МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 539.3

СОЛОДОВНИКОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПОЗИТА С КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ

Специальность: 01.02.04 —
«Механика деформируемого твердого тела»

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2017 г.

Работа выполнена на кафедре механики композитов механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова

Научные руководители: доктор физико-математических наук, профессор **Борис Ефимович Победря**,
доктор физико-математических наук, профессор **Сергей Владимирович Шешенин**

Официальные оппоненты: **Алексей Алексеевич Локтев,**
доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II», г. Москва, заведующий кафедрой «Транспортное строительство»

Новак Юрий Владимирович,
кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», г. Москва, доцент кафедры «Мосты, тоннели и строительные конструкции»,
зам. директора филиала «НИЦ «Мосты» транспортного строительства АО ЦНИИС

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится 14 апреля 2017 г. в 16 часов 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском Государственном Университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП - 1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16 10.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеке МГУ по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д.27, сектор А, 8 этаж, к. 812 и на сайте http://istina.msu.ru/dissertations/44015609/.

Автореферат разослан 20 февраля 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.91, канд. физ.-мат. наук — П.В. Чистяков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

В последние годы вместе с ростом выпуска промышленной продукции неизменно растет потребность в создании новых эффективных и экономичных композиционных материалов во всех отраслях производства. Этому в значительной степени способствуют многочисленные научные исследования, появление новых материалов и развитие технологии производства.

Исключением не является и строительная отрасль. Одним из наиболее широко используемых материалов в строительстве является бетон. Активное развитие технологии бетона и большое многообразие видов дает толчок к появлению новых композиционных материалов именно на его основе.

Одним из таких современных и перспективных композиционных материалов, применяемых в строительстве, является бетон с короткими армирующими волокнами (фибробетон).

Использование произвольно распределенных в объеме бетонной матрицы фибр позволяет повысить сопротивление материала растягивающим усилиям, минимизировать ширину раскрытия трещин и сократить риск их расползания. При этом становится возможным сократить расход материала и повысить универсальность строительства бетонных конструкций.

Для уточнения норм проектирования конструкций из фибробетона и расширения его применения в сооружениях с высокими прочностными и эксплуатационными требованиями необходимо развитие и усовершенствование подходов к моделированию процесса деформирования композитов с короткими волокнами.

В первую очередь в диссертационной работе рассматриваются аналитический и численный подходы к определению эффективных упругих характеристик композиционного материала с короткими армирующими волокнами. Аналитический подход основывается на ряде предположений относительно геометрической структуры представительного элемента объема композита и решении Эшелби. Выражения получены для двух случаев, когда волокна предполагались бесконечно длинными и имеющими конечный размер. Численный подход заключается в моделировании структуры композита с помощью метода конечных элементов. С помощью сравнительного анализа данных подходов на основе эксперимен-

тальных измерений обосновано использование численного подхода к построению нелинейной модели механического поведения композиционного материала.

После этого в диссертационной работе представлена механическая модель для описания деформирования физически нелинейного композиционного материала с короткими армирующими волокнами под действием статических нагрузок. Модель учитывает неупругие свойства материала матрицы, наличие армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон. Исследовано влияние концентрации волокон, нелинейных соотношений связи между материалом матрицы и волокнами и вида критерия возникновения необратимых деформаций в матрице на деформирование композиционного материала.

В работе представлена численная реализация предложенной модели и создан набор компьютерных программ для анализа элементов инженерных конструкций. С его помощью было выполнено численное моделирование основных типов задач используемых на практике для исследования механических свойств фибробетона.

Цели работы:

1. Разработка модели композиционного материала, учитывающей неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон. Численная реализация модели.
2. Исследование влияния различных механических свойств матрицы, армирующих волокон и их связи на деформирование композиционного материала.
3. Решение практических задач с целью верификации разработанного набора программ.

Научная новизна:

1. На основе анализа существующих моделей и экспериментальных данных обоснована механическая модель материала, учитывающая неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон.
2. Разработана численная реализация предложенной модели и создан набор программ для анализа элементов конструкций. Результаты моделирования дают совпадение с экспериментальными измерениями.

3. Показано, что аналитические и численный подходы дают совпадение не хуже 3% для упругих эффективных характеристик композиционного материала для малых концентраций армирующих волокон.
4. Исследовано влияние выбора поверхности нагружения неупругой матрицы на деформирование композиционного материала. Отмечена сильная зависимость результатов от формы поверхности.
5. Показано, что наличие коротких армирующих волокон и учет нелинейности связи между материалом матрицы и армирующими волокнами оказывает значительное влияние на деформирование композиционного материала.

Достоверность результатов. Обоснованность и достоверность теоретических результатов диссертации подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики.

Достоверность полученных численных результатов подтверждается их согласованностью с результатами аналитических решений и экспериментальных измерений.

Научная и практическая значимость. Результаты имеют теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы для решения ряда практических задач, связанных с моделированием процесса нелинейного деформирования композиционных материалов с короткими армирующими волокнами. В строительной отрасли данные результаты могут быть применены к исследованию упругих и прочностных свойств элементов конструкций из фибробетона.

На защиту выносятся:

1. Численная реализация модели композиционного материала, учитывающая неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон.
2. Результаты сравнительного анализа аналитических и численного подходов к оценке упругих эффективных характеристик композиционного материала с короткими армирующими волокнами.
3. Результаты исследования о влиянии коротких армирующих волокон, учета нелинейных соотношений связи между материалом матрицы и армирующими волокнами и вида критерия возникновения необратимых деформаций в матрице на деформирование композиционного материала.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались:

на 73-ей научно-методической и научно-исследовательской конференции МАДИ, 2015 г.

на XXII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2015 2015 г.

на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. С.В. Шешенина и проф. В.И. Горбачева, 2016 г.

на межкафедральном семинаре по механике деформируемых сред под руководством механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. С.В. Шешенина, проф. А.Б. Киселева, проф. А.В. Звягина, 2016 г.

на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН Е.В. Ломакина, 2016 г.

на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Д.В. Георгиевского, 2016 г.

на научно-исследовательском семинаре по механике деформируемого твердого тела в НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством проф. Р.А. Васина, 2016 г.

на научно-исследовательском семинаре Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук под руководством академика РАН В.П. Матвеенко, 2017 г.

Публикация результатов. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3-х работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из содержания, введения, трех глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 5 таблиц, 43 рисунка, 142 библиографические ссылки. Общий объем диссертации 123 страницы.

Личный вклад автора. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Разработка численной реали-

зации предложенной модели и верификация программного комплекса, а также решение конкретных задач выполнены соискателем самостоятельно.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение.

Во введении дается обзор литературы, обоснована актуальность научных исследований. Сформулированы: цель работы, ее научная новизна и практическая значимость.

Глава 1. Эффективные упругие свойства композиционного материала с короткими армирующими волокнами

Глава 1 состоит из 4-х параграфов и посвящена сравнительному анализу аналитического и численного подходов к определению эффективных упругих свойств композиционного материала с короткими армирующими волокнами.

В обоих подходах предполагалось, что материал матрицы и армирующие волокна являются упругими. Волокна равномерно распределены и имеют произвольную пространственную ориентацию в объеме матрице. Число волокон в матрице задавалось через их объемное содержание, определяемое как отношение объема, занимаемого волокнами, к объему матрицы. На поверхности между волокнами и матрицей рассматривался случай идеального контакта без возможности проскальзывания волокон.

В §1 **главы 1** описаны подходы к определению эффективных характеристик среды с параллельными волокнами.

Было рассмотрено два вида конечных выражений для эффективных модулей. Первый получен с помощью комбинации полидисперной и трехфазной моделей композита и предполагает достаточно большую длину волокон. Второй – с помощью решения Эшелби для задачи об эллипсоидальном включении в бесконечной упругой среде под действием однородной нагрузки на большом расстоянии от него и учитывающий реальную длину волокон.

В §2 **главы 1** представлены аналитические выражения для эффективных характеристик среды с равномерным распределением в пространстве и произвольной ориентацией армирующих волокон на основе эффективных модулей транс-

версально изотропной среды, соответствующих среде с параллельными волокнами.

В результате пространственного осреднения получаются следующие значения эффективных модулей изотропной среды [Кристенсен]

$$\begin{gathered} K = \frac{1}{9}(E_{11} + 4(1+\nu_{12})^2 K_{23}) \\ \mu = \frac{1}{15}(E_{11} + (1-2\nu_{12})^2 K_{23} + 6(mu_{12} + \mu_{23})) \end{gathered} \tag{1}$$

где K есть эффективный объемный модуль, μ - эффективный модуль сдвига.

