

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Буланов Денис Михайлович

**Исследование эволюции вращательного движения искусственного
спутника Земли**

Специальность 01.02.01 –

«Теоретическая механика»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор

Сазонов Виктор Васильевич

Москва – 2022

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Реконструкция вращательного движения по магнитным измерениям	15
1.1 Предисловие	15
1.2 Математическая модель вращательного движения спутника	16
1.3 Реконструкция вращательного движения спутника.....	20
1.4 Увеличение угловой скорости спутника	39
Глава 2. Эволюционные уравнения В.В. Белецкого для движения спутника, близкого к регулярной прецессии Эйлера	44
2.1 Вращательное движение спутника с большой угловой скоростью	44
2.2 Применение модели к спутнику Фотон-12.....	50
2.3 Применение модели к спутнику Фотон М-2	56
2.4 Выводы	61
Глава 3. Упрощение математической модели вращательного движения.....	63
3.1 Дальнейшее упрощение модели вращательного движения.....	63
Глава 4. Обобщенно-консервативная модель вращательного движения	76
4.1 Обобщенно-консервативная модель вращательного движения.....	76
4.2 Выводы	82

Глава 5. Установившееся вращательное движение спутника.....	83
5.1 Уравнения движения оси динамической симметрии спутника	83
5.2 Спектральный анализ построенных реконструкций	86
5.3 Установившееся вращательное движение спутника Фотон М-2	90
5.4 Выводы.....	101
Глава 6. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника	
Фотон-12	102
6.1 Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника	
Фотон-12.....	102
6.2 Выводы.....	107
Заключение.....	110
Список литературы.....	113

Введение

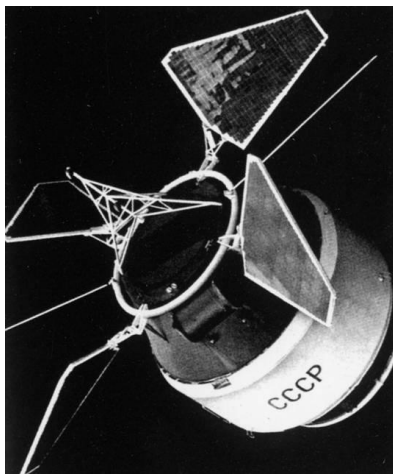
Актуальность темы. Реконструкция реального вращательного движения искусственных спутников Земли (далее – ИСЗ) вокруг центра масс по данным измерений бортовых датчиков и теоретический анализ этого движения входят в число основных задач механики космического полета. Их решение необходимо для интерпретации результатов ряда космических экспериментов таких, как наблюдение небесных тел, локализация источников космического излучения и т.п. Регулярный мониторинг неуправляемого вращательного движения ИСЗ позволяет найти упорядоченные, в том числе установившиеся движения, обладающие полезными свойствами.

В некотором роде общие и для искусственных, и для естественных небесных тел эффекты в движении относительно собственного центра масс, в эволюции вращения и ориентации спутника вызваны воздействием гравитационного поля. Описание подобных явлений для Луны было сделано еще в XVII веке Джованни Кассини.

Между тем на искусственные спутники действуют ряд других сил, в частности, аэродинамических. Спутники движутся в верхних, разреженных слоях атмосферы Земли, где постоянное влияние очень малых сил, обусловленных взаимодействием с атмосферой, приводит к медленной, но непрерывной эволюции орбиты, а также вращательного движения. Ввиду разнообразия форм оболочки спутника аэродинамические свойства спутников бывают также весьма разнообразны. Как следствие, и эволюция ориентации спутника под действием моментов аэродинамических сил может быть «экзотической».

В 1965-1968 годах в СССР была запущена серия научных спутников «Протон». Характерной особенностью их конструкций является наличие на спутнике солнечных батарей, расположенных по отношению к осям спутника

кососимметрично. Это видно из рисунка ниже, на котором изображен спутник «Протон».



При движении спутника по орбите на него набегает поток разреженной среды. Этот поток, взаимодействуя с лопастями солнечных панелей, раскручивает спутник, что в свою очередь вызывает целый ряд своеобразных явлений в эволюции вращения и ориентации спутника. Эти явления как раз и были обнаружены при анализе экспериментальных данных о вращательном движении спутника «Протон-2».

Зачастую об ориентации спутника и изменении ее со временем ничего не известно. Знание ориентации необходимо, корректное объяснение показаний приборов на спутнике в противном случае невозможно. Научные приборы измеряют физические характеристики околоземного и космического пространств, каждый запуск спутника – это новый шаг в процессе познания. В случае отсутствия адекватной интерпретации показаний инкрементальных знаний не приобретается.

Для определения ориентации на спутниках устанавливаются датчики, например, солнечные датчики дают информацию о том, освещена ли Солнцем панель; магнитные датчики показывают направление и значение напряженности магнитного поля Земли и т.д. Именно по этим данным и происходит реконструкция ориентации спутника. Для реконструкции необходим статистический алгоритм обработки информации, который позволит интерпретировать показания, получить эволюцию ориентации спутника со временем, определить возмущающие моменты сил, действующие на спутник.

Цель данной работы состояла в исследовании возможности описания реального вращательного движения двух однотипных ИСЗ Фотон-12 и Фотон М-2 при помощи эволюционных уравнений В.В. Белецкого. В тех случаях, когда такое описание возможно, надо было изучить связь между решениями полных и эволюционных уравнений движения. К задачам, решаемым в диссертации относятся:

- обработка магнитных измерений, выполненных на спутниках Фотон М-2 (находился на орбите 31.05 – 16.06.2005) и Фотон-12 (находился на орбите 09.09–24.09.1999) с помощью новой математической модели с целью реконструкции неуправляемого вращательного движения;
- сопоставление движения спутников Фотон М-2 и Фотон-12, близкого к регулярной прецессии Эйлера, с решениями эволюционных уравнений В.В. Белецкого, определение порогового значения продольной составляющей угловой скорости, достаточной для применения эволюционных уравнений;
- исследование установившихся движений продольной оси обоих спутников в рамках обобщенно-консервативной модели, спектральный анализ установившихся движений, описание низкочастотной составляющей таких движений эволюционными уравнениями В.В. Белецкого;
- исследование участка полета Фотона-12, на котором низкочастотная составляющая в установившихся движениях мала (собственный кинетический момент спутника близок к нормали к плоскости орбиты), и возможность описания таких движений периодическими решениями обобщенно-консервативных уравнений движения.

Научная новизна. Установлена нижняя граница значений угловой скорости, для которых изменение собственного кинетического момента обоих спутников достаточно точно описывается эволюционными уравнениями В.В. Белецкого. Показано, что при значениях угловой скорости, близких к ее предельному значению, уравнения вращательного движения допускают дальнейшее адекватное упрощение: орбиту спутника можно принять круговой и опустить неконсервативную составляющую действующего на него внешнего момента. В таком случае используемые уравнения вращательного движения и отвечающие им уравнения Белецкого становятся обобщенно-консервативными. Решения обеих систем уравнений, являются соответственно периодическими и похожими на условно-периодические. Последние содержат две доминирующие частоты – высокую и низкую. Как показал спектральный анализ, низкая частота соответствует частоте решений уравнений В.В. Белецкого. Это общая ситуация и

новая интерпретация эволюционных уравнений В.В. Белецкого. Найден участок полета Фотона-12 длиной около 3 сут, внутри которого движения продольной оси спутника относительно орбитальной системы координат удалось аппроксимировать периодическим движением на любом интервале времени длиной 4.5ч. Перечисленные результаты получены впервые.

Методы исследования. В первой главе была сделана обработка выполненных на спутниках магнитных измерений обычными статистическими методиками. Ее целью была реконструкция реального вращательного движения спутников. Магнитные измерения, выполненные на некотором интервале времени, обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения спутника относительно центра масс. При обработке оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели. Полученные результаты дали полное представление о движении спутника.

Во второй главе исследуются эволюционные уравнения В.В. Белецкого, полученные усреднением уравнений движения по регулярной прецессии Эйлера по схеме усреднения В.М. Волосова [26]. Усреднение по орбитальному движению не проводилось. Переменными в усредненных уравнениях служат компоненты орта собственного кинетического момента спутника в гринвичской системе координат. Решения усредненных уравнений сравниваются с компонентами орта собственного кинетического момента, рассчитанными вдоль решений системы уравнений движения, используемых для реконструкции вращательного движения из первой главы. Решения усредненных уравнений на длинных интервалах находились согласованием компонент орта кинетического момента, рассчитанных двумя способами. Согласование выполнялось методом наименьших квадратов, уточнялись начальные условия усредненных уравнений и один из параметров этих уравнений – поперечная угловая скорость спутника. Остальные параметры имели значения, найденные при обработке магнитных измерений. Описанный способ сравнения показал высокую точность согласия обоих способов расчета компонент орта кинетического момента в случае, когда продольная компонента угловой

скорости превышала $0.8^\circ/\text{с}$. Система усредненных по регулярной прецессии Эйлера уравнений движения относительно гринвичской системы интегрировалась численно.

В третьей главе подробнее рассматривается дальнейшее упрощение модели реконструкции вращательного движения спутника, осуществленной в первой главе – орбиту спутника можно принять круговой и неизменной в абсолютном пространстве. Ее элементы находятся по элементам реальной орбиты для каждого обрабатываемого временного интервала с магнитными измерениями. В этом случае движение спутника рассматривается относительно орбитальной системы координат. Точность обработки измерений с использованием новых уравнений движения несколько ухудшается, но остается приемлемой для реконструкции на указанных интервалах.

В четвертой главе рассматривается установившееся к концу полета вращательное движение спутников. При значениях продольной угловой скорости, близких к ее предельному значению $1^\circ/\text{с}$, в полученных уравнениях можно опустить неконсервативную составляющую приложенного к спутнику внешнего момента. Тогда эти уравнения и отвечающие им усредненные уравнения становятся обобщенно-консервативными. Обобщенно-консервативная система инвариантна относительно группы преобразований, на основании которых получены краевые условия, используемые в последующих главах.

В пятой главе решения усредненных уравнений, имеющих второй порядок, сравниваются с решениями уравнений движения оси динамической симметрии спутника, имеющих четвертый порядок. Решения обеих систем уравнений, отвечающие реальным движениям спутников, являются соответственно периодическими и похожими на условно-периодические. Последние содержат две частоты – высокую и низкую. Как показал спектральный анализ, низкая частота соответствует частоте решений уравнений Белецкого, а решения этих уравнений достаточно точно совпадают с низкочастотной составляющей в решении системы четвертого порядка. Это верно для обоих рассматриваемых спутников.

В шестой главе исследуется частный случай. Фотон-12 имел участок полета длиной около 3 сут., на котором собственный кинетический момент спутника был близок к нормали к плоскости его орбиты. На этом участке низкочастотная составляющая в решениях системы четвертого порядка оказалась малой, и они были практически одночастотными. Такие решения на отрезках времени длиной 4.5 ч. удалось достаточно точно аппроксимировать периодическими решениями, продолженными из решений Ляпунова, существующих в окрестности одного из стационарных решений (цилиндрической прецессии) упомянутой системы четвертого порядка.

В общем случае найденное значение частоты использовалось для построения аппроксимирующего решения краевой задачи. Эта задача решалась методом пристрелки (см. [32, 41]). Сопоставление движений, найденных обработкой магнитных измерений, и периодических решений выполнялось по следующей схеме. Переменные в периодическом решении аппроксимировались дискретными рядами Фурье [35]. Составлялось выражение разницы между переменными, описывающими фактическое вращательное движение, и построенными рядами по времени. Функционал минимизировался по фазовому сдвигу для построенных рядов.

Практическая значимость. Работа имеет прикладной и теоретический характер. Результаты научно-квалификационной работы могут найти применение в ИПМ имени М.В. Келдыша РАН, ИКИ РАН, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, а также в учебных заведениях и организациях, связанных с разработкой космической техники.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. реконструированное по данным бортовых магнитных измерений вращательное движение искусственных спутников Земли Фотон-12 и Фотон М-2 показывает, что, если величина продольной компоненты угловой скорости превышает 0.8 град./с., то вращательное движение обоих спутников близко к регулярной прецессии Эйлера. При этом изменение собственного кинетического момента

обоих спутников достаточно точно описывается эволюционными уравнениями В.В. Белецкого;

2. в случае, если величина угловой скорости спутников близка к установившемуся значению 1град./с, то уравнения вращательного движения допускают согласованное с измерениями упрощение. Орбиту спутника можно принять круговой и опустить неконсервативную составляющую действующего на спутник внешнего момента. В таком случае эти уравнения и выводимые из них уравнения В.В. Белецкого становятся обобщенно-консервативными, если записать их в орбитальной системе координат;
3. спектральный анализ близких к условно-периодическим установившихся движений продольных осей обоих спутников в рамках обобщенно-консервативной модели выявляет две доминирующие частоты, причем компонента с низкой частотой достаточно точно описывается уравнениями В.В. Белецкого;
4. найден участок полета спутника Фотон-12 продолжительностью около 3 сут, на котором низкочастотная компонента колебаний продольной оси спутника мала, и собственный кинетический момент спутника близок к нормали к плоскости орбиты. В этом случае движение продольной оси удастся аппроксимировать периодическими решениями, продолженными из периодических решений Ляпунова, на любом интервале времени длиной 3.5ч.

Достоверность результатов. Все результаты работы получены строгими математическими методами и надежными численными методами. Использованные математические модели достаточно точно согласуются с данными измерений. Результаты обработки измерений находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами [1, 2, 3, 5] и другими методами. Это свидетельствует о достоверности полученных результатов.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертации изложены в 9 научных работах автора общим объемом 9 п.л., в том числе в 3 публикациях (объемом 4 п.л.) в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности:

1. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон М-2 // Космические исследования. – 2020. – Т. 58, № 4. – С. 291–304. = Bulanov D.M., Sazonov V.V. A Study of the Evolution of the Rotational Motion of the Foton M-2 Satellite // Cosmic Research (English translation of Kosimicheskie Issledovaniya). — 2020. — Vol. 58, no. 4. — P. 256–269.
2. Bulanov D. M., Sazonov V. V. A study of the evolution of the rotational motion of the Foton 12 satellite // Cosmic Research (English translation of Kosimicheskie Issledovaniya). — 2021. — Vol. 59, no. 5. — P. 388–400.
3. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12 // Космические исследования. – 2022. – Т. 60, № 2. – С. 134–150. = Bulanov D.M., Sazonov V.V. Periodic Approximation of the Rotational Motion of the Photon-12 Satellite // Cosmic Research (English translation of Kosimicheskie Issledovaniya). — 2022. — Vol. 60, no. 6. — P. 107–123.

Прочие научные работы:

1. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 166, 2016.
2. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон-12 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 53, 2020.
3. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 90, 2020.
4. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника «Фотон М-2» // Инженерный журнал: наука и инновации. № 9, 2020.

5. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Установившееся вращательное движение спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 63, 2021.
6. Bulanov D.M., Sazonov V.V., Investigation of the FOTON M-2 Satellite Attitude Motion // AIP Conference Proceedings. – 2021. – V. 2318, № 110018.

Изложенные в работе и в перечисленных публикациях сведения и результаты получены под научным руководством д.ф.-м.н., профессора В.В. Сазонова. В необходимых случаях заимствования научных результатов приведены соответствующие ссылки.

Основные результаты работы докладывались на XLVI, XLV и XLIV академических чтениях по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства «Королёвские чтения» (Москва, 2022, 2021 и 2020 г.) и на научно-исследовательских семинарах:

- Научный семинар "Механика космического полета им. В.А. Егорова" под руководством проф. В.В. Сазонова и доц. М.П. Заплетина, кафедра общих проблем управления, кафедра теоретической механики и мехатроники, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2022 г.).
- Научный семинар им. В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева, кафедра теоретической механики и мехатроники, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2022 г.).

Личный вклад. Все результаты, выносимые на защиту, принадлежат лично автору и получены под научным руководством профессора В.В. Сазонова. Научный руководитель предложил постановку задач и указал методы их исследования. Автор принимал активное участие в нескольких конференциях, где докладывались основные результаты данной работы.

Обзор литературы. В теории движения ИСЗ сформировалось отдельное направление – определение орбиты по траекторным измерениям и возмущающих сил, действующих на эволюцию орбиты. Одна из первых работ в этом направлении

выполнена Т.М. Энеевым, А.К. Платоновым, Р.К. Казаковой [58]. В последующих работах описываются определение по траекторным измерениям возмущающих эффектов и элементов, таких как плотность атмосферы в верхних слоях атмосферы Земли, гармоник гравитационного потенциала Земли и гармоник потенциала тяготения Луны. Э.Л. Аким выполнил первую работу такого рода [6].

Задача определения ориентации спутника по показаниям датчиков в существенной степени схожа с задачей определения орбит – в основе лежат аналогичные методы, однако, задача реконструкции вращательного движения имеет свою специфику. Первое в мире определение ориентации спутника по данным бортовых измерений было проведено для третьего советского ИСЗ В.В. Белецким и Ю.В. Зоновым [13]. В случае спутников серии «Протон» результаты изложены в [12], для серии спутников «Электрон» - в [11].

Кроме формирования моделей прикладного значения для реконструкции ориентации спутников стоит также отметить и теоретические исследования, в частности, посвященных описанию и выводу модельных внешних механических моментов. Глубокое аналитическое исследование влияния аэродинамических сил на раскрутку спутника проведено В.В. Белецким совместно с А.М. Яншином в [15]. Изучению не менее важного демпфирующего внешнего механического момента – диссипативного момента от наведенных магнитным полем Земли краевых токов в оболочке спутника – посвящены работы Л. Смита [63, 64] в 1962 и 1965 г.г., соответственно.

Основополагающими в области исследования эволюции вращательного движения спутника являются работы В.В. Белецкого [9, 10]. В общем случае стоит рассматривать каждый спутник отдельно и моделировать его установившееся под конец полета движения. А.И. Игнатовым и В.В. Сазоновым в [33] исследован режим солнечной ориентации ИСЗ, параметры которого соответствуют параметрам таких спутников как Бион-М и Фотон М-4. В этом режиме нормаль к плоскости солнечных батарей спутника неизменно направлена на Солнце, продольная ось лежит в плоскости орбиты, абсолютная угловая скорость спутника весьма мала. Вскоре после полета спутников Фотона-12 и Фотон М-2 их

вращательное движение было реконструировано с помощью детальной математической модели по данным установленных на спутниках магнитометрах [1, 2, 3, 5]. В.В. Сазоновым в работе [45] исследованы периодические движения оси динамической симметрии модельного спутника Земли, которые похожи на движения продольных осей орбитальной станции Мир в 1999 - 2001 гг. и спутника Фотон М-3 в 2007 г. Движения этих ИСЗ представляли собой слабо возмущенную регулярную прецессию Эйлера с вектором кинетического момента движения относительно центра масс, близким к плоскости орбиты. Модельный спутник считался динамически симметричным гироскопом, движущимся по круговой орбите и испытывающий действие гравитационного момента, гироскопический момент которого направлен по оси динамической симметрии спутника. Более общий случай рассмотрен А. А. Ворониным и В. В. Сазоновым в [28], где приведено исследование периодических колебаний трехосного спутника с расположенным внутри него симметричным ротором под действием гравитационного момента в случае, когда собственный кинетический момент спутника достаточно большой. При исследовании вращательных движений ИСЗ также порой возникает необходимость исследования периодических решений дифференциальных уравнений. Например, И.А. Нейштадтом и В.В. Сазоновым в [41] исследованы периодические движения динамически симметричного спутника в случае большой угловой скорости, имеющей место под конец полета, также отмечалось их сходство с фактически вращательным движением Фотон-12. Однако такое сходство не было исследовано детально. Ниже такое исследование проводится.

Глава 1. Реконструкция вращательного движения спутника по магнитным измерениям

1.1 Предисловие

Вскоре после полета спутников Фотона-12 и Фотон М-2 их вращательное движение было реконструировано по данным бортовых измерений напряженности магнитного поля Земли (МПЗ) [1, 2, 3, 5]. Из этих данных, охватывающих весь полет, выбирались отрезки длиной несколько часов. На каждом таком отрезке данные обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения спутника относительно центра масс. При обработке оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели. Полученные результаты дали полное представление о движении спутника. Это движение, начавшееся с малой угловой скоростью, постепенно ускорялось и через двое суток стало близко к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела. Последние несколько суток неуправляемого полета угловая скорость спутников относительно продольной оси составляла примерно 1.0 град./с и 1.1 град./с для Фотон-12 и Фотон М-2, соответственно, проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную этой оси, имела модуль 0.11 – 0.15 град./с.

Ниже описаны результаты повторной обработки отрезков магнитных измерений, использованных в [1, 2, 3]. Обработка проведена с помощью более простой, чем в [1, 2, 3, 5], математической модели вращательного движения спутника. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким в его теоретическом анализе эволюции неуправляемого вращательного движения спутника, близкого к

регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела [9]. Результаты обработки измерений будут сопоставлены с результатами теории В.В. Белецкого.

1.2 Математическая модель вращательного движения спутника

Спутник считаем динамически симметричным твердым телом. Для записи уравнений движения спутника и соотношений, используемых при обработке данных измерений, введем пять правых декартовых систем координат.

Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Точка O – центр масс спутника, ось Ox_1 – ось динамической симметрии спутника. Эта ось близка к продольной оси спутника и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку. Моменты инерции спутника относительно оси Ox_1 обозначим I_1 , равные моменты инерции относительно осей Ox_2 и Ox_3 обозначим I_2 .

Вспомогательная система координат $Oy_1y_2y_3$ служит для записи уравнений вращательного движения спутника. Ось Oy_1 совпадает с осью Ox_1 ; оси Ox_2 и Ox_3 получаются из осей Oy_2 , Oy_3 поворотом системы $Oy_1y_2y_3$ на угол ϕ вокруг оси Oy_1 . Кинематическая связь между системами $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ задается условием, что проекция абсолютной угловой скорости второй из них на ось Oy_1 равна нулю. Проекции этой угловой скорости на оси Oy_2 , Oy_3 обозначим w_2 , w_3 . Пусть абсолютная угловая скорость спутника ω имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ компоненты $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогда $\dot{\phi} = \omega_1$ и

$$\omega_2 = w_2 \cos \phi + w_3 \sin \phi, \quad \omega_3 = -w_2 \sin \phi + w_3 \cos \phi. \quad (1.1)$$

Здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по времени t .

