

Смешанная задача о возбуждении колебаний в составном стержне с присоединенными точечными массами

Рогожников А. М.

В настоящей работе исследуется смешанная задача, описывающая возбуждение продольных колебаний в стержне, состоящем из нескольких участков, каждый из которых имеет три произвольные характеристики – плотность, модуль Юнга и длину. Также будем считать, что на стыках этих участков могут находиться сосредоточенные массы. Утверждается единственность решения данной смешанной задачи, а также предъявляется её аналитическое решение.

Обозначения

Рассмотрим стержень, состоящий из n участков, которые последовательно пронумеруем от 1 до n . Введем точки x_i ($i \in \overline{0, n}$), чтобы i -й участок находился на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. В таких обозначениях x_0 и x_n – соответственно левый и правый концы стержня, а $x_1, \dots, x_{n-1}$ – точки стыка. Будем считать, что на i -м участке стержень имеет плотность ρ_i , модуль Юнга k_i и скорость распространения сигнала $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$. Время прохождения волны по i -тому участку обозначим через t_i .

В точках стыка участков расположим сосредоточенные массы, чтобы в точке x_i ($i \in \overline{1, n-1}$) находился груз массы $m_i \geq 0$. Множество точек стыка, где грузы имеют положительную массу, обозначим через X , а множество остальных точек стыка обозначим через Y . Нетрудно убедиться, что случай составного стержня с массами, присоединенными в произвольных местах, также может быть сведен к рассматриваемому: достаточно считать, что точки крепления масс также являются точками стыка участков (возможно, эти участки будут обладать одинаковыми характеристиками).

Формулировка смешанной задачи, единственность решения

Изучим колебания, возбуждаемые в изначально покоящемся стержне граничными управлениями первого рода с обоих концов на промежутке времени $[0, T]$. Классическое решение указанной задачи $u(x, t)$, заданное в $Q = [x_0, x_n] \times [0, T]$ должно удовлетворять разрывному волновому уравнению

$$u_{tt} = \{ a_i^2 u_{xx} \quad \text{в прямоугольнике } Q_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, T], \quad i \in \overline{1, n} \quad (1)$$

начальным и граничным условиями

$$u(x, 0) \equiv 0 \quad u_t(x, 0) \equiv 0 \quad (2)$$

$$u(x_0, t) = \mu_1(t) \quad u(x_n, t) = \mu_2(t), \quad (3)$$

а также следующим условиям сопряжения в точках стыка $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \quad (4)$$

$$m_i u_{tt}(x_i, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) - k_i u_x(x_i - 0, t) \quad (5)$$

Определение 1 Введем класс $\overline{W}_2^1$, от функций которого потребуем принадлежность классу $\widehat{W}_2^1(Q)$, введенному В. А. Ильиным в работе [1], а также принадлежность классу $W_2^2(0 \leq t \leq T)$ при $x \in X$, т.е. в точках стыка с грузом.

Приведем физические пояснения к возникшим изменениям в постановке задачи. Условие сопряжения (5) при $m_i > 0$ представляет собой второй закон Ньютона, при $m_i = 0$ представляет собой требование непрерывности натяжения. К аналогичной постановке приводит задача о колебаниях нагруженной струны (см. [3, стр. 155]). Необходимость повысить требования на гладкость функции $u(x, t)$ в нагруженных точках стыка следует из того, что вклад грузика m_i в кинетическую энергию равен $\frac{1}{2} m_i u_t^2(x_i, t)$, а в классе $\widehat{W}_2^1$ это выражение не определено.

Определение 2 Обобщенным решением смешанной задачи (1)–(5) назовем функцию $u(x, t)$ из класса $\overline{W}_2^1$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) \equiv 0$, условию $u_t(x_i, 0) = 0$ при $x_i \in X$ и следующему интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \iint_{Q_i} \rho_i u (\Phi_{tt} - a_i^2 \Phi_{xx}) dx dt + \int_0^T [k_n \mu_2(t) \Phi_x(x_n, t) - k_1 \mu_1(t) \Phi_x(x_0, t)] dt + \\ & + \sum_{x_i \in X} \int_0^T [m_i \Phi(x_i, t) u_{tt}(x_i, t) - u(x_i, t) (k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) - k_i \Phi_x(x_i - 0, t))] dt = 0 \end{aligned}$$

для любой „пробной“ функции $\Phi(x, t)$, непрерывной в Q , принадлежащей классу C^2 в каждом прямоугольнике Q_i и удовлетворяющей следующим ограничениям

$$\Phi(x_0, t) \equiv 0 \quad \Phi(x_n, t) \equiv 0$$

$$\Phi(x, T) \equiv 0 \quad \Phi_t(x, T) \equiv 0$$

а также условию согласования в безмассовых точках стыка:

$$k_i \Phi_x(x_i - 0, t) = k_{i+1} \Phi_x(x_i + 0, t) \quad x_i \in Y$$

От функций граничного управления потребуем принадлежности классу $W_2^1[0, T]$ и согласованности с начальными условиями: $\mu_1(0) = \mu_2(0) = 0$.

