

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Буланов Денис Михайлович

**Исследование эволюции вращательного движения искусственного
спутника Земли**

Специальность 01.02.01 –
«Теоретическая механика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2022

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:

Сазонов Виктор Васильевич

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

– **Беляев Михаил Юрьевич,**

доктор технических наук, профессор,

ПАО "РКК "Энергия" им. С.П. Королева",

начальник отдела

– **Родников Александр Владимирович,**

доктор физико-математических наук, доцент,

кафедра «Мехатроника и теоретическая

механика» НИУ «МАИ», профессор

– **Панкратов Владимир Александрович,**

кандидат физико-математических наук,

кафедра «Математическое моделирование»

МГТУ им. Н.Э. Баумана, доцент

Защита диссертации состоится 17 июня 2022 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-17.

E-mail: dissovet.msu.01.10@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/452269907/>

Автореферат разослан 13 мая 2022 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

МГУ.01.10,

доктор физико-математических наук

А.А. Зобова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Реконструкция реального вращательного движения искусственных спутников Земли (далее – ИСЗ) вокруг центра масс по данным измерений бортовых датчиков и теоретический анализ этого движения входят в число основных задач механики космического полета. Их решение необходимо для интерпретации результатов ряда космических экспериментов таких, как наблюдение небесных тел, локализация источников космического излучения и т.п. Регулярный мониторинг неуправляемого вращательного движения ИСЗ позволяет найти упорядоченные, в том числе установившиеся движения, обладающие полезными свойствами.

Обычно в работах, посвященных реконструкции вращательного движения относительно центра масс, рассматривается каждый ИСЗ отдельно и моделируется его установившееся под конец полета движение. В рамках таких моделей порой возникает необходимость исследования периодических решений дифференциальных уравнений. Например, И.А. Нейштадтом и В.В. Сазоновым в [11] исследованы периодические движения динамически симметричного ИСЗ в случае большой угловой скорости, имеющей место под конец полета, также отмечалось их сходство с фактически вращательным движением Фотон-12. Однако такое сходство не было исследовано детально.

Цель данной работы состояла в исследовании возможности описания реального вращательного движения двух однотипных ИСЗ Фотон-12 и Фотон М-2 при помощи эволюционных уравнений В.В. Белецкого. В тех случаях, когда такое описание возможно, необходимо изучить связь между решениями полных и эволюционных уравнений движения. К задачам, решаемым в диссертации относятся:

- обработка магнитных измерений, выполненных на спутниках Фотон М-2 (находился на орбите 31.05 – 16.06.2005) и Фотон-12 (находился на орбите 09.09–24.09.1999) с помощью новой математической модели с целью реконструкции неуправляемого вращательного движения;
- сопоставление движения спутников Фотон М-2 и Фотон-12, близкого к регулярной прецессии Эйлера, с решениями эволюционных уравнений В.В. Белецкого, определение порогового значения продольной составляющей угловой скорости, достаточного для применения эволюционных уравнений;
- исследование установившихся движений продольной оси обоих спутников в рамках обобщенно-консервативной модели, спектральный анализ установившихся движений, описание низкочастотной составляющей таких движений эволюционными уравнениями В.В. Белецкого;
- исследование участка полета Фотона-12, на котором низкочастотная составляющая в установившихся движениях мала (собственный кинетический момент спутника близок к нормали к плоскости орбиты), и возможность описания таких движений периодическими решениями обобщенно-консервативных уравнений движения.

Научная новизна. Установлена нижняя граница значений угловой скорости, для которых изменение собственного кинетического момента обоих спутников достаточно точно описывается эволюционными уравнениями В.В. Белецкого. Показано, что при значениях угловой скорости, близких к ее предельному значению, уравнения вращательного движения допускают дальнейшее адекватное упрощение: орбиту спутника можно принять круговой и опустить неконсервативную составляющую действующего на него внешнего момента. В таком случае уравнения В.В. Белецкого и используемые уравнения вращательного движения становятся обобщенно-консервативными. Решения обеих систем уравнений, являются соответственно периодическими

и похожими на условно-периодические. Последние содержат две доминирующие частоты – высокую и низкую. Как показал спектральный анализ, низкая частота соответствует частоте решений уравнений В.В. Белецкого. Это общая ситуация и новая интерпретация эволюционных уравнений В.В. Белецкого. Найден участок полета Фотона-12 длиной около 3 сут, внутри которого движения продольной оси спутника относительно орбитальной системы координат удалось аппроксимировать периодическим движением на любом интервале времени длиной 4.5 ч. Перечисленные результаты получены впервые.

Методы исследования. В первой главе была сделана обработка выполненных на спутниках магнитных измерений обычными статистическими методиками с целью реконструкции вращательного движения. Магнитные измерения, выполненные на некотором интервале времени, обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения спутника относительно центра масс. При обработке оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели.

Во второй главе исследуются эволюционные уравнения В.В. Белецкого, полученные усреднением уравнений движения по регулярной прецессии Эйлера по схеме усреднения В.М. Волосова [7]. Переменными в усредненных уравнениях служат компоненты орта собственного кинетического момента спутника в гринвичской системе координат. Решения усредненных уравнений сравниваются с компонентами орта собственного кинетического момента, рассчитанными вдоль решений системы уравнений движения, используемых для реконструкции вращательного движения из первой главы. Решения усредненных уравнений на длинных интервалах находились согласованием компонент орта кинетического момента, рассчитанных двумя способами. Согласование выполнялось методом наименьших квадратов, уточнялись начальные условия усредненных уравнений и один из параметров этих уравнений – поперечная угловая скорость спутника. Остальные параметры имели значения, найденные при обработке магнитных измерений. Система усредненных по регулярной прецессии Эйлера уравнений движения относительно гринвичской системы интегрировалась численно.

В третьей главе подробнее рассматривается дальнейшее упрощение модели реконструкции вращательного движения спутника, осуществленной в первой главе – орбиту спутника можно принять круговой и неизменной в абсолютном пространстве. Ее элементы находятся по элементам реальной орбиты для каждого обрабатываемого временного интервала с магнитными измерениями. В этом случае движение спутника рассматривается относительно орбитальной системы координат. Точность обработки измерений с использованием новых уравнений движения несколько ухудшается, но остается приемлемой для реконструкции на указанных интервалах.

В четвертой главе рассматривается установившееся к концу полета вращательное движение спутников. При значениях продольной угловой скорости, близких к ее предельному значению $1^\circ/\text{с}$, в полученных уравнениях можно опустить неконсервативную составляющую приложенного к спутнику внешнего момента. Тогда эти уравнения и отвечающие им усредненные уравнения становятся обобщенно-консервативными. Обобщенно-консервативная система инвариантна относительно группы преобразований, на основании которых получены краевые условия, используемые в последующих главах.

В пятой главе решения усредненных уравнений, имеющих второй порядок, сравниваются с решениями уравнений движения оси симметрии спутника, имеющих четвертый порядок. Решения обеих систем уравнений, отвечающие реальным движениям спутников, являются соответственно периодическими и похожими на условно-периодические. Последние содержат две частоты – высокую и низкую. Как показал спектральный анализ, низкая частота

соответствует частоте решений уравнений Белецкого, а решения этих уравнений достаточно точно совпадают с низкочастотной составляющей в решении системы четвертого порядка. Это верно для обоих рассматриваемых спутников.

В шестой главе исследуется частный случай. Фотон-12 имел участок полета длиной около 3 сут., на котором собственный кинетический момент спутника был близок к нормали к плоскости его орбиты. На этом участке низкочастотная составляющая в решениях системы четвертого порядка оказалась малой, и они были практически одночастотными. Такие решения на отрезках времени длиной 4.5 ч. удалось достаточно точно аппроксимировать периодическими решениями, продолженными из решений Ляпунова, существующих в окрестности одного из стационарных решений (цилиндрической прецессии) упомянутой системы четвертого порядка.

В общем случае найденное значение частоты использовалось для построения аппроксимирующего решения краевой задачи. Эта задача решалась методом продолжения по параметру [8]. Сопоставление движений, найденных обработкой магнитных измерений, и периодических решений выполнялось по следующей схеме. Переменные в периодическом решении аппроксимировались дискретными рядами Фурье [9]. Составлялось выражение разницы между переменными, описывающими фактическое вращательное движение, и построенными рядами по времени. Функционал минимизировался по фазовому сдвигу для построенных рядов.

Практическая значимость. Работа имеет прикладной и теоретический характер. Результаты научно-квалификационной работы могут найти применение в ИПМ имени М.В. Келдыша РАН, ИКИ РАН, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, а также в учебных заведениях и организациях, связанных с разработкой космической техники.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. реконструированное по данным бортовых магнитных измерений вращательное движение искусственных спутников Земли Фотон-12 и Фотон М-2 показывает, что, если величина продольной компоненты угловой скорости превышает 0.8 град./с., то вращательное движение обоих спутников близко к регулярной прецессии Эйлера. При этом изменение собственного кинетического момента обоих спутников достаточно точно описывается эволюционными уравнениями В.В. Белецкого;
2. в случае, если величина угловой скорости спутников близка к установившемуся значению 1град./с, то уравнения вращательного движения допускают согласованное с измерениями упрощение. Орбиту спутника можно принять круговой и опустить неконсервативную составляющую действующего на спутник внешнего момента. В таком случае эти уравнения и выводимые из них уравнения В.В. Белецкого становятся обобщенно-консервативными, если записать их в орбитальной системе координат;
3. спектральный анализ близких к условно-периодическим установившихся движений продольных осей обоих спутников в рамках обобщенно-консервативной модели выявляет две доминирующие частоты, причем компонента с низкой частотой достаточно точно описывается уравнениями В.В. Белецкого;
4. найден участок полета спутника Фотон-12 продолжительностью около 3 сут, на котором низкочастотная компонента колебаний продольной оси спутника мала, и собственный кинетический момент спутника близок к нормали к плоскости орбиты. В этом случае движение продольной оси удастся аппроксимировать периодическими решениями, продолженными из периодических решений Ляпунова, на любом интервале времени длиной 3.5ч.