В приборной системе координат $Oz_1z_2z_3$ интерпретируются данные измерений бортовых магнитометров. Эту систему можно перевести в систему $Ox_1x_2x_3$ двумя последовательными поворотами. Первый поворот выполняется на угол α_c вокруг оси Oz_2 , второй поворот – на угол β_c – выполняется вокруг оси Oz_3 , получившейся после первого поворота. В общем случае, чтобы задать положение одной системы координат относительно другой, необходимы три угла. В данном случае можно было бы ввести еще угол поворота приборной системы вокруг ее оси Oz_1 , получившееся после первых двух поворотов. Однако поскольку направление одной из осей Ox_2 , Ox_3 можно выбирать произвольно, третий угол удобно принять равным нулю, фиксируя тем самым положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $Oz_1z_2z_3$. Матрицу перехода между этими системами координат обозначим $\|b_{ij}\|_{i,j}^3$, где b_{ij} – косинус угла между осями Oz_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через углы α_c и β_c по формулам

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos \alpha_c \cos \beta_c, & b_{12} &= -\cos \alpha_c \sin \beta_c, & b_{13} &= \sin \alpha_c, \\ b_{21} &= \sin \beta_c, & b_{22} &= \cos \beta_c, & b_{23} &= 0, \\ b_{31} &= -\sin \alpha_c \cos \beta_c, & b_{32} &= \sin \alpha_c \sin \beta_c, & b_{33} &= \cos \alpha_c. \end{aligned}$$

Гринвичская система координат $CY_1Y_2Y_3$ используются для записи уравнений движения спутника. Начало этой системы находится в центре масс Земли, плоскость CY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, положительная полуось CY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось CY_3 направлена в Северный полюс.

Квазиинерциальная система координат $CZ_1Z_2Z_3$ служит для графического представления вращательного движения спутника. В каждый момент времени ось CZ_2 параллельна вектору кинетического момента орбитального движения спутника, ось CZ_3 лежит в плоскости CY_1Y_2 и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты спутника. Абсолютная величина угловой скорости этой системы не превышает 5 град./сут.

Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к гринвичской системе обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j}^3$, a_{ij} – косинус угла между осями CY_i и Oy_j . Элементы этой матрицы будем выражать в функции углов γ , δ и β , которые введем так, чтобы систему $CY_1Y_2Y_3$ можно было перевести в систему $Oy_1y_2y_3$ тремя последовательными поворотами (полагаем, что точки C и O совпадают): 1) на угол $\delta + \pi / 2$ вокруг оси CY_2 , 2) на угол β вокруг новой оси CY_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси CY_1 , совпадающей с осью Oy_1 .

Направление оси Oy_1 в системе $CZ_1Z_2Z_3$ будем задавать углами θ и ψ : θ – угол между этой осью и плоскостью CZ_1Z_2 , ψ – угол между проекцией оси Oy_1 на плоскость CZ_1Z_2 и осью CZ_1 . Направления отсчета углов θ и ψ согласованы с направлениями осей Oy_2 и CZ_3 соответственно. Орт оси Oy_1 имеет в системе $CZ_1Z_2Z_3$ компоненты $(\cos\theta\cos\psi, \cos\theta\sin\psi, -\sin\theta)$. Будем использовать также угол $\Lambda = \arccos(\cos\theta\sin\psi)$ между осями Oy_1 и CZ_2 .

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая – его движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Решения этой подсистемы находились из условия наилучшей аппроксимации двухстрочных элементов орбиты Фотона-12 на отрезках времени длиной 2 – 3 сут [2], для Фотон М-2 3 – 4 сут [3], соответственно.

Вторая подсистема образована динамическими уравнениями Эйлера для угловых скоростей w_2 , w_3 и кинематическими уравнениями Пуассона для первой и второй строк матрицы $\|a_{ij}\|$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также постоянный момент

вдоль оси Ox_1 . При вычислении аэродинамического момента атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, внешняя оболочка спутника принимается сферой с центром на оси Ox_1 . Вторая подсистема имеет вид [17, 48]

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_2 + \lambda \omega_1 w_3 &= -3 \frac{\mu_e}{r^5} (1 - \lambda) y_1 y_3 + p E \rho_a v v_3, \\
 \dot{w}_3 - \lambda \omega_1 w_2 &= 3 \frac{\mu_e}{r^5} (1 - \lambda) y_1 y_2 - p E \rho_a v v_2, \\
 \dot{a}_{11} + w_2 a_{13} - w_3 a_{12} &= \omega_e a_{21}, \\
 \dot{a}_{12} + w_3 a_{11} &= \omega_e a_{22}, \quad \dot{a}_{13} - w_2 a_{11} = \omega_e a_{23}, \\
 \dot{a}_{21} + w_2 a_{23} - w_3 a_{22} &= -\omega_e a_{11}, \\
 \dot{a}_{22} + w_3 a_{21} &= -\omega_e a_{12}, \quad \dot{a}_{23} - w_2 a_{21} = -\omega_e a_{13}, \\
 \omega_1 &= \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \lambda = \frac{I_1}{I_2}, \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь y_i и v_i – компоненты в системе $Oy_1y_2y_3$ геоцентрического радиуса-вектора точки O и скорости этой точки относительно системы $CY_1Y_2Y_3$; p – аэродинамический параметр; ρ_a – плотность атмосферы в точке O ; ω_e и μ_e – угловая скорость вращения и гравитационный параметр Земли; Ω и ε – постоянные величины; E – масштабирующий множитель. В (1.2) использован явный вид решения одного из уравнений Эйлера $\dot{\omega}_1 = \varepsilon$ с начальным условием $\omega_1(t_0) = \Omega$. Выбор t_0 будет указан ниже.

При численном интегрировании уравнений (1.2) единицами измерения времени и длины служат 1000 с и 1000 км, единицы измерения других величин: $[v_i] = \text{км/с}$, $[\omega_i] = [w_i] = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $[\varepsilon] = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$, $[p] = \text{см}^2/\text{кг}$, $[\rho_a] = \text{кг/м}^3$, $E = 10^{10}$. Плотность атмосферы задается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Элементы третьей строки матрицы $\|a_{ij}\|$ вычисляются как векторное произведение первых двух ее строк.

Формулы (1.1) и соотношение $\phi = \Omega(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0)^2 / 2$ позволяют найти функции $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ и движение системы $Ox_1x_2x_3$, решая уравнения (1.2).

Переменные a_{1i} и a_{2i} зависимы, они связаны условиями ортогональности матрицы $\|a_{ij}\|$. По этой причине начальные условия $a_{1i}(t_0)$ и $a_{2i}(t_0)$ выражаются через углы γ , δ и β .

Проектные значения параметров α_c , β_c и λ : $\alpha_c = \beta_c = 0$, $\lambda = 0.24$ и $\lambda = 0.27$ для Фотон-12 и Фотон М-2, соответственно, оказались достаточно точными. Тем не менее, эти параметры и параметры p , ε определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т. е. служат параметрами согласования.

Уравнения (1.2) и некоторые другие принятые ниже математические модели проще, чем уравнения движения и модели [1, 2, 3, 5]. Это сделано для уменьшения числа уточняемых параметров, и чтобы избежать использования априорной информации и методов регуляризации в статистических процедурах. Для компенсации сделанных упрощений ограничимся реконструкцией сравнительно простых движений спутника, в которых компонента угловой скорости ω_1 достаточно велика.

1.3 Реконструкция вращательного движения спутника

На борту Фотона-12 и Фотона М-2 находилась аппаратура "Мираж", с несколькими трехкомпонентными магнитометрами. Реконструкция вращательного движения для спутников Фотона-12 и Фотон М-2 аналогична, точность для второго спутника несколько лучше по причине лучшего качества магнитометров. Соответствующие характеристики реконструкции и самого вращательного движения будут приведены для двух спутников.

Поскольку движение спутника было неуправляемым, полученные данные и уравнения (1.2) можно использовать для определения фактического вращательного движения спутника по обычным статистическим методикам.

Методика, использованная ниже, состоит в следующем [1, 2, 3, 5, 19 - 25]. По измерениям, выполненным на некотором отрезке времени $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $T = 270$ мин для Фотона М-2, $T = 210$ мин для Фотона-12, строились аппроксимирующие выражения $\hat{h}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, которые задавали на этом отрезке компоненты вектора местной напряженности магнитного поля в приборной системе координат. Каждое такое выражение представляло собой сумму линейной функции и отрезка ряда Фурье по синусам с частотами кратными π/T [35]. Коэффициенты этих выражений находились методом наименьших квадратов. Среднеквадратичные ошибки аппроксимации компоненты $\hat{h}_i(t)$ не превышали 200γ и 800γ ($1\gamma = 10^{-5}$ Э) для Фотон М-2 и Фотон-12 соответственно. Затем вычислялись псевдоизмерения $h_i^{(n)} = \hat{h}_i(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. В большинстве случаев $t_{n+1} - t_n = 1$ мин, иногда этот промежуток был больше из-за наличия на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ сбойных данных. Псевдоизмерения служили исходной информацией для отыскания решений уравнений (1.2), описывающих фактическое движение спутника.

Представление о точности псевдоизмерений дает сравнение модуля измеренного вектора напряженности магнитного поля с модулем напряженности, рассчитанным по модели IGRF. При минимизации среднеквадратичного рассогласования $СКО(\Delta H)$ этих модулей определялись корректирующие поправки в измерениях: масштабирующий коэффициент, сдвиг времени и постоянные смещения. После внесения этих поправок значения $СКО(\Delta H)$ для большинства обрабатываемых отрезков псевдоизмерений не превышали 500γ и 1600γ для Фотон М-2 и Фотон-12 соответственно.

Псевдоизмерения служили исходной информацией для отыскания решений уравнений (1.2), описывающих фактическое движение спутника.

Примеры сравнения расчетного и скорректированного измеренного модулей МПЗ приведены на рис. 1 и 2 для Фотон-12 и Фотон М-2 соответственно. В верхней части рисунка расчет по псевдоизмерениям представлен маркерами, расчет по модели IGRF – сплошными линиями. Графики в нижней части рисунка характеризуют

отклонения псевдоизмерений от модели. Эти графики – ломаные, вершины которых отвечают ошибкам аппроксимации. В подписи к рисунку указаны значения $СКО(\Delta H)$. Ниже при обработке используются псевдоизмерения, в которых внесены поправки за масштабирующий коэффициент и сдвиг времени. Постоянные смещения в измерениях корректируются иначе.

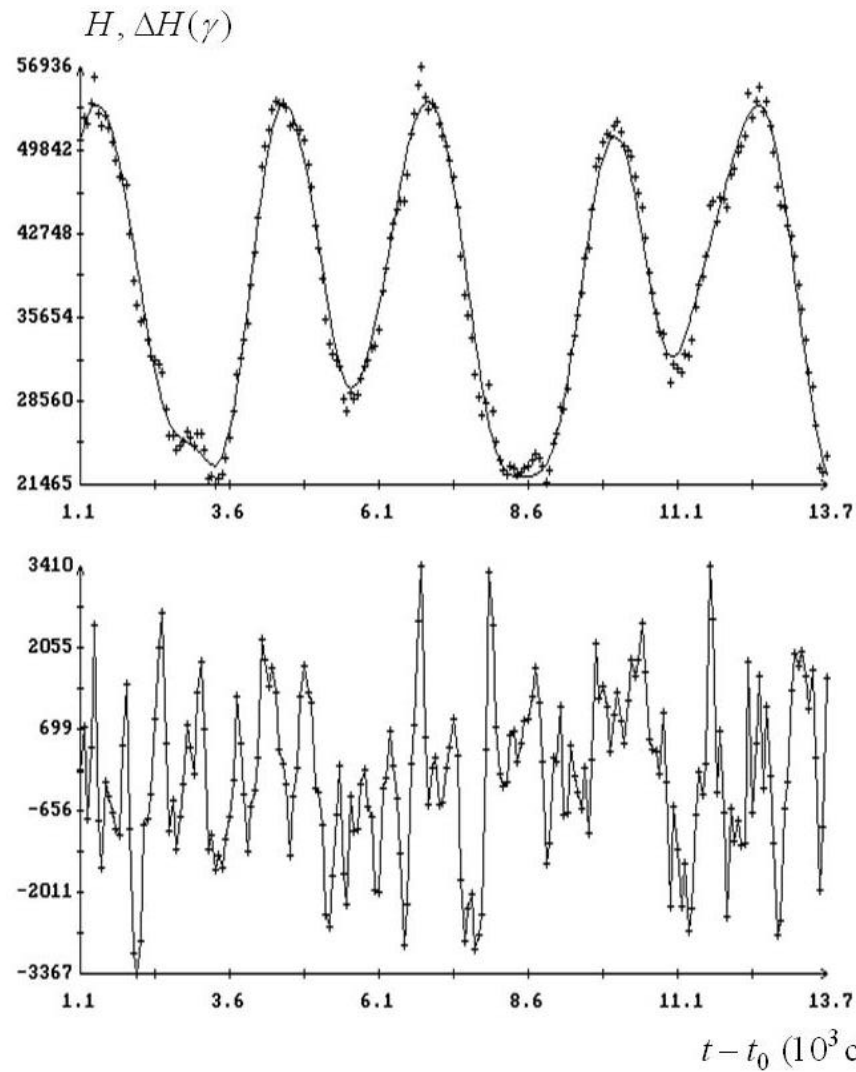
В соответствии с методом наименьших квадратов реконструкцией фактического движения спутника считалось решение уравнений (1.2), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{n=1}^N [h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 - (N+1)\Delta_i^2 \right\}, \quad (1.3)$$

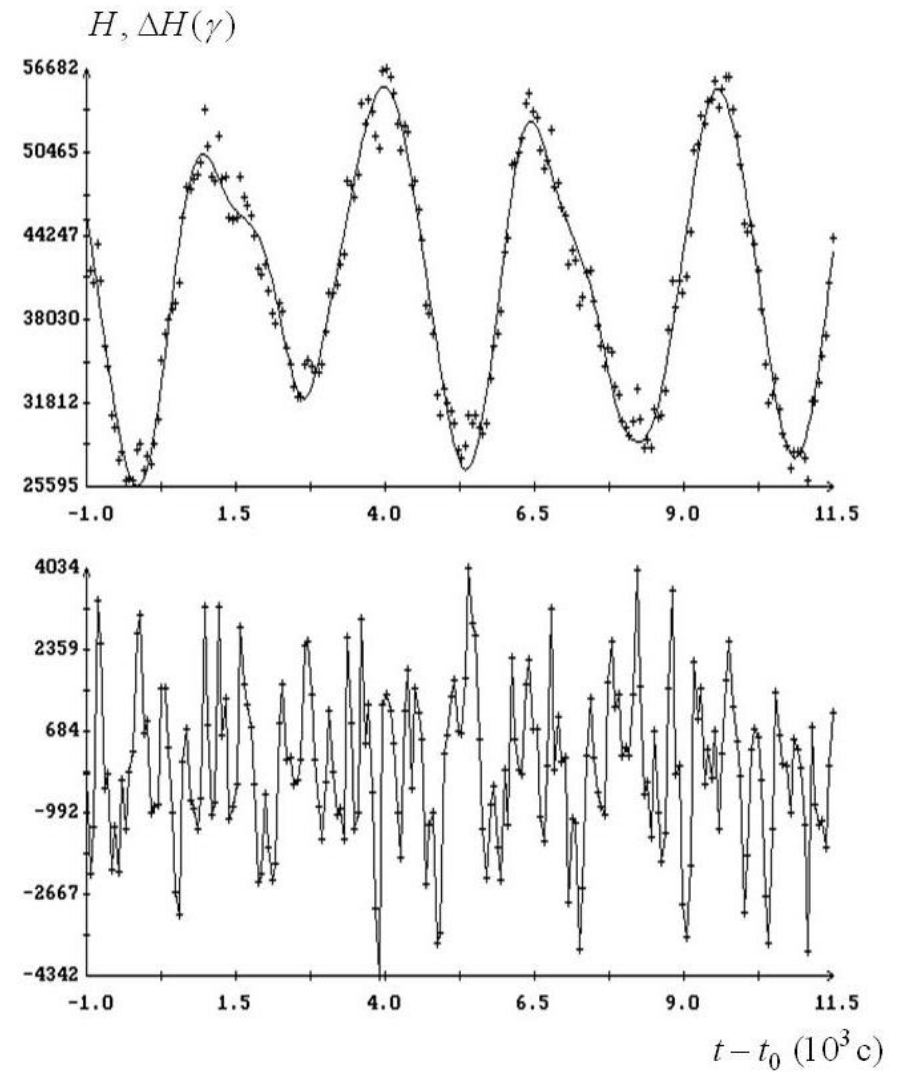
$$\Delta_i = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N [h_i^{(n)} - h_i(t_n)], \quad h_i(t) = \sum_{j=1}^3 b_{ij} h_j^{\circ}(t).$$

Здесь Δ_i – оценки постоянных смещений в псевдоизмерениях, $h_j^{\circ}(t)$ – компоненты напряженности МПЗ в точке O в системе координат $Ox_1x_2x_3$, рассчитываемые с помощью модели IGRF2005. В качестве t_0 в уравнениях (1.2) всегда использовалась начальная точка обрабатываемого отрезка данных. Некоторые псевдоизмерения наследовали локальные ошибки данных измерений, что становилось ясным в процессе минимизации функционала (1.3). Такие псевдоизмерения из дальнейшей обработки исключались.

Функционал (1.3) минимизировался по 11 величинам: начальным условиям решения системы (1.2) $\gamma(t_0)$, $\delta(t_0)$, $\beta(t_0)$, Ω , $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$ и ее параметрам λ , p , ε , α_c , β_c . Заключительный этап минимизации выполнялся методом Гаусса – Ньютона. Точность аппроксимации псевдоизмерений и разброс в оцениваемых величинах характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Стандартные отклонения рассчитывались в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях $h_i^{(n)}$ некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в псевдоизмерениях с одинаковым нижним индексом i одинаковы (величины Δ_i в (1.3) – оценки этих средних значений).

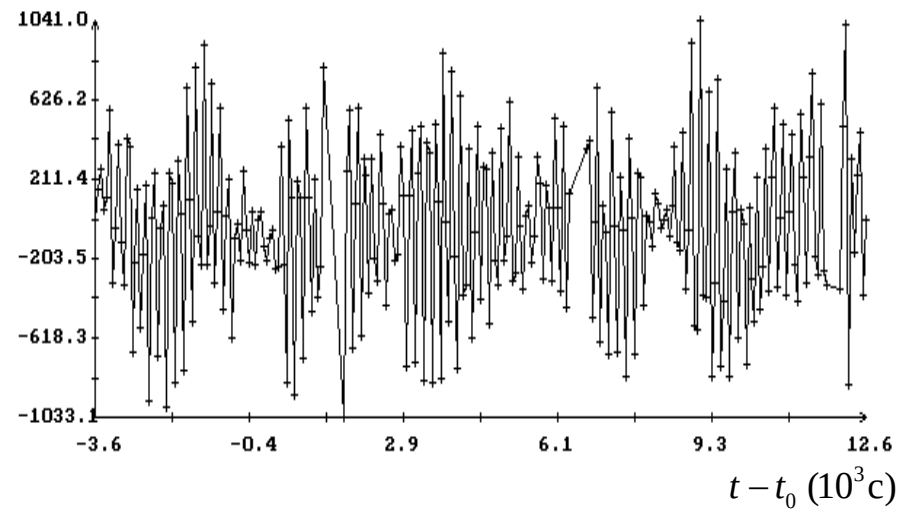
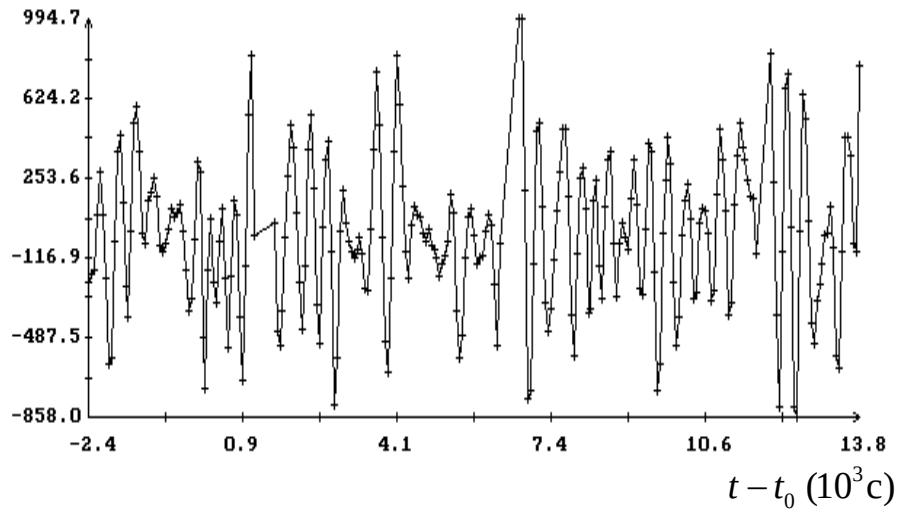
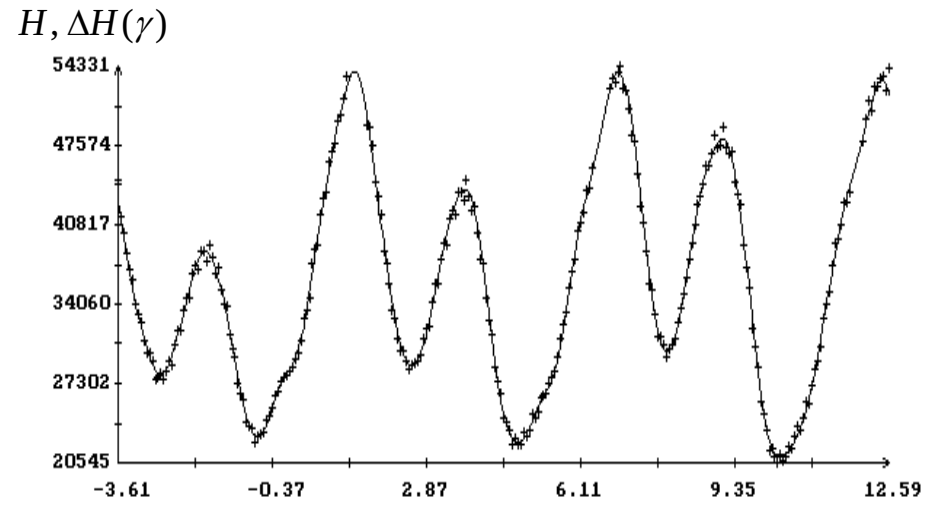
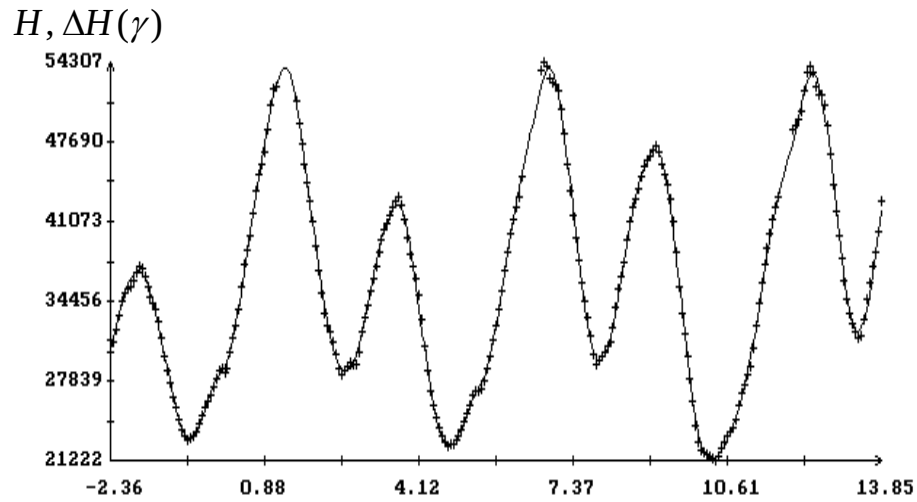


(a)



(б)

Рис. 1. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ; (а) момент времени $t_0 = 01:39:31$ UTC 13.09.1999, $CKO(\Delta H) = 1374\gamma$; (б) момент времени $t_0 = 18:50:05$ UTC 18.09.1999, $CKO(\Delta H) = 1649\gamma$



(a)

(б)

Рис. 2. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ; (а) момент времени $t_0 = 11:12:38$ UTC 02.06.2005, $СКО(\Delta H) = 352 \gamma$; (б) момент времени $t_0 = 09:20:09$ UTC 08.06.2005, $СКО(\Delta H) = 473 \gamma$.