§**3 главы 1** посвящен численному определению эффективных характеристик с помощью описанного в главе 2 численного подхода. Для этого был проведен численный эксперимент на одноосное сжатие представительного элемента объема фибробетона кубической формы со сторонами 0.15x0.15x0.15 м. Равномерно распределенная нагрузка P действовала вдоль оси OZ на одну из граней куба. Противоположная к поверхности действия нагрузки грань куба предполагалась закрепленной по направлению действия нагрузки. Остальные грани куба считались свободными.

В результате численного эксперимента было определено осредненное сжимающее напряжение σ_z, деформация сжатия ε_z и деформация ε_x

$$\sigma_z = P/F, \quad \varepsilon_z = \Delta l_z / l_0, \quad \varepsilon_x = \Delta l_x / l_0 \tag{2}$$

где F – площадь поперечного сечения элемента, $\Delta l_z = (l_z - l_0)$ – сжатие элемента вдоль оси OZ, равное разности текущей l_z и начальной l_0 длин сторон образца; Δl_x определяется аналогично Δl_z.

Эффективный модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν определялись исходя из соотношений

$$E = \sigma_z / \varepsilon_z, \quad \nu = -\varepsilon_x / \varepsilon_z \tag{3}$$

В §4 **главы 1** представлен сравнительный анализ аналитического и численного подходов к оценке эффективных упругих характеристик фибробетона.

Для сравнительного анализа использовались результаты работы, где были представлены экспериментально определенные значения прочности при одноосном сжатии бетонных образцов, содержащих произвольно распределенные стальные волокна в объеме от 0.5 до 4%.

Модуль Юнга бетона определялся в соответствии с требованиям норм для бетона по формуле $E_{\text{бет}} = 2.15 \cdot 10^4 (f_c/10)^{1/3}$, где $f_c = 76.3$ – прочность бетона при одноосном сжатии (compressive strength). Модуль Юнга стали равнялся $E_{\text{арм}} = 200$ ГПа. Длина волокон принималась равной 60 мм, отношение длины к диаметру $l/d = 50$.

В ходе сравнительного анализа было проведено по пять численных тестов на различных конечно-элементных сетках для каждой комбинации физических свойств матрицы и волокон и их объемного содержания. Рассматривались три регулярные конечно-элементные сетки для кубической области со сторонами длиной 0.15 м. Первая сетка имела 9 узлов вдоль каждой из сторон области, вторая - 11 узлов и третья - 13 узлов. На графике 1 представлены осредненные значения модуля Юнга по трем конечно-элементным сеткам.

В результате сравнения было установлено, что значения эффективных модулей, полученные по аналитическим выражениям с учетом реальной длины волокон, практически не отличаются от результатов, полученных по аналитическим выражениям с предположением о бесконечной длине волокон. В среднем по рассматриваемому диапазону концентрации волокон $0.5 - 4\%$ значения в первом случае были на 0.02% меньше, чем значения во втором случае.

Согласно экспериментальным измерениям модуль Юнга фибробетона в случае концентрации армирования 4% увеличился на 4.6% по сравнению с неармированным бетоном. Максимальное различие между экспериментальными и аналитическими с учетом реальной длины волокон значениями модуля Юнга фибробетона составило 1.7%, аналогичное различие эксперимента с численным решением - 1.0%.

Стоит отметить, что на всем диапазоне концентрации волокон $0.5 - 4\%$ аналитическое решение дает более высокие значения модуля упругости по сравнению с численным решением, максимальное различие составляет 2.7%, см. рисунок 1.

В следующей серии сравнений использовались результаты работы, где были представлены экспериментально определенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона для двух типов бетонов, содержащих произвольно распределенные стальные волокна длиной 30 мм, диаметром 0.55 мм.

Первый тип бетона при нулевой концентрации волокон имел прочность при одноосном сжатии $f_{c1} = 35$ МПа, модуль Юнга $E_{\text{бет1}} = 28.7$ ГПа и коэффициент

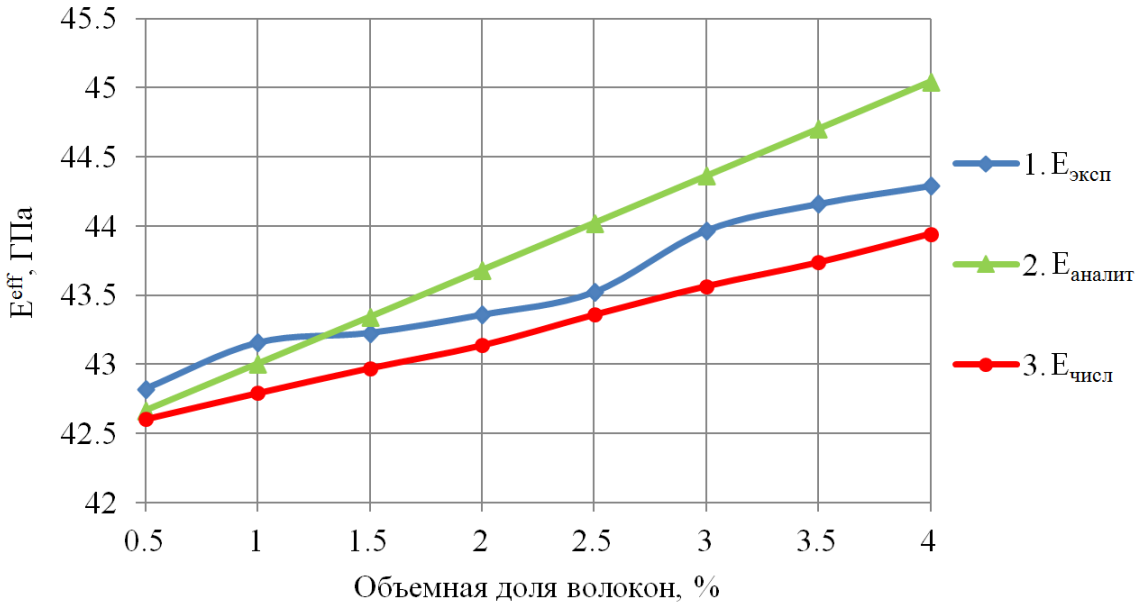

Рисунок 1: Кривая №1 - экспериментальные значения модуля упругости, №2 - аналитическое решение с учетом конечной длины волокон, №3 - численное решение с помощью МКЭ.

Пуассона $\nu_{\text{бет1}} = 0.182$, второй тип бетона - $f_{c2} = 65$ МПа, $E_{\text{бет2}} = 37.5$ ГПа и $\nu_{\text{бет2}} = 0.201$, соответственно. Волокна имели небольшие отгибы по концам. Объемное содержание волокон принималось $0.5, 1$ и 1.5%. Модуль упругости стали был равен $E_{\text{арм}} = 200$ ГПа.

Для численного определения эффективных модулей композита использовалась кубическая область со сторонами длиной 0.15 м. Конечно-элементные сетки были выбраны такими же, как и в предыдущей серии сравнений. На графике 2 представлены осредненные по конечно-элементным сеткам значения модуля Юнга.

Результаты экспериментальных измерений показали, что модуль Юнга фибробетона в случае концентрации армирования 1.5% для первого типа бетона вырос на 8.4%, для второго - на 9.3% по сравнению с неармированным бетоном.

Максимальное различие между экспериментальными значениями модуля Юнга композита и аналитическим решением с учетом конечной длины волокон составляет 4.8% для бетонов первого типа и 6.1% для второго. Аналогичные различия численного решения с экспериментом составляют 5.5% и 6.9%, соответственно.