Достоверность результатов. Все результаты работы получены строгими математическими методами и надежными численными методами. Используемые математические модели достаточно точно согласуются с данными измерений. Результаты обработки измерений находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами [1, 2, 3, 4] и другими методами. Это свидетельствует о достоверности полученных результатов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на XLVI, XLV и XLIV академических чтениях по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства «Королёвские чтения» (Москва, 2022, 2021 и 2020 г.) и на научно-исследовательских семинарах:

- Научный семинар "Механика космического полета им. В.А. Егорова" под руководством проф. В.В. Сазонова и доц. М.П. Заплетина, кафедра общих проблем управления, кафедра теоретической механики и мехатроники, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2022 г.).
- Научный семинар им. В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева, кафедра теоретической механики и мехатроники, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2022 г.).

Публикации. Основные результаты и положения диссертации изложены в 9 научных работах автора общим объемом 9 п.л., в том числе в 3 публикациях (объемом 4 п.л.) в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список работ приведен в конце текста автореферата.

Личный вклад. Все результаты, выносимые на защиту, принадлежат лично автору и получены под научным руководством профессора В.В. Сазонова. Научный руководитель предложил постановку задач и указал методы их исследования. Автор принимал активное участие в нескольких конференциях, где докладывались основные результаты данной работы.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, шести глав и заключения. Общий объем работы составляет 120 страниц, содержащих 32 иллюстрации. Список литературы включает 68 наименований.

Содержание работы

Во введении сделан обзор работ по данной тематике, приводится общая характеристика круга задач, отраженных в работе, обосновывается их актуальность. Сформулированы цель и научная новизна проводимых исследований, показана их практическая значимость. Раскрываются применяемые методы исследования. Приводятся ссылки на печатные работы автора и список конференций, на которых докладывались основные результаты работы.

Глава. 1 Реконструкция вращательного движения спутника по магнитным измерениям.

Первый раздел главы представляет из себя предисловие, содержащее предысторию реконструкции вращательного движения исследуемых спутников Фотон М-2 и Фотон-12.

Во втором разделе главы описываются системы координат, используемые в работе для описания вращательного движения. Также описана упрощенная модель вращательного движения спутника. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким при исследовании эволюции неуправляемого вращательного движения спутника в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела.

Спутники считаем динамически симметричным твердым телом. В уравнениях вращательного движения учитываются механические моменты: гравитационный,

восстанавливающий аэродинамический, постоянный вдоль оси симметрии спутника. Для записи уравнений движения спутника и соотношений, используемых при обработке данных измерений, вводятся пять правых декартовых систем координат.

Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Точка O – центр масс спутника, ось Ox_1 – ось динамической симметрии спутника. Момент инерции спутника относительно оси Ox_1 обозначим I_1 , равные моменты инерции относительно осей Ox_2 и Ox_3 обозначим I_2 .

Вспомогательная система координат $Oy_1y_2y_3$ служит для записи уравнений вращательного движения спутника. Ось Oy_1 совпадает с осью Ox_1 ; оси Ox_2 и Ox_3 получаются из осей Oy_2 , Oy_3 поворотом системы $Oy_1y_2y_3$ на угол ϕ вокруг оси Oy_1 . Кинематическая связь между системами $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ задается условием, что проекция абсолютной угловой скорости второй из них на ось Oy_1 равна нулю. Проекции этой угловой скорости на оси Oy_2 , Oy_3 обозначены w_2 , w_3 . Пусть абсолютная угловая скорость спутника ω имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ компоненты $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогда $\dot{\phi} = \omega_1$ и

$$\omega_2 = w_2 \cos \phi + w_3 \sin \phi, \quad \omega_3 = -w_2 \sin \phi + w_3 \cos \phi.$$

Здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по времени t . Гринвичскую систему координат обозначим $CY_1Y_2Y_3$. Начало этой системы находится в центре масс Земли, плоскость CY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, положительная полуось CY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось CY_3 направлена в Северный полюс. $Ox_1x_2x_3$ – орбитальная система координат, ее оси Ox_1 и Ox_3 направлены по геоцентрическим скорости и радиус-вектору точки O . Приборная система координат описана ниже.

Уравнения движения спутника, используемые для восстановления его вращательного движения, состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая – его движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Решения этой подсистемы находились из условия наилучшей аппроксимации двухстрочных элементов орбиты Фотона-12 на отрезках времени длиной 2 – 3 сут., для Фотон М-2 3 – 4 сут., соответственно.

Вторая подсистема образована динамическими уравнениями Эйлера для угловых скоростей w_2 , w_3 и кинематическими уравнениями Пуассона для первой и второй строк матрицы перехода между гринвичской и вспомогательной системами $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также постоянный момент вдоль оси динамической симметрии спутника. При вычислении аэродинамического момента атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, внешняя оболочка спутника принимается сферой с центром на оси динамической симметрии. Вторая подсистема имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{w}_2 + \lambda \omega_1 w_3 &= -3 \frac{\mu_e}{r^5} (1 - \lambda) y_1 y_3 + p E \rho_a v v_3, \\
\dot{w}_3 - \lambda \omega_1 w_2 &= 3 \frac{\mu_e}{r^5} (1 - \lambda) y_1 y_2 - p E \rho_a v v_2, \\
\dot{a}_{11} + w_2 a_{13} - w_3 a_{12} &= \omega_e a_{21}, \\
\dot{a}_{12} + w_3 a_{11} &= \omega_e a_{22}, \quad \dot{a}_{13} - w_2 a_{11} = \omega_e a_{23}, \\
\dot{a}_{21} + w_2 a_{23} - w_3 a_{22} &= -\omega_e a_{11}, \\
\dot{a}_{22} + w_3 a_{21} &= -\omega_e a_{12}, \quad \dot{a}_{23} - w_2 a_{21} = -\omega_e a_{13}, \\
\omega_1 &= \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \lambda = I_1/I_2, \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь y_i и v_i – компоненты во вспомогательной системе геоцентрического радиуса-вектора точки O и скорости этой точки относительно гринвичской системы; p – аэродинамический параметр; ρ_a – плотность атмосферы в точке O ; ω_e и μ_e – угловая скорость вращения и гравитационный параметр Земли; Ω и ε – постоянные величины; E – масштабирующий множитель. В уравнениях использован явный вид решения одного из уравнений Эйлера $\dot{\omega}_1 = \varepsilon$ с начальным условием $\omega_1(t_0) = \Omega$.

В приборной системе координат интерпретируются данные измерений бортовых магнитометров. Эту систему можно перевести в систему главных осей инерции двумя последовательными поворотами. В общем случае, чтобы задать положение одной системы координат относительно другой, необходимы три угла. Однако поскольку спутники считаются динамически симметричными твердыми телами, третий угол удобно принять равным нулю. Матрицу перехода между этими системами координат обозначим $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$. Элементы этой матрицы выражаются через углы α_c и β_c по формулам

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c, & b_{12} &= -\cos \alpha_c \sin \beta_c, & b_{13} &= \sin \alpha_c, \\
b_{21} &= \sin \beta_c, & b_{22} &= \cos \beta_c, & b_{23} &= 0, \\
b_{31} &= -\sin \alpha_c \cos \beta_c, & b_{32} &= \sin \alpha_c \sin \beta_c, & b_{33} &= \cos \alpha_c.
\end{aligned}$$

В третьем разделе главы рассматривается постановка задачи реконструкции фактического вращательного движения. На борту спутников находилась аппаратура "Мираж" с несколькими трехкомпонентными магнитометрами. Поскольку движение спутника было неуправляемым, полученные данные и уравнения (1) можно использовать для определения фактического вращательного движения спутника по обычным статистическим методикам. В соответствии с методом наименьших квадратов реконструкцией фактического движения спутника считалось решение уравнений (1), доставляющее минимум функционалу

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=1}^N [h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 - (N+1) \Delta_i^2 \right\}, \\
\Delta_i &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N [h_i^{(n)} - h_i(t_n)], \quad h_i(t) = \sum_{j=1}^3 b_{ij} h_j^\circ(t).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $h_j^\circ(t)$ – компоненты напряженности магнитного поля земли (далее МПЗ) в точке O в системе координат $Ox_1x_2x_3$, рассчитываемые с помощью модели IGRF2005, $\hat{h}_i(t)$ – функции, которые задавали на этом отрезке компоненты вектора местной напряженности магнитного поля

в приборной системе координат, $h_i^{(n)} = \hat{h}_i(t_n)$, $t_n = t_0 + nT/N$, где $n = 0, 1, 2, \dots, N$ – псевдоизмерения, которые служили исходной информацией для отыскания решений уравнений (1), описывающих фактическое движение спутника, Δ_i – оценки постоянных смещений в псевдоизмерениях.