Стандартные отклонения вычислялись так. Пусть $\Phi_{\min}$ – значение функционала (1.3) в точке минимума, C – матрица системы нормальных уравнений метода Гаусса–Ньютона в этой точке (матрица $2C$ приблизительно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi$ в точке минимума Φ). Тогда дисперсия ошибок в псевдоизмерениях оценивается величиной

$$\sigma_H^2 = \frac{\Phi_{\min}}{3N - 11}.$$

Стандартные отклонения оцениваемых величин равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma_H^2 C^{-1}$. Эти стандартные обозначим $\sigma_\gamma, \sigma_\delta, \sigma_\beta, \sigma_{w2}, \sigma_{w3}, \sigma_\Omega, \sigma_\lambda, \sigma_p, \sigma_\varepsilon, \sigma_{\alpha c}, \sigma_{\beta c}$; индексы указывают соответствие с оцениваемыми величинами.

Результаты реконструкции фактического движения спутников, полученные описанным способом, приведены на рис. 3, 4 и 5, 6 и в табл. 1 и 2 для Фотон-12 и Фотон М-2, соответственно. В подписях к рисункам и в таблице использовано Всемирное координированное время (UTC). Движение реконструировано на 25 и 17 временных интервалах для Фотон-12 и Фотон М-2 соответственно. Длина каждого интервала составляет 210 – 270 мин. Длина выбрана таким образом, чтобы значения σ_H для них были не слишком велики, т. е. принятая модель движения была достаточно адекватна. Рисунки иллюстрируют качество аппроксимации псевдоизмерений с помощью найденных решений уравнений (1.2) и описываемое этими решениями движение спутника относительно системы координат $CZ_1Z_2Z_3$. Отдельный рисунок характеризует движение лишь на сравнительно коротком интервале времени, но взятые вместе они позволяют получить представление об эволюции движения на продолжительном отрезке неуправляемого полета. Каждый из рис. 3 – 6 естественным образом разбивается на три части – левую, среднюю и правую. В правой части сплошные кривые суть графики функций $h_i(t)$ на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, маркеры указывают точки $(t_n, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Такие графики и графики остатков $h_i^{(n)} - \Delta_i - h_i(t_n)$ служили для выявления сбойных

псевдоизмерений. Количественно аппроксимация псевдоизмерений характеризуется стандартным отклонением σ_H , значения которого приведены в табл. 1, 2 и в подписях к рисункам.

Приведенные примеры демонстрируют менее точную, чем в [1, 2, 3, 5, 50] аппроксимацию псевдоизмерений. Значения σ_H в табл. 1 и 2 несколько выше, чем в [1, 2, 3, 5]. Тем не менее, достигнутая точность достаточна для целей данной работы.

Таблица 1. Результаты обработки измерений МПЗ на спутнике Фотон-12

№ инт.	Дата 09.1999	t_0 UTC	T , мин	σ_H , γ	$\bar{\omega}_1$, град./с	$\delta\omega_1$, град./с	$\bar{\omega}_\perp$, град./с	$\delta w_\perp$, град./с
1	11	03:32:48	150	2013	0.3314	0.0057	0.1229	0.036
2	11	13:14:35	210	2602	0.4184	0.0052	0.0950	0.028
3	12	03:14:34	210	2158	0.4916	0.0043	0.1085	0.028
4	12	15:57:21	210	2247	0.5411	0.0071	0.1593	0.021
5	13	01:57:09	210	2100	0.6074	0.0002	0.0978	0.027
6	13	13:59:31	210	2269	0.6473	0.0018	0.0700	0.026
7	14	05:38:46	210	2286	0.6982	0.0039	0.1289	0.020
8	14	18:56:55	210	2589	0.7495	0.0071	0.1314	0.010
9	15	02:18:35	210	2084	0.7808	0.0049	0.1432	0.0092
10	15	13:18:34	210	2492	0.8178	0.0042	0.1605	0.0070
11	15	23:40:47	210	1821	0.8496	0.0021	0.1492	0.0090
12	16	11:40:41	210	2201	0.8729	0.0052	0.1473	0.0074
13	16	16:59:44	210	2152	0.8868	0.0039	0.1472	0.0072
14	17	19:05:14	210	1840	0.9422	0.0003	0.1524	0.0055
15	18	18:33:07	210	1960	0.9716	0.0005	0.1761	0.0055
16	18	21:54:51	210	1928	0.9861	0.0036	0.1668	0.0050
17	19	08:54:51	210	1766	1.0090	0.0020	0.1102	0.0047
18	19	21:55:05	197	1650	1.0157	0.0000	0.0982	0.0050
19	20	07:55:22	206	2002	1.0287	0.0003	0.1466	0.0063
20	20	19:56:17	210	2138	1.0360	0.0018	0.1528	0.0062
21	21	05:50:08	210	1688	1.0458	0.0000	0.1234	0.012
22	21	21:13:34	210	2449	1.0383	0.0051	0.1440	0.0092
23	22	07:55: 02	210	2310	1.0450	0.0026	0.1407	0.0069
24	22	22:54:54	210	2007	1.0399	0.0014	0.1479	0.0068
25	23	02:53:52	275	2482	1.0394	0.0007	0.1461	0.012

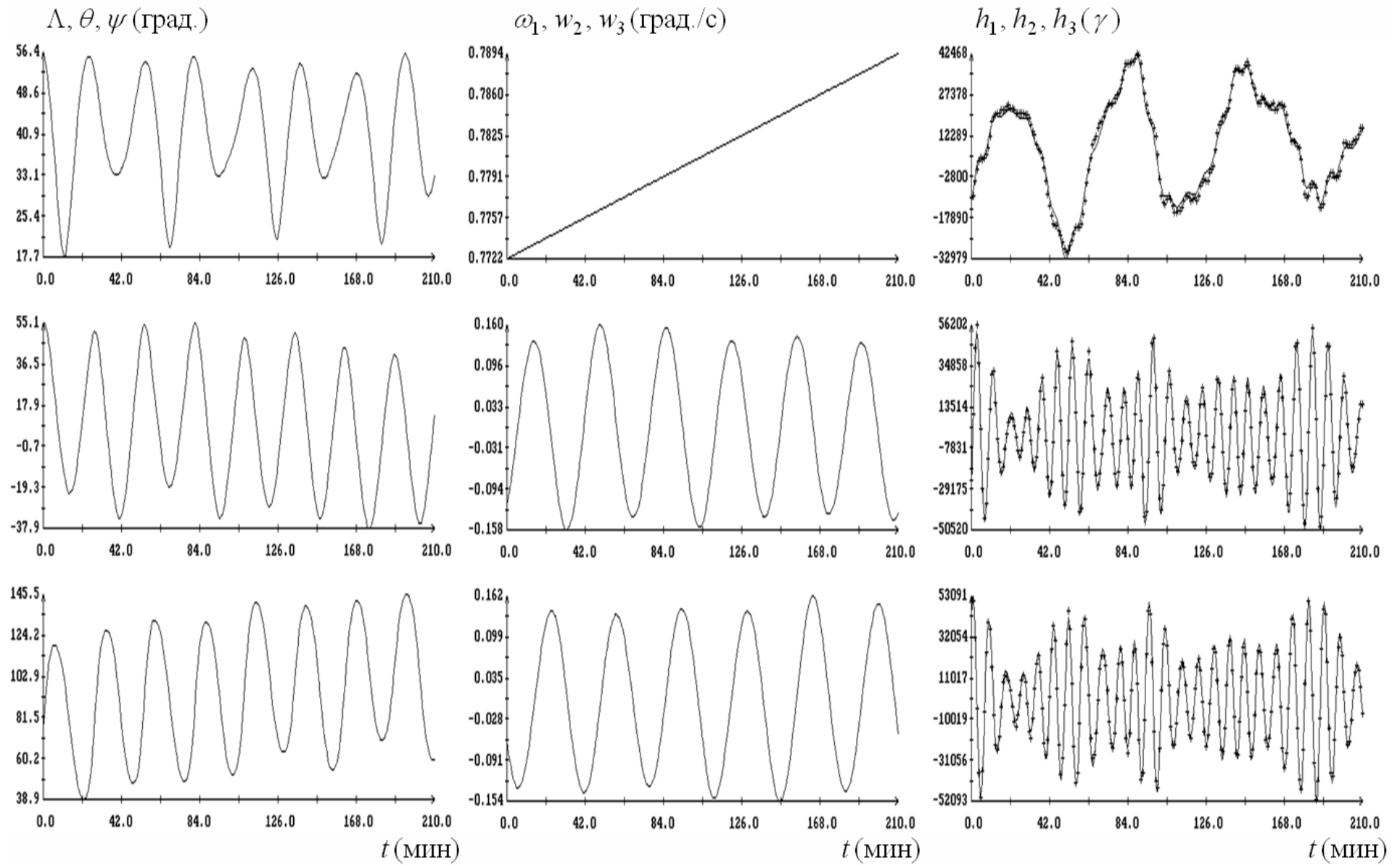


Рис. 3. Интервал 9. Момент $t = 0$ соответствует 02:18:35 UTC 15.09.1999, $\sigma_H = 2084 \gamma$.

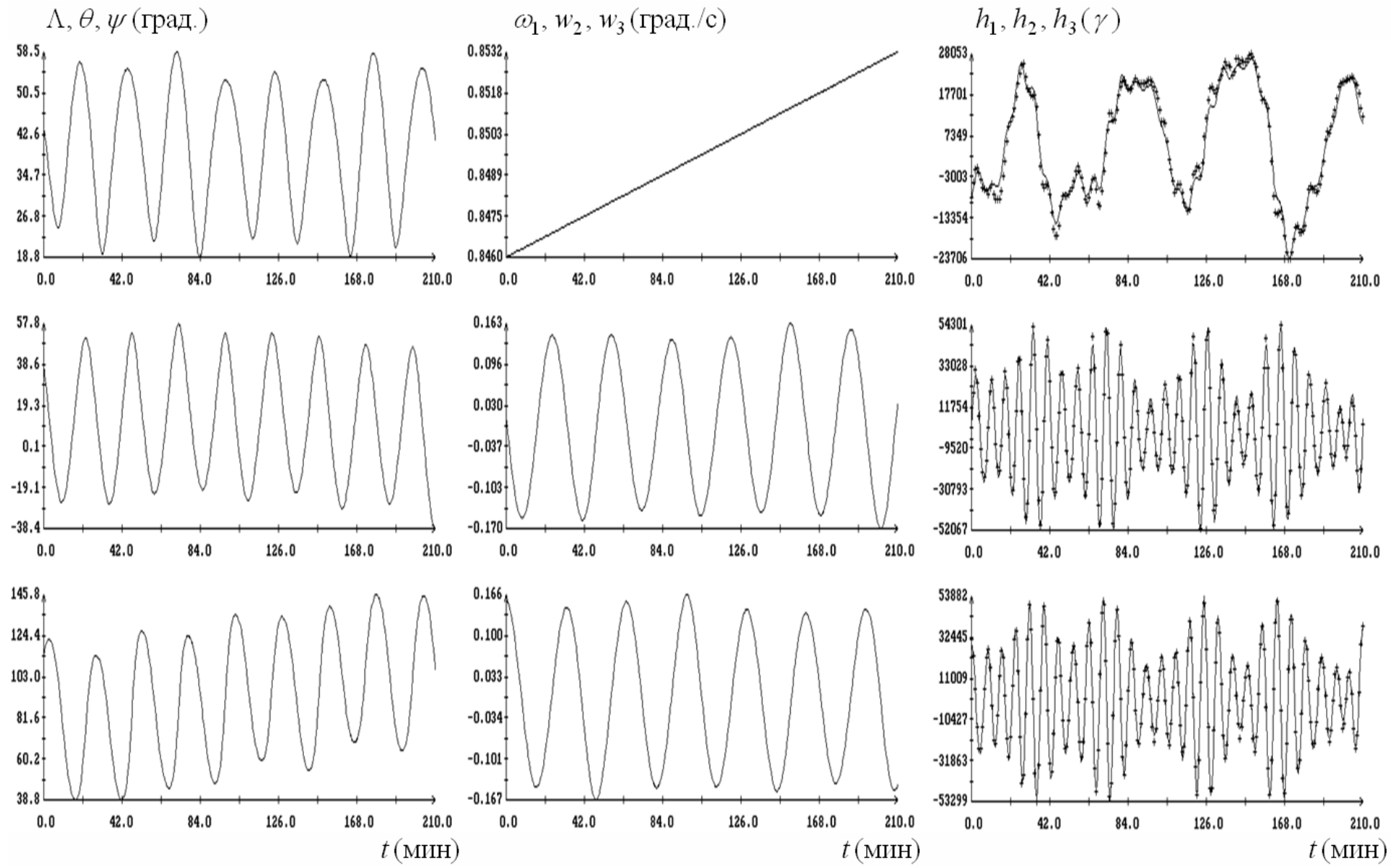


Рис. 4. Интервал 11. Момент $t = 0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999, $\sigma_H = 1821 \gamma$.

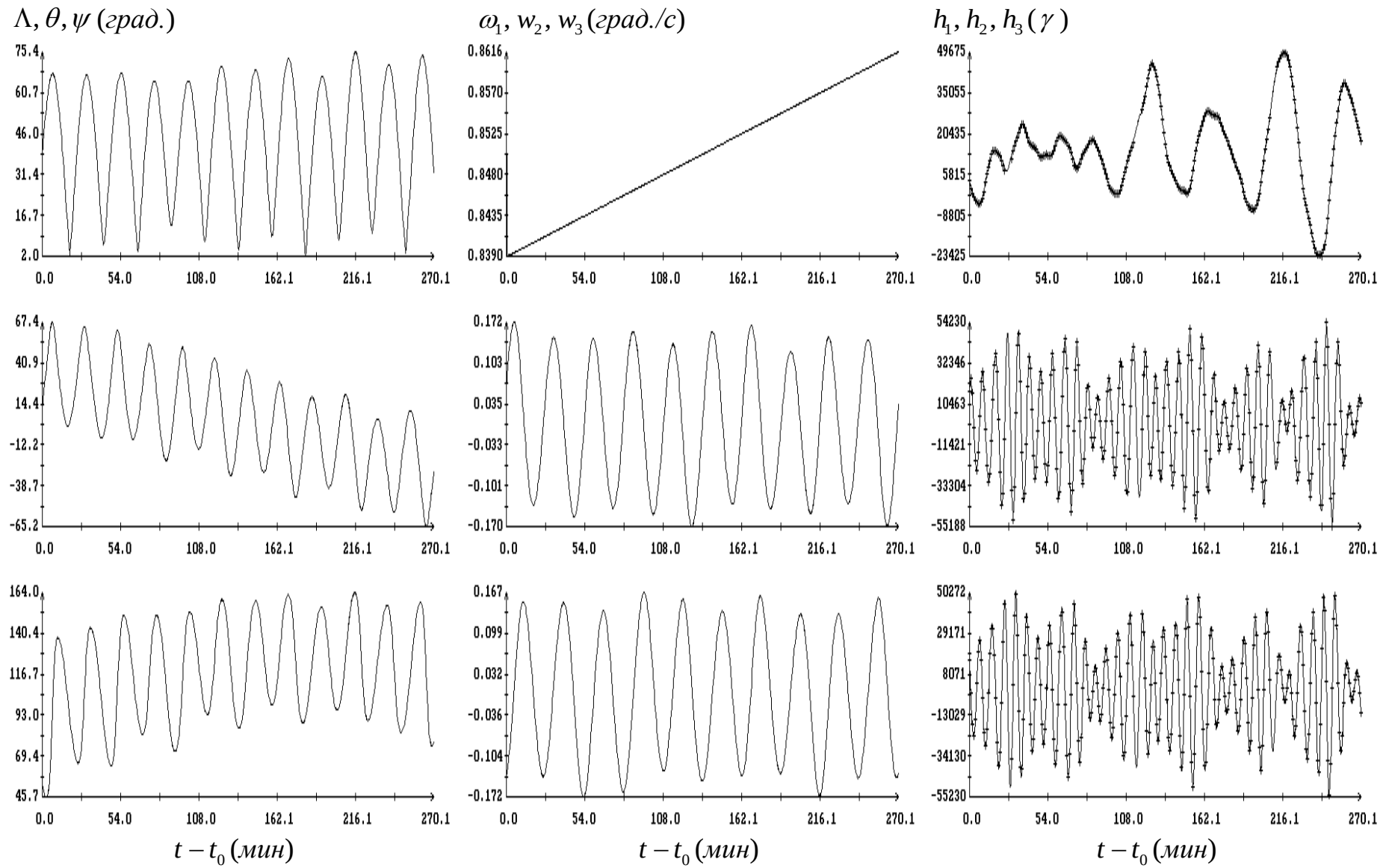


Рис. 5. Интервал d4, $t_0 = 13:15:14$ UTC 04.06.2005, $\sigma_H = 825 \gamma$.

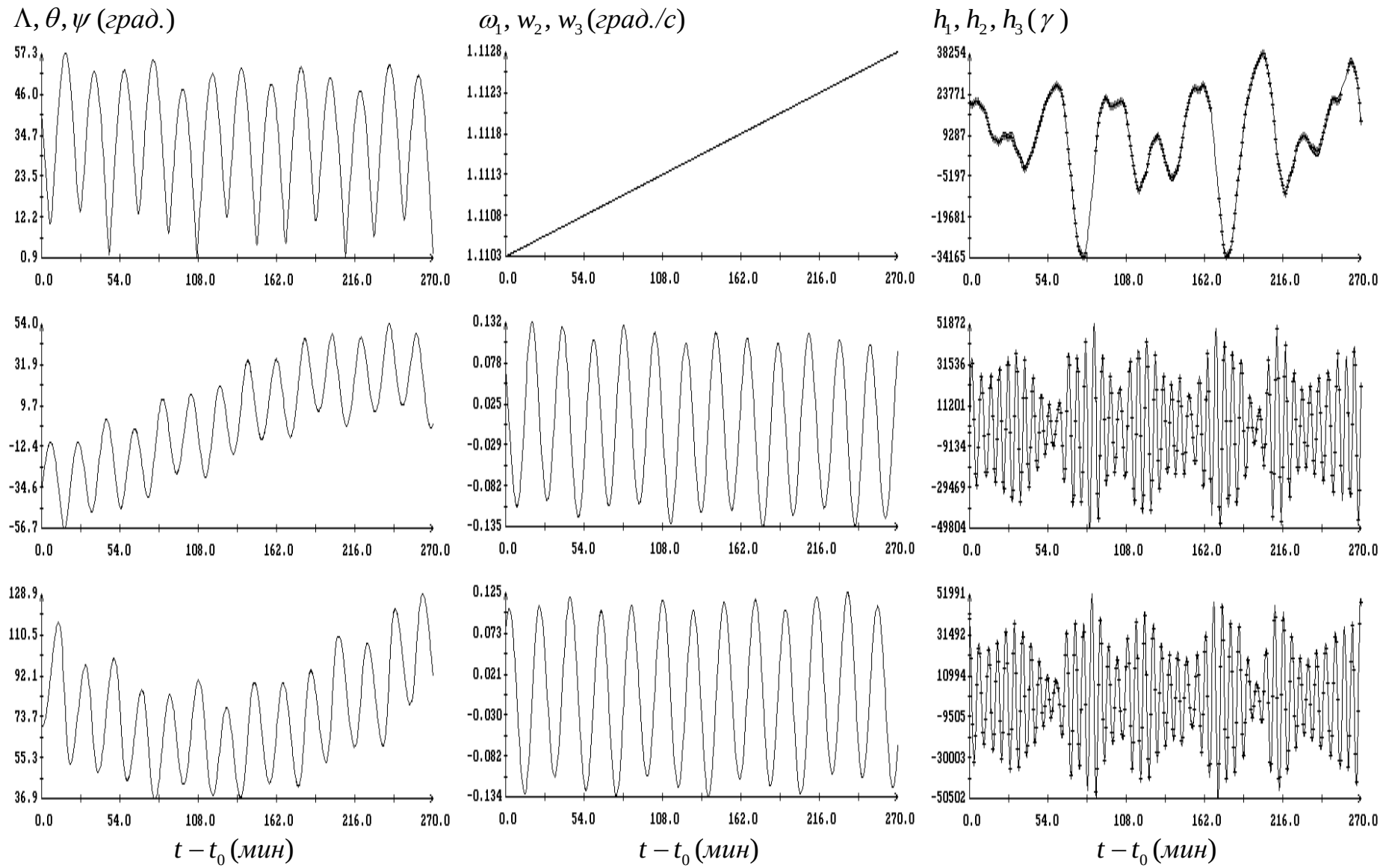


Рис. 6. Интервал d8, $t_0 = 09:20:09$ UTC 08.06.2005, $\sigma_H = 999 \gamma$.