Рассмотренные аналитические подходы хорошо себя зарекомендовали для определения эффективных упругих характеристик композита, однако в нелиней-

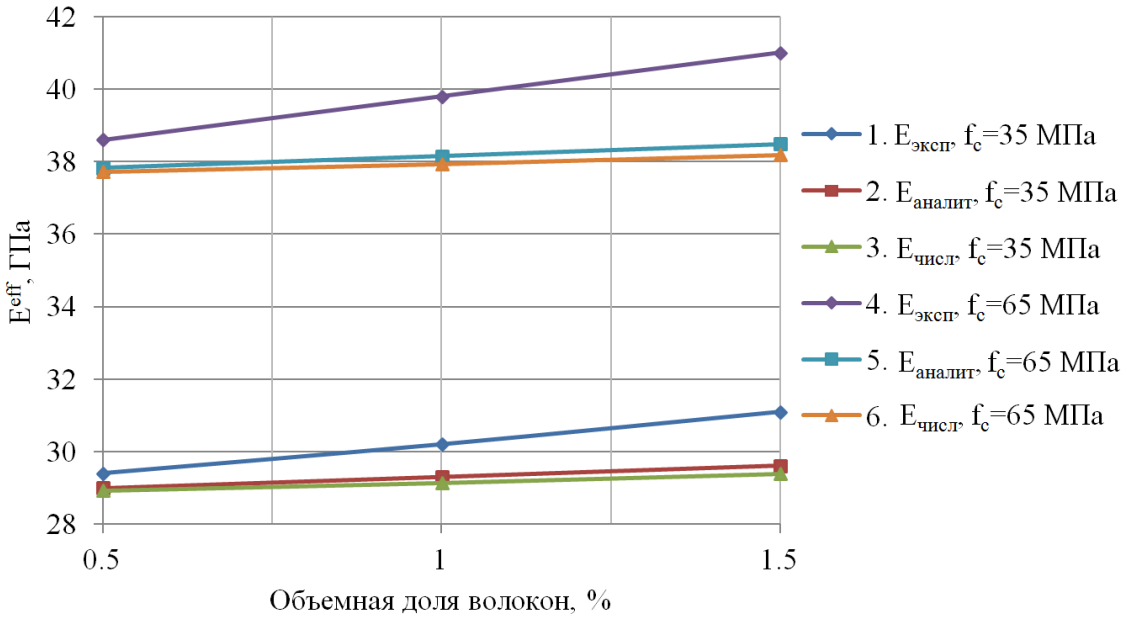

Рисунок 2: Кривая №1,4 - экспериментальные значения модуля упругости, №2,5 - аналитическое решение с учетом конечной длины волокон, №3,6 - численное решение с помощью МКЭ.

ном случае более универсальным является численный подход. Его надежность была подтверждена проведенным в данной главе сравнительным анализом, результаты которого показали, что для малых концентраций армирующих волокон аналитические подходы дают такую же точность, как и численный подход, и в обоих случаях получено хорошее совпадение расчетов с экспериментом. Поэтому в дальнейшем разумно использовать именно такой подход для построения нелинейной модели механического поведения композиционного материала с короткими армирующими волокнами.

В главе были получены следующие результаты:

1. На основе сравнения с экспериментальными измерениями показано, что аналитические и численный подходы дают совпадение не хуже 3% в оценке упругих эффективных характеристик композиционного материала для малых концентраций армирующих волокон.
2. Выполнена верификация численной модели композита с короткими армирующими волокнами на основе сравнения с экспериментами и аналитическим решением в упругой постановке при допущении идеального контакта между волокнами и матрицей.

Глава 2. Модель деформирования физически нелинейного композиционного материала с короткими армирующими волокнами

Глава 2 состоит из 11-ти параграфов и посвящена модели деформирования физически нелинейного композиционного материала с короткими армирующими волокнами.

В параграфе §1 **главы 2** представлены определяющие соотношения при деформирования физически нелинейного материала матрицы при малых деформациях. Данные соотношения аналогичны теории пластического течения и записываются относительно скоростей деформаций и напряжений. Предполагается, что компоненты тензора скоростей полных деформаций равны сумме компонент тензоров скоростей упругой (elastic) и неупругой (inelastic) деформаций

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e + \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^i$$

Тензоры скоростей напряжений и упругих деформаций связаны законом Гука

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{\mathbf{C}} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e$$

Предполагается, что в упругой области материал обладает линейными изотропными свойствами.

Будем считать, что момент возникновения неупругих деформаций в каждой точке тела определяется ее напряженным состоянием, т.е. существуют скалярные функции $f_k(\underset{\sim}{\sigma})$, определяющие кусочно-гладкую поверхность нагружения в пространстве напряжений. Неупругие деформации могут возникнуть в некоторой точке тела, если хотя бы для одной из функций $f_k(\underset{\sim}{\sigma})$ выполняется условие

$$f_k(\underset{\sim}{\sigma}) = \Phi_k(\underset{\sim}{\sigma}) - \phi_{k0} = 0, \quad \phi_{k0} = const \tag{4}$$

где функция $\Phi_k(\underset{\sim}{\sigma})$ зависит от тензора напряжений и определяет вид поверхности, а функция ϕ_{k0} задает начальный размер поверхности и имеет физический смысл предела упругости материала при одноосном нагружении; $k = 1, \ldots, m$ и m - число поверхностей, определяющих кусочно-гладкую поверхность нагружения.

Для описания эволюции поверхности нагружения в процессе деформирования введем в уравнение (4) для функций f_k скалярные параметры α_k следующим

образом

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \alpha_k) = \Phi_k(\underset{\sim}{\sigma}) - \phi_k(\alpha_k) = 0, \quad \phi_k(\alpha_k) = \phi_{k0} \text{ при } \alpha_k = 0$$

где скалярная функция $\phi_k(\alpha_k)$ является монотонно возрастающей или убывающей функцией параметра α_k в процессе упрочнения или разупрочнения, соответственно. Положение поверхности нагружения, соответствующее переходу от стадии упрочнения к разупрочнению, определяет множество пределов прочности материала.

Предполагается, что в процессе деформирования поверхность нагружения может изотропно расширяться при увеличении значений функций $\phi_k(\alpha_k)$ и сжиматься без смещения при их уменьшении, оставаясь при этом подобной самой себе. Эволюция поверхности происходит по мере накопления в материале неупругой деформации, что влечет увеличение значений параметров α_k.

Будем считать, что во время всего процесса нагружения выполняется закон градиентальности. Вектор скоростей неупругих деформации для регулярной точки k-ой поверхности имеет вид

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^i = \dot{\gamma}_k \frac{\partial f_k}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}$$

Для особой точки кусочно-гладкой поверхности нагружения используется правило Койтера, из которого следует, что скорости неупругих деформаций в особой точке являются суммой скоростей на смежных поверхностях.

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^i = \sum_{k=1}^{m} \dot{\gamma}_k \frac{\partial f_k}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \tag{5}$$

Условия нагрузки-разгрузки для k-ой поверхности записываются кратко в виде

$$\begin{gathered} \dot{\gamma}_k \geq 0, \quad f_k(\underset{\sim}{\sigma}, \alpha_k) \leq 0, \quad \dot{\gamma}_k f_k(\underset{\sim}{\sigma}, \alpha_k) = 0 \\ \dot{\gamma}_k \dot{f}_k(\underset{\sim}{\sigma}, \alpha_k) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Для того, чтобы задать эволюцию поверхности нагружения, необходимо связать функцию $\phi_k(\alpha_k)$, определяющую размер поверхности, с одноосными экспериментальными диаграммами напряжение-деформация. Исходя из этого перепишем уравнение (4), заменяя функцию $\phi_k(\alpha_k)$, следующим образом

$$\begin{gathered} f_k(\underset{\sim}{\sigma}, \alpha_k) = \Phi_k(\underset{\sim}{\sigma}) - c_k(\sigma_k^{eqv}(\alpha_k))^n = 0, \quad c_k = const \\ \sigma_k^{eqv}(\alpha_k) = \left(\frac{\Phi_k(\underset{\sim}{\sigma})}{c_k}\right)^{\frac{1}{n}} \end{gathered} \tag{7}$$

где константа c_k и показатель степени n определяются из условия равенства в случае одноосного нагружения скалярной функции $\sigma_k^{eqv}(\alpha_k)$ (называемой эквивалентным напряжением) величине осевого напряжения.

Для определения изменения параметров α_k используется величина скорости изменения работы неупругих деформаций

$$\dot{W}^i = \underset{\sim}{\sigma} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^i = \sigma_k^{eqv}(\alpha_k) \cdot \dot{\alpha}_k$$

Исходя из данного соотношения получен закон изменения параметров α_k в виде

$$\dot{\alpha}_k = \dot{\gamma}_k \cdot \left(-\frac{\partial f_k}{\partial \sigma_k^{eqv}} \right)$$

где n - степень однородности функций $\Phi_j(\underset{\sim}{\sigma})$.

Соотношение между тензорами скоростей напряжений и полных деформаций получается с помощью использования закона Гука, ассоциированного закона для скоростей неупругих деформаций и условия непрерывного изменения функций поверхности нагружения в случае активного нагружения

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\underset{\sim}{\mathbf{C}} - \sum_{p,r \in J_{\text{акт}}} \left(\underset{\sim}{\mathbf{C}} : \frac{\partial f_p}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right) \otimes \left(\underset{\sim}{\mathbf{C}} : \frac{\partial f_r}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial f_p}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{\mathbf{C}} : \frac{\partial f_r}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_k^{eqv}} \frac{\partial \sigma_k^{eqv}}{\partial \alpha} \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_k^{eqv}} \right)^{-1} \right) : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$$

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{\mathbf{C}}^T(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}, \underset{\sim}{\varepsilon}) : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{8}$$

где введено обозначение $\underset{\sim}{\mathbf{C}}^T(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}, \underset{\sim}{\varepsilon})$ для симметричного тензора касательных модулей.