Функционал (2) минимизировался по 11 величинам: начальным условиям решения системы (1) $\psi(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\delta(t_0)$, $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$ и параметрам Ω , λ , p , ε , α_c , β_c . Заключительный этап минимизации выполнялся методом Гаусса – Ньютона. Точность аппроксимации псевдоизмерений и разброс в оцениваемых величинах характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Стандартные отклонения рассчитывались в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях $h_i^{(n)}$ некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в псевдоизмерениях с одинаковым нижним индексом i одинаковы (величины Δ_i в (2) – оценки этих средних значений). Движение реконструировано на 25 и 17 временных интервалах для Фотон-12 и Фотон М-2, соответственно. Длина каждого интервала 210 – 270 мин. Представление о точности псевдоизмерений в случае спутника Фотон-12 дает рис. 1. В верхней части рисунка сравниваются модули вектора напряженности МПЗ, рассчитанные по псевдоизмерениям (с поправкой на постоянные смещения) и по модели IGRF. Расчет по псевдоизмерениям представлен маркерами, расчет по модели IGRF – сплошными линиями. Количественно аппроксимация псевдоизмерений характеризуется

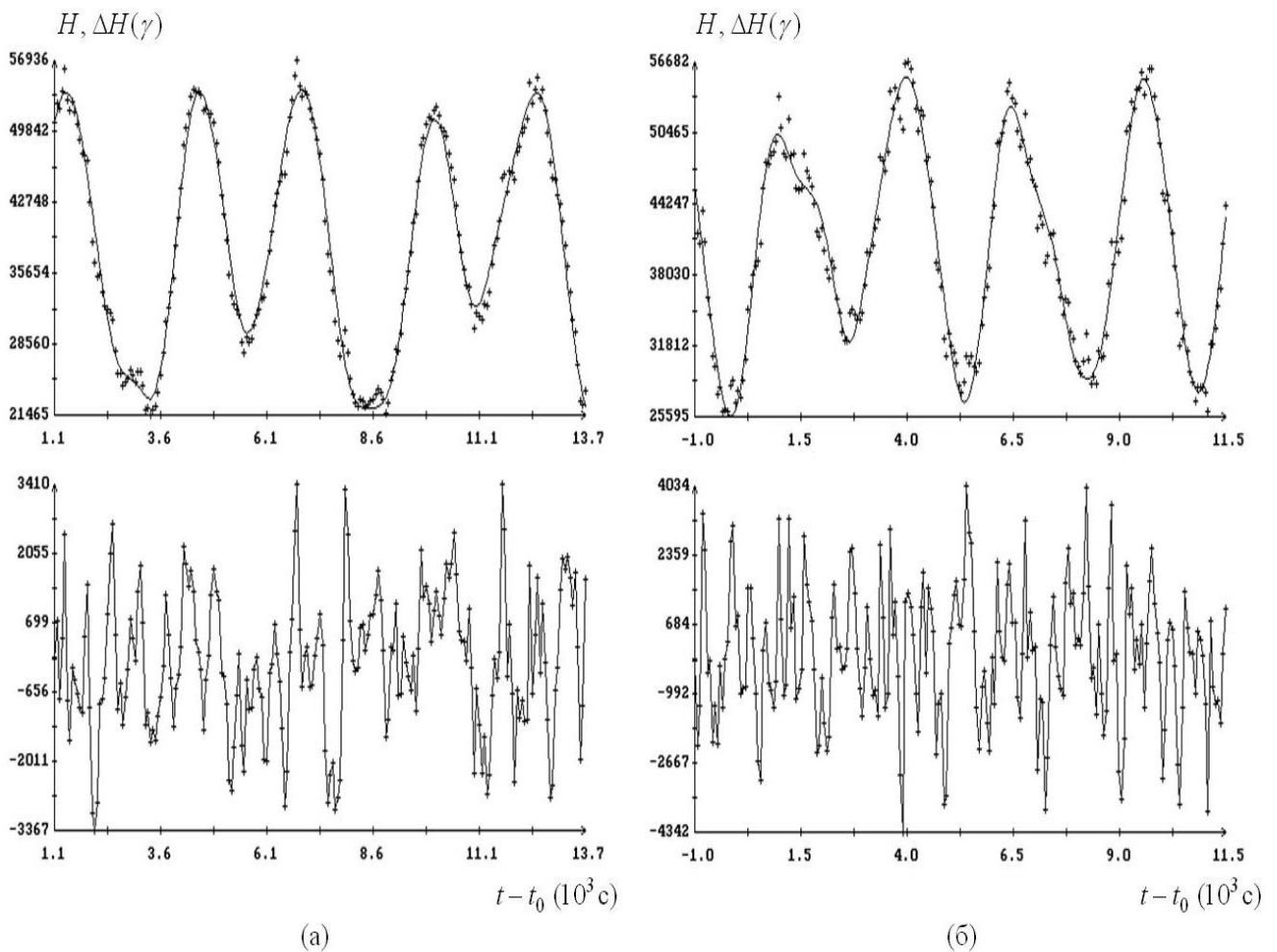


Рис. 1. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ; (а) момент времени $t_0 = 01:39:31$ UTC 13.09.1999, $\text{СКО}(\Delta H) = 1374\gamma$; (б) момент времени $t_0 = 18:50:05$ UTC 18.09.1999, $\text{СКО}(\Delta H) = 1649\gamma$

среднеквадратическим отклонением (СКО), обозначаемые далее σ_* , значения которого приведены в табл. 1 и в подписи к рисунку ($1\gamma = 10^{-5}$ Э).

По мере увеличения угловой скорости спутника его движение становилось все больше похоже на регулярную прецессию Эйлера динамически симметричного твердого тела. Формирование регулярной прецессии с медленно возрастающей угловой скоростью ω_1 и мало меняющимся значением $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$ завершилось после трех – четырех суток полета для обоих спутников. Регулярная прецессия в случае Эйлера (величины ω_1 и $\omega_{\perp}$ остаются неизменными во время движения) может иметь место лишь в случае, когда спутник динамически симметричен и главный момент приложенных к нему внешних сил равен нулю. Для используемой модели первое условие выполнено, а второе – нет. По этой причине можно говорить лишь о движениях, близких к регулярной прецессии. Такие движения удобно характеризовать величинами

$$\bar{\omega}_{\perp} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \omega_{\perp} dt, \quad \delta\omega_{\perp} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\omega_{\perp} - \bar{\omega}_{\perp})^2 dt \right]^{1/2}$$

и определяемыми аналогичными формулами величинами $\bar{\omega}_1$, $\delta\omega_1$, значения которых приведены в сокращенном варианте в табл. 1. В результате за счет огрубления реконструкции в сравнении с использованной математической моделью сразу после полетов спутников удалось напрямую сопоставить полученные экспериментальные результаты с теорией, развитой В.В. Белецким (см. главу 2).

Таблица 1. Результаты обработки измерений МПЗ на спутнике Фотон-12

№ инт.	Дата 09.1999	t_0 UTC	σ_* γ	$\bar{\omega}_1$, град./с	$\delta\omega_1$, град./с	$\bar{\omega}_\perp$, град./с	$\delta\omega_\perp$ град./с	p	λ	ε	α_c	β_c
1	11	03:32:48	2013	0.3314	0.0057	0.1229	0.036	− 0.0484	0.2548	0.0393	0.0025	− 0.0486
2	11	13:14:35	2602	0.4184	0.0052	0.0950	0.028	0.0113	0.2617	0.0381	− 0.0022	− 0.0530
3	12	03:14:34	2158	0.4916	0.0043	0.1085	0.028	− 0.0569	0.2460	0.0309	− 0.0051	− 0.0564
4	12	15:57:21	2247	0.5411	0.0071	0.1593	0.021	− 0.3708	0.2431	0.0512	− 0.0136	− 0.0565
5	13	01:57:09	2100	0.6074	0.0002	0.0978	0.027	− 0.0219	0.2454	0.0033	0.0100	− 0.0440
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10	15	13:18:34	2492	0.8178	0.0042	0.1605	0.0070	0.0007	0.2330	0.0200	− 0.0120	− 0.0665
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
14	17	19:05:14	1840	0.9422	0.0003	0.1524	0.0055	0.0015	0.2396	− 0.0013	− 0.0344	− 0.0563
15	18	18:33:07	1960	0.9716	0.0005	0.1761	0.0055	− 0.0029	0.2319	0.0024	− 0.0149	− 0.0638
16	18	21:54:51	1928	0.9861	0.0036	0.1668	0.0050	0.0010	0.2390	0.0175	− 0.0296	− 0.0560
17	19	08:54:51	1766	1.0090	0.0020	0.1102	0.0047	0.0015	0.2395	0.0094	− 0.0461	− 0.0591
18	19	21:55:05	1650	1.0157	0.0000	0.0982	0.0050	− 0.0014	0.2381	0.0041	− 0.0531	− 0.0651

После непосредственной реконструкции вращательного движения в четвертом разделе главы рассматривается эмпирическая модель: экспоненциальная аппроксимация компоненты угловой скорости в проекции на ось динамической симметрии спутника. Вращательное движение спутников, начавшееся с малой угловой скоростью, постепенно ускорялось и через двое суток стало близко к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела. Особенно интенсивно возросла компонента угловой скорости спутника относительно его продольной оси. К концу полета рост этой компоненты уменьшился, и ее значения были близки

предельным значениям: $1.1^\circ/\text{с}$ для Фотона-12 и $1.2^\circ/\text{с}$ для Фотона М-2. Возрастание и стабилизация продольной компоненты угловой скорости хорошо описывается экспоненциальной зависимостью с характерными временами затухания 4.65сут (Фотона-12) и 3.61сут (Фотона М-2). Поперечная компонента угловой скорости (проекция на плоскость, перпендикулярную продольной оси) менялась мало и к концу полета у обоих спутников составила $0.1^\circ/\text{с}$.

Принимая во внимание характер движения спутника, влияние перечисленных выше малых моментов на эволюцию ω_1 во время неуправляемого полета можно приближенно описать уравнением

$$\dot{\omega}_1 + a\omega_1 = \varepsilon. \quad (3)$$

Здесь a и ε – постоянные параметры, такие что $I_1\varepsilon$ и $-I_1a\omega_1$ – компоненты постоянного момента и диссипативного момента вдоль оси Ox_1 и магнитный диссипативный момент (см. первый раздел второй главы). Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\omega_1 = \omega_1^* + c \exp(-at), \quad \omega_1^* = \varepsilon/a, \quad (4)$$

где c – произвольная постоянная. Будем искать a , c и ω_1^* из условия наилучшей аппроксимации величин $\bar{\omega}_1$ в расширенной версии табл. 1. и аналогичных данных для спутника Фотон М-2. Эти величины относим к серединам интервалов, для которых они были вычислены. За начало отсчета времени примем момент 00:00:00 UTC 11.09.1999 для Фотона-12 и 12:09:49 UTC 31.05.2005 для Фотона М-2. Аппроксимация строилась обычным методом наименьших квадратов, см. рис. 2.