Таблица 2. Результаты обработки измерений МПЗ, выполненных на спутнике Фотон М-2

Инт.	Дата VI.05	t_0 UTC	σ_H , γ	$\bar{\omega}_1$ град./с	$\delta\omega_1$ град./с	$\bar{\omega}_\perp$ град./с	$\delta\omega_\perp$ град. /с
d1	1	11:11:21	1453	0.3133	0.013	0.0816	0.046
d1_5	2	0:12:03	1206	0.4416	0.014	0.1007	0.039
d2	2	11:12:38	1424	0.5208	0.0090	0.0669	0.030
d2_5	3	00:13:19	822	0.6459	0.016	0.0708	0.024
d3	3	11:13:53	1046	0.7462	0.0061	0.0562	0.016
d3_5	4	00:14:37	1102	0.7890	0.0056	0.0953	0.029
d4	4	13:15:14	825	0.8502	0.0065	0.1475	0.014
d4_5	5	00:19:03	1146	0.8943	0.0036	0.1497	0.013
d5	5	10:36:28	1137	0.9316	0.0012	0.1490	0.011
d5_5	5	23:25:37	1293	0.9726	0.0041	0.1482	0.011
d6	6	11:17:43	818	1.0094	0.0070	0.1476	0.011
d6_5	6	22:18:29	982	1.0423	0.0032	0.1421	0.010
d7	7	09:18:53	917	1.0665	0.0009	0.1330	0.010
d7_5	7	21:19:54	1004	1.0863	0.0037	0.1148	0.011
d8	8	09:20:09	999	1.1116	0.0007	0.1163	0.010
d8_5	8	21:20:48	840	1.1293	0.0046	0.1094	0.011
d9	9	09:21:25	928	1.1499	0.0002	0.1147	0.010

В средней части рисунков 3 – 6 помещены графики компонент угловой скорости ω_1 , w_2 и w_3 в найденных решениях уравнений (1.2). Похожий режим вращательного движения был у Фотона-11 [50]. По мере увеличения угловой скорости спутника его движение становилось все больше похоже на регулярную прецессию Эйлера динамически симметричного твердого тела. Формирование регулярной прецессии с медленно возрастающей угловой скоростью ω_1 и мало меняющимся значением $\omega_\perp = \sqrt{w_2^2 + w_3^2}$ завершилось после трех – четырех суток полета для двух спутников.

Точная регулярная прецессия Эйлера может иметь место лишь в случае, когда спутник динамически симметричен и главный момент приложенных к нему внешних сил равен нулю. Тогда величины ω_1 и $\omega_\perp$ остаются неизменными во время движения. Для используемой модели первое условие выполнено, а второе – нет. По

этой причине можно говорить лишь о движениях, близких к регулярной прецессии. Такие движения удобно характеризовать величинами

$$\bar{\omega}_{\perp} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \omega_{\perp} dt, \quad \delta\omega_{\perp} = \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (\omega_{\perp} - \bar{\omega}_{\perp})^2 dt \right]^{1/2}$$

и определяемыми аналогичными формулами величинами $\bar{\omega}_1$, $\delta\omega_1$. Для последних имеют место формулы

$$\bar{\omega}_1 = \Omega + \frac{\varepsilon T}{2}, \quad \delta\omega_1 = \frac{|\varepsilon| T}{2\sqrt{3}}.$$

Среднеквадратичные отклонения $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_{\perp}$ характеризуют близость движения спутника к регулярной прецессии с параметрами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_{\perp}$. Значения величин $\bar{\omega}_1$, $\delta\omega_1$, $\bar{\omega}_{\perp}$ и $\delta\omega_{\perp}$ указаны в табл. 1 и 2.

Вернемся к рисункам. В левой части рис. 3 – 6 находятся графики зависимости от времени углов Λ , ψ и θ , задающих положение оси Ox_1 относительно координат $CZ_1Z_2Z_3$. Движение спутника по углам установилось только к интервалу 14 и d4 для Фотона-12 и Фотона М-2 соответственно.

Дополнительные сведения о точности построенных реконструкций можно получить из табл. 3, 4, 5 и 6. В этих таблицах размерные величины выражены в единицах, использованных при интегрировании уравнений (1.2). В табл. 3, 5 приведены стандартные отклонения оценок параметров, задающих начальные условия найденных решений системы (1.2), в табл. 4 и 6 приведены оценки параметров p , λ , ε , α_c , β_c и их стандартные отклонения. Как показывает сопоставление значений $\bar{\omega}_1$ и ε в табл. 1 и 4, 2 и 6 с ростом $\bar{\omega}_1$ значения ε имеют тенденцию к уменьшению. По-видимому, возрастает не учитываемый в уравнениях (1.2) момент сопротивления $\sim \omega_1$. Оценки p в табл. 4 и 6 меняются хаотически, хотя для почти всех интервалов $\sigma_p \ll |p|$. Такое изменение p неудивительно, поскольку принятая модель действующего на спутник аэродинамического момента весьма упрощенная. По сравнению с параметром p оценки параметров λ , α_c , β_c

более стабильны. В них заметна зависимость от $\bar{\omega}_1$, но по мере возрастания этой величины они стабилизируются.

Таблица 3. Стандартные отклонения оценок начальных условий вращательного движения спутника Фотон-12

№ инт.	σ_γ	σ_δ	σ_β	σ_Ω	σ_{w2}	σ_{w3}
1	0.025	0.018	0.014	0.018	0.016	0.027
2	0.026	0.012	0.010	0.013	0.021	0.015
3	0.028	0.0080	0.0066	0.0085	0.038	0.033
4	0.022	0.010	0.0083	0.011	0.017	0.055
5	0.022	0.028	0.012	0.0069	0.022	0.048
6	0.022	0.023	0.011	0.0093	0.030	0.018
7	0.022	0.014	0.014	0.011	0.024	0.053
8	0.017	0.018	0.0094	0.011	0.030	0.045
9	0.013	0.011	0.014	0.016	0.044	0.038
10	0.027	0.013	0.0097	0.021	0.055	0.048
11	0.020	0.018	0.016	0.013	0.058	0.019
12	0.038	0.037	0.0072	0.018	0.027	0.048
13	0.021	0.010	0.011	0.022	0.024	0.064
14	0.011	0.0095	0.014	0.022	0.035	0.038
15	0.016	0.011	0.016	0.015	0.050	0.055
16	0.071	0.070	0.010	0.014	0.050	0.021
17	0.018	0.016	0.0098	0.013	0.043	0.033
18	0.019	0.018	0.0097	0.010	0.029	0.042
19	0.026	0.028	0.011	0.015	0.036	0.062
20	0.016	0.0082	0.011	0.015	0.024	0.056
21	0.010	0.011	0.0084	0.0077	0.030	0.034
22	0.027	0.027	0.018	0.015	0.057	0.051
23	0.021	0.013	0.014	0.015	0.031	0.069
24	0.015	0.013	0.0093	0.014	0.068	0.019
25	0.017	0.017	0.0091	0.015	0.027	0.063

Таблица 4. Оценки и стандартные отклонения параметров уравнений движения

№ инт.	p	σ_p	λ	σ_λ	ε	σ_ε	α_c	$\sigma_{\alpha c}$	β_c	$\sigma_{\beta c}$
1	-0.0484	0.026	0.2548	0.0021	0.0393	0.0035	0.0025	0.0074	-0.0486	0.0074
2	0.0113	0.014	0.2617	0.00068	0.0381	0.0019	-0.0022	0.0074	-0.0530	0.0075
3	-0.0569	0.024	0.2460	0.00052	0.0309	0.0012	-0.0051	0.0052	-0.0564	0.0051
4	-0.3708	0.032	0.2431	0.0010	0.0512	0.0018	-0.0136	0.0072	-0.0565	0.0072
5	-0.0219	0.017	0.2454	0.00037	0.0033	0.0016	0.0100	0.0050	-0.0440	0.0050
6	0.0671	0.015	0.2494	0.00052	0.0174	0.0013	0.0124	0.0054	-0.0560	0.0054
7	-0.0184	0.033	0.2448	0.00058	0.0221	0.0013	-0.0098	0.0062	-0.0510	0.0062
8	-0.0182	0.038	0.2423	0.00066	0.0364	0.00094	-0.0254	0.0061	-0.0532	0.0061
9	-0.1487	0.038	0.2391	0.0073	0.0210	0.00099	-0.0154	0.0056	-0.0673	0.0056
10	-0.0187	0.041	0.2323	0.0013	0.0185	0.0011	-0.0120	0.0065	-0.0665	0.0065
11	-0.0035	0.033	0.2386	0.00059	0.0032	0.0010	-0.0291	0.0056	-0.0568	0.0056
12	0.1122	0.036	0.2435	0.00083	0.0239	0.00088	-0.0085	0.0056	-0.0654	0.0055
13	0.0352	0.036	0.2424	0.0010	0.0203	0.00086	-0.0371	0.0053	-0.0618	0.0053
14	-0.0300	0.033	0.2362	0.0013	-0.0044	0.00069	-0.0344	0.0045	-0.0563	0.0045
15	-0.0802	0.043	0.2302	0.00085	0.0023	0.00079	-0.0149	0.0047	-0.0638	0.0047
16	-0.0846	0.046	0.2395	0.00075	0.0194	0.00072	-0.0296	0.0049	-0.0560	0.0049
17	0.0216	0.029	0.2403	0.00059	0.0070	0.00071	-0.0461	0.0053	-0.0591	0.0053
18	-0.2518	0.029	0.2379	0.00051	0.0041	0.00070	-0.0531	0.0044	-0.0651	0.0044
19	-0.1455	0.043	0.2346	0.00077	-0.0023	0.0011	-0.0372	0.0050	-0.0647	0.0060
20	-0.2035	0.062	0.2372	0.0010	0.0049	0.0010	-0.0498	0.0074	-0.0594	0.0073
21	-0.0817	0.039	0.2384	0.00046	-0.0053	0.00082	-0.0350	0.0059	-0.0707	0.0059
22	-0.2436	0.048	0.2399	0.00069	-0.0286	0.0011	-0.0428	0.0061	-0.0683	0.0061
23	-0.1875	0.044	0.2429	0.00059	0.0164	0.0012	-0.0566	0.0074	-0.0697	0.0074
24	-0.2449	0.041	0.2431	0.00050	0.0067	0.00099	-0.0514	0.0058	-0.0682	0.0058
25	-0.1432	0.059	0.2304	0.00071	-0.0079	0.00064	-0.0484	0.0073	-0.0692	0.0073

Таблица 5. Стандартные отклонения оценок начальных условий вращательного движения спутника Фотон М-2

Инт.	σ_γ	σ_δ	σ_β	σ_Ω	σ_{w2}	σ_{w3}
d1	0.013	0.014	0.012	0.0049	0.012	0.018
d1_5	0.010	0.0056	0.0044	0.0036	0.026	0.014
d2	0.011	0.0094	0.0087	0.0035	0.020	0.013
d2_5	0.0061	0.0036	0.0043	0.0028	0.0095	0.012
d3	0.0071	0.0026	0.0039	0.0027	0.015	0.014
d3_5	0.0089	0.0053	0.0043	0.0037	0.012	0.014
d4	0.0056	0.0042	0.0044	0.0037	0.018	0.0092
d4_5	0.0081	0.0059	0.0026	0.0048	0.015	0.026
d5	0.0067	0.0057	0.0060	0.0048	0.029	0.012
d5_5	0.0074	0.0064	0.0040	0.0055	0.010	0.030
d6	0.011	0.011	0.0024	0.0047	0.0082	0.020
d6_5	0.010	0.0080	0.0047	0.0039	0.012	0.019
d7	0.0083	0.0071	0.0023	0.0043	0.010	0.025
d7_5	0.010	0.010	0.0059	0.0035	0.022	0.012
d8	0.0062	0.0056	0.0056	0.0043	0.020	0.019
d8_5	0.0064	0.0059	0.0024	0.0030	0.020	0.0075
d9	0.0069	0.0030	0.0047	0.0040	0.011	0.021

Приведем еще несколько рисунков, служащих дополнительной иллюстрацией уже сформировавшегося режима вращательного движения с большой угловой скоростью. На рис. 7 и 8 изображены в правой части фрагменты проекции годографа орта оси Ox_1 (тонкие кривые) и орта E_1 на плоскость орбиты для спутников Фотон-12 и Фотон М-2 соответственно. Проекции изображены в системе координат CZ_1Z_3 . Если бы движение спутника было точной регулярной прецессией Эйлера и его орбита была неизменной в абсолютном пространстве, то кривые на этих рисунках представляли бы собой эллипсы. Вследствие действия на спутник внешних моментов и регрессии узла орбиты направление оси прецессии медленно менялось [9], поэтому кривые выглядят как проекции на плоскость кусков изогнутой спирали.

Таблица 6. Оценки и стандартные отклонения параметров уравнений движения

Инт.	p	σ_p	λ	σ_λ	ε	σ_ε	α_c	$\sigma_{\alpha c}$	β_c	$\sigma_{\beta c}$
d1	-0.0171	0.00043	0.2812	0.00052	0.0481	0.00052	-0.0051	0.0030	0.0286	0.0030
d1_5	-0.0161	0.00017	0.2805	0.00016	0.0502	0.00030	-0.0033	0.0023	0.0144	0.0023
d2	-0.0015	0.00043	0.2709	0.00030	0.0337	0.00034	-0.0052	0.0030	0.0181	0.0029
d2_5	-0.0223	0.00025	0.2727	0.00014	0.0609	0.00025	-0.0051	0.0016	0.0151	0.0016
d3	-0.0189	0.00067	0.2644	0.00019	0.0226	0.00029	-0.0037	0.0021	0.0146	0.0021
d3_5	-0.0054	0.00051	0.2651	0.00010	0.0210	0.00036	-0.0045	0.0021	0.0171	0.0021
d4	-0.0138	0.00039	0.2664	0.00016	0.0244	0.00023	-0.0060	0.0018	0.0178	0.0018
d4_5	-0.0129	0.00060	0.2643	0.00023	0.0134	0.0031	-0.0047	0.0023	0.0177	0.0023
d5	-0.0097	0.00073	0.2627	0.00020	0.0046	0.00023	-0.0041	0.0026	0.0181	0.0026
d5_5	-0.0076	0.00071	0.2637	0.00021	0.0153	0.00026	-0.0052	0.0026	0.0195	0.0026
d6	-0.0115	0.00049	0.2623	0.00019	0.0261	0.00019	-0.0059	0.0019	0.0175	0.0019
d6_5	-0.0104	0.00056	0.2617	0.00016	0.0118	0.00018	-0.0052	0.0019	0.0180	0.0019
d7	-0.0129	0.00057	0.2597	0.00017	0.0033	0.00021	-0.0019	0.0021	0.0157	0.0021
d7_5	-0.0115	0.00052	0.2618	0.00013	0.0137	0.00013	-0.0055	0.0020	0.0184	0.0020
d8	-0.0087	0.00064	0.2613	0.00017	0.0028	0.00021	-0.0035	0.0023	0.0172	0.0023
d8_5	-0.0104	0.00051	0.2618	0.00012	0.0171	0.00014	-0.0049	0.0017	0.0191	0.0017
d9	-0.0082	0.00060	0.2603	0.00015	0.0006	0.00020	-0.0073	0.0021	0.0161	0.0021

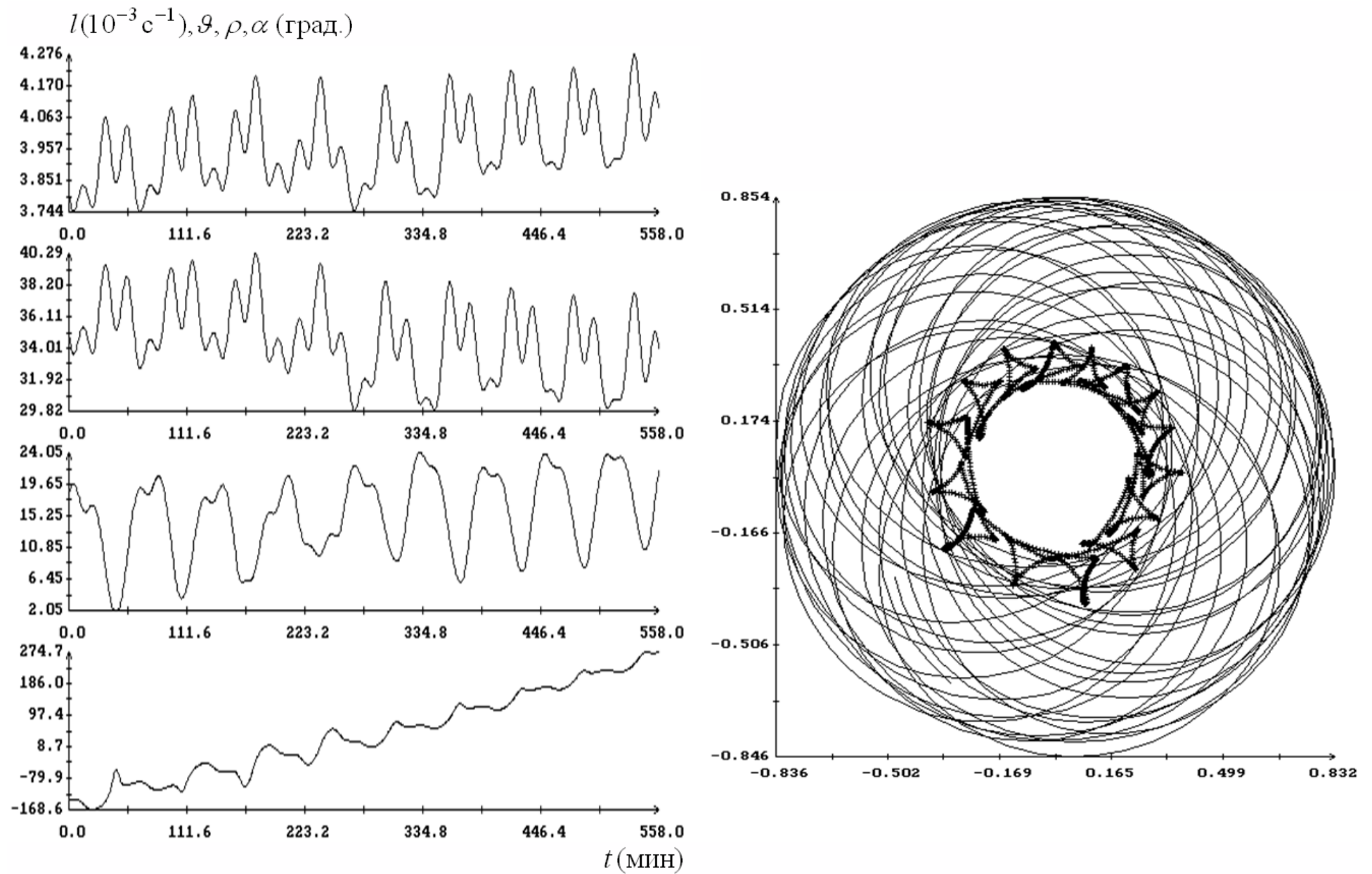


Рис. 7. Продолжение интервала 11. Слева характеристики возмущенной прецессии Эйлера, момент $t=0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999. Справа проекции на плоскость орбиты годографа орта оси (тонкие кривые) и орта E_1

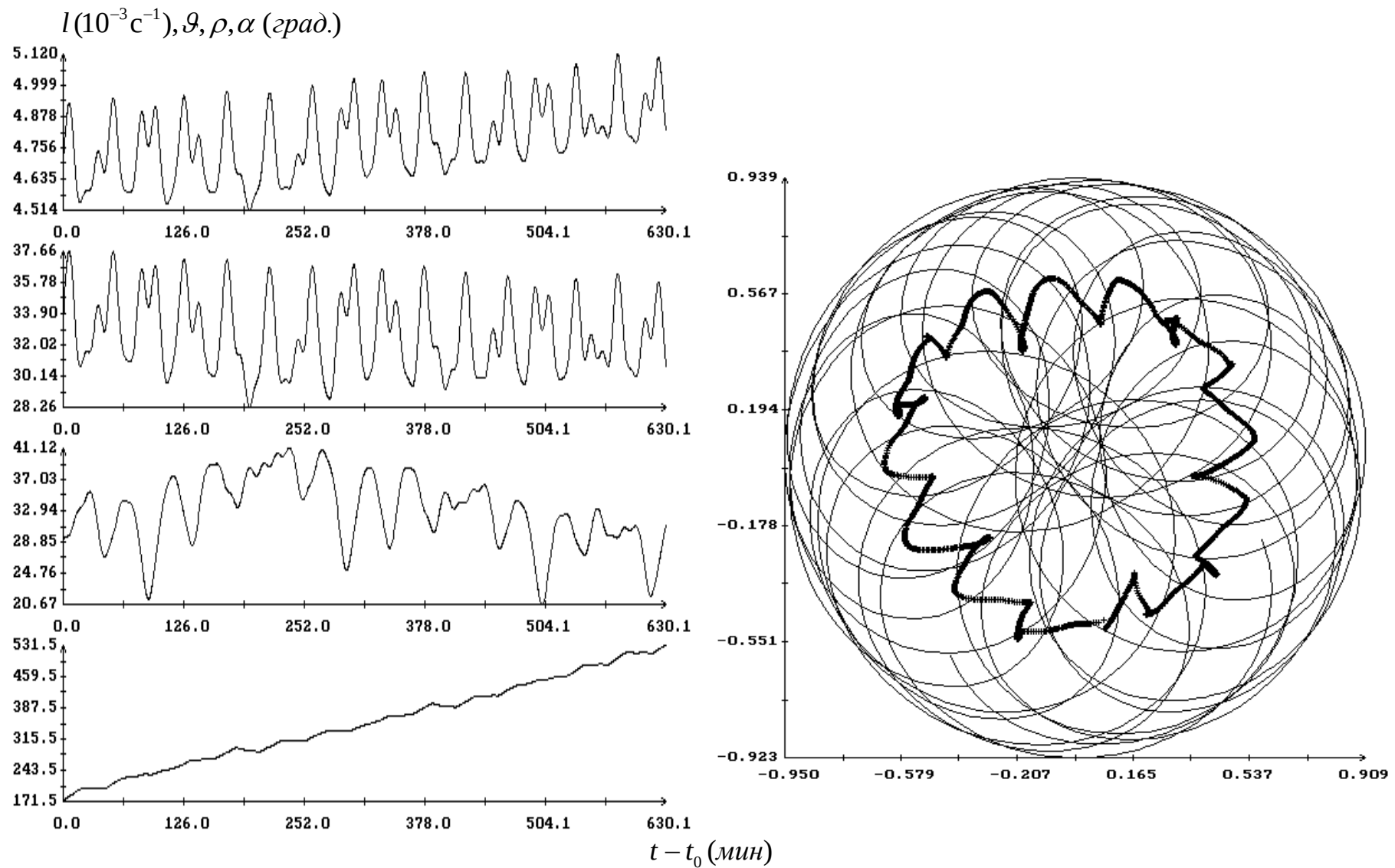


Рис. 8. Продолжение интервала d4. Слева характеристики возмущенной прецессии Эйлера, $t_0 = 13:15:14$ UTC 04.06.2005. Справа проекции на плоскость орбиты CZ_1Z_3 годографа орта оси Ox_1 (тонкие кривые) и орта E_1 .