Представленные в данном параграфе определяющие соотношения дают полную модель деформирования физически неупругого материала матрицы.

В параграфе §**2 главы 2** сформулирована дифференциальная постановка задачи. Рассматривается тело, занимаемое в пространстве область V, и процесс нагружения, определяемый возрастающим параметром $t \in [0, T]$. Задача о квазистатическом равновесии тела в каждый момент нагружения t заключается в решении системы нелинейных уравнений

$$\dot{\sigma}_{ij,j}(\dot{\vec{u}}(t)) + \rho \dot{f}_i(t) = 0, \quad \vec{x} \in V \tag{9}$$

где $\dot{f}_i(t)$ - скорости массовых сил. Здесь обозначено $\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(\dot{\vec{u}}) = \dot{\underset{\sim}{\sigma}}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\dot{\vec{u}}), \underset{\sim}{\varepsilon})$ согласно (8).

Здесь используется запись $\underset{\sim}{\varepsilon}(\vec{w})$, обозначающая соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}(\vec{w}) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad \forall \vec{w}$$

На границе области V должны выполняться условия

$$\dot{u}_i(t)\big|_{\Sigma_1} = \dot{u}_i^0(t), \quad \dot{\sigma}_{ij}(\vec{u})n_j\big|_{\Sigma_2} = \dot{S}_i^0(t) \tag{10}$$

где Σ_1 и Σ_2 - две непересекающиеся части границы Σ области V. Для простоты дальнейших вычислений будем считать $\dot{u}_i^0(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$ и $\vec{x} \in V$.

В начальный момент перемещения точек тела равны нулю $\vec{u}(0, \vec{x}) = 0$ для $\vec{x} \in V$.

Параграф §**3 главы 2** посвящен вариационной постановке задачи. Вариационное уравнение, соответствующее дифференциальному, получается путем умножения обеих частей уравнения равновесия (9) скалярно на пробную функцию $\vec{w}(\vec{x}) \in H_0 = \{\vec{w} | \vec{w} \in W_2^1, \vec{w}|_{\Sigma_1} = 0\}$, интегрирования по частям и применения формулы Гаусса-Остроградского и граничных условий (10). В результате вариационная постановка задачи имеет вид

$$\int\limits_V \dot{\underset{\sim}{\sigma}}(\underset{\sim}{\varepsilon}(\dot{\vec{u}})) : \underset{\sim}{\varepsilon}(\vec{w}) dV = \dot{A}^{ext}(\vec{w})$$

$$\dot{A}^{ext}(\vec{w}) = \int\limits_V \rho \dot{\vec{f}}(t)\vec{w} dV + \int\limits_{\Sigma_2} \dot{\vec{S}}^0(t)\vec{w} d\Sigma$$

где левая часть вариационного уравнения представляет собой изменение работы внутренних сил, а правая часть - работы внешних сил.

Дискретизация вариационного уравнения по пространственным координатам осуществляется с помощью метода конечных элементов на основе подхода Галеркина. Дискретизация вариационного уравнения по параметру нагружения осуществляется с помощью замены дифференциалов по параметру нагружения конечными разностями. Для решения системы нелинейных уравнений применяется неявная схема Эйлера с внутренними итерациями.

Для моделирования материала матрицы композита в трехмерных задачах использовались четырехузловые элементы в виде тетраэдра и восьмиузловые элементы в виде параллелепипеда (типа brick).

В параграфе §4 **главы 2** изложен алгоритм решения глобальной задачи, заключающейся в решении вариационного уравнения, и локальной задачи определения компонент тензора скоростей напряжений по заданным значениям компонент тензора скоростей полных деформаций, основанный на использовании неявной схемы Эйлера. Представлена система нелинейных уравнений локальной задачи и записан итерационный процесс для ее решения.

В параграфе §5 **главы 2** представлены используемые в данной работе поверхности нагружения неупругой матрицы композита.

Функции, задающие поверхность нагружения изотропного материала, должны быть инвариантными функциями напряженного состояния и не зависеть от выбора системы координат, в которой вычисляются напряжения. Для этого они считаются зависимыми от инвариантов тензора напряжений или от его главных напряжений

$$f_k(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad \text{или} \quad f_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

где инварианты I_1, J_2 и J_3 есть первый инвариант тензора напряжений и второй и третий инварианты тензора девиатора напряжений, соответственно.

Уравнение поверхности нагружения с использованием цилиндрической системы координат Хэйга-Вестергаарда ξ, ρ, θ имеет вид $f(\xi, \rho, \theta) = 0$, где

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1, \quad \rho = \sqrt{2J_2}, \quad \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}}$$

Для численных экспериментов было выбрано два типа поверхностей разрушения: гладкая поверхность Менетри-Уильямса, определяемая одной функцией и кусочно-гладкая поверхность, являющаяся комбинацией поверхностей Друкера-Прагера и максимальных растягивающих напряжений Ранкина.

С использованием введенных координат уравнение поверхности нагружения Менетри-Уильямса записывается в виде

$$f(\xi, \rho, \theta, \alpha) = \Phi(\xi, \rho, \theta) - k_2 \cdot (\sigma^{eqv}(\alpha))^2$$
$$= (A\rho)^2 + k_1 \cdot (B\rho r(\theta) + C\xi) - k_2 \cdot (\sigma^{eqv}(\alpha))^2 = 0$$

где коэффициенты $A = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{f_c}, B = \frac{1}{\sqrt{6} f_c}, C = \frac{1}{\sqrt{3} f_c}$, функция $\sigma^{eqv}(0) = \frac{f_c}{3}$ в начальный момент нагружения при $\alpha = 0$, f_c - прочность материала при одноосном сжатии. Константы k_1 и k_2 определяются исходя из экспериментальных данных.

Эволюция поверхности нагружения в процессе деформирования определяется величиной $\sigma^{eqv}(\alpha)$.

Функция $r(\theta)$, заданная на секторе $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, определяет контур поверхности на девиаторной плоскости

$$r(\theta) = \frac{4(1-e^2)\cos^2\theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\theta + (2e-1)[4(1-e^2)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e]^{1/2}}$$

где параметр e является константой и определяет степень округлости контура поверхности. Вид поверхности на девиаторной плоскости гладкий и выпуклый при условии $0.5 < e \leq 1$. Меридианы поверхности имеют форму параболы, радиус меридиана при одноосном растяжении меньше радиуса меридиана при одноосном сжатии при $0.5 < e < 1$.

Для определения коэффициентов k_1 и k_2 необходимо воспользоваться опытами на одноосное сжатие и растяжение. В случае, когда функция $\sigma^{eqv}(\alpha)$ отражает прочность материала при одноосном сжатии, коэффициенты принимают значения

$$k_1 = \frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c f_t}\frac{3e}{e+1}, \quad k_2 = \frac{1}{f_c^2}$$

где f_t - прочность материала при одноосном растяжении (tensile strength).

Кусочно-гладкая поверхность нагружения Ранкина-Друкера-Прагера состоит из двух поверхностей: в области положительных напряжений используется поверхность максимальных главных напряжений Ранкина, в области отрицательных - поверхность Друкера-Прагера.

Уравнение поверхности максимальных главных напряжений Ранкина имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_1^{eqv}(\alpha_1), \quad \sigma_2 = \sigma_1^{eqv}(\alpha_1), \quad \sigma_3 = \sigma_1^{eqv}(\alpha_1)$$

где функция $\sigma_1^{eqv}(\alpha_1)$ отражает изменение прочности материала при одноосном растяжении и в начальный момент нагружения равна величине f_t.

Критерий Друкера-Прагера записывается в виде

$$f_2(\xi, \rho, \alpha_2) = \Phi_2(\xi, \rho) - \sqrt{2}k_2 \cdot \sigma_2^{eqv}(\alpha_2) = \rho + \sqrt{6}k_1 \cdot \xi - \sqrt{2}k_2 \cdot \sigma_2^{eqv}(\alpha_2) = 0$$

где функция $\sigma_2^{eqv}(\alpha_2)$ отражает изменение прочности материала при одноосном сжатии и в начальный момент нагружения равна величине $\sigma_2^{eqv}(0) = \frac{f_c}{3}$. Для

определения коэффициентов k_1 и k_2 воспользуемся опытами на одноосное и двуосное сжатие. В этом случае

$$k_1 = \frac{m-1}{\sqrt{3}(2m-1)}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - k_1, \quad m = \frac{f_{bc}}{f_c}$$

где f_{bc} - прочность материала матрицы при двуосном сжатии (biaxial compressive strength).

В параграфе §**6 главы 2** представлены аппроксимации одноосных диаграмм напряжение-деформация.