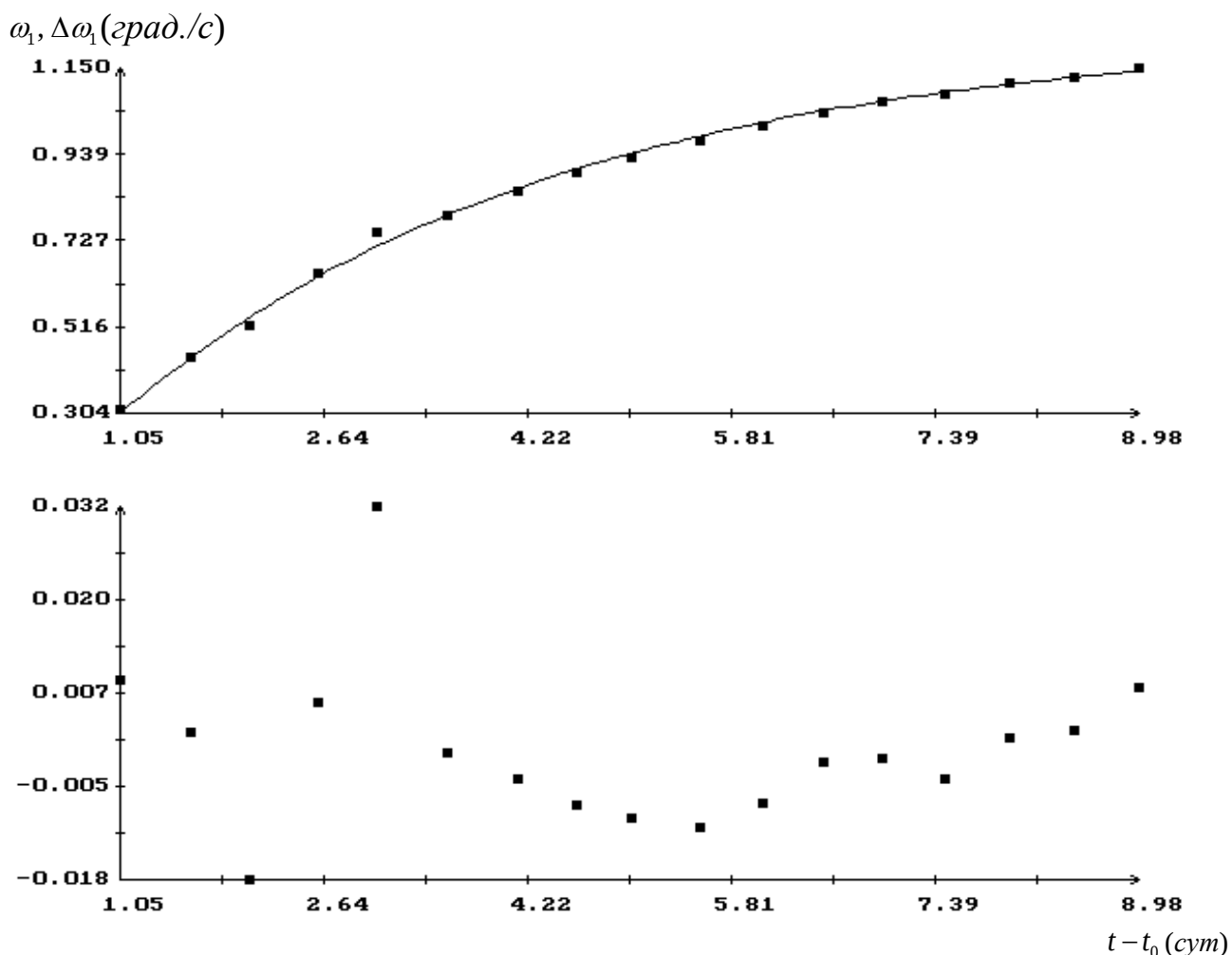


Рис. 2. Увеличение угловой скорости $\bar{\omega}_1$, $t_0 = 12:09:49$ UTC 31.05.2005.

Описанным способом были получены следующие значения параметров формулы (4) для Фотон М-2: $a = 0.289 \text{ сут}^{-1}$, $\omega_1^* = 1.242 \text{ град./с}$, $c = -1.251 \text{ град./с}$. На рис. 2 представлены результаты аппроксимации: здесь сплошной линией представлено решение согласно аппроксимации, маркерами на верхнем рисунке – фактические значения, на нижнем рисунке – остатки. Для Фотона-12: $a = 0.215 \text{ сут}^{-1}$, $\omega_1^* = 1.124 \text{ град./с}$, $c = -0.850 \text{ град./с}$.

Глава 2. Эволюционные уравнения В.В. Белецкого для движения спутника, близкого к регулярной прецессии Эйлера

Вторая глава посвящена исследованию установившегося вращательного движения на последних днях полета спутников Фотон 12 и Фотон М-2. Как следует из рис. 2, через несколько суток после начала полета угловая скорость спутников увеличилась настолько, что для исследования его вращательного движения стало возможным воспользоваться приближенной аналитической теорией, развитой В.В. Белецким в его теоретическом анализе эволюции неуправляемого вращательного движения для быстро вращающегося спутника в случае слабо возмущенной регулярной прецессии Эйлера [5].

В первом разделе главы вводятся побочная система координат, связанная с кинетическим моментом спутника, рассматриваются модельные внешние механические моменты, выводятся эволюционные уравнения согласно модели В.В. Белецкого. В рамках схемы усреднения В.М. Волосова получены усредненные по регулярной прецессии уравнения для эволюции орта кинетического момента $\mathbf{E}_1$ и параметров прецессии:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_1 &= \frac{3\mu_e}{2r^5 l} (1-\lambda)(1-3c_1^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \frac{p c_1}{l} E \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1), \\ \dot{l} &= \varepsilon \lambda c_1 - \kappa c_1^2 l, \quad \dot{c}_1 = c_2^2 \left(\frac{\lambda \varepsilon}{l} - \kappa c_1 \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{r}$ - радиус-вектор центра масс спутника, $\mathbf{v}$ - скорость этой точки относительно гринвичской системы координат, $\mathbf{L}$ - собственный (относительно центра масс) кинетический момент спутника, $\mathbf{E}_1$ - орт собственного кинетического момента, $c_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1$, $\mathbf{e}_1$ - орт оси динамической симметрии спутника, $c_2 = \sqrt{1-c_1^2}$, $l = |\mathbf{L}|/I_2$, κ - постоянный коэффициент при диссипативном моменте от наведенных МПЗ краевых токов в оболочке спутника. Последние два уравнения образуют замкнутую подсистему, которую можно проинтегрировать. Эта подсистема допускает первый интеграл $l c_2 = \text{const}$, а произведение $z = l c_1$ удовлетворяет уравнению $\dot{z} + \kappa z = \lambda \varepsilon$ - см. уравнения (3). В терминах первой главы имеем $z = \lambda \bar{\omega}_1$, $l c_2 = \bar{\omega}_\perp$.

Во втором и третьем разделах приводятся результаты сопоставления эволюции вектора кинетического момента, угла нутации и величины кинетического момента, рассчитанных вдоль решения системы (1) и вдоль решения усредненных эволюционных уравнений В.В. Белецкого по регулярной прецессии (5), для Фотон-12 и Фотон М-2 соответственно. Эти уравнения адекватны начиная с пятых-шестых суток полета для исследуемых спутников. В терминах второго раздела первой главы компоненты орта $\mathbf{E}_1$ в системе $S Y_1 Y_2 Y_3$ выражаются формулами

$$E_{yi} = (\lambda a_{i1} \omega_1 + a_{i2} w_2 + a_{i3} w_3) / l \quad (i = 1, 2, 3).$$

На непродолжительных отрезках времени можно считать, что z и, следовательно, ω_1 - линейные функции времени. В этом случае систему (5) можно преобразовать к виду

$$\omega_1 = \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \dot{\omega}_\perp = 0,$$

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \frac{3\mu_e}{2r^5 l} (1 - \lambda)(1 - 3c^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \frac{pc}{l} E \rho_a \mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1), \quad (6)$$

$$l = \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda \omega_1}{l}.$$

Интервалы времени длиной 210 – 270 мин. представляются слишком короткими, чтобы наглядно продемонстрировать решения усредненных уравнений и эволюцию регулярной прецессии Эйлера. Для такой демонстрации решения, найденные на отрезках $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, продолжались за их правый конец на 200 мин и более. Пример такого сравнения на интервале d4 спутника Фотон М-2, для которых $\bar{\omega}_1 > 0.8$ град./с, приведены на рис. 3. Графики, построенные по решениям системы (6), представлены в виде последовательностей маркеров, графики, построенные по решениям системы (1), изображены сплошными линиями. Рис. 3 иллюстрируют целесообразность подгонки решений системы (6) к функциям $E_{Yi}(t)$, вычисленным вдоль решений системы (1). В левой части этих рисунков решение системы (6) построено с начальными условиями $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$, вычисленными по начальным условиям решения системы (1). В правой части рис. 3 решение системы (6) построено с уточненными значениями $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$. Параметры уточнялись методом наименьших квадратов из условия наилучшей подгонки.