1.4 Увеличение угловой скорости спутников

Согласно высказанной выше гипотезе раскрутка спутника происходила под действием механического момента, компоненты которого были неизменны в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Раскрутка происходила вокруг оси Ox_1 и согласно принятой модели вызывалась компонентой $I_1\varepsilon$ (см. систему 1.2) указанного постоянного момента.

На спутник действовали и другие моменты, не учтенные в уравнениях (1.2) и аналогичных уравнениях работ [1, 2, 3, 5, 17, 50], в частности, диссипативный аэродинамический момент и диссипативный момент от вихревых токов, наведенных МПЗ в корпусе спутника. Оба эти момента линейно зависят от угловой скорости спутника и очень малы.

Их невозможно отделить от постоянного момента на интервалах времени длиной 200÷300 мин, но именно эти диссипативные моменты препятствовали неограниченному возрастанию угловой скорости ω_1 . Наличие этих моментов проявляется как уменьшение оценок величины ε с ростом $\bar{\omega}_1$ (см. табл. 1, 2, 4, 6).

В действительности оценка ε представляет собой некоторое среднее значение деленной на I_1 суммы постоянного момента и ряда других малых внешних моментов, в том числе, диссипативных. Принимая во внимание характер движения спутника, влияние перечисленных выше малых моментов на эволюцию ω_1 во время неуправляемого полета можно приближенно описать уравнением

$$\dot{\omega}_1 + a\omega_1 = \varepsilon. \quad (1.4)$$

Здесь a и ε – постоянные параметры, причем $I_1\varepsilon$ и $-I_1a\omega_1$ – компоненты постоянного момента и диссипативного момента вдоль оси Ox_1 (см. магнитный диссипативный момент в разделе 2.1). Общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$\omega_1 = \omega_1^* + c \exp(-at), \quad \omega_1^* = \frac{\varepsilon}{a}, \quad (1.5)$$

где c – произвольная постоянная. Будем искать a , c и ω_1^* из условия наилучшей аппроксимации величин $\bar{\omega}_1$ в табл. 1 и 2 формулой (1.5). Эти величины относим к серединам интервалов, для которых они были вычислены. За начало отсчета времени примем момент 00:00:00 UTC 11.09.1999 для Фотона-12 и 12:09:49 UTC 31.05.2005 для Фотона М-2. Аппроксимация строилась обычным методом наименьших квадратов, см. рис. 9 и 10.

Описанным способом были получены следующие значения параметров формулы (1.5) для Фотона-12 (см. табл. 1): $a = 0.215 \text{ сут}^{-1}$, $\omega_1^* = 1.124 \text{ град./с}$, $c = -0.850 \text{ град./с}$. На рис. 9 представлены результаты аппроксимации: здесь сплошной линией представлено решение согласно аппроксимации, маркерами на верхнем рисунке – фактические значения, на нижнем рисунке – остатки.

Среднеквадратичная ошибка аппроксимации величин $\bar{\omega}_1$ составила $\sigma_{\bar{\omega}_1} = 0.0128 \text{ град./с}$, стандартные отклонения уточняемых параметров равны $\sigma_a = 0.0085 \text{ сут}^{-1}$, $\sigma_{\omega_1^*} = 0.011 \text{ град./с}$, $\sigma_c = 0.010 \text{ град./с}$. В этом случае $\varepsilon = a\omega_1^* = 0.0488 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$. Оценки ω_1^* и ε наиболее интересны из полученных оценок. В частности, ω_1^* является предельным значением компоненты угловой скорости ω_1 при $t \rightarrow +\infty$. Судя по значениям $\bar{\omega}_1$, приведенным в последних строках табл. 2, к 21.09.1999 процесс раскрутки спутника практически завершился.

Этим способом были также получены следующие значения параметров формулы (1.5) для Фотона М-2 (см. табл. 2): $a = 0.289 \text{ сут}^{-1}$, $\omega_1^* = 1.242 \text{ град./с}$, $c = -1.251 \text{ град./с}$. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации величин $\bar{\omega}_1$ составила $\sigma_{\bar{\omega}_1} = 0.0114 \text{ град./с}$, стандартные отклонения уточняемых параметров равны $\sigma_a = 0.012 \text{ сут}^{-1}$, $\sigma_{\omega_1^*} = 0.015 \text{ град./с}$, $\sigma_c = 0.014 \text{ град./с}$. В этом случае $\varepsilon = a\omega_1^* = 0.0707 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-2}$. Аналогично ω_1^* является предельным значением компоненты угловой скорости ω_1 при $t \rightarrow +\infty$. Судя по найденному значению ω_1^* и приведенному в [5] значению $\bar{\omega}_1 = 1.303 \text{ град./с}$ для сеанса измерений угловой

скорости спутника 13.06.2005, к концу полета процесс раскрутки также практически завершился.

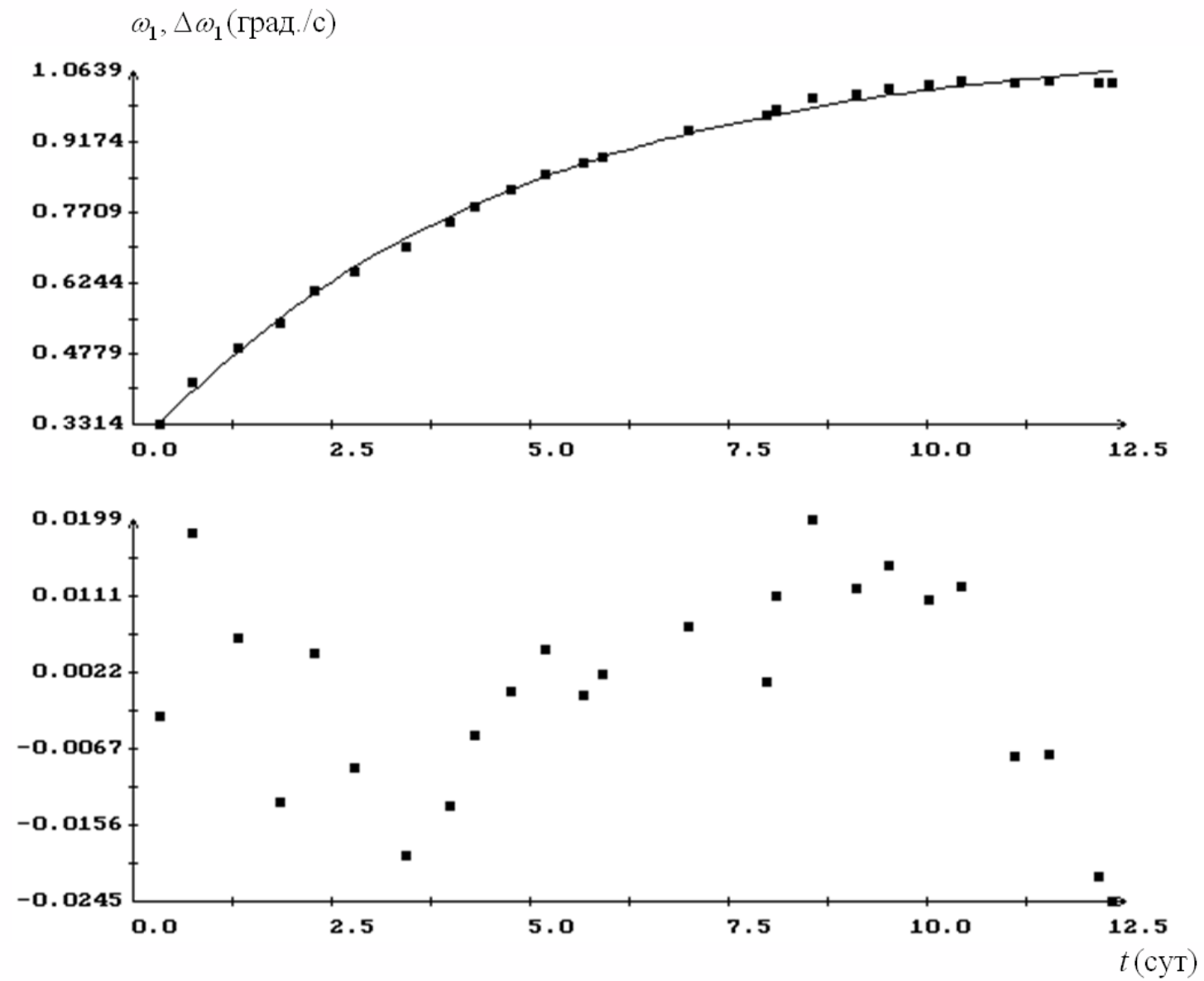


Рис. 9. Увеличение угловой скорости $\bar{\omega}_1$. Момент $t = 0$ соответствует 00:00:00 UTC 11.09.1999.

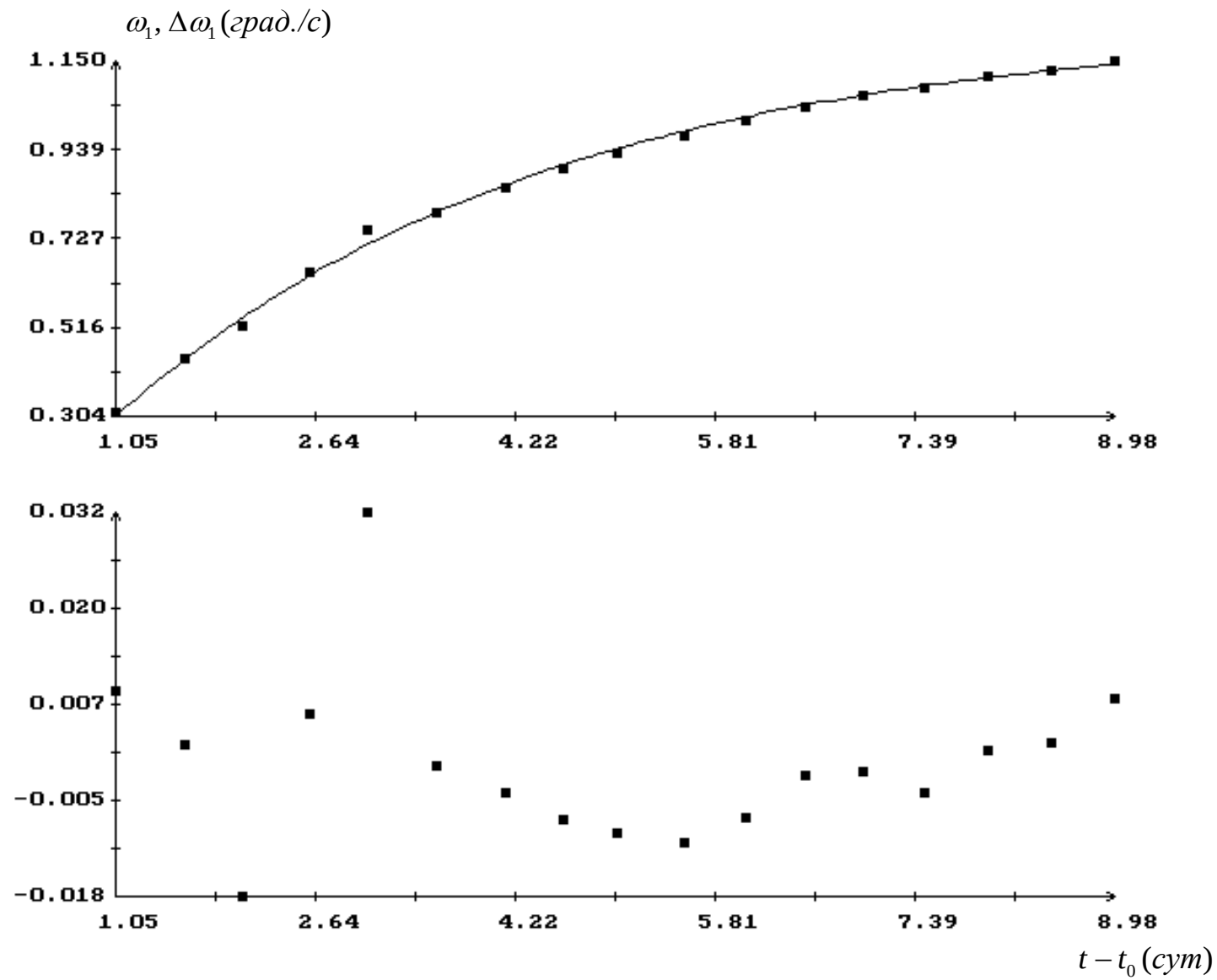


Рис. 10. Увеличение угловой скорости $\bar{\omega}_1$. Момент t_0 соответствует 12:09:49 UTC 31.05.2005

Глава 2. Эволюционные уравнения В.В. Белецкого для движения спутника, близкого к регулярной прецессии Эйлера

2.1 Вращательное движение спутника с большой угловой скоростью

Как следует из рис. 9 и 10, через несколько суток после начала полета угловая скорость спутников увеличилась настолько, что для исследования его вращательного движения стало возможным воспользоваться приближенной аналитической теорией, развитой в [9]. Приведем основные соотношения этой теории применительно к рассматриваемой модели движения.

Кинетический момент $\mathbf{L}$ спутника в его движении относительно центра масс и угловая скорость спутника $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{I_2} + \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{e}_1$ — орт оси Ox_1 . Выписанное соотношение устанавливается непосредственной проверкой в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Уравнения вращательного движения спутника запишем в виде

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \quad \dot{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{e}_1}{I_2}. \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{M}$ — вычисленный относительно точки O главный момент внешних сил, приложенных к спутнику. Первое уравнение (2.2) выражает общую теорему динамики об изменении кинетического момента $\mathbf{L}$, второе уравнение — следствие формулы (2.1) и кинематического уравнения Пуассона $\dot{\mathbf{e}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1$.

Уравнения (2.2) не дают полного описания вращательного движения спутника. Они описывают только изменение его собственного кинетического

момента и движение оси Ox_1 . Однако для описания эволюции движения спутника с большой угловой скоростью эти уравнения достаточны.

В уравнениях (2.2) будем учитывать: 1) гравитационный момент, 2) восстанавливающий аэродинамический момент, 3) диссипативный момент, направленный вдоль оси Ox_1 , 4) момент с постоянными компонентами в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Это, по-видимому, минимальный состав моментов, позволяющий объяснить эволюцию вращательного движения спутника. Гравитационный момент $\mathbf{M}_g$ и аэродинамический момент $\mathbf{M}_a$ зададим формулами, использованными при записи уравнений (1.2)

$$\mathbf{M}_g = -\frac{3I_2\mu_e}{r^5}(1-\lambda)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{M}_a = I_2 E p \rho_a |\mathbf{v}|(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1).$$

Здесь $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор точки O , $\mathbf{v}$ – скорость этой точки относительно гринвичской системы координат, $p = \text{const}$.

Диссипативный момент вдоль оси Ox_1 зададим выражением

$$\mathbf{M}_d = -I_1 \kappa (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1,$$

где κ – постоянный положительный коэффициент.

Момент с постоянными компонентами в системе $Ox_1x_2x_3$ представим в этой системе в виде $\mathbf{M}_0 = (I_1 \varepsilon, M_{02}, M_{03})$. Такой момент использован в (1.2) при $M_{02} = M_{03} = 0$.

Согласно сказанному выше в уравнениях (2.2)

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_d + \mathbf{M}_0.$$

Эти уравнения допускают интегральное соотношение $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$. Приведем еще одно следствие этих уравнений, которое будет использовано в дальнейшем. Умножим скалярно первое уравнение (2.2) на $\mathbf{e}_1$, второе – на $\mathbf{L}$. Получим после некоторых преобразований с учетом (2.1)

$$\frac{d(\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1)}{dt} = I_1 \varepsilon - \kappa(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1). \quad (2.3)$$

Движение спутника с большим значением $L=|\mathbf{L}|$ близко к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела. При изучении такого движения внешние моменты можно рассматривать как малые возмущения. Приближенное интегрирование системы (2.2) в такой ситуации выполняется методом усреднения. Правые части первого уравнения этой системы и уравнения (2.3) усредняются по регулярной прецессии Эйлера в предположении, что параметры прецессии и положение спутника на орбите остаются неизменными. Замена точных уравнений усредненными допустима, если за период прецессии указанные параметры и положение меняются мало [9].

Прежде чем приступить к усреднению, приведем основные соотношения, описывающие регулярную прецессию Эйлера. В этом движении $\mathbf{L}=\text{const}$, изменение орта $\mathbf{e}_1$ описывается вторым уравнением (2.2), и в силу этих двух соотношений $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1 = \text{const}$. Для описания регулярной прецессии введем новый ортонормированный базис

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{L}}{L}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)\mathbf{E}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}},$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}}.$$

Орт $\mathbf{E}_1$ сохраняет неизменное направление в абсолютном пространстве и образует постоянный угол с ортом $\mathbf{e}_1$, орты $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$ вращаются вокруг $\mathbf{E}_1$ с постоянной угловой скоростью $\omega_p = L / I_2$. Последнее утверждение следует из соотношений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_2 &= \frac{\dot{\mathbf{e}}_1}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{e}_1}{I_2 \sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \\ &= \frac{L(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1)}{I_2 \sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \frac{\omega_p (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1)}{\sqrt{1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1)^2}} = \omega_p \mathbf{E}_3, \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{E}}_3 = \mathbf{E}_1 \times \dot{\mathbf{E}}_2 = \omega_p (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_3) = -\omega_p \mathbf{E}_2.$$

Перейдем к усреднению правой части первого уравнения (2.2). Начнем с гравитационного момента. Операцию усреднения некоторой функции по регулярной прецессии Эйлера будем обозначать угловыми скобками с индексом 1: $\langle \cdot \rangle_1$. Поскольку при усреднении орт $\mathbf{r}$ считается неизменным, имеет место соотношение

$$\langle \mathbf{M}_g \rangle_1 = -\frac{3I_2 \mu_e}{r^5} (1 - \lambda) [\mathbf{r} \times \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \rangle_1].$$

Дальнейшие вычисления основаны на равенствах

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3) \mathbf{E}_3,$$

$$\frac{d}{dt} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_3] = \omega_p [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3) \mathbf{E}_3 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2].$$

Первое из них имеет место, поскольку базис $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_3$ ортонормирован; при выводе второго учитывалось, что здесь $\mathbf{r} = \text{const}$, и использовались приведенные выше выражения для производных $\dot{\mathbf{E}}_2$ и $\dot{\mathbf{E}}_3$. Из выписанных равенств получаем

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2} [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1] - \frac{1}{2\omega_p} \frac{d}{dt} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_3],$$

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3) \mathbf{E}_3 = \frac{1}{2} [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1] + \frac{1}{2\omega_p} \frac{d}{dt} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_3].$$

Усредним эти равенства по регулярной прецессии Эйлера и учтем, что среднее значение полной производной по времени ограниченной функции равно нулю. Получим

$$\langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2 \rangle_1 = \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3) \mathbf{E}_3 \rangle_1 = \frac{1}{2} [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1].$$

Так как $\mathbf{e}_1 = c_1 \mathbf{E}_1 + c_2 \mathbf{E}_2$, $c_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}_1$, $c_2 = \sqrt{1 - c_1^2}$, то

$$\langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \rangle_1 = c_1^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1 + c_1 c_2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \langle \mathbf{E}_2 \rangle_1 + c_1 c_2 (\mathbf{r} \cdot \langle \mathbf{E}_2 \rangle_1) \mathbf{E}_1 + c_2^2 \langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2) \mathbf{E}_2 \rangle_1$$

Имеем также $\langle \mathbf{E}_2 \rangle_1 = -\omega_p^{-1} \langle \dot{\mathbf{E}}_3 \rangle_1 = 0$, поэтому

$$\langle (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \rangle_1 = c_1^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1 + \frac{c_2^2}{2} [\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1] = \frac{1-c_1^2}{2} \mathbf{r} + \frac{3c_1^2-1}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{E}_1$$

Окончательно получаем

$$\langle \mathbf{M}_g \rangle_1 = -\frac{3I_2 \mu_e}{2r^5} (1-\lambda)(3c_1^2-1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1).$$

Усреднение аэродинамического момента приводит к формуле

$$\langle \mathbf{M}_a \rangle_1 = I_2 E p \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \langle \mathbf{e}_1 \rangle_1) = I_2 E p c_1 \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1).$$

Здесь использовано соотношение $\langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 = c_1 \mathbf{E}_1$.

