I. Fagnot, 1997)

Проблема совпадения факторных языков алгоритмически разрешима для некоторого класса число морфических последовательностей и для автоматных последовательностей.

Теорема (И.Митрофанов)

Проблема совпадения факторных языков алгоритмически разрешима, если одна из последовательностей примитивна.

Открытые алгоритмические проблемы

Проблема равенства слов (HD0Lω-equivalence problem)

Дано: *три конечных алфавита* A_1, B_1, A_2, *буквы* $a_1 \in A_1$ *и* $a_2 \in A_2$, *подстановки* $\varphi_1 : A_1^* \to A_1^*$ *и* $\varphi_2 : A_2^* \to A_2^*$, *морфизмы* $h_1 : A_1^* \to B^*$ *и* $h_1 : A_1^* \to B^*$.

Определить: *верно ли, что слова* $h_1(\varphi_1^\infty(a_1))$ *и* $h_2(\varphi_2^\infty(a_2))$ *совпадают?*

Проблема включения факторных языков

Дано: *три конечных алфавита* A_1, B_1, A_2, *буквы* $a_1 \in A_1$ *и* $a_2 \in A_2$, *подстановки* $\varphi_1 : A_1^* \to A_1^*$ *и* $\varphi_2 : A_2^* \to A_2^*$, *морфизмы* $h_1 : A_1^* \to B^*$ *и* $h_1 : A_1^* \to B^*$.

Определить: *верно ли, что любое конечное подслово сверхслова* $h_1(\varphi_1^\infty(a_1))$ *является подсловом сверхслова* $h_2(\varphi_2^\infty(a_2))$*?*

Графы Рози

Определение

Для сверхслова W *граф Рози* $R_W(k)$ порядка k – это ориентированный граф, вершинами которого являются подслова длины k, принадлежащие W, а две вершины, соответствующие словам u_1 и u_2, соединяются направленным ребром, если в W есть такое подслово v, что $|v| = k + 1$, $v[1]v[2]\dots v[k] = u_1$ и $v[2]v[3]\dots v[k+1] = u_2$.

Пример

В слове Туэ-Морса $0110100110010110100\dots$ 10 различных подслов длины 4 и 12 различных подслов длины 5, поэтому его граф Рози порядка 4 содержит 10 вершин и 12 ребер.

Схема графа Рози, пример

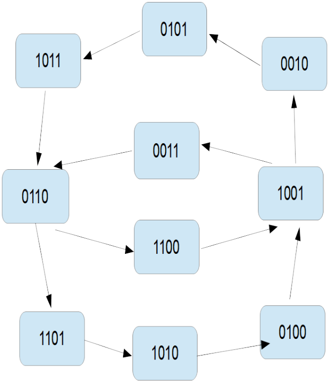
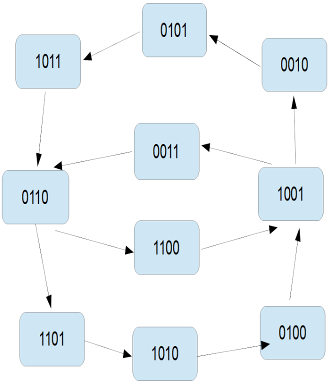
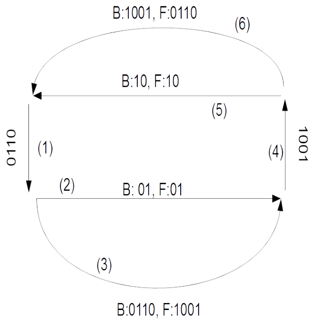


Схема графа Рози, пример





Схемы Рози

Опишем алгоритм, который видоизменяет граф Рози и перерисовывает его в виде схемы. На каждом ребре полученного орграфа будет записано по два слова: переднее и заднее, обозначаемые соответственно буквами F и B. Новый граф S получается из $R_W(k)$ следующими операциями:

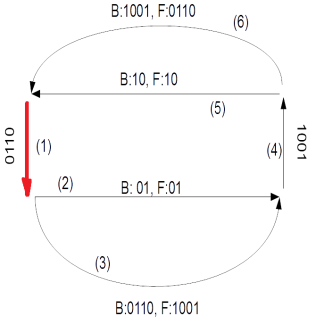
1. Все простые цепи, соединяющие вершины, заменяются на единичные ребра.
2. Каждая *биспециальная* вершина a, т.е. вершина, у которой и входящая, и исходящая степени больше 1, заменяется на ребро v_a. При этом все ребра, которые раньше вели в a, будут вести в начало v_a, а ребра, которые раньше шли из a, будут выходить из конца ребра v_a.