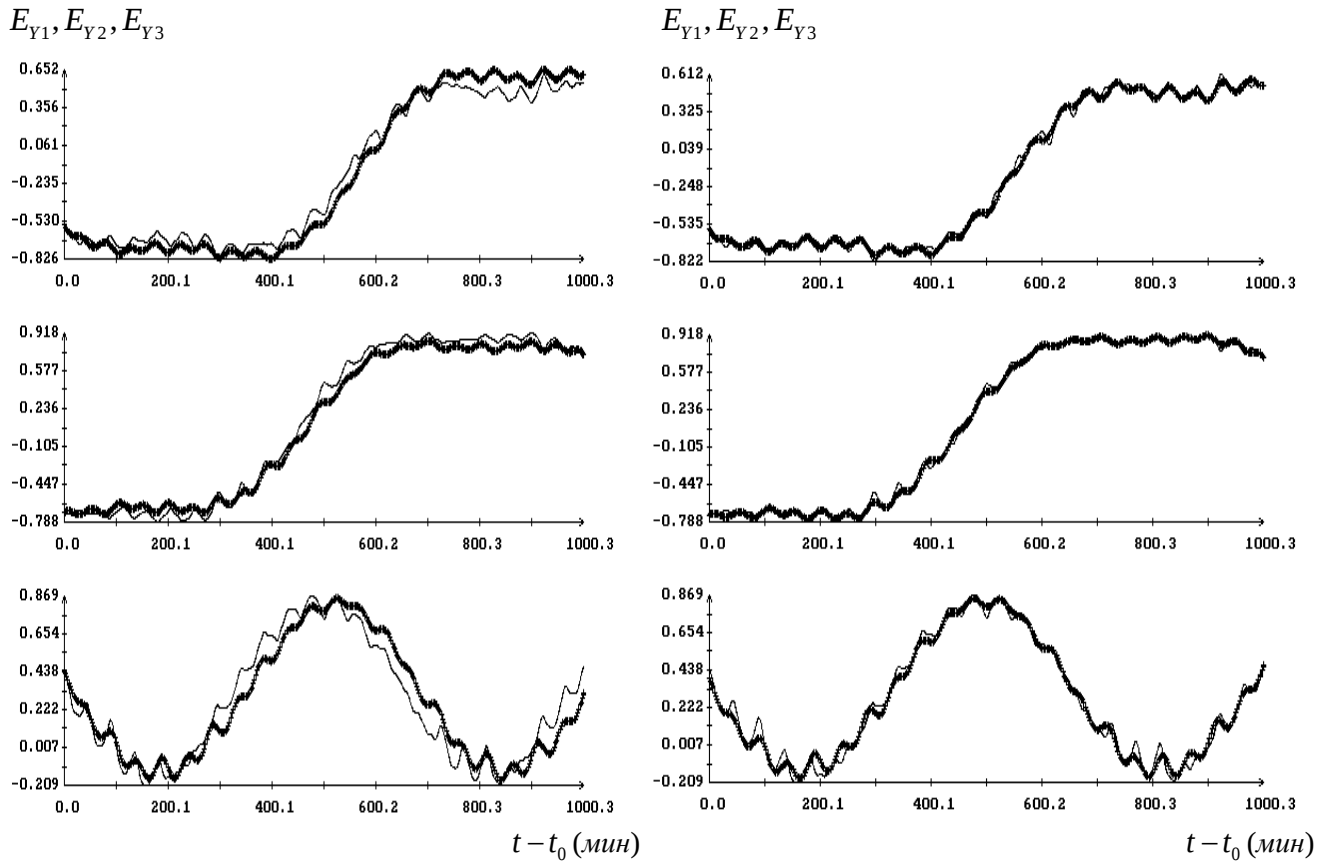


Рис. 3. Сравнение решений систем (1) и (6) на продолжении интервала d4, $t_0 = 13:15:14$ UTC 04.06.2005.

Слева – до подгонки $\omega_\perp$ и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0)$, справа – после подгонки.

Графики функций $E_{Yi}(t)$, изображенные на этих рисунках сплошными линиями, в левой и правой частях этих рисунков одинаковы. Во всех таких примерах найденное значение $\omega_\perp(t_0)$

отличалось от $\bar{\omega}_\perp$ для реконструкции на соответствующем отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ на величину порядка $\delta\omega_\perp$. В случае $\bar{\omega}_1 < 0.8 \text{ град./с}$ согласие решений систем (1) и (6) не имеет места. Без уточнения начальных условий $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$ близость решений систем (1) и (6) в большинстве случаев имеет место только в начале отрезка сравнения. После подгонки близость (такая же, как в приведенном примере) имеет место на всем интервале сравнения. Как оказалось, соотношение результатов, полученных разными способами, является типичным при сравнении решений точных и усредненных уравнений.

Последний раздел представляет краткие выводы главы и содержит первое положение, выносимое на защиту: *реконструированное по данным бортовых магнитных измерений вращательное движение искусственных спутников Земли Фотон-12 и Фотон М-2 показывает, что, если величина продольной компоненты угловой скорости превышает 0.8 град./с., то вращательное движение обоих спутников близко к регулярной прецессии Эйлера. При этом изменение собственного кинетического момента обоих спутников достаточно точно описывается эволюционными уравнениями В.В. Белецкого.*

Глава 3. Упрощение математической модели вращательного движения

Третья глава посвящена дальнейшему упрощению модели восстановления вращательного движения. Модель допускает дальнейшее упрощение, в котором фактическая орбита спутников Фотон-12 и Фотон М-2 (высота апогея 380 км и 300 км, высота перигея 220 км и 260 км, соответственно), заменена круговой орбитой, и также упрощено выражение восстанавливающего аэродинамического момента. При вычислении аэродинамического момента атмосфера считается неподвижной в абсолютном пространстве, ее плотность вдоль орбиты постоянна, внешняя оболочка спутника принимается сферой с центром на оси динамической симметрии. Системы координат для описания движения используются те же, что выше. Вращательное движение спутника изучается относительно орбитальной системы координат. Матрицу перехода от вспомогательной системы к орбитальной системе обозначим $\|\tilde{a}_{ij}\|_{i,j=1}^3$. При сделанных допущениях аэродинамический момент характеризуется одним скалярным параметром. Система уравнений вращательного движения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 + \lambda\omega_1 w_3 &= -3\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}\tilde{a}_{23} + p\tilde{a}_{13}, \\ \dot{w}_3 - \lambda\omega_1 w_2 &= 3\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}\tilde{a}_{32} - p\tilde{a}_{12}, \\ \dot{\tilde{a}}_{11} + w_2\tilde{a}_{13} - w_3\tilde{a}_{12} &= -\omega_0\tilde{a}_{31}, \\ \dot{\tilde{a}}_{12} + w_3\tilde{a}_{11} &= -\omega_0\tilde{a}_{32}, \quad \dot{\tilde{a}}_{13} - w_2\tilde{a}_{11} = -\omega_0\tilde{a}_{33}, \\ p\dot{\tilde{a}}_{31} + w_2\tilde{a}_{33} - w_3\tilde{a}_{32} &= \omega_0\tilde{a}_{11}, \\ \dot{\tilde{a}}_{32} + w_3\tilde{a}_{31} &= \omega_0\tilde{a}_{12}, \quad \dot{\tilde{a}}_{31} - w_2\tilde{a}_{31} = \omega_0\tilde{a}_{13}, \\ \omega_1 &= \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \lambda = I_1/I_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь ω_0 – орбитальная частота, p – аэродинамический параметр, Ω и ε – постоянные величины. В соответствии с методом наименьших квадратов реконструкцией фактического движения спутника считалось решение уравнений (7), доставляющее минимум функционалу (2).

Чтобы использовать уравнения (7) для вычисления функционала (2), необходимо задать связь системы $OX_1X_2X_3$ с гринвичской системой координат, в которой задавалась реальная орбита спутника и вычислялась напряженность магнитного поля Земли. С этой целью фактическая орбита спутника на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ аппроксимировалась круговой орбитой.

Аппроксимация строилась методом наименьших квадратов по достаточно точным значениям реального фазового вектора центра масс спутника, заданным на равномерной сетке с шагом 3 мин. Два примера минимизации функционала (2) приведены на рис. 4. В верхней части рисунка сравниваются модули вектора напряженности МПЗ, рассчитанные по скорректированным псевдоизмерениям и по модели IGRF. Расчет по псевдоизмерениям представлен маркерами, расчет по модели IGRF – сплошными линиями. Графики в нижней части рисунка характеризуют отклонения псевдоизмерений от модели. Эти графики – ломаные, вершины которых отвечают ошибкам аппроксимации. В подписи к рисунку указаны значения σ_* ; рядом с ними в скобках указаны значения σ_* , полученные с использованием реального орбитального движения (см. первую главу).

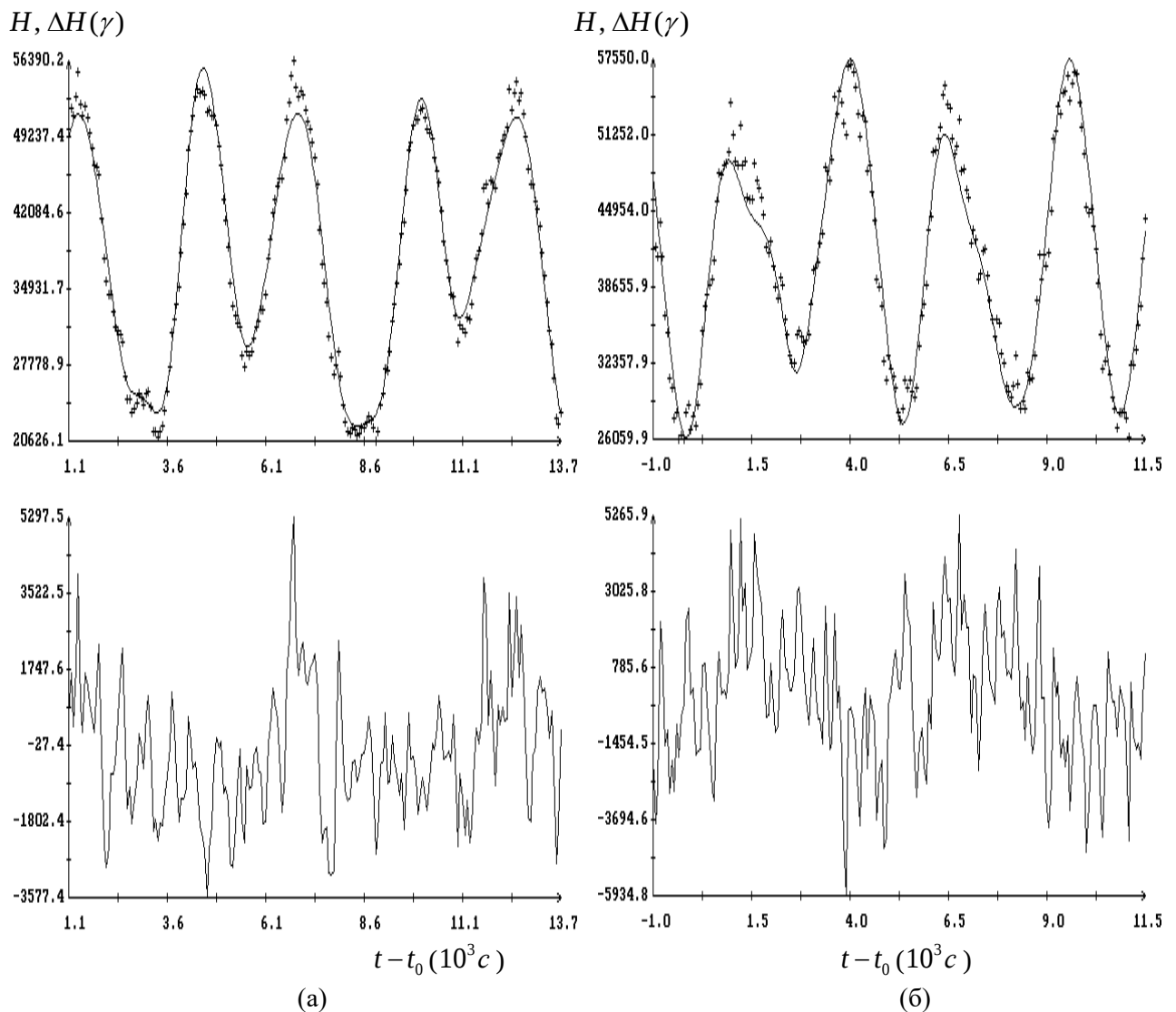


Рис. 4. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ;

(а) момент времени $t_0 = 01:39:31$ UTC 13.09.1999, $\sigma_* = 1561(1374)\gamma$;

(б) момент времени $t_0 = 18:50:05$ UTC 18.09.1999, $\sigma_* = 2059(1649)\gamma$.