Исходя из определяющих соотношений, представленных в §**1 главы 2** следует, что скорость изменения внутреннего параметра α совпадает по модулю со скоростью неупругих деформаций, а функция $\sigma^{eqv}(\alpha)$ равна значению предельного напряжения в материале σ_{11} при $\alpha > 0$. В начальный момент нагружения $\alpha = 0$ и $\sigma^{eqv}(0) = \sigma_0^{eqv}$, где σ_0^{eqv} - начальный предел упругости материала.

На основании экспериментальных данных, в случае одноосного растяжения для аппроксимации зависимости одноосных растягивающих напряжений от накопленных неупругих деформаций используется экспоненциальная функция в виде

$$\sigma^{eqv}(\alpha) = f_t + q(\alpha) = \sigma_{11}(\varepsilon_{11}^i) = f_t + \Big(f_t \cdot exp\Big(-\frac{\varepsilon_{11}^i}{\varepsilon_{11,0}^i}\Big) - 1\Big) \tag{11}$$

где $\varepsilon_{11,0}^i$ определяется исходя из значений энергии разрушения при растяжении G_t.

Аналогичные рассуждения применимы и при рассмотрении случая одноосного сжатия образца и соответствующей диаграммы напряжение-деформация.

Аппроксимация в этом случае осуществляется с помощью кусочно-гладкой функции, состоящей из ветви параболы и экспоненты:

$$\sigma^{eqv}(\alpha) = \sigma_{11}(\varepsilon_{11}^i) = \frac{f_c}{3} + q(\alpha)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{f_c}{3} + \dfrac{f_c}{3} \cdot \Big(\Big(1 + 4\dfrac{\varepsilon_{11}^i}{\varepsilon_{11,2}^i} - 2\Big(\dfrac{\varepsilon_{11}^i}{\varepsilon_{11,2}^i}\Big)^2\Big) - 1\Big), & \text{для} \quad \varepsilon_{11}^i \in [0, \varepsilon_{11,2}^i] \\ \dfrac{f_c}{3} + \dfrac{f_c}{3} \cdot \Big(3f_c exp\Big(-\Big(\dfrac{\varepsilon_{11}^i - \varepsilon_{11,2}^i}{\varepsilon_{11,0}^i}\Big)^2\Big) - 1\Big), & \text{для} \quad \varepsilon_{11}^i \in [\varepsilon_{11,2}^i, +\infty] \end{cases}$$

где f_c - прочность материала при одноосном сжатии, $\varepsilon_{11,2}^i$ - значения неупругих деформаций, соответствующих максимальному сжимающему напряжению,

E - модуль упругости материала, $\varepsilon^{cr}_{11,0}$ определялась исходя из значений энергии разрушения при сжатии $G_c \approx 100 G_t$.

В параграфе §**7 главы 2** рассмотрены вопросы устойчивости решения глобальной и локальной задач.

В параграфе §**8 главы 2** представлен подход к моделированию армирующих волокон в случае идеальной связи. Армирующие волокна композиционного материала моделировались как одномерное твердое тело, способное воспринимать нагрузку, только вдоль своей оси. Распределение деформаций и напряжений в теле является однородным и материал обладает упругопластическими свойствами с линейным упрочнением после достижения напряжениями предела упругости.

Для того, чтобы повысить эффективность вычислительного процесса в работе используется модель встроенного стержневого элемента. Степени свободы, связанные с узлами стержневых элементов, исключаются из системы уравнений метода конечных элементов за счет перераспределения жесткостей стержневого элемента по узлам конечного элемента материала матрицы, содержащего данный стержневой элемент.

В процессе ассамблирования матрица жесткости для трехмерного конечного элемента материала матрицы и пересекающих ее $N_{\text{фиб}}$ встроенных стержневых элементов определяется согласно выражению

$$K^{\text{комп}} = K^{\text{матр}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{фиб}}} K_i^{\text{фиб}} \tag{12}$$

где $K^{\text{комп}}$ - матрица жесткости композита, $K^{\text{матр}}$ - матрица жесткости материала матрицы, $K_i^{\text{фиб}}$ - матрица жесткости i-го встроенного стержневого элемента.

Параграф §**9 главы 2** посвящен моделированию неидеальной связи между материалом матрицы и армирующими волокнами. Моделирование неидеальной связи происходит с помощью специального конечного элемента, соединяющего узел матрицы с соответствующим узлом стержневого элемента, которые до начала деформирования имеют одинаковые координаты. В таком случае, в процессе деформирования армирующие волокна могут проскальзывать вдоль своей оси относительно соответствующих узлов материала матрицы.

Матрица жесткости системы, состоящей из одного двухузлового стержневого элемента и двух элементов связи на концах, в локальной системе координат

стержня, после выполнения процедуры исключения степеней свободы армирующего элемента, имеет вид

$$[K^*_{\text{бт,бт}}] = \frac{k_{\text{ст}}}{1 + k_{\text{ст}}(\frac{1}{k_{\text{св,н}}} + \frac{1}{k_{\text{св,к}}})} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

где $k_{\text{ст}}$ - жесткость стержневого элемента, $k_{\text{св,н}}$ и $k_{\text{св,к}}$ - жесткости связи в начале и конце стержневого элемента. Жесткость связи в каждом из узлов равна произведению модуля связи, определяемого в соответствии с выбранным законом связи, на половину площади поверхности стержневого элемента.

Исходя из этого равенства видно, что чем слабее жесткость связи, тем меньше жесткость стержневого элемента. Перед ассамблированием матрица $[K^*_{\text{бт,бт}}]$ преобразуется к глобальной системе координат.

В параграфе §**10 главы 2** описано моделирование структуры композита с короткими армирующими волокнами. Основными этапами построения конечно-элементной структуры композита являются: назначение границ образца для численного эксперимента, генерация внутри данной области армирующих волокон, построение сетки для материала матрицы и армирующих волокон и ассамблирование матрицы жесткости элемента композита согласно (12).

Моделирование процесса нагружения изложено в параграфе §**11 главы 2**. На каждом этапе нагружения необходимо было решить задачу с заданными граничными условиями в виде перемещений. Так как вариационная постановка задачи подразумевает нулевые граничные перемещения, то необходимо использование дополнительной процедуры для их учета. В данной работе использовался подход, основанный на разделении вектора перемещений на две группы: неизвестные узловые перемещения и предопределенные.

В главе были получены следующие результаты:

1. Представлена механическая модель материала, учитывающая неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон.
2. Представлена численная реализация предложенной модели и создан набор программ на ее основе.

Глава 3. Численное исследование деформирования бетона с короткими армирующими волокнами

Глава 3 состоит из 3-х параграфов и посвящена численному исследованию деформирования бетона с короткими армирующими волокнами. В параграфе §**1 главы 3** выполнено численное моделирование эксперимента на одноосное сжатие фибробетонных образцов на основе экспериментальных данных, взятых из имеющейся литературы.

Согласно экспериментальным данным, модуль Юнга $E_{\text{бет}}$ и прочность бетона при одноосном сжатии f_c без армирования были взяты равными 35.8 ГПа и 38.3 МПа, соответственно. Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{бет}}$ принимался равным 0.2. Стальные фибры применялись длиной $l_{\text{арм}} = 30$ мм и диаметром $d_{\text{арм}} = 0.38$ мм. Модуль упругости стали был равен $E_{\text{арм}} = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{\text{арм}} = 0.28$. Предел прочности волокон равен 2300 МПа. Рассматривался диапазон концентрации волокон от 0% до 1.13%.

Для численного моделирования использовалось два типа связи: идеальная и с возможностью проскальзывания волокон. На основе данных от производителя фибр была построена аппроксимация закона напряжение связи-скольжения, состоящая из двух линейных участков.

В качестве поверхности нагружения были рассмотрены случаи кусочно-гладкой поверхности Ранкина-Друкера-Прагера и гладкой поверхности Менетри-Уильямса с параметром $e = 1$ и параметром e, определенным таким образом, чтобы наиболее точно аппроксимировать кривую напряжение-деформация при концентрации волокон 0.38%. В данном случае наилучшая аппроксимация была получена для параметра $e = 0.63$.

Для первой серии численных экспериментов была выбрана кубическая область со сторонами 150 мм и три регулярных конечно-элементных сетки. Первая сетка состояла из 512 кубических элементов (9 узлов вдоль каждой из сторон области), вторая из 1000 элементов (11 узлов вдоль каждой из сторон области) и третья из 1728 элементов (13 узлов вдоль каждой из сторон области).