Если v — ребро в S, то в графе $R_W(k)$ ему соответствует либо биспециальная вершина, либо простая цепь. Если это биспециальная вершина, то есть слово длины k, то в качестве $F(v)$ и $B(v)$ (переднего и заднего слова) возьмем это слово. Пример: ребро (1) в графе S_1 получено из биспециальной вершины 0110.
Пусть ребру v соответствует некоторая простая цепь s, рассмотрим в $R_w(k)$ естественные продолжения s_1 и s_2 вправо и влево этой цепи соответственно. Пусть этим путям соответствуют слова u_1 и u_2.

1. Если v выходит из собирающей вершины, то $F(v) = u_1$.
2. Если v входит в раздающую вершину, то $B(v) = u_2$.
3. Если v выходит из раздающей вершины, то $F(v) = u_1$ без первых k букв.
4. Если v входит в собирающую вершину, то $B(v) = u_2$ без последних k букв.

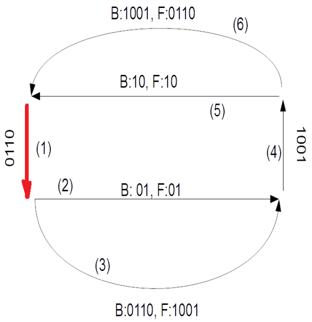
Утверждение

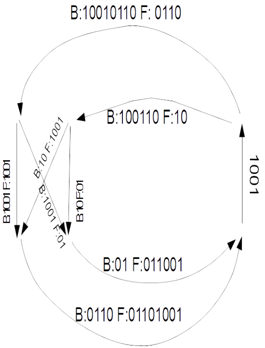
Если в $R_W(k)$ нет биспециальных вершин, то схемы, построенная по $R_W(k+1)$ и по $R_W(k)$ совпадают.



Утверждение

Если в $R_W(k)$ нет биспециальных вершин, то схемы, построенная по $R_W(k+1)$ и по $R_W(k)$ совпадают.





Элементарная эволюция

Пусть $\{x_i\}$ — множество ребер. входящих в начало ребра v, а $\{y_i\}$ — множество ребер, идущих из конца v. Пусть N_x и N_y – число элементов в $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ соответственно. Обозначим $F(y_i) = Y_i$, $B(x_i) = X_i$, $F(v) = V$.
Пусть кроме этого все пары элементов (x_i, y_j) разбиты на *плохие* и *хорошие*. а конкретной, путь $x_i v y_i$ будет частью какого-то допустимого пути.) Обозначим M множество хороших пар.
Построим граф S'. Он получается из S заменой ребра v на K_{N_x,N_y}, где $K_{m,n}$ — полный двудольный ориентированный граф. Более подробно: ребро v удаляется, его начало заменяется на множество $\{A_i\}$ из N_x вершин так, что для любого i ребро x_i идет в A_i; конец ребра v заменяется на множество $\{B_j\}$ из N_y вершин так, что для любого j ребро y_j выходит из B_j; вводятся ребра $\{v_{i,j}\}$, соединяющие вершины множества $\{A_i\}$ с вершинами множества $\{B_j\}$.
По сравнению с S, у графа S' нет ребра v, но есть новые ребра $\{v_{ij}\}$. Остальные ребра граф S взаимно однозначно соответствуют ребрам графа S'. Соответственные ребра в первом и втором графе будут обозначаться одними и теми же буквами.
На ребрах S' расставим слова следующим образом. На всех ребрах S', кроме ребер из $\{y_i\}$ и $\{v_{i,j}\}$, передние слова пишутся те же, что и передние слова соответственных ребер в S. Для каждого i и j, переднее слово ребра y_j в S' — это VY_j. Переднее слово ребра $v_{i,j}$ — это Y_j.
Аналогично, на всех ребрах, кроме ребер из $\{x_i\}$ и $\{v_{i,j}\}$, задние слова переносятся с соответствующих ребер S; для всех i и j в качестве заднего слова ребра x_i возьмем $X_i V$, а в качестве заднего слова ребра $v_{i,j}$ — X_i.
Ребра $v_{i,j}$, соответствующие плохим парам (x_i, y_j), назовем *плохими*, а все остальные ребра графа S' — *хорошими*. Удалим плохие ребра из S', получится новый граф S'_1. Считаем, что граф S'_1 сильно связный и не является циклом. Заменим в графе S'_1 цепочки ребер единичными ребрами, получим граф S''. Если S'' не является циклом и сильно связный, то у каждого ребра в S'' есть естественное продолжение вперед и назад (чтобы получить естественное продолжение вперед, будем двигаться по направлению стрелочек. Когда-нибудь мы достигнем раздающей вершины).
Естественное продолжение вперед соответствует некоторому пути в S'; переднее слово этого пути в S' возьмем в качестве переднего слова для соответствующего ребра S''. Аналогично для задних слов: у ребра в S'' есть естественное продолжение влево, этому пути в S'' соответствует путь в S'. Заднее слово этого пути и будет задним словом ребра в S''.