Функционал (2) минимизировался аналогично по 11 величинам: начальным условиям решения системы (7) $\psi(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\delta(t_0)$, Ω , $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$ и параметрам λ , p , ε , α_c , β_c . Основные характеристики восстановленного вращательного движения при использовании упрощенной модели приведены в табл. 2. Сравнение данных в табл. 1 и 2 позволяет понять, что

дало сделанное огрубление модели (см. значения σ_*). Интервалы 10 и 14–18 представляют особый интерес для дальнейшего исследования, поскольку движения на них допускают приемлемую аппроксимацию периодическими движениями обобщенно-консервативной механической системы.

Таблица 2. Результаты обработки измерений МПЗ на спутнике Фотон-12

№ инт.	Дата 09.1999	t_0 UTC	σ_*, γ	$\bar{\omega}_1, \text{град./с}$	$\delta\omega_1, \text{град./с}$	$\bar{\omega}_\perp, \text{град./с}$	$\delta\omega_\perp, \text{град./с}$	p	λ	ε	α_c	β_c
10	15	13:18:34	2835	0.8169	0.0039	0.1611	0.0069	-0.0187	0.2323	0.0185	-0.0120	-0.0665
14	17	19:05:14	2043	0.9380	0.0009	0.1577	0.0055	-0.0300	0.2362	-0.0044	-0.0344	-0.0563
15	18	18:33:07	2181	0.9696	0.0005	0.1788	0.0054	-0.0802	0.2302	0.0023	-0.0149	-0.0638
16	18	21:54:51	2192	0.9867	0.0040	0.1658	0.0052	-0.0846	0.2395	0.0194	-0.0296	-0.0560
17	19	08:54:51	1924	1.0099	0.0014	0.1083	0.0044	0.0216	0.2403	0.0070	-0.0461	-0.0591
18	19	21:55:05	1810	1.0165	0.0008	0.0962	0.0056	-0.2518	0.2379	0.0041	-0.0531	-0.0651

Глава 4. Обобщенно-консервативная модель вращательного движения

Четвертая глава посвящена дальнейшему упрощению модели восстановления вращательного движения, а именно переходу к автономной системе уравнений движения. Как видно из табл. 1, значения $\bar{\omega}_1$ со временем стабилизировались, а также оказались близки к предельным значениям, полученным в четвертом разделе первой главы. По-видимому, возростал не учитываемый в уравнениях (1) и (7) момент сопротивления, пропорциональный ω_1 . На интервалах из той части табл. 1 и 2, где значения ε малы, для реконструкции движения спутника необходимо использовать решения уравнений (7) при $\varepsilon = 0$. Обозначим эту систему (8). Аналогично реконструкцией фактического движения спутника считалось решение уравнений (8), доставляющее минимум функционалу (2). Функционал (2) минимизировался уже по 10 параметрам, т.к. $\varepsilon = 0$. Сравнение данных в табл. 2 и 3 позволяет понять, что дало сделанное огрубление модели (см. значения σ_*). Уравнения (8) допускают обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(w_2^2 + w_3^2) - \omega_0(\lambda\Omega\tilde{a}_{21} + w_2\tilde{a}_{22} + w_3\tilde{a}_{23}) - \frac{3}{2}\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}^2 - p\tilde{a}_{11},$$

т.е. спутник – обобщенно-консервативная механическая система.

Таблица 3. Оценки параметров уравнений движения при $\varepsilon = 0$

№ инт.	Дата 09.1999	t_0 UTC	σ_*, γ	$\Omega, \text{град./с}$	λ	p	α_c	β_c
10	15	13:18:34	3393	0.8135	0.2281	-0.1388	-0.0114	-0.0667
14	17	19:05:14	2107	0.938	0.2362	-0.0372	-0.0345	-0.0565
15	18	18:33:07	2193	0.9694	0.2302	-0.0802	-0.0149	-0.0638
16	18	21:54:51	3228	0.9885	0.2415	0.0969	-0.0302	-0.0552
17	19	08:54:51	2063	1.0097	0.2398	-0.0159	-0.0451	-0.0597
18	19	21:55:05	1862	1.0164	0.2379	-0.2323	-0.0532	-0.0651

Последний раздел представляет краткие выводы третьей и четвертой глав и содержит второе положение, выносимое на защиту: *в случае, если величина угловой скорости спутников близка к установившемуся значению 1 град./с, то уравнения вращательного движения допускают согласованное с измерениями упрощение. Орбиту спутника можно принять круговой и опустить неконсервативную составляющую действующего на спутник внешнего момента. В*

таком случае эти уравнения и выводимые из них уравнения В.В. Белецкого становятся обобщенно-консервативными, если записать их в орбитальной системе координат.

Глава 5. Обобщенно-консервативная модель вращательного движения

В пятой главе проведено исследование движения оси динамической симметрии для спутника Фотон М-2 в орбитальной системе координат $OX_1X_2X_3$. Для описания движений спутника, в которых ось Ox_1 отклоняется от оси Ox_2 менее чем на $\pi/2$, положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ удобно задавать введенными выше углами ψ , θ и третьим углом ϕ , поворот на который вокруг оси Ox_1 завершает преобразование системы $OX_1X_2X_3$ в систему $Ox_1x_2x_3$. Преобразование $OX_1X_2X_3 \rightarrow Ox_1x_2x_3$ можно представить в виде суперпозиции преобразований $OX_1X_2X_3 \rightarrow Oy_1y_2y_3$ и $Oy_1y_2y_3 \rightarrow Ox_1x_2x_3$. Первое преобразование задается углами ψ , θ и δ , второе преобразование – углом χ .

Если интересоваться только движением оси симметрии спутника Ox_1 , то удобно использовать углы ψ , θ и комбинации угловых скоростей

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos \phi - \omega_3 \sin \phi = \omega_2 \cos \delta - \omega_3 \sin \delta,$$

$$\Omega_3 = \omega_2 \sin \phi + \omega_3 \cos \phi = \omega_2 \sin \delta + \omega_3 \cos \delta,$$

где

$$\cos \delta = \frac{\tilde{a}_{33}}{\sqrt{\tilde{a}_{32}^2 + \tilde{a}_{33}^2}}, \quad \sin \delta = \frac{\tilde{a}_{32}}{\sqrt{\tilde{a}_{32}^2 + \tilde{a}_{33}^2}}.$$

Величины Ω_2 , Ω_3 – проекции угловой скорости спутника на оси Резаля, отвечающие углам ψ и θ . Необходимо выразить через переменные ψ , θ , Ω_2 , Ω_3 движение орта оси динамической симметрии, рассчитанного вдоль решений системы уравнений движения (8), соответствующих реконструкции. Согласно спектральному анализу [12], движение продольных осей исследуемых спутников – являются похожими на условно-периодические с двумя доминирующими частотами – высокой и низкой. Рассмотрим также эволюционные уравнения В.В. Белецкого (6) с учетом заявленного перехода на круговую орбиту и принятия $\varepsilon = 0$. Эти уравнения имеют вид

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \frac{3\omega_0^2}{2l}(1-\lambda)(1-3c^2)(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}_1)(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{E}_1) + \frac{pc}{l}(\mathbf{a} \times \mathbf{E}_1), \quad (8)$$

$$\dot{\omega}_\perp = 0, \quad l = \sqrt{\lambda^2 \Omega^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \lambda \Omega / l,$$

где $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – орты осей Ox_1 и Ox_3 соответственно. Рассмотрим следующую параметризацию орта $\mathbf{E}_1$ в углах $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ в системе $OX_1X_2X_3$

$$\mathbf{E}_1 = (\cos \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\theta}, -\sin \tilde{\theta})$$

Тогда согласно уравнению (8) дифференциальные уравнения для $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ примут следующий вид

$$\dot{\tilde{\psi}} \cos \tilde{\theta} = -\kappa_g \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} + (\kappa_a \cos \tilde{\psi} - \omega_0 \sin \tilde{\psi}) \sin \tilde{\theta}, \quad (9)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\kappa_a \sin \tilde{\psi} - \omega_0 \cos \tilde{\psi},$$

$$\kappa_g = \frac{3\omega_0^2}{2l}(1-\lambda)(1-3c^2), \quad \kappa_a = \frac{pc}{l}, \quad l = \sqrt{\lambda^2 \Omega^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda \Omega}{l}.$$

Здесь κ_g и κ_a – параметры, значения которых на каждом интервале обработки магнитных

измерений выражаются через найденные для этого интервала величины Ω , λ , p и $\bar{\omega}_\perp$.