Теорема 1 Задача (1)-(5) имеет единственное обобщенное решение из класса $\overline{W}_2^1$.

Вспомогательные обозначения, общий вид решения

Воспользуемся следующими определениями из работы [2]:

Определение 3 V – линейное пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, обращающихся в ноль при $t < t_0$.

Определение 4 V^n – пространство n -мерных векторов с элементами из пространства V .

Определение 5 (умножение матрицы на вектор) Пусть $f = [f_1 \dots f_n]^\top \in V^n$, а матрица $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Вектор $g = [g_1 \dots g_m]^\top \in V^m$, элементы которого определены как $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$, назовем их произведением. Операцию будем записывать как $g = Af$. Договоримся, что вместо числа в некоторых клетках матрицы могут стоять операторы, действующие в пространстве V . При этом, если в ячейке вместо a_{ij} стоит оператор L_{ij} , то вместо $a_{ij} f_j$ в линейной комбинации должен стоять результат применения оператора $L_{ij} f_j$.

Определение 6 (оператор запаздывания) Также введем оператор запаздывания P_τ ($\tau \in \mathbb{R}$), действующий на $f \in V$ следующим образом:

$$g = P_\tau f, \quad g(t) = f(t - \tau)$$

Более важен для нас будет оператор запаздывания, действующий на элементы V^n :

$$P \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{t_1} f_1 \\ \vdots \\ P_{t_n} f_n \end{bmatrix}.$$

В этой формуле n – количество участков в стержне, а t_i – время прохождения сигналом i -того участка.

Помимо этих операций, введем ещё две:

Определение 7 (операторы преломления и отражения) Пусть i и j — номера соседних участков, m — масса груза в соединяющем их стыке. Тогда операторы отражения $\widehat{R}_{ij}$ и преломления $\widehat{T}_{ij}$ действуют на $f \in V$ следующим образом (звездочкой обозначена операция свертки):

$$\widehat{T}_{ij} f = \begin{cases} \frac{2z_i}{m} f(t) * \Theta(t) e^{-(z_i+z_j)t/m} & m > 0 \\ \frac{2z_i}{z_i+z_j} f & m = 0 \end{cases}$$

$$\widehat{R}_{ij} f = \widehat{T}_{ij} f - f$$

Коэффициенты z_i, z_j обозначают импедансы соответствующих участков, $z_i = a_i \rho_i$.

Теорема 2 Единственное обобщенное из класса $\overline{W}_2^1$ решение задачи (1)-(5) при **четном** числе участков n имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \begin{cases} U_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + \tilde{U}_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i, \text{ при } i\text{-нечетных} \\ \tilde{U}_i(t - \frac{x - x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \frac{x - x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i, \text{ при } i\text{-четных} \end{cases} \quad (6)$$

где функции $U_1, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$, определяются из соотношений

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \tilde{U}_3 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где через $\underline{\mu}_1$ и $\underline{\mu}_2$ обозначены соответственно функции μ_1 и μ_2 , продолженные нулем при $t < 0$ и продолженные произвольным образом с сохранением непрерывности при $t > T$. A и B — блочно-диагональные матрицы размера $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

где блок J_{ij} размера 2×2 имеет вид:

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \widehat{R}_{ij} & \widehat{T}_{ji} \\ \widehat{T}_{ij} & \widehat{R}_{ji} \end{bmatrix}$$

Теорема 3 Для задачи (1)-(5) при **нечетном** n решение из класса $\overline{W}_2^1$ определяется по формуле (6), где функции $U_1, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ определены отношениями

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BPAP)^m \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{0} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} BP(APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \\ \dots \\ \tilde{U}_n \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} AP(BPAP)^m \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{0} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} (APBP)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

с матрицами A и B размера $n \times n$, имеющими вид

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

Замечание 1 Стоит отметить, что случай составного стержня без сосредоточенных масс, исследованный в работе [2], является частным случаем рассматриваемого и поэтому полученные теоремы обобщают уже имевшиеся результаты.

Замечание 2 Также в работе [2] были продемонстрированы изменения, которые необходимо произвести в решении для рассмотрения системы с граничными условиями второго и третьего рода. В случае стержня с грузами изменения будут точно такие же. Таким образом решения смешанных задач для нагруженного и ненагруженного стержней при граничных управлениях основных классических типов отличаются только использованием операторов отражения и преломления.

Список литературы

- [1] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000, Т. 36, № 11, С. 1513–1528.
- [2] Рогожников А.М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами. // ДАН. 2012, Т. 444, № 5, С. 488–491.
- [3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. // Уравнения математической физики, 6-е изд. М.:Издательство МГУ, 1999 год, 798 стр.