Усредняем диссипативный момент. Так как в регулярной прецессии Эйлера $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1) / I_1 = L c_1 / I_1$, имеем

$$\langle \mathbf{M}_d \rangle_1 = -I_1 \kappa (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1) \langle \mathbf{e}_1 \rangle_1 = -\kappa c_1^2 \mathbf{L}, \quad \langle \mathbf{M}_d \cdot \mathbf{e}_1 \rangle_1 = -I_1 \kappa (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_1) = -\kappa c_1 L.$$

Усреднение моментов $\mathbf{M}_0$ проведем при условии

$$c_1 \neq \frac{I_1}{I_2 - I_1}, \quad (2.4)$$

которое полагаем выполненным. Сначала установим несколько вспомогательных соотношений. Рассмотрим уравнения Пуассона для ортов $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ осей Ox_2, Ox_3 . Подставим в уравнение $\dot{\mathbf{e}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2$ выражение (2.1), предварительно преобразовав его к виду

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_p \mathbf{E}_1 + \omega_n \mathbf{e}_1, \quad \omega_n = \omega_p c_1 \frac{I_2 - I_1}{I_1}.$$

С учетом соотношения $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ рассматриваемое уравнение Пуассона можно записать следующим образом

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \omega_p \mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_2 + \omega_n \mathbf{e}_3.$$

Аналогичным образом уравнение $\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3$ следует уравнение

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \omega_p \mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_3 - \omega_n \mathbf{e}_2.$$

Усреднение полученных уравнений по регулярной прецессии Эйлера дает

$$\omega_p \mathbf{E}_1 \times \langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 + \omega_n \langle \mathbf{e}_3 \rangle_1 = 0, \quad \omega_p \mathbf{E}_1 \times \langle \mathbf{e}_3 \rangle_1 - \omega_n \langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 = 0.$$

Умножив последние уравнения скалярно на $\mathbf{E}_1$ и полагая $\omega_n \neq 0$, будем иметь $\mathbf{E}_1 \cdot \langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \langle \mathbf{e}_3 \rangle_1 = 0$. Умножив те же уравнения векторно на $\omega_p \mathbf{E}_1$, получим после несложных преобразований

$$(\omega_p^2 - \omega_n^2) \langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 = (\omega_p^2 - \omega_n^2) \langle \mathbf{e}_3 \rangle_1 = 0.$$

При выполнении условия (2.4) $\omega_p^2 \neq \omega_n^2$ ($\omega_p = \dot{\phi}_1$, $\omega_n = \dot{\phi}_2$, см. п. 3), поэтому

$$\langle \mathbf{e}_2 \rangle_1 = \langle \mathbf{e}_3 \rangle_1 = 0.$$

В силу последних соотношений $\langle \mathbf{M}_0 \rangle_1 = \langle M_{01} \mathbf{e}_1 + M_{02} \mathbf{e}_2 + M_{03} \mathbf{e}_3 \rangle_1 = I_1 \varepsilon c_1 \mathbf{E}_1$.

Полученные соотношения позволяют выписать первое уравнение (2.2) и уравнение (2.3), усредненные по регулярной прецессии Эйлера (вместо переменной $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1$ используем переменную $c_1 = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1) / L$):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} = & \frac{3\mu_e}{2r^5} (I_1 - I_2)(3c_1^2 - 1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \\ & + I_2 E p c_1 \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1) - \kappa c_1^2 \mathbf{L} + I_1 \varepsilon c_1 \mathbf{E}_1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\dot{c}_1 = c_2^2 \left(\frac{I_1 \varepsilon}{L} - \frac{\kappa c_1}{I_1} \right). \quad (2.6)$$

Выписанные уравнения образуют замкнутую систему относительно переменных $\mathbf{L}$ и c_1 . Входящие в их правые части величины $\mathbf{E}_1$ и c_2 должны быть выражены через указанные переменные по формулам, приведенным выше. Учтем, что $\dot{\mathbf{L}} = I_2 \dot{l} \mathbf{E}_1 + I_2 l \dot{\mathbf{E}}_1$ и $\mathbf{E}_1 \cdot \dot{\mathbf{E}}_1 = 0$. Получим

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \frac{3\mu_e}{2r^5 l} (1 - \lambda)(1 - 3c_1^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \frac{p c_1}{l} E \rho_a |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1), \quad (2.7)$$

$$\dot{l} = \varepsilon \lambda c_1 - \kappa c_1^2 l, \quad \dot{c}_1 = c_2^2 \left(\frac{\lambda \varepsilon}{l} - \kappa c_1 \right).$$

Эта система допускает первый интеграл $l c_2 = \text{const}$, а произведение $z = l c_1$

удовлетворяет уравнению $\dot{z} + \kappa_d z = \lambda \varepsilon$ (напомним, $c_1^2 + c_2^2 = 1$). В терминах раздела 1.2 $z = \lambda \bar{\omega}_1$, $lc_2 = \bar{\omega}_\perp$, $c_1 = \cos \vartheta$, $c_2 = \sin \vartheta$. Отсюда следует равенство $\kappa_d = a$. По табл. 1, 2 можно проверить постоянство величины $\bar{\omega}_\perp$. Она менялась со временем, хотя в последние интервалы магнитных измерений ее изменение было малым. Из уравнения относительно z следует, что предельное при $t \rightarrow +\infty$ значение l_∞ величины l оценивается неравенством $l_\infty \leq \lambda \varepsilon / \kappa_d$, и если $lc_2 > 0$, то предельное значения величин c_2 и $\vartheta = \vartheta_\infty$ положительны. Величины l_∞ и ϑ_∞ выражаются через предельные значения величин $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_\perp$ по формулам

$$\operatorname{tg} \vartheta_\infty = \frac{\bar{\omega}_\perp}{\lambda \bar{\omega}_1}, \quad l_\infty = \sqrt{\lambda^2 \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_\perp^2}.$$

На примере спутника Фотон М-2, приняв предельные значения $\bar{\omega}_1 = \omega_1^* = 1.242$ град./с, $\bar{\omega}_\perp = 0.11$ град./с и взяв $\lambda = 0.262$, получим $\vartheta_\infty = 18.7^\circ$, $l_\infty = 0.34$ град./с. Используемая здесь величина ω_1^* найдена в разделе 1.3.

2.2 Применение модели к спутнику Фотон-12

Ниже рассматриваются усредненные уравнения В.В. Белецкого, описывающие движение спутника с большой угловой скоростью, близкого к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела в случае фактической орбиты. В случае Фотона-12 эти уравнения адекватны начиная с пятых-шестых суток полета. Переменными этих уравнений являются вектор кинетического момента движения спутника вокруг собственного центра масс и угол нутации в оскулирующей регулярной прецессии [9]. Прежде, чем перейти к этим уравнениям, рассмотрим поведение указанных величин в реконструированных движениях. Собственный кинетический момент спутника будем представлять его ортом $\mathbf{E}_1$ и отношением l его модуля к экваториальному

моменту инерции I_2 . В переменных уравнений (1.2) $l = \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$, компоненты орта $\mathbf{E}_1$ в системе $CY_1Y_2Y_3$ выражаются формулами

$$E_{yi} = (\lambda a_{i1} \omega_1 + a_{i2} w_2 + a_{i3} w_3) / l \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

В системе $CZ_1Z_2Z_3$ $\mathbf{E}_1 = (\sin \rho \sin \alpha, \cos \rho, \sin \rho \cos \alpha)$, где ρ – угол между ортом $\mathbf{E}_1$ и осью CZ_2 , α – угол между проекцией орта $\mathbf{E}_1$ на плоскость CZ_1Z_3 и осью CZ_3 . Направление отсчета угла α согласовано с направлением оси CZ_2 . Угол нутации ϑ (между осью Ox_1 и ортом $\mathbf{E}_1$) задается формулой $\cos \vartheta = \lambda \omega_1 / l$.

Регулярная прецессия Эйлера динамически симметричного твердого тела при $l > 0$ обычно описывается углом нутации ϑ , углом прецессии φ_1 и углом собственного вращения φ_2 . В регулярной прецессии $\vartheta = \text{const}$,

$$\dot{\varphi}_1 = l, \quad \dot{\varphi}_2 = \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) l \cos \vartheta.$$

Адаптируя эти формулы к движению Фотона-12, имеем

$$\text{tg } \vartheta \approx \frac{\bar{\omega}_\perp}{\lambda \bar{\omega}_1}, \quad \dot{\varphi}_1 \approx \sqrt{\lambda^2 \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_\perp^2}, \quad \dot{\varphi}_2 \approx (1 - \lambda) \bar{\omega}_1.$$

Графики зависимости от времени величин l , ϑ , ρ и α , а также годографы проекций орта оси Ox_1 и орта $\mathbf{E}_1$ на плоскость CZ_1Z_3 для некоторых продолженных решений были приведены на рис. 7 и 8. В левой части рисунков приведены графики l , ϑ , ρ и α , в правой части приведены годографы. Годограф проекции орта оси Ox_1 изображен сплошной линией, годограф проекции орта $\mathbf{E}_1$ – последовательностью маркеров. Отрезки продолжения выбраны таким образом, чтобы годографы проекции орта $\mathbf{E}_1$ выглядели как замкнутые кривые. Длина отрезков продолжения 350 – 450 мин. Рис. 7 и 8 дают достаточно полное представление об эволюции вектора $\mathbf{L}$.

К середине полета угловая скорость спутника увеличилась настолько, что для исследования его вращательного движения стало возможным воспользоваться

приближенной теорией, развитой в [9]. Согласно этой теории, движение спутника представляет собой слабо возмущенную регулярную прецессию Эйлера. Невозмущенная прецессия Эйлера описывается уравнениями (1.2) при нулевых μ_e , p и ε :

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \dot{\omega}_2 = -\lambda \omega_1 \omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = \lambda \omega_1 \omega_2.$$

Эти уравнения имеют первые интегралы $\omega_1 = \text{const}$ и $\omega_\perp = \text{const}$. Для ω_1 примем выражение, принятое в системе (1.2). Оно хорошо согласуется с теорией [9]. Для $\omega_\perp$ в силу уравнений (1.2) имеем

$$\omega_\perp \dot{\omega}_\perp = \frac{3\mu_e}{r^5} (1 - \lambda) y_1 (w_3 y_2 - w_2 y_3) - pE \rho_a v (w_3 v_2 - w_2 v_3).$$

В невозмущенной регулярной прецессии положение спутника на орбите считается неизменным («замороженным»), т. е. r и $\rho_a v$ постоянны, а величины y_1 и v_1 определяются уравнениями $\dot{y}_1 = w_3 y_2 - w_2 y_3$, $\dot{v}_1 = w_3 v_2 - w_2 v_3$. Отсюда

$$\omega_\perp \dot{\omega}_\perp = \frac{3\mu_e}{2r^5} (1 - \lambda) \frac{dy_1^2}{dt} - pE \rho_a v \frac{dv_1}{dt}.$$

Функции $y_1(t)$ и $v_1(t)$ ограничены, поэтому средние значения производных в правой части последнего уравнения равны нулю. Отсюда $\dot{\omega}_\perp = 0$. Это следствие теории [9] также достаточно хорошо согласуется с результатами реконструкции (ср. интервалы 19 – 25 в табл. 1).

На непродолжительных отрезках времени можно считать, что z и, следовательно (см. раздел 2.1), ω_1 – линейные функции времени. В этом случае систему (2.7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \dot{\omega}_\perp = 0, \\ \dot{\mathbf{E}}_1 &= \frac{3\mu_e}{2r^5 l} (1 - \lambda)(1 - 3c^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1)(\mathbf{r} \times \mathbf{E}_1) + \frac{pc}{l} E \rho_a \mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1), \\ l &= \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda \omega_1}{l}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор точки O , $\mathbf{v}$ – скорость этой точки относительно гринвичской системы координат.

Система (2.9) интегрировалась численно в гринвичской системе $CY_1Y_2Y_3$. Ее решения сравнивались с гринвичскими компонентами E_{Y_i} ($i = 1, 2, 3$) орта $\mathbf{E}_1$, построенными по решениям системы (1.2), найденными посредством обработки магнитных измерений и продолженными за соответствующую точку $t_0 + T$. Длины всех интервалов сравнения 940 мин. Параметры p , λ , Ω и ε в (2.9) задавались по результатам обработки на соответствующем интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. Примеры такого сравнения на некоторых интервалах табл. 1, для которых $\bar{\omega}_1 > 0.8$ град./с, показаны на рис. 11 и 12. На рис. 11 слева изображены компоненты орта $\mathbf{E}_1$ в гринвичской системе координат. Сплошными кривыми представлен расчет вдоль решений уравнений (1.2), маркерами представлены характеристики вдоль решений системы (2.9). В левой части этих рисунков решение системы (2.9) построено с начальными условиями $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$, вычисленными по начальным условиям решения системы (1.2). Графики функций $E_{Y_i}(t)$, изображенные на этих рисунках сплошными линиями, в левой и правой частях этих рисунков одинаковы.

Позже начальные условия $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$ для системы (2.9) уточнялись методом наименьших квадратов из условия наилучшей подгонки ее решения к функциям (2.8), вычисленным вдоль решений системы (1.2). Несколько примеров сравнения приведено на рис. 11 справа. Во всех примерах подгонка начальных условий $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{E}_1(t_0)$ выполнялась на отрезках времени длиной 940 мин. В каждом примере найденное значение $\omega_\perp(t_0)$ отличалось от $\bar{\omega}_\perp$ для реконструкции на соответствующем отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ на величину порядка $\delta\omega_\perp$.

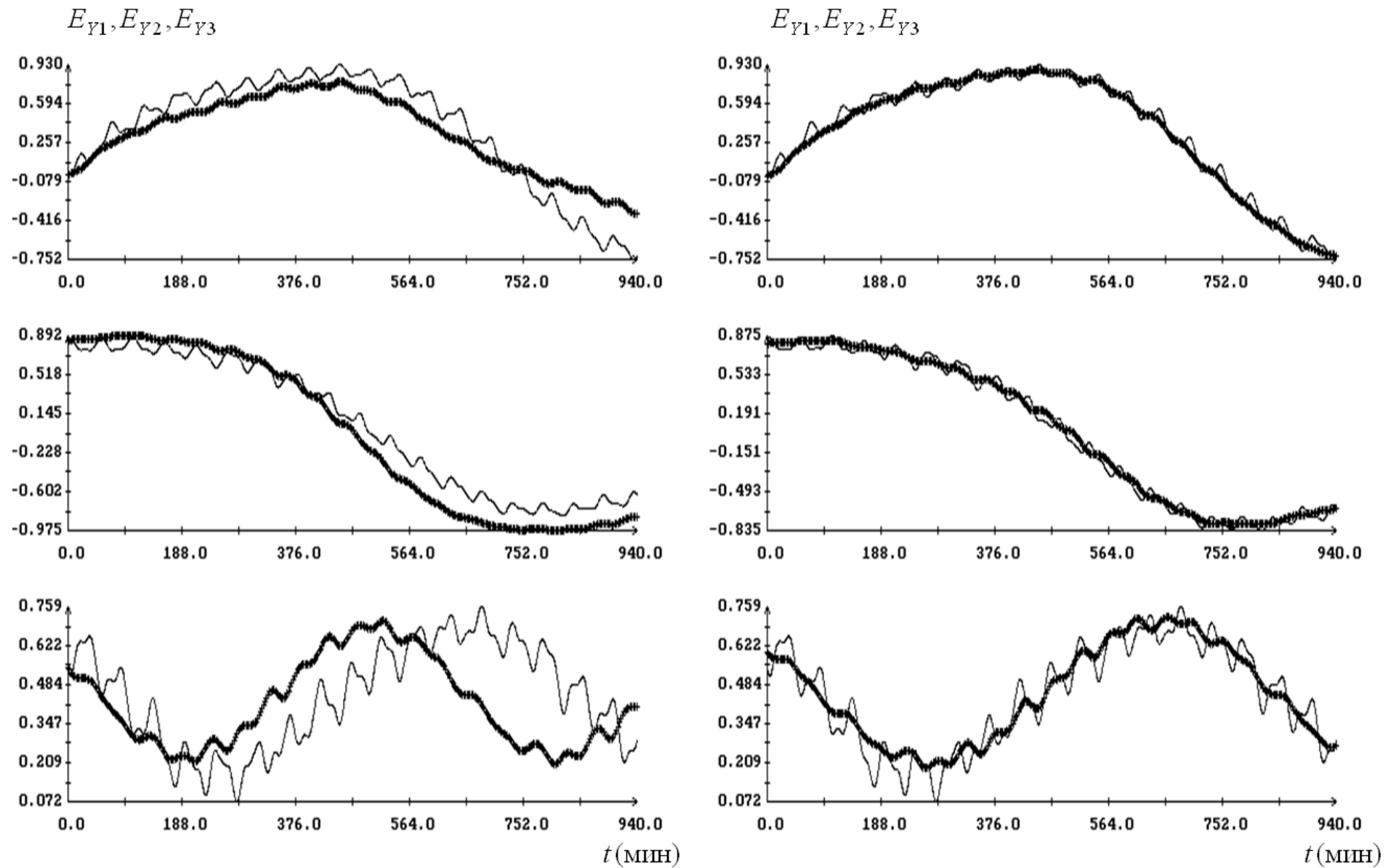


Рис.11. Интервал 11. Момент $t = 0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999. Слева – до подгонки по $\omega_{\perp}$ и начальным условиям $E_{Y1}(0), E_{Y2}(0), E_{Y3}(0)$, справа – после подгонки.

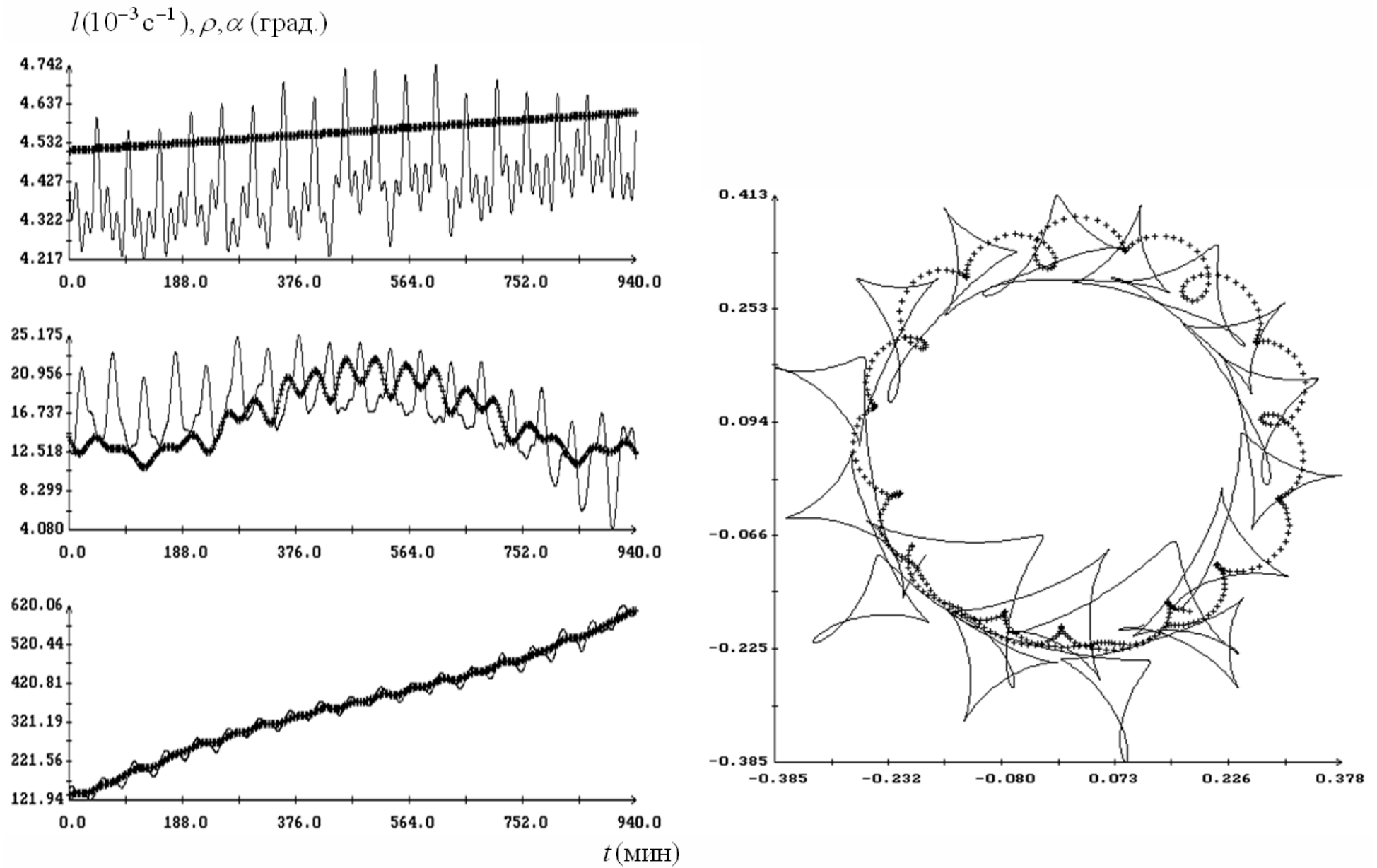


Рис. 12. Интервал 11. Момент $t = 0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999.

Без выполнения подгонки рассматриваемая близость решений систем (1.2) и (2.9) в большинстве случаев имеет место только в начале отрезка сравнения. На рис. 12 сравниваются графики величин l , ρ и α , отвечающие решениям систем (1.2) и (2.9). Эти графики в левой части организованы аналогично графикам на рис. 7. Справа изображены годографы проекции орта $\mathbf{E}_1$ на плоскость CZ_1Z_3 . Сплошными кривыми представлен расчет вдоль решений уравнений (1.2), маркерами представлены характеристики вдоль решений системы (2.9). Как видим, при $\bar{\omega}_1 > 0.8$ град./с усредненная система правильно описывает тенденцию изменения величин E_{Y_1} , l , ρ и α . В случаях, когда неравенство $\bar{\omega}_1 < 0.8$ град./с выполнено с некоторым запасом, согласие решений систем (1.2) и (2.9) не имеет места.