В случае объемной концентрации армирования 0.38% число волокон для численного эксперимента составило 3770 штук, для концентрации 0.75% - 7440 штук, для концентрации 1.13% - 11210 штук. Число стержневых элементов для данных концентраций армирования в случае сетки из 512 кубических элемен-

тов составило 12358, 24310 и 36781 штук и в случае сетки из 1728 кубических элементов - 16998, 33228 и 50445 штук, соответственно.

Нагрузка на образец передавалась через плиты пресса, при численном моделировании предполагался контакт без трения на границе плит пресса и образца, т.е. касательные напряжения равнялись нулю. На двух гранях куба $x = 0$ и $y = 0$ нормальные перемещения u_n и касательные напряжения принимались равными нулю (условия симметрии).

Экспериментальные данные и результаты численного моделирования с учетом проскальзывания волокон для диапазона концентраций армирования 0% - 1.13% представлены на рисунках 3 и 4.

Согласно экспериментальным измерениям прочность композита при одноосном сжатии для концентрации волокон 0.38% увеличилась на 4% по сравнению с неармированным бетоном, для концентрации 1.13% на 16%. Под пределом прочности композита подразумевается максимальное значение напряжения на диаграмме напряжение-деформация при соответствующем виде нагружения.

Численное исследование также показало заметное повышение прочности композита при увеличении концентрации армирования за счет подбора параметров. Наилучшего совпадения с экспериментом удалось достичь с использованием неидеальной связи между армирующими волокнами и матрицей и гладкой поверхности нагружения с контуром на девиаторной плоскости, близким к треугольному. Различие с экспериментом в этом случае не превышает 4.3% на исследуемом диапазоне концентрации волокон.

В результате численного моделирования было установлено, что наличие неидеальной связи оказывает существенное влияние на одноосную прочность фибробетона f_c и соответствующую максимальной нагрузке деформацию ε_0 на всем диапазоне концентрации волокон и для всех поверхностей нагружения. При этом с увеличением концентрации армирования возрастает и влияние проскальзывания. В случае концентрации волокон 1.13% учет проскальзывания снижает прочность фибробетона на 34.2% для поверхности Ранкина-Друкера-Прагера и на 12.3% для поверхности Менетри-Уильямса при $e = 0.63$ по сравнению со случаем идеальной связи. Аналогичные снижения деформации ε_0 составили 17.8% и 25.2%. Данные значения являются средними по всем конечно-элементным сеткам.

Использование различных поверхностей нагружения также в значительной степени влияет на численное моделирование. Использование поверхности Ранкина-Друкера-Прагера на исследуемом диапазоне концентрации волокон дает значительное превышение предельной прочности композита по сравнению с реальным экспериментом даже в случае учета проскальзывания волокон. Варьирование параметра e для поверхности Менетри-Уильямса позволяет построить наиболее точную аппроксимацию экспериментальных данных.

На рисунках 3 и 4 для каждой из диаграмм деформирования композита крестиком отмечен момент перехода бетонной матрицы из стадии упрочнения в стадию разрушения. Звездочкой отмечен момент начала разрушения композита. Стоит отметить, что за счет наличия в бетоне армирующих волокон, напряжения в композите продолжали возрастать даже после начала разрушения бетонной матрицы. До момента достижения предельных напряжений в фибробетоне матрица касательных модулей композита оставалась положительно определенной и наблюдалась сходимость численного алгоритма для различных значений шагов по параметру нагружения и различных конечно-элементных сеток.

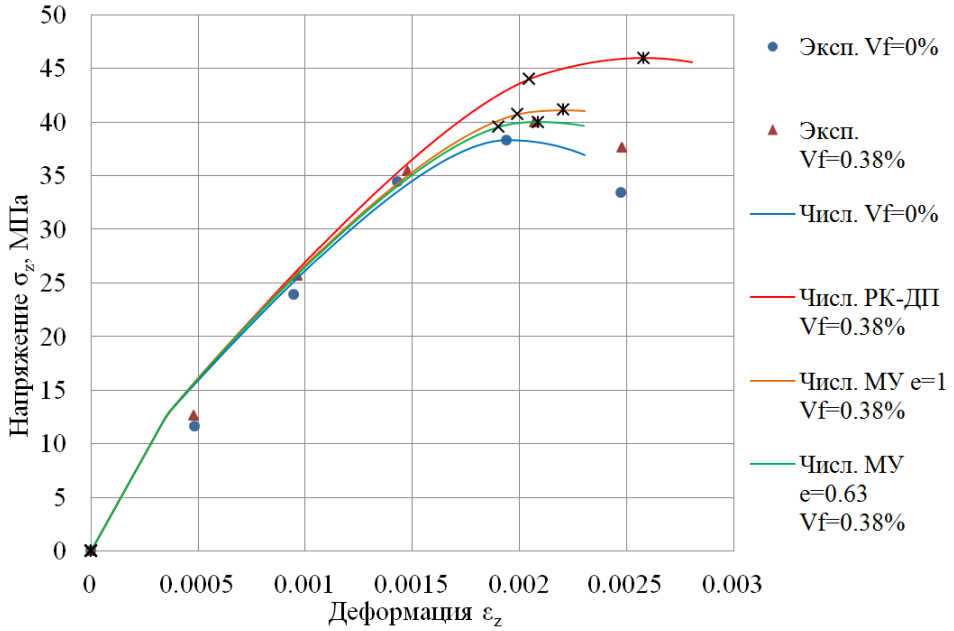

Рисунок 3: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 0.38% и случая неидеальной связи.

В параграфе §**2 главы 3** представлено численное моделирование статического изгиба балки в третях пролета. Именно в таких случаях нагружения, когда материал преимущественно подвержен растягивающим усилиям, наличие фибр

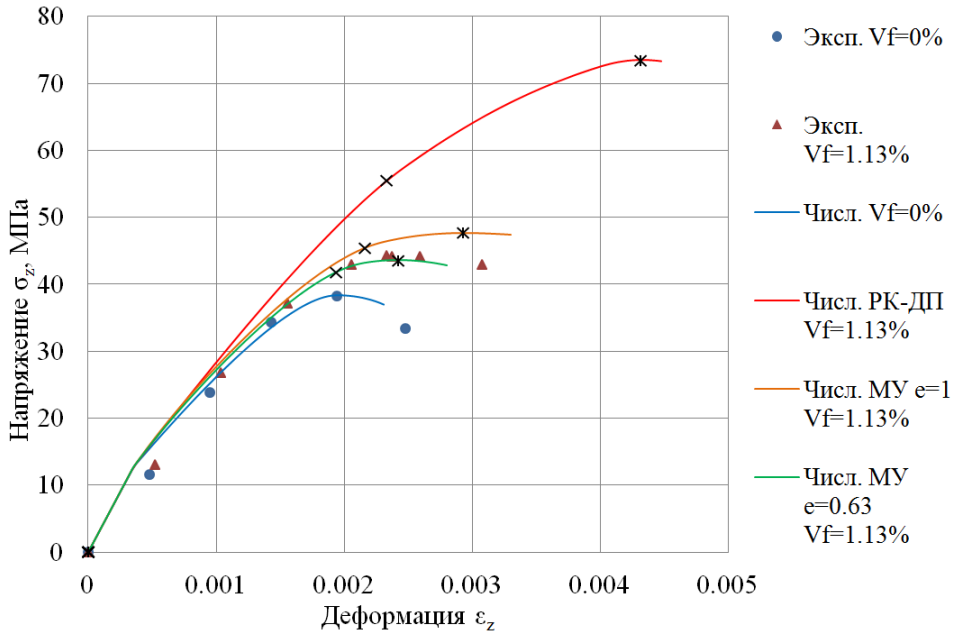

Рисунок 4: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 1.13% и случая неидеальной связи.

важнее, чем при сжатии. Выполнено сравнение с экспериментальными измерениями, взятыми из имеющейся литературы.

Согласно экспериментальным данным, прочность бетона при одноосном сжатии f_c без армирования составляла 38.5 МПа, коэффициент Пуассона $\nu_{\text{бет}}$ принимался равным 0.2. Максимальный размер заполнителя равен 10 мм. В качестве армирования применялись фибры из низкоуглеродистой стали длиной $l_{\text{арм}} = 30$ мм и диаметром $d_{\text{арм}} = 0.5$ мм. Модуль упругости стали равен $E_{\text{арм}} = 212$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{\text{арм}} = 0.28$, предел прочности 1200 МПа. Рассматривается диапазон концентрации волокон от 0% до 1%.

Как и в случае численных экспериментов на одноосное сжатие при моделировании использовалось два типа связи: идеальная и с возможностью проскальзывания фибр. В качестве поверхности нагружения были рассмотрены случаи кусочно-гладкой поверхности Ранкина-Друкера-Прагера и гладкой поверхности Менетри-Уильямса.