Уравнения (9) допускают первый интеграл

$$\frac{\kappa_g}{2} \sin^2 \tilde{\theta} + (\kappa_a \cos \tilde{\psi} - \omega_0 \sin \tilde{\psi}) \cos \tilde{\theta}$$

и интегрируются в квадратурах [6]. Они также сохраняют свой вид при замене

$$t \rightarrow -t, \quad \theta \rightarrow -\theta. \quad (10)$$

Решения уравнений (9), расположенные в области $|\theta| < \pi/2$, $|\tilde{\psi} - \pi/2| < \pi/2$, периодические. Сдвиг по времени, допускаемый в решениях автономных систем, можно выбрать так, чтобы сдвинутое периодическое решение удовлетворяло краевым условиям

$$\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}(T/2) = 0, \quad (11)$$

где T – период решения. Используя только инвариантность уравнений (9) относительно преобразования (10), можно доказать, что всякое решение краевой задачи (9), (11) является T -периодическим, в котором переменная $\tilde{\psi}$ – четная, а переменная $\tilde{\theta}$ – нечетная функции времени.

Решения краевой задачи (9), (11), аппроксимирующие низкочастотную составляющую в движении орта оси динамической симметрии, находились следующим образом. Величина, обратная низкой частоте на данном временном интервале, принималась в качестве периода T . Параметры κ_g и κ_a в (9) рассчитывались по значениям величин Ω , λ , p и $\bar{\omega}_\perp$, полученным в результате обработки магнитных измерений на этом интервале. Методом пристрелки решалась краевая задача (9), (11) (см. [8]). Определяемой величиной служило начальное условие $\tilde{\psi}(0)$. Ее первое приближение находилось вычитанием из $\pi/2$ амплитуды тренда с низкой частотой T^{-1} . Решения задачи (9), (11) для интервалов d8 представлены в левых частях рис.5 графиками функций $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)$, $0 \leq t \leq 2T$.

Сопоставление движений, найденных обработкой магнитных измерений, и решений задачи (9), (11) выполнялось по следующей схеме. Периодические функции $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)$ аппроксимировались дискретными рядами Фурье [9]. Нечетная функция $\tilde{\theta}(t)$ разлагалась в ряд по синусам, четная функция $\tilde{\psi}(t)$ разлагалась в ряд по косинусам. В каждом аппроксимирующем выражении использовалось 200 гармоник. Построенные ряды обозначим $\tilde{\theta}_F(t)$, $\tilde{\psi}_F(t)$. Составлялось выражение

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^M \{ [\theta(t'_m) - \tilde{\theta}_F(t'_m - t_0 - \tau)]^2 + [\psi(t'_m) - \tilde{\psi}_F(t'_m - t_0 - \tau)]^2 \},$$

которое минимизировалось по τ на достаточно мелкой сетке.

В левой части рис.5 в единых системах координат приведены графики функций $\theta(t)$, $\psi(t)$ и соответствующих аппроксимирующих выражений $\tilde{\theta}(t + \tau)$, $\tilde{\psi}(t + \tau)$. В правой части этих рисунков представлены графики разностей $\Delta\theta = \theta(t) - \tilde{\theta}(t + \tau)$, и т. п. Все графики построены по значениям на сетке. Как видим, периодическая аппроксимация получилась достаточно точной. Судя по графикам, функции $\Delta\theta(t)$ и $\Delta\psi(t)$ содержат низкочастотную компоненту, которая, по-видимому, как-то связана с длиннопериодическими решениями Ляпунова.

Последний раздел представляет краткие выводы главы и содержит третье положение, выносимое на защиту: *спектральный анализ близких к условно-периодическим установившихся движений продольных осей обоих спутников в рамках обобщенно-консервативной модели*

выявляет две доминирующие частоты, причем компонента с низкой частотой достаточно точно описывается уравнениями В.В. Белецкого

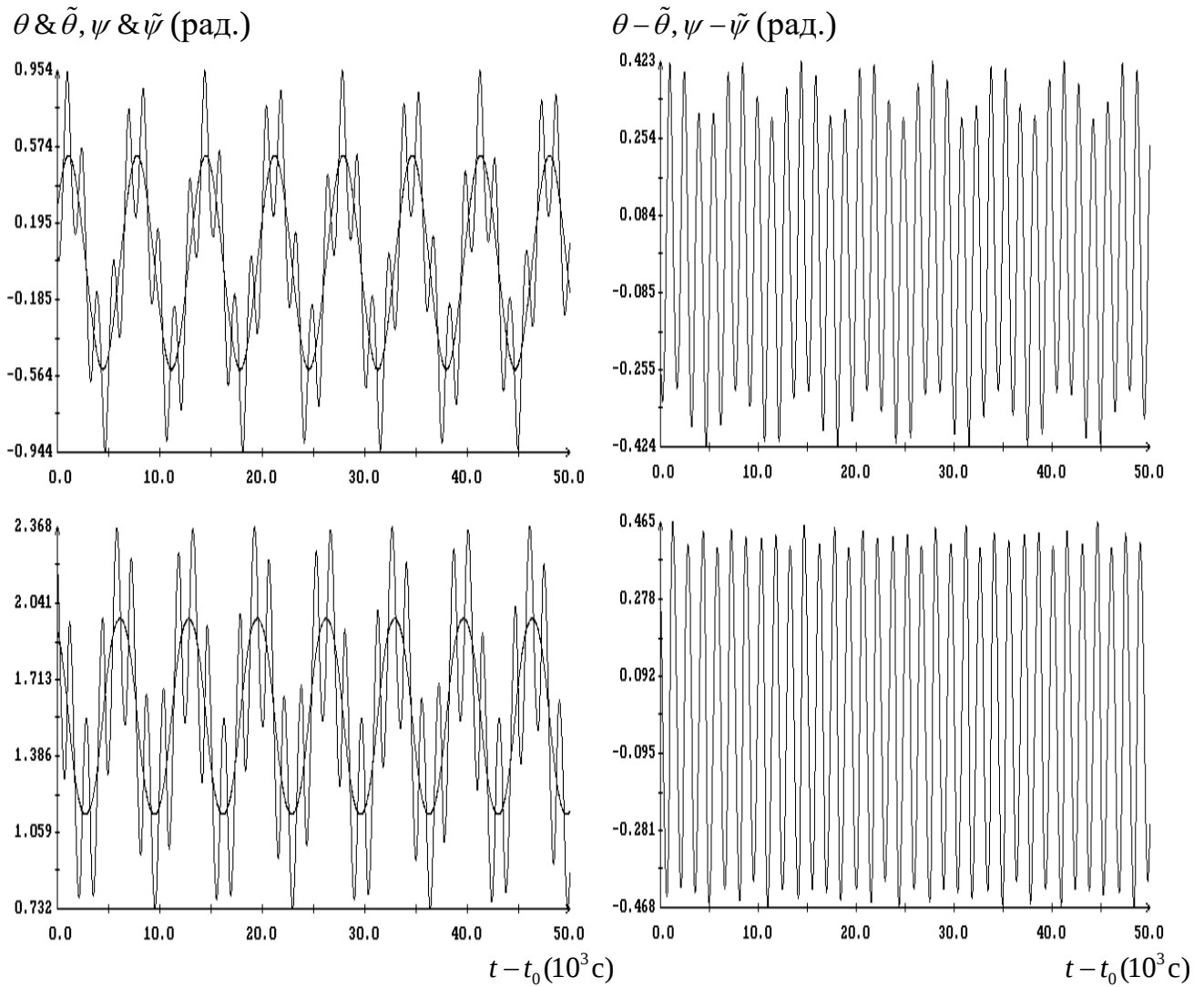


Рис. 5. Интервал d8. Слева – сравнение решений, найденных из реконструкции вращательного движения относительно угловых переменных с решениями уравнений (9). Справа высокочастотная составляющая.

Глава 6. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12

В первом разделе исследуется частный случай. Фотон-12 имел участок полета длиной около 3 сут., на котором собственный кинетический момент спутника был близок к нормали к плоскости его орбиты. На этом участке низкочастотная составляющая в решениях системы четвертого порядка оказалась малой, и они были практически одночастотными. С этой целью рассматривается автономные уравнения движения оси симметрии спутника, имеющих порядок 4 в переменных, упомянутых в четвертой главе:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \Omega_2 - \omega_0 \cos \psi, & \dot{\psi} &= \frac{\Omega_3}{\cos \theta} - \omega_0 \tan \theta \sin \psi, \\ \dot{\Omega}_2 &= - \left(\lambda \Omega + \Omega_3 \tan \theta - \omega_0 \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \Omega_3 + 3\omega_0^2 (1 - \lambda) \sin \theta \cos \theta + p \cos \psi \sin \theta, \\ \dot{\Omega}_3 &= \left(\lambda \Omega + \Omega_3 \tan \theta - \omega_0 \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \Omega_2 + p \sin \psi. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) допускают первый интеграл (обобщенный интеграл энергии)

$$H = \frac{1}{2}(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{3}{2}(1 - \lambda)\sin^2 \theta - \lambda\Omega \cos \theta \sin \psi - \Omega_2 \cos \psi - \Omega_3 \sin \theta \sin \psi + p \cos \theta \cos \psi$$

допускают стационарные решения

$$\psi = \psi_p, \theta = 0, \Omega_2 = \cos \psi_p, \Omega_3 = 0$$

где ψ_p – корень уравнения

$$(\lambda\Omega - \sin \psi) \cos \psi + p \sin \psi = 0$$

инвариантны относительно преобразования переменных

$$t \rightarrow -t, \theta \rightarrow -\theta, \Omega_3 \rightarrow -\Omega_3,$$

поэтому можно искать ее решения, в которых переменные θ и Ω_3 – нечетные, а переменные ψ и Ω_2 – четные функции времени. Симметричные периодические решения с периодом T определяются краевыми условиями

$$\theta(0) = \Omega_3(0) = \theta(T/2) = \Omega_3(T/2) = 0. \quad (13)$$

Для аппроксимации движения оси симметрии спутника, полученного из обработки магнитных измерений численным интегрированием системы (8), использовались короткопериодические решения. Параметры системы (12) p, λ, Ω для каждого аппроксимируемого интервала определялись в результате обработки магнитных измерений. Значение периода T находилось в результате спектрального анализа аппроксимируемых движений. Найденное значение пробного периода использовалось для построения аппроксимирующего решения краевой задачи (12), (13). Эта задача решалась методом продолжения по параметру [8]. Начальным приближением неизвестных начальных условий $\psi(0)$ и $\Omega_2(0)$ служило стационарное решение уравнений (12). Таким образом, реконструированное движение аппроксимировалось периодическими решениями, продолженными из решений Ляпунова, существующих в окрестности стационарного решения [10]. В таблице 4 указаны параметры решений задачи (12), (13): $T/2, \psi(0)$ и $\Omega_2(0)$, а также орбитальная частота ω_0 на данном интервале