2.3 Применение модели к спутнику Фотон М-2

Ниже вновь рассматриваются усредненные уравнения, описывающие движение спутника с большой угловой скоростью, в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела на геоцентрической орбите. В случае Фотона М-2 эти уравнения адекватны также начиная с пятых-шестых суток полета. Аналогично переменными в оригинальной версии этих уравнений являются вектор кинетического момента движения спутника вокруг собственного центра масс и угол нутации в оскулирующей регулярной прецессии [61]. Для перехода к усредненным уравнениям, рассмотрим поведение указанных величин в реконструированных движениях. В переменных уравнений (1.2) $l = \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$, компоненты орта $\mathbf{E}_1$ в системе $CY_1Y_2Y_3$ также выражаются формулами (2.8).

Интервалы времени длиной 270 мин представляются слишком короткими, чтобы наглядно продемонстрировать решения усредненных уравнений и

эволюцию регулярной прецессии Эйлера. Для такой демонстрации решения, найденные на отрезках $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, продолжались за их правый конец на 200 мин и более. Вдоль продолженных решений вычислялись введенные выше величины l , ϑ , ρ и α . Графики некоторых из них на продолженных интервалах были уже приведены на рис. 8. В левой части этих рисунков. изображены графики зависимости от времени величин l , ϑ , ρ и α , в правой части – проекции годографов ортов оси Ox_1 и E_1 на плоскость OZ_1Z_3 . Как видно из этих рисунков, движение спутник представляет собой возмущенную регулярную прецессию Эйлера. Длины интервалов продолжения подобраны так, чтобы проекция годографа орта E_1 была замкнутой кривой.

На непродолжительных отрезках времени аналогично спутнику Фотон-12 можно считать, что z и, следовательно, ω_1 – линейные функции времени. Для исследования эволюции вращательного движения также используем систему (2.9).

Система (2.9) интегрировалась численно в гринвичской системе $CY_1Y_2Y_3$. Ее решения сравнивались с гринвичскими компонентами $E_{Y_i}(t)$ ($i=1, 2, 3$) орта E_1 , построенными по решениям системы (1.2). Последние были найдены посредством обработки магнитных измерений и продолжены за соответствующую точку $t_0 + T$. Длины всех интервалов сравнения 1000 мин. Параметры p , λ , Ω и ε в (2.9) задавались по результатам обработки на соответствующем интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. Начальные условия $\omega_\perp(t_0)$ и $E_1(t_0)$ системы (2.9) уточнялись методом наименьших квадратов посредством подгонки ее решения к значениям функций $E_{Y_i}(t)$ на равномерной сетке с шагом 20 с. Результаты представлены на рис. 13 с аналогичной предыдущему разделу легендой. Рис. 13 иллюстрируют целесообразность подгонки решений системы (2.9) к функциям $E_{Y_i}(t)$, вычисленным вдоль решений системы (1.2). В левой части этих рисунков решение системы (2.9) построено с начальными условиями $\omega_\perp(t_0)$ и $E_1(t_0)$, вычисленными по начальным условиям решения системы (1.2). В правой части рис. 13 решение системы (2.9) построено с уточненными значениями $\omega_\perp(t_0)$ и $E_1(t_0)$. Графики

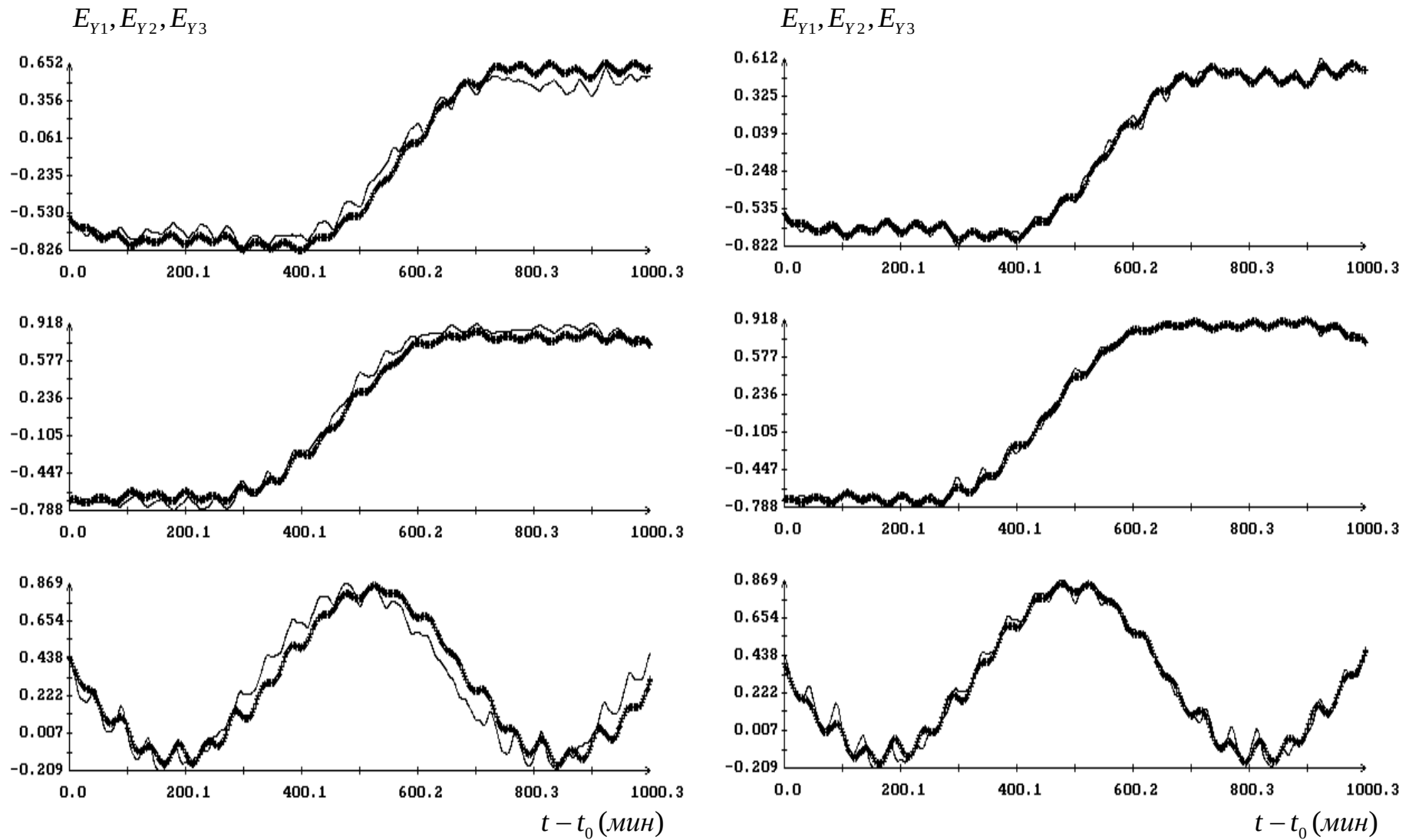


Рис. 13. Сравнение решений систем (1.2) и (2.9) на продолжении интервала d4, $t_0 = 13:15:14$ UTC 04.06.2005. Слева – до подгонки $\omega_{\perp}$ и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0)$, справа – после подгонки.

функций $E_{Y_i}(t)$, изображенные на этих рисунках сплошными линиями, в левой и правой частях этих рисунков одинаковы. Во всех таких примерах найденное значение $\omega_{\perp}(t_0)$ отличалось от $\bar{\omega}_{\perp}$ для реконструкции на соответствующем отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ на величину порядка $\delta\omega_{\perp}$. Без уточнения начальных условий $\omega_{\perp}(t_0)$ и $E_1(t_0)$ близость решений систем (1.2) и (2.9) в большинстве случаев имеет место только в начале отрезка сравнения. После подгонки близость (такая же, как в приведенных примерах) имеет место на всем интервале сравнения.

Построенные таким образом решения системы (2.9) пересчитывались аналогично предыдущему разделу в систему координат $CZ_1Z_2Z_3$ и представлялись графиками зависимости величин l , ρ , и α от времени. Эти графики сравнивались с аналогичными графиками, построенными вдоль решений системы (1.2).

Примеры такого сравнения на некоторых интервалах табл. 1, для которых $\bar{\omega}_1 > 0.85 \text{ град./с}$, приведены на рис. 14. Графики, построенные по решениям системы (2.9), представлены в виде последовательностей маркеров, графики, построенные по решениям системы (1.2), изображены сплошными линиями.

На рис. 14 изображены графики, иллюстрирующие движение вектора кинетического момента относительно системы координат $CZ_1Z_2Z_3$. В левых частях этих рисунков приведены графики величин l , ρ , и α , в их правых частях изображены годографы проекций орта оси Ox_1 и орта E_1 на плоскость CZ_1Z_3 . Как видим, при $\bar{\omega}_1 > 0.85 \text{ град./с}$ усредненная система правильно описывает тенденцию изменения величин E_{Y_i} , l , ρ и α . В случае $\bar{\omega}_1 < 0.8 \text{ град./с}$ согласие решений систем (1.2) и (2.9) не имеет места. Таким образом, полученные в рамках теории В.В. Белецкого усредненные уравнения (2.9) достаточно точно описывают достаточно быстрое вращательное движение спутника Фотон М-2 на интервалах времени более 0.5 сут .

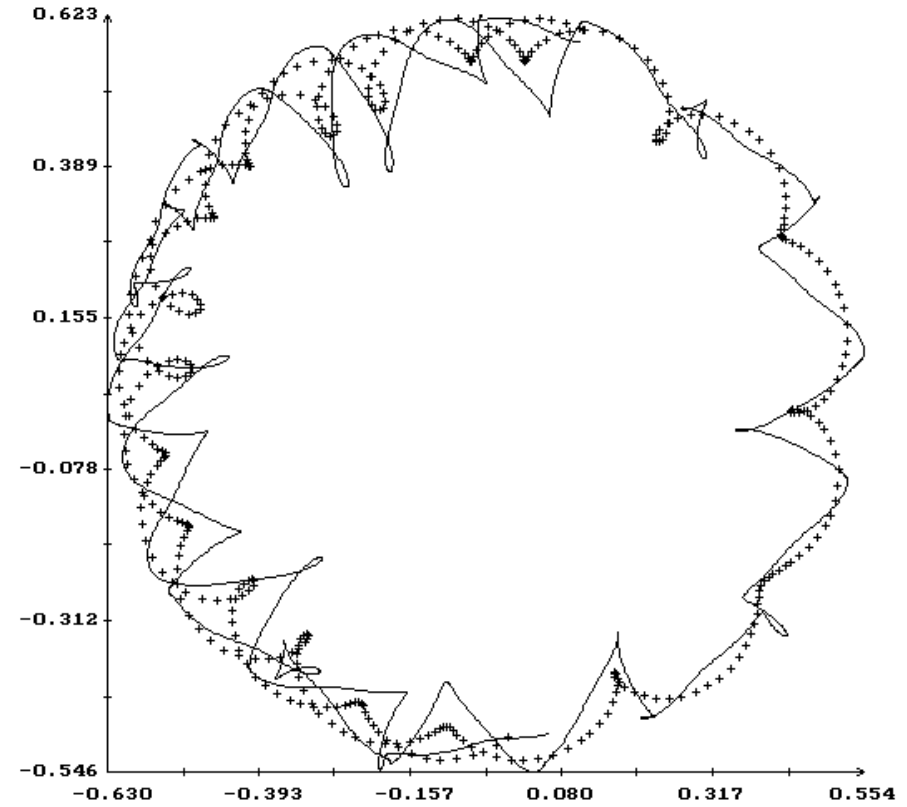
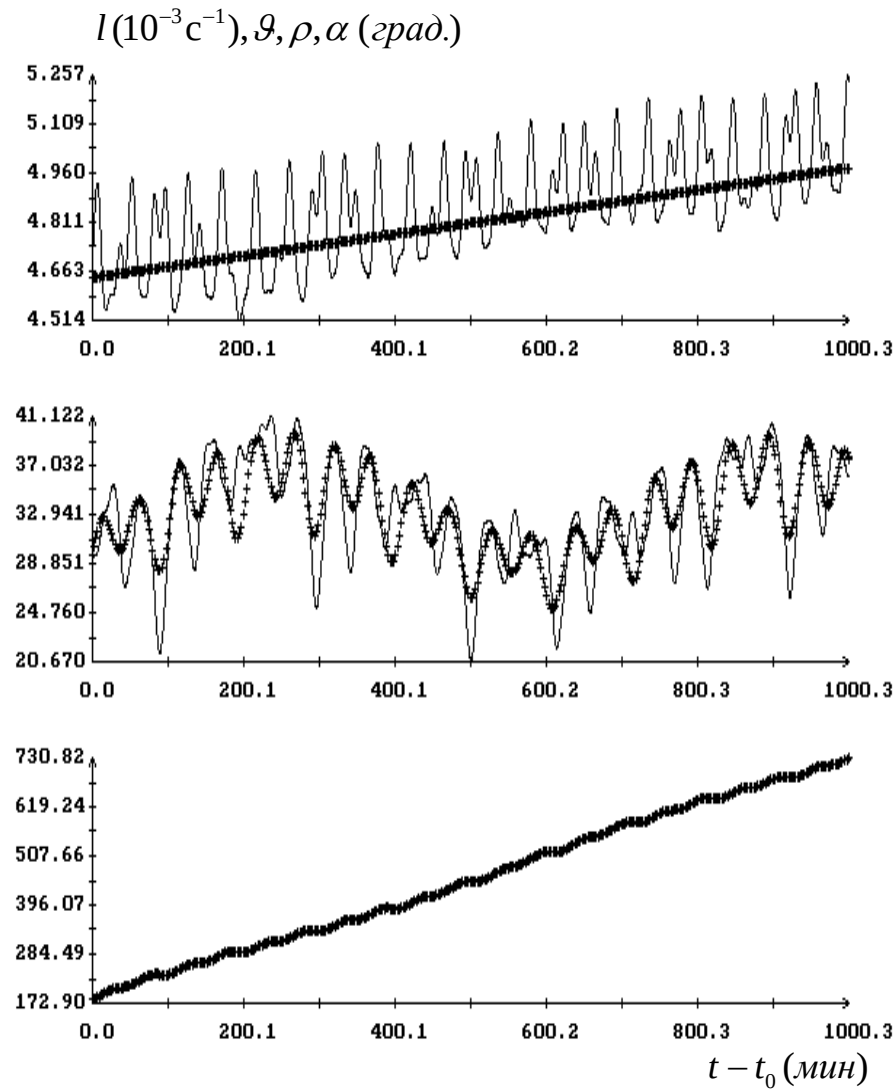


Рис. 14. Сравнение решений систем (1.2) и (2.9) на продолжении интервала d4 после подгонки $\omega_{\perp}$ и начальных условий $E_{Y1}(t_0), E_{Y2}(t_0), E_{Y3}(t_0)$.

2.4 Выводы

В первых двух разделах представлены результаты реконструкции неуправляемого вращательного движения исследуемых спутников. При обработке использовалась более простая математическая модель вращательного движения, чем при обработке, выполненной сразу после полета. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким в его теоретическом анализе эволюции неуправляемого вращательного движения спутника в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела. В результате за счет некоторого огрубления реконструкции удалось напрямую сопоставить полученные экспериментальные результаты с теорией и провести их анализ, а именно интерпретировать эволюцию вращательного движения и объяснить возникновение режима движения, установившегося к концу полета.

В частности, в рамках схемы усреднения В.М. Волосова полученные усредненные уравнения с малой погрешностью описывают эволюцию вектора кинетического момента и угла нутации на достаточно продолжительном отрезке времени на интервалах, характеризующихся не очень малой угловой скоростью. Как оказалось, соотношение результатов, полученных разными способами на указанных интервалах, является типичным при сравнении решений точных и усредненных уравнений. Показано, что при значениях угловой скорости вокруг продольной оси более 0.8 град./с., вращательное движение обоих спутников близко к регулярной прецессии Эйлера, а изменение собственного кинетического момента обоих спутников достаточно точно описывается эволюционными уравнениями В.В. Белецкого.

Применение усредненных уравнений В.В. Белецкого к описанию движения спутника Фотон-12 оказалось удачным. Если в системе (2.9) соотношение $\omega_1 = \Omega + \varepsilon(t - t_0)$ заменить уравнением (1.4), то получим усредненную систему, которая в принципе пригодна для описания переменных $\omega_\perp$ и $\mathbf{E}_\perp$ на более

продолжительных отрезках времени. Такая система получается, если указанную замену сделать в системе (1.2) и, считая параметры a , p и ε малыми величинами одного порядка, усреднить определяемые ей выражения для производных $\dot{\omega}_{\perp}$ и $\dot{\mathbf{E}}_1$ по регулярной прецессии Эйлера. Однако очень точного совпадения решений полученной таким образом усредненной системы с реальным движением спутника на отрезках времени в несколько суток ожидать не приходится вследствие эволюции орбиты, упрощенного задания аэродинамического момента и механического момента относительно оси Ox_1 .

Глава 3. Упрощение математической модели вращательного движения

3.1 Дальнейшее упрощение модели вращательного движения

Модель реконструкции вращательного движения спутников из первой главы допускает дальнейшее упрощение, в котором фактическая орбита спутников Фотон-12 и Фотон М-2 (высота апогея 380 км и 300 км, высота перигея 220 км и 260 км, соответственно), заменена круговой орбитой, и также упрощено выражение восстанавливающего аэродинамического момента. При вычислении аэродинамического момента атмосфера считается неподвижной в абсолютном пространстве, ее плотность вдоль орбиты постоянна, внешняя оболочка спутника принимается сферой с центром на оси Ox_1 . Такая замена позволит далее использовать для описания движения вращательного спутника на последних интервалах полета автономную систему дифференциальных уравнений, которую на некоторых отрезках движения, можно свести к обобщенно-консервативной, подробнее в четвертой главе. Такое сведение позволяет для приближенного, но достаточно точного описания реального движения спутника использовать периодические решения, продолженные из периодических решений Ляпунова. Подходящие для этой цели периодические решения Ляпунова будут изучены в пятой и шестой главах. Далее в главе методика реконструкции вращательного движения с помощью упрощенной модели будет представлена на примере спутника Фотон-12, результаты же будут представлены для двух спутников.

Системы координат для описания движения используются те же, что выше. Вращательное движение спутника изучается относительно орбитальной системы координат $Ox_1x_2x_3$. Ее оси Ox_1 и Ox_3 направлены по геоцентрическим скорости

и радиус-вектору точки O . Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к орбитальной системе обозначим $\|\tilde{a}_{ij}\|_{i,j}^3$, $\tilde{a}_{ij}$ – косинус угла между осями OX_i и Oy_j . Элементы этой матрицы будем выражать в функции углов ψ , θ и δ , которые введем так, чтобы система $OX_1X_2X_3$ переводилась в систему $Oy_1y_2y_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол ψ вокруг оси OX_3 , 2) на угол θ вокруг новой оси OX_2 , 3) на угол δ вокруг новой оси OX_1 , совпадающей с осью Oy_1 . Таким образом, θ – угол между осью Oy_1 и плоскостью OX_1X_2 , ψ – угол между проекцией оси Oy_1 на плоскость OX_1X_2 и осью OX_1 . Эти два угла задают направление оси Oy_1 в орбитальной системе координат. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= \cos\psi \cos\theta, & \tilde{a}_{12} &= \cos\psi \sin\theta \sin\delta - \sin\psi \cos\delta, \\ \tilde{a}_{21} &= \sin\psi \cos\theta, & \tilde{a}_{22} &= \sin\psi \sin\theta \sin\delta + \cos\psi \cos\delta, \\ \tilde{a}_{31} &= -\sin\theta, & \tilde{a}_{32} &= \cos\theta \sin\delta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{13} &= \cos\psi \sin\theta \cos\delta + \sin\psi \sin\delta, \\ \tilde{a}_{23} &= \sin\psi \sin\theta \cos\delta - \cos\psi \sin\delta, \\ \tilde{a}_{33} &= \cos\theta \cos\delta.\end{aligned}$$

Система уравнений вращательного движения спутника образована динамическими уравнениями Эйлера для угловых скоростей w_2 , w_3 и кинематическими уравнениями Пуассона для первой и третьей строк матриц $\|\tilde{a}_{ij}\|$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также постоянный момент вдоль оси Ox_1 . При упомянутых выше допущениях аэродинамический момент характеризуется одним скалярным параметром. Система уравнений вращательного движения имеет вид [48, 61]

$$\begin{aligned}\dot{w}_2 + \lambda\omega_1 w_3 &= -3\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}\tilde{a}_{23} + p\tilde{a}_{13}, \\ \dot{w}_3 - \lambda\omega_1 w_2 &= 3\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}\tilde{a}_{32} - p\tilde{a}_{12},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{a}}_{11} + w_2 \tilde{a}_{13} - w_3 \tilde{a}_{12} &= -\omega_0 \tilde{a}_{31}, \\
\ddot{\tilde{a}}_{12} + w_3 \tilde{a}_{11} &= -\omega_0 \tilde{a}_{32}, \quad \ddot{\tilde{a}}_{13} - w_2 \tilde{a}_{11} = -\omega_0 \tilde{a}_{33}, \\
\ddot{\tilde{a}}_{31} + w_2 \tilde{a}_{33} - w_3 \tilde{a}_{32} &= \omega_0 \tilde{a}_{11}, \\
\ddot{\tilde{a}}_{32} + w_3 \tilde{a}_{31} &= \omega_0 \tilde{a}_{12}, \quad \ddot{\tilde{a}}_{33} - w_2 \tilde{a}_{31} = \omega_0 \tilde{a}_{13}, \\
\omega_1 &= \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \lambda = \frac{I_1}{I_2}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь ω_0 – орбитальная частота, p – аэродинамический параметр, Ω и ε – постоянные величины. В (3.1) использован явный вид решения одного из уравнений Эйлера $\dot{\omega}_1 = \varepsilon$ с начальным условием $\omega_1(t_0) = \Omega$. Выбор t_0 будет указан ниже.