Алгоритм аппроксимации экспериментальных данных для различных концентраций армирующих волокон состоял из следующих шагов. В первую очередь, с помощью процедуры обратного анализа для неармированной балки были определены значения модуля Юнга бетонной матрицы, одноосной прочности матрицы на растяжение и зависимость эквивалентного напряжения от параметра α, т.е. от накопленных неупругих деформаций в процессе активного нагружения.

Данная процедура заключалась в проведении серии численных экспериментов. С каждой итерацией механические параметры бетонной матрицы уточнялись для достижения наиболее точной аппроксимации экспериментальных данных. В случае использования гладкой поверхности Менетри-Уильямса наилучшее совпадение с экспериментом было получено для параметра e, определяющего вид поверхности на девиаторной плоскости, равного 0.6.

В результате были получены следующие механические параметры для бетонной матрицы: модуль Юнга бетона $E_{\text{бет}} = 32.8$ ГПа, прочность при одноосном растяжении $f_t = 3.38$ МПа. Данные значения хорошо согласуются с рекомендациями норм.

Наличие коротких армирующих волокон увеличивает способность балки сопротивляться изгибающим нагрузкам. Согласно экспериментальным измерениям на рассматриваемом диапазоне концентрации армирования максимальное увеличение прогиба и нагрузки в момент первой трещины составило 8.3% и 31.8%, соответственно.

Аналогичный вывод был сделан и по результатам численного моделирования. Среднее расхождение с экспериментально определенными значениями прогиба в момент первой трещины на рассматриваемом диапазоне концентрации волокон и для различных поверхностей нагружения составило 7.6% в случае идеальной связи и 6.7% в случае неидеальной связи. Численно определенная нагрузка в момент первой трещины имеет более низкие значения по сравнению с экспериментальными. Аналогичные расхождения в момент первой трещины составили 24.8% и 26.4%, соответственно.

На основе численных экспериментов были построены диаграммы нагрузка-прогиб 5 и 6 при изгибе балок с учетом различных типов связи и поверхностей нагружения.

Исходя из экспериментальных кривых видно, что для концентрации армирования 1.0% после момента первой трещины наблюдается значительное упрочнение. Данная особенность экспериментального исследования фибробетонных балок при изгибе подтверждается и численным моделированием. Практически все полученные при моделировании численные кривые прогиб-нагрузка для исследуемых концентраций волокон лежат внутри границ экспериментальных данных.

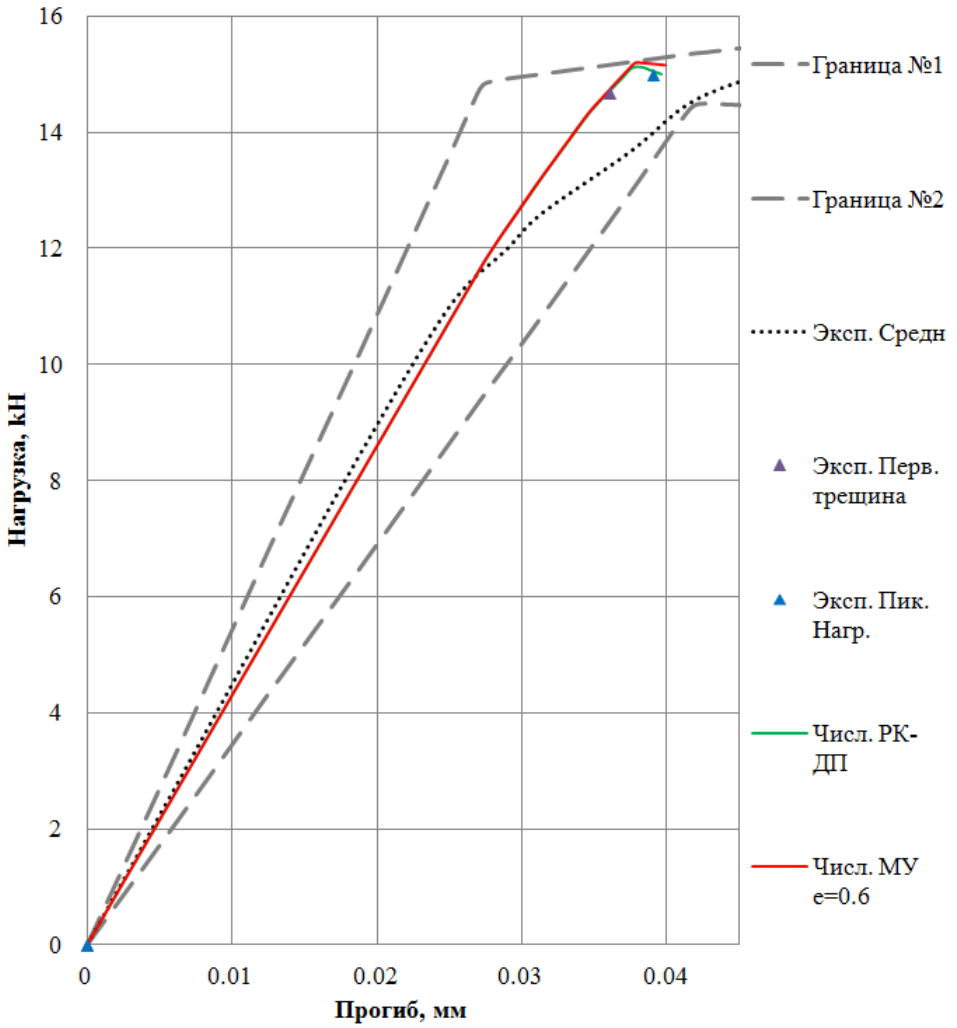

Рисунок 5: Диаграммы изгиба бетонной балки для концентрации волокон 0% для различных поверхностей нагружения.

Учет неидеального контакта между материалом матрицы и армирующими волокнами снижает значения прогиба балки в момент первой трещины в среднем для концентрации волокон $0 - 1.0\%$ и для различных поверхностей нагружения на 1.7%, нагрузки - на 1.2%. С увеличением прогиба балки в процессе деформирования влияние проскальзывания увеличивается и оказывает существенное влияние на способность балки воспринимать изгибающие усилия.

Параграф §**3 главы 3** посвящен численному моделирование изгиба плиты на упругом основании. Представлено сравнение с экспериментальными данными, взятыми из имеющейся литературы.

Средняя прочность матрицы без армирования при одноосном сжатии f_c и деформация в момент максимальной нагрузки по результатам экспериментов составила 40.3 МПа и 0.00242, соответственно. Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{бет}}$ принимался в равным 0.2.

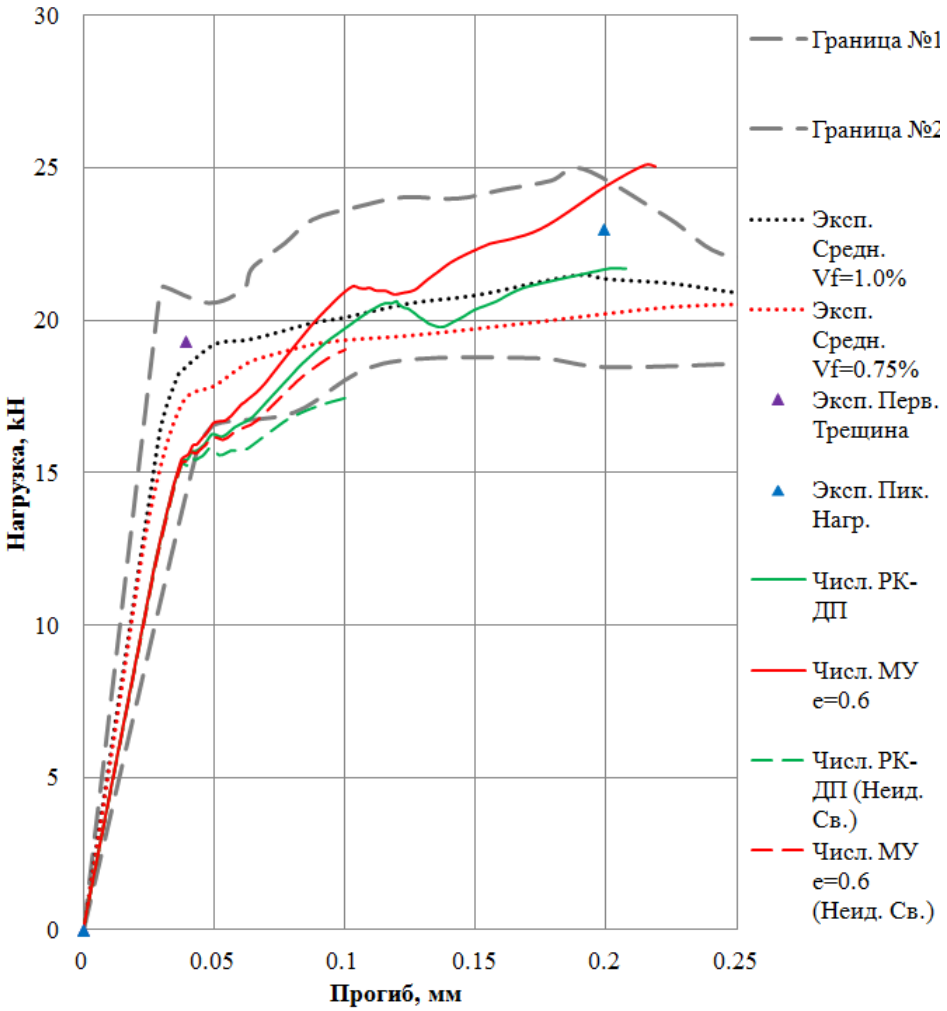

Рисунок 6: Диаграммы изгиба фибробетонной балки для концентрации волокон 1.0% для различных поверхностей нагружения и типов связи.