Сопоставление движений, найденных обработкой магнитных измерений, и периодических решений выполнялось по следующей схеме. Переменные $\theta(t), \psi(t), \Omega_2(t)$ и $\Omega_3(t)$ в периодическом решении аппроксимировались дискретными рядами Фурье. Четные функции разлагались в ряд по косинусам, нечетные – в ряд по синусам. В каждом аппроксимирующем выражении использовалось 200 гармоник. Построенные ряды обозначим, $\tilde{\theta}(t), \tilde{\psi}(t), \tilde{\Omega}_2(t)$ и $\tilde{\Omega}_3(t)$. Составлялось выражение

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^M \{ [\theta(t'_m) - \tilde{\theta}(t'_m + \tau)]^2 + [\psi(t'_m) - \tilde{\psi}(t'_m + \tau)]^2 + [\Omega_2(t'_m) - \tilde{\Omega}_2(t'_m + \tau)]^2 + [\Omega_3(t'_m) - \tilde{\Omega}_3(t'_m + \tau)]^2 \},$$

которое минимизировалось по τ на достаточно мелкой сетке. Найденные таким образом значения τ приведены в табл. 4. В левой части рис. 6 в единых системах координат приведены графики функций $\theta(t), \psi(t), \Omega_2(t)$ и $\Omega_3(t)$ и соответствующих аппроксимирующих выражений $\tilde{\theta}(t + \tau), \tilde{\psi}(t + \tau), \tilde{\Omega}_2(t + \tau), \tilde{\Omega}_3(t + \tau)$. В правой части этого рисунков представлены графики разностей $\Delta\theta = \theta(t) - \tilde{\theta}(t + \tau)$, и т. п.

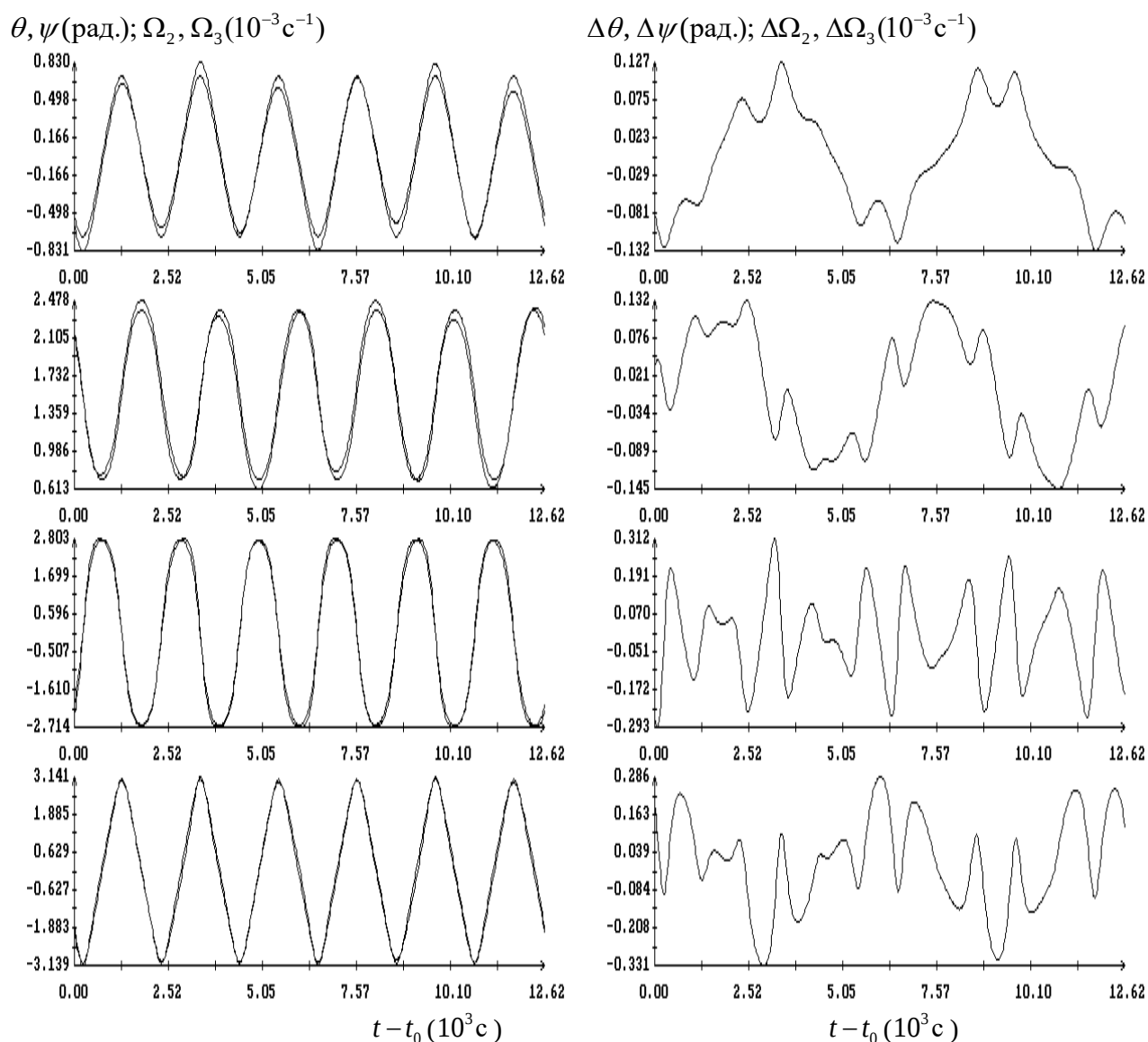


Рис. 6. Аппроксимация движения спутника на интервале 10 периодическим решением.

Таблица 4. Параметры периодических решений

№ инт.	ω_0	$T / 2$	$\psi(0)$	$\Omega_2(0)$	a	τ
10	1.15738	1.05241	0.70850	2.76801	-0.61081	0.7478
14	1.15362	0.92799	0.86721	2.64021	-0.26236	0.7746
15	1.15883	0.86088	0.80933	3.02129	-0.21134	1.1359
16	1.15688	0.84976	0.92197	2.72420	-0.11559	1.1784
17	1.15787	0.97637	1.072764	1.83328	-0.07819	0.2050
18	1.15976	1.00929	1.06703	1.68321	-0.04319	1.6910

Как видим из рисунка, в полете Фотона-12 реализовалась редкая ситуация, когда реальные достаточно сложные вращательные движения спутника удалось аппроксимировать периодическими решениями уравнений движения обобщенно-консервативной механической системы.

Последний раздел представляет краткие выводы главы и содержит четвертое положение, выносимое на защиту: *найден участок полета спутника Фотон-12 продолжительностью около 3 сут, на котором низкочастотная компонента колебаний продольной оси спутника мала, и собственный кинетический момент спутника близок к нормали к плоскости орбиты. В этом*

случае движение продольной оси удается аппроксимировать периодическими решениями, продолженными из периодических решений Ляпунова, на любом интервале времени длиной 3.5ч.

В заключении приведены основные результаты работы и определены возможные направления дальнейших исследований.

Литература.

- [1] Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника Фотон-12 и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т.41. №1. С.45-56.
- [2] Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Иванов В.В., Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Определение вращательного движения спутника "Фотон-12" по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2000. № 60.
- [3] Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое движение спутника Фотон М-2 и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т.45. №5. С.450-470.
- [4] Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника Фотон М-2 по данным бортовых измерений угловой скорости // Космические исследования. 2008. Т.46. №2. С.146-167.
- [5] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
- [6] Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Издательство МГУ, 1975.
- [7] Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1962. Т.27. № 6(108). С.3-126.
- [8] Игнатов А.И., Сазонов В.В. Построение и анализ особых поверхностей систем безупорных гироидов методом продолжения по параметру // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2007. № 27
- [9] Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1960.
- [10] Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М. Ленанд, 2004.
- [11] Нейштадт И.А. Сазонов В.В. Периодические колебания оси симметрии спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 4. С. 20-35.
- [12] Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.

Список публикаций.

По результатам работы опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, следующие статьи:

1. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон М-2 // Космические исследования. – 2020. – Т. 58, № 4. – С. 291–304. = Bulanov D.M., Sazonov V.V. A Study of the Evolution of the Rotational Motion of the Foton M-2 Satellite // Cosmic Research. — 2020. — Vol. 58, no. 4. — P. 256–269. (WoS IF 0.419)
2. Bulanov D. M., Sazonov V. V. A study of the evolution of the rotational motion of the Foton 12 satellite // Cosmic Research. — 2021. — Vol. 59, no. 5. — P. 388–400. (WoS IF 0.419)
3. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12 // Космические исследования. – 2022. – Т. 60, № 2. – С. 134–150. = Bulanov D.M., Sazonov V.V. Periodic Approximation of the Rotational Motion of the Photon-12 Satellite // Cosmic Research. — 2022. — Vol. 60, no. 6. — P. 107–123. (WoS IF 0.419)

Публикация в сборнике трудов конференции, индексируемом в базе Scopus:

1. Bulanov D.M., Sazonov V.V., Investigation of the FOTON M-2 Satellite Attitude Motion // AIP Conference Proceedings. – 2021. – V. 2318, № 110018.

Публикация в журнале из списка ВАК:

1. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника «Фотон М-2» // Инженерный журнал: наука и инновации. № 9, 2020.

Прочие научные работы:

1. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 166, 2016.
2. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон-12 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 53, 2020.
3. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 90, 2020.
4. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Установившееся вращательное движение спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 63, 2021.