Утверждение

Если в $R_W(k)$ ровно одна биспециальная вершина, то схема, построенная по $R_W(k+1)$, получается из схемы, построенной по $R_W(k)$, с помощью операции $Evol$.

Утверждение

Если в $R_W(k)$ ровно одна биспециальная вершина, то схема, построенная по $R_W(k+1)$, получается из схемы, построенной по $R_W(k)$, с помощью операции $Evol$.

Определение

Граф со словами будет являться *схемой Рози* для рекуррентного непериодичного сверхслова W, если он удовлетворяет следующим свойствам, которые в называются *свойствами схем Рози*:

1. Граф сильно связен и состоит более чем из одного ребра.
2. Все ребра, исходящие из одной раздающей вершины графа, имеют передние слова с попарно разными первыми буквами. Все ребра, входящие в одну собирающую вершину графа, имеют задние слова с попарно разными последними буквами.
3. Для любого симметричного пути, его переднее и заднее слова совпадают. То есть можно говорить просто о слове симметричного пути.
4. Если есть два симметричных пути s_1 и s_2 и выполнено $F(s_1) \sqsubseteq_k F(s_2)$, то $s_1 \sqsubseteq_k s_2$.
5. Все слова, написанные на ребрах графа, являются подсловами W.
6. Для любого u – подслова W – существует симметричный путь, слово которого содержит u.
7. Для любого ребра s существует такое слово u_s, принадлежащее W, что любой симметричный путь, слово которого содержит u_s, проходит по ребру s.

Теорема (А.Я.Белов, И.Митрофанов)

Пусть W – непериодичное равномерно рекуррентное сверхслово. Тогда протокол эволюции схем Рози периодичен начиная с некоторого момента в том и только в том случае, когда множество конечных подслов слова W совпадает с множеством конечных подслов некоторого морфического сверхслова $h(\varphi^{\infty}(a_1))$

Основные результаты диссертации

1. Создана теория, связанная со схемами Рози и теоремами типа Вершика-Лившица. Введено определение схем Рози сверхслова и их эволюции. В терминах последовательности схем Рози дан критерий того, что факторный язык почти периодичного сверхслова является факторным языком некоторой морфической последовательности.
2. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки периодичности и заключительной периодичности морфических последовательностей.
3. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки почти периодичности морфических последовательностей.
4. Доказана алгоритмическая разрешимость проверки совпадения факторных языков двух морфических последовательностей в случае, когда одна из них примитивна.

Дальнейшие направления исследования

Другие алгоритмические задачи

Увеличение размерности

Понять лучше связь между словами, описывающими перекладывания отрезков, и морфическими последовательностями (используя схемы Рози и результат А.Белова и А.Чернятьева)

Работы автора по теме диссертации

1. И. В. Митрофанов, *Почти периодичность морфических слов*, Доклады Академии Наук, 2016, том 467, No 5, с. 519–522
2. И. В. Митрофанов, *Периодичность морфических слов*, Фундамент. и прикл. матем., 18:4 (2013), 107–119
3. I. Mitrofanov. *Periodicity of Morphic Words.* May 2015, Journal of Mathematical Sciences, Volume 206, Issue 6, pp 679-687 (перевод)
4. A. Ya. Belov, G. V. Kondakov, I. Mitrofanov. *Inverse problems of symbolic dynamics.* Banach Center Publ. 94 (2011), 43 – 60.
5. A. Ya. Kanel-Belov, I. Mitrofanov. *Periodicity of Rauzy scheme and substitutional systems.* eprint arXiv:1107.0185

Апробация результатов

1. Международная конференция кCANT-2012њ г. Люмини в 2012 г
2. Международный воркшоп Decidability problems for substitutive sequences, tilings and numerations, организованный F.Durand (2012, Амьен)
3. Международная конференция кSubTiteњ г. Люмини в 2013 г
4. Franco-Russian workshop on Algorithms, complexity and applications 2013, Москва
5. Number Theory and Dynamics + Journees Arithmetiques, Institut Fourier, 2013, Гренобль
6. Growth, Symbolic Dynamics and Combinatorics of Words in Groups (2015, Париж)
7. Международный научный форум «ЛОМОНОСОВ-2015»

1. Семинар «Кольца и модули» под руководством профессора В. Н. Латышева, профессора А. В. Михалева неоднократно;
2. Научно-исследовательский семинар кафедры алгебры.
3. Семинар «Алгебра и теория моделей» под руководством профессора Е. И. Буниной в 2016г.
4. Научно-исследовательский семинар А. М. Райгородского в 2011–2012 гг.
5. Bar-Ilan Algebra Seminar (Bar-Ilan University) (January, 2014)
6. PI-Seminar (Technion (Israel Institute of Technology))(January, 2014)
7. Петербургский семинар по теории представлений и динамическим системам (2015, ПОМИ)

Спасибо за внимание!

phortim@yandex.ru