Модуль упругости бетонной матрицы, соответствующий средней экспериментально определенной прочности на сжатие, согласно рекомендациям норм равен $E_{\text{бет}} = 34.2$ ГПа. Диапазон изменения одноосной прочности бетона на растяжение f_t составляет от 2.4 до 4.7 МПа.

В качестве армирования применялись стальные фибры длиной $l_{\text{арм}} = 60$ мм и диаметром $d_{\text{арм}} = 0.75$ мм. Модуль упругости стали равен $E_{\text{арм}} = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{\text{арм}} = 0.28$, предел прочности 1200 МПа.

В качестве грунтового основания использовался песок. Размер емкости для песка составлял $2500 \times 2500 \times 550$ мм. Модуль реакции основания варьируется от 70 $MN/^3$ на начальном участке диаграммы и до 129 $MN/^3$ при прогибах основания выше 3 мм.

На основании различных методик для модуля реакции основания, равного 70 $MN/^3$, диапазон изменения модуля упругости составил 14-35 МПа.

В ходе эксперимента нагрузка прикладывалась к центру плиты через стальную пластину размером 245×245 мм.

Из экспериментально определенных диаграмм зависимости нагрузки от прогиба плиты следует, что несущая способность плиты на грунтовом основании возрастает с увеличением концентрации коротких армирующих волокон в бетоне. В случае армированных плит нагрузка при прогибе в 1 мм в среднем увеличилась на 22.8%, при прогибе в 3 мм - на 77.3%.

Для численного моделирования использовалась конструкция, состоящая из плиты размером $900 \times 900 \times 75$ мм и грунтового основания размером $1250 \times 1250 \times 550$ мм, равная четверти от реального размера конструкции. Для того, чтобы работа усеченной конструкций совпадала с поведением полной, на соответствующих частях конечно-элементной области накладывались надлежащие граничные условия, отражающие условия симметрии.

Грунтовое основание моделировалось как упругая среда. На границе плиты и основания принималось условие идеального контакта. При моделировании плиты и основания использовались конечные элементы в виде параллелепипеда.

Наилучшая аппроксимация экспериментальных данных в случае концентрации фибр 0.57% была получена в случае использования идеальной связи между армирующими волокнами и бетонной матрицей и для поверхности Ранкина-Друкера-Прагера. Значения одноосной прочности на растяжение бетонной матрицы f_t и модуль упругости основания $E_{\text{осн}}$ в этом случае составляли 2.4 и 16.2 МПа, соответственно. При моделировании предполагалось условие идеального контакта между плитой и основанием.

Численное моделирование в случае концентрации волокон 0.57% дает совпадение с экспериментальными данными. Численная кривая находится в области экспериментальных данных и различие с осредненной экспериментальной кривой для величины прогибов до 4 мм не превосходит 6.7%.

В главе были получены следующие результаты:

1. Показано, что наличие коротких армирующих волокон, учет нелинейных соотношений связи между материалом матрицы и армирующими волокнами и вид критерия возникновения необратимых деформаций в матрице может оказывать заметное влияние на деформирование композиционного материала.

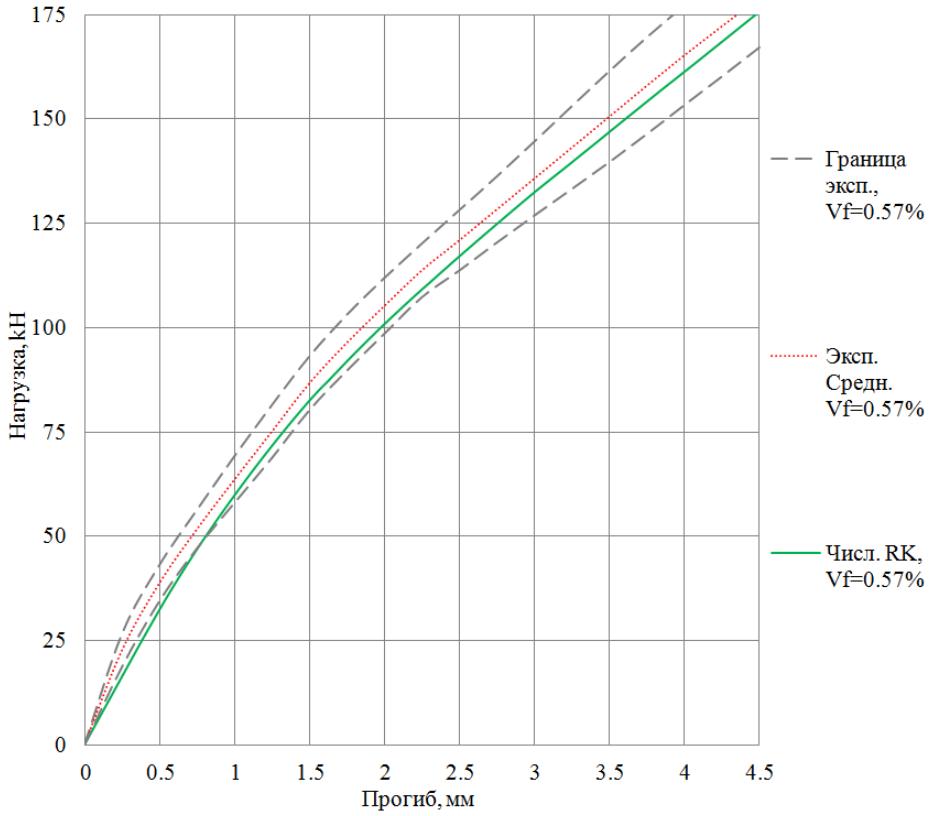

Рисунок 7: Диаграмма изгиба фибробетонной плиты на упругом основании для концентрации волокон 0.57%.

2. С помощью разработанного набора программ выполнено численное моделирование основных типов задач для исследования механических свойств бетона с короткими армирующими волокнами. Сравнение с экспериментом показало, что результаты численного моделирования дают адекватную оценку жесткостных и прочностных свойств фибробетона.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы, которые сводятся к следующему:

1. Представлена механическая модель композиционного материала, учитывающая неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон. Разработана ее численная реализация и создан набор программ для анализа элементов конструкций.
2. Выполнен сравнительный анализ аналитических и численного подходов к определению эффективных упругих характеристик композиционного материала с короткими армирующими волокнами. Показано на основе экспериментов, что для малых концентраций волокон аналитические подходы

дают такую же точность, как и численный подход. Получено хорошее совпадение расчетов с экспериментом.

3. Показано, что наличие коротких армирующих волокон, учет нелинейных соотношений связи между материалом матрицы и армирующими волокнами и вид критерия возникновения необратимых деформаций в матрице оказывают значительное влияние на результаты моделирования композиционного материала.
4. С помощью разработанного набора программ выполнено численное моделирование основных типов задач для исследования механических свойств бетона с короткими армирующими волокнами. Сравнение с экспериментом показало, что результаты численного моделирования дают адекватную оценку жесткостных и прочностных свойств фибробетона.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных изданиях, рекомендованных в перечне ВАК

1. *Солодовников А.С.* Сравнение методов расчета плит на многослойном основании. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, издательство Изд-во Моск. ун-та (М.), № 3, с. 69-72. 2015 г.
2. *Солодовников А.С., Шешенин С.В.* Определение эффективных упругих характеристик бетонов с короткими армирующими элементами. Транспортное строительство, № 2, с. 19-22. 2015 г.
3. *Солодовников А.С.* Численное определение прочностных свойств бетона с короткими армирующими элементами. Аннотировано в: Библиографический указатель ВИНИТИ РАН РФ "Депонированные научные работы том 6, № 145-В2016.