При численном интегрировании уравнений (3.1) единицей измерения времени служит 10^3 с , единицы измерения других величин: $[\omega_i] = [w_i] = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $[\varepsilon] = [p] = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$. Элементы второй строки матрицы в $\|\tilde{a}_{ij}\|$ вычисляются как векторное произведение ее третьей и первой строк. Формулы (1.4) и соотношение $\chi = \Omega(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0)^2 / 2$ позволяют найти функции $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ и движение системы $Ox_1x_2x_3$, решая уравнения (3.1). Переменные $\tilde{a}_{1i}$ и $\tilde{a}_{3i}$ зависимы, они связаны условиями ортогональности матрицы $\|\tilde{a}_{ij}\|$. По этой причине начальные условия $\tilde{a}_{1i}(t_0)$ и $\tilde{a}_{3i}(t_0)$ выражаются через углы ψ , θ и δ .

Параметр λ известен: $\lambda \approx 0.24$. Тем не менее, он и параметры p и ε определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т. е. служат как и ранее параметрами согласования.

Уравнения (3.1) получены из аналогичных уравнений вращательного движения [20] переходом к круговой орбите и использованием орбитальной системы координат в качестве системы, относительно которой рассматривается движение спутника. Для компенсации всех сделанных упрощений реконструировались движения спутника, в которых компонента угловой скорости

ω_1 достаточно велика. Обработка измерений с помощью уравнений (3.1) выполнялась по схеме [20] и дала близкие результаты.

Чтобы использовать уравнения (3.1) для вычисления функционала (1.3), необходимо задать связь системы $OX_1X_2X_3$ с гринвичской системой координат, в которой задавалась реальная орбита спутника и вычислялась напряженность магнитного поля Земли. С этой целью фактическая орбита спутника на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ аппроксимировалась круговой орбитой. Аппроксимация строилась методом наименьших квадратов по достаточно точным значениям реального фазового вектора центра масс спутника, заданным на равномерной сетке с шагом 3мин . Круговая орбита задавалась 5-ю элементами: радиусом, средним движением (орбитальной частотой ω_0), начальным значением аргумента широты, долготой восходящего узла и наклоном. Вдоль круговой орбиты вычислялись компоненты напряженности МПЗ в системе координат $OX_1X_2X_3$ на моменты t_n . Эти компоненты использовались при многократном вычислении функционала (1.3) в процессе его минимизации. С помощью решения уравнений (3.1) они пересчитывались в систему $Oy_1y_2y_3$ и затем в систему $Ox_1x_2x_3$. В качестве t_0 в уравнениях (3.1) всегда использовалась начальная точка обрабатываемого отрезка данных.

Оценку приемлемости сделанного перехода к круговой орбите, а также оценку ожидаемой точности аппроксимации псевдоизмерений экстремалью функционала (1.3) дает минимизация функции

$$\Psi = \sum_{n=0}^N \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\kappa h_i^{(n)} - \Delta'_i]^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^3 [h_i^\circ(t_n)]^2} \right\}^2,$$

по κ и Δ'_i . Здесь $\kappa \approx 1$ – масштабирующий коэффициент, Δ'_i – оценки постоянных смещений в псевдоизмерениях, $h_j^\circ(t)$ – компоненты напряженности МПЗ в точке O в системе координат $Ox_1x_2x_3$, рассчитываемые с помощью модели IGRF2005. Первый радикал в формуле для Ψ – скорректированный модуль измеренной

напряженности магнитного поля на спутнике в момент t_n , второй радикал – расчетный модуль напряженности МПЗ в точке O в тот же момент. Функция Ψ характеризует близость модулей измеренной и расчетной напряженности магнитного поля на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. Для расчета Ψ надо знать только орбитальное движение спутника. Минимальное значение $\Psi_{\min}$ этой функции дает предварительную оценку точности магнитных измерений.

При $T = 210 \text{ мин}$ для большинства отрезков псевдоизмерений среднеквадратичное отклонение $\sigma_* = \sqrt{\Psi_{\min} / (N - 3)}$ лежит в пределах $1600 \div 2000 \gamma$. При расчете $\Psi_{\min}$ с использованием реальной орбиты СКО(ΔH) меньше и лежит в пределах $1400 \div 1600 \gamma$. Два примера минимизации функции Ψ приведены на рис. 15. В верхней части рисунка сравниваются модули вектора напряженности МПЗ, рассчитанные по скорректированным псевдоизмерениям и по модели IGRF. Расчет по псевдоизмерениям представлен маркерами, расчет по модели IGRF – сплошными линиями. Графики в нижней части рисунка характеризуют отклонения псевдоизмерений от модели. Эти графики – ломаные, вершины которых отвечают ошибкам аппроксимации. В подписи к рисунку указаны значения СКО(ΔH); рядом с ними в скобках указаны значения СКО(ΔH), полученные с использованием реального орбитального движения (см. раздел 1.3).

С целью реконструкции вращательного движения функционал (1.3) минимизировался по 11 величинам: начальным условиям решения системы (3.1) $\psi(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\delta(t_0)$, Ω , $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$ и параметрам λ , p , ε , α_c , β_c . Заключительный этап минимизации выполнялся методом Гаусса–Ньютона. Точность аппроксимации псевдоизмерений и разброс в оцениваемых величинах характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Стандартные отклонения рассчитывались в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях $h_i^{(n)}$ некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в псевдоизмерениях с одинаковым нижним индексом i одинаковы (величины Δ_i в

(1.3) – оценки этих средних значений). Стандартные отклонения вычислялись аналогично разделу выше.

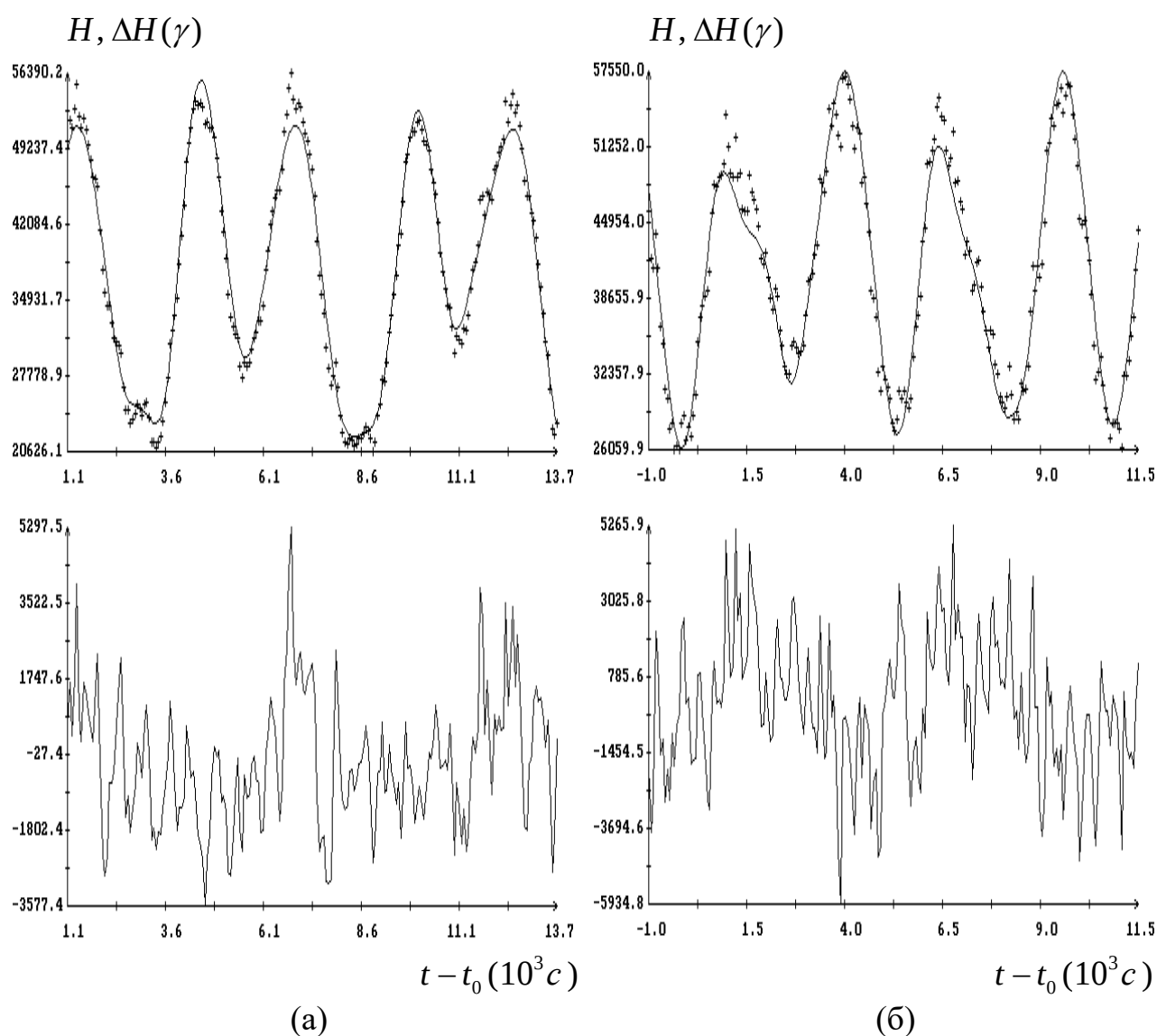


Рис. 15. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ;
 (а) момент времени $t_0 = 01: 39: 31$ UTC 13.09.1999, $\text{СКО}(\Delta H) = 1561(1374)\gamma$;
 (б) момент времени $t_0 = 18: 50: 05$ UTC 18.09.1999, $\text{СКО}(\Delta H) = 2059(1649)\gamma$.

Движение спутника Фотон-12 реконструировано с помощью упрощенной модели на 25 временных интервалах [61]. Некоторые результаты реконструкции, относящиеся к интервалам 10–25 приведены в табл. 7, реконструкции движения на интервалах 14 и 17 представлены на рис. 16 – 18. В подписях к рисункам и в таблице использовано Всемирное координированное время (UTC). В табл. 7 приведены

начальные точки интервалов t_0 и их фактическая длина T . Номинальная длина $T = 210$ мин выбрана таким образом, чтобы получаемые значения σ_H не более чем в 2 раза превышали указанные выше типичные значения σ_* . Иными словами, чтобы принятая модель движения была достаточно адекватна. Поскольку принятая модель является упрощенной, с ее помощью реконструировались движения спутника с заметной угловой скоростью, которые возникли через несколько (~ 2) суток после начала неуправляемого движения. Табл. 7 содержит данные по интервалам, на которых угловая скорость достаточно большая.

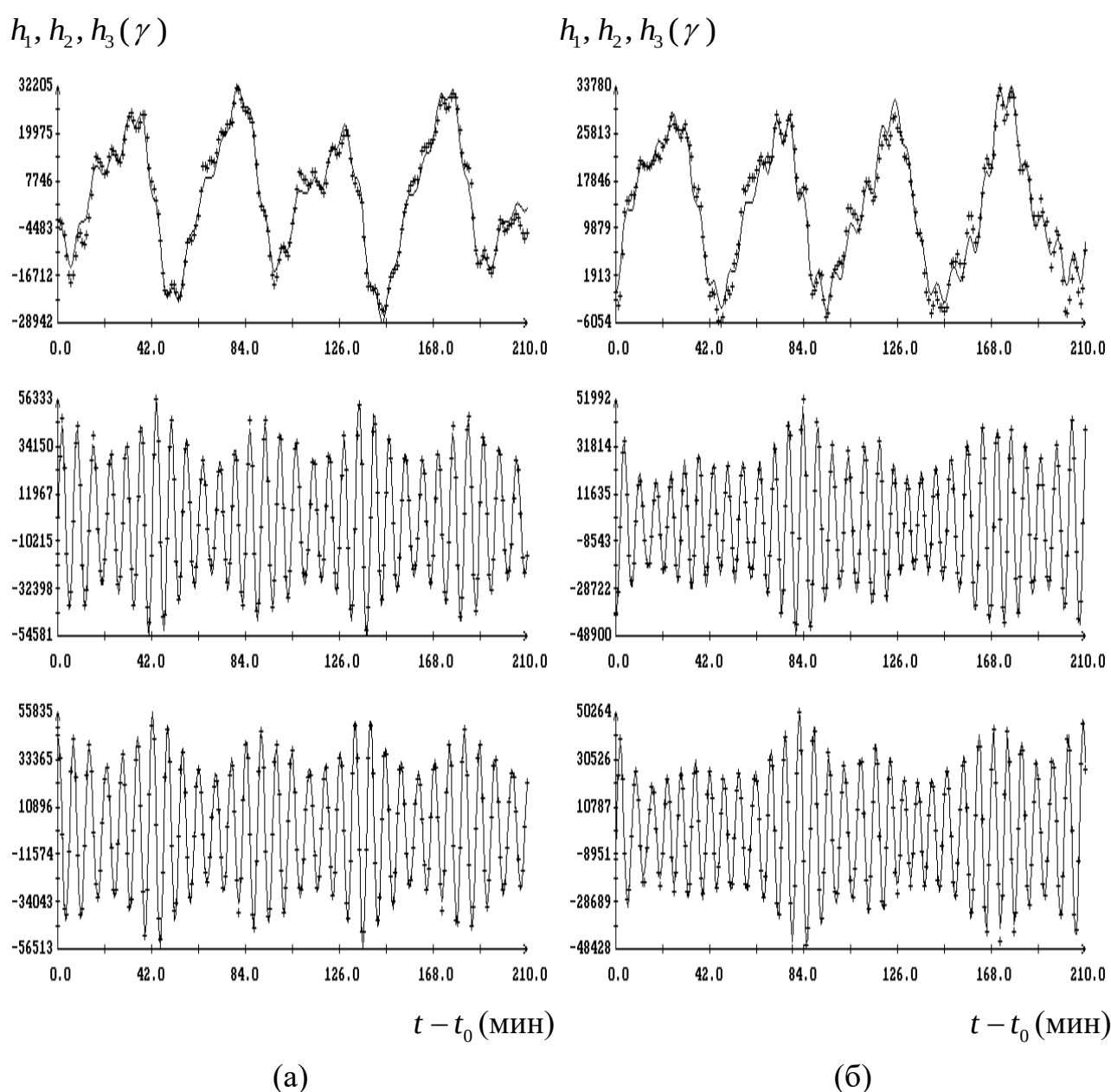


Рис. 16. Аппроксимация магнитных измерений; (а) – на интервале 14, $\sigma_H = 2043 \gamma$; (б) – на интервале 17, $\sigma_H = 1924 \gamma$.

Рис. 16 иллюстрирует типичное качество аппроксимации псевдоизмерений. Здесь сплошными линиями изображены графики функций $h_i(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, маркеры указывают точки $(t_n, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Количественно аппроксимация псевдоизмерений характеризуется стандартными отклонениями σ_H , значения которых приведены в табл. 7 и в подписи к рисунку. Значения σ_H в табл. 7 несколько выше, чем в [20]. Тем не менее, достигнутая точность достаточна для целей данной работы.

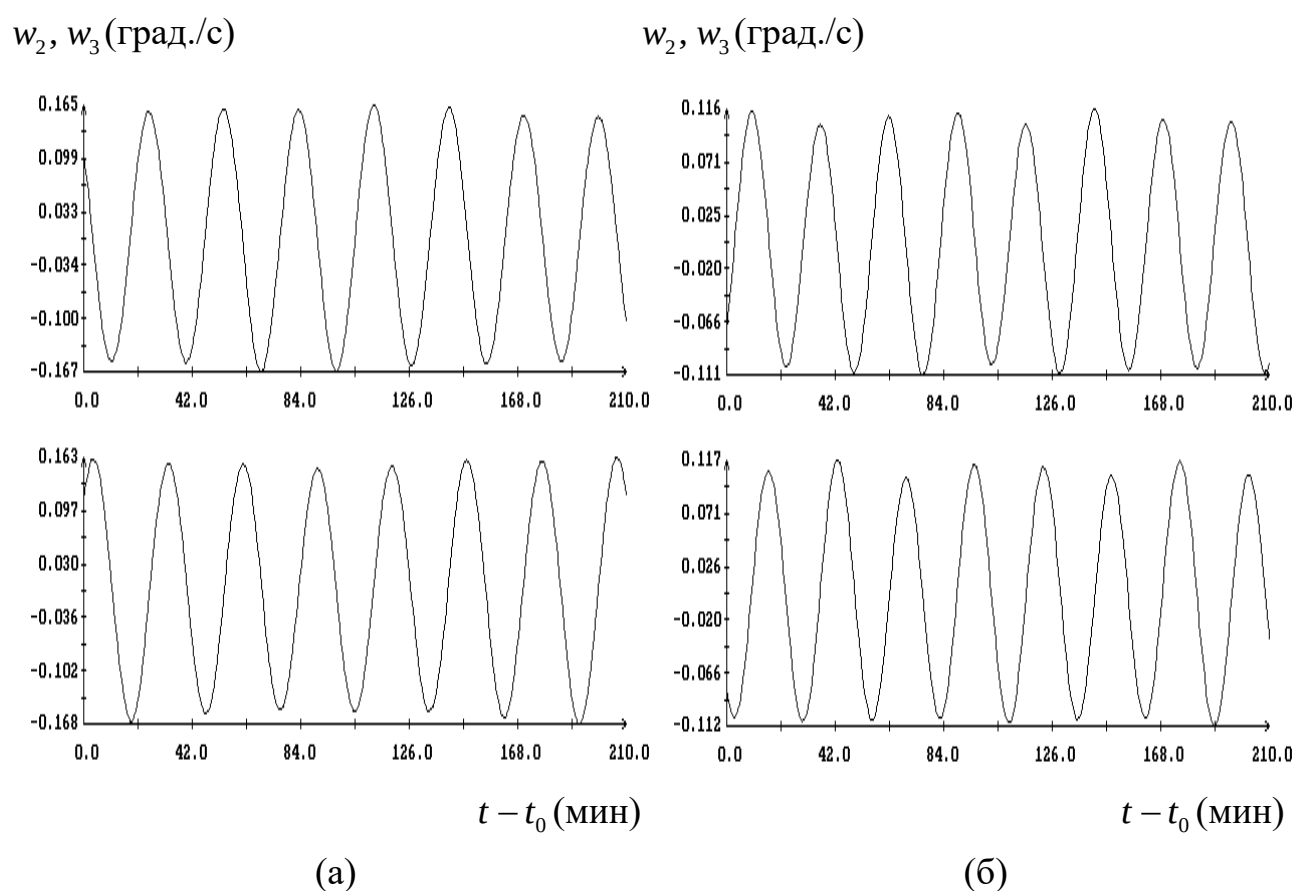


Рис. 17. Компоненты угловой скорости w_2, w_3 ; (а) – на интервале 14, $0.9364 \leq \omega_1 \leq 0.9395$ (град./с); (б) – на интервале 17, $1.0074 \leq \omega_1 \leq 1.0124$ (град./с.).

На рис. 17 помещены графики компонент угловой скорости w_2 и w_3 . Компонента угловой скорости ω_1 в движении на рис. 17а монотонно убывает, а в движении на рис. 17б монотонно возрастает. Пределы изменения этой переменной указаны в подписи к рисунку.

По мере увеличения компоненты ω_1 движение спутника становилось все больше похоже на регулярную прецессию Эйлера динамически симметричного твердого тела. Формирование регулярной прецессии с медленно возрастающей угловой скоростью ω_1 и мало меняющимся значением $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}$ завершилось после нескольких суток полета.

Среднеквадратичные отклонения $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_{\perp}$ характеризуют близость движения спутника к регулярной прецессии с параметрами $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_{\perp}$. Значения величин $\bar{\omega}_1$, $\delta\omega_1$, $\bar{\omega}_{\perp}$ и $\delta\omega_{\perp}$ указаны в табл. 7.

Таблица 7. Результаты обработки измерений МПЗ на спутнике Фотон-12

№ инт.	Дата 09.1999	t_0 UTC	T , мин	σ_H , γ	$\bar{\omega}_1$, град./с	$\delta\omega_1$, град./с	$\bar{\omega}_{\perp}$, град./с	$\delta\omega_{\perp}$ град. /с
10	15	13:18:34	210	2835	0.8169	0.0039	0.1611	0.0069
11	15	23:40:47	210	2308	0.8526	0.0007	0.1437	0.0090
12	16	11:40:41	210	2296	0.8746	0.0050	0.1439	0.0079
13	16	16:59:44	210	2409	0.8894	0.0042	0.1439	0.0068
14	17	19:05:14	210	2043	0.9380	0.0009	0.1577	0.0055
15	18	18:33:07	210	2181	0.9696	0.0005	0.1788	0.0054
16	18	21:54:51	210	2192	0.9867	0.0040	0.1658	0.0052
17	19	08:54:51	210	1924	1.0099	0.0014	0.1083	0.0044
18	19	21:55:05	197	1810	1.0165	0.0008	0.0962	0.0056
19	20	07:55:22	206	2248	1.0280	0.0005	0.1472	0.0064
20	20	19:56:17	210	3260	1.0361	0.0010	0.1487	0.0057
21	21	05:50:08	210	2261	1.0428	0.0011	0.1295	0.0082
22	21	21:13:34	210	2639	1.0394	0.0060	0.1423	0.0096
23	22	07:55: 02	210	2694	1.0498	0.0034	0.1313	0.0068
24	22	22:54:54	210	2376	1.0452	0.0014	0.1376	0.0067
25	23	02:53:52	275	3119	1.0276	0.0022	0.1646	0.0079

На рис. 18 приведены графики зависимости от времени углов ψ и θ , задающих положение оси Ox_1 относительно координат $Ox_1x_2x_3$. Эти углы рассчитывались с использованием формул

$$\cos \theta = \sqrt{\tilde{a}_{32}^2 + \tilde{a}_{33}^2}, \quad \sin \theta = -\tilde{a}_{31}, \quad \cos \psi = \frac{\tilde{a}_{11}}{\sqrt{\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{21}^2}}, \quad \sin \psi = \frac{\tilde{a}_{21}}{\sqrt{\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{21}^2}}.$$

Движение спутника по углам установилось только к интервалу 7 – ось Ox_1 перестала пересекать плоскость орбиты и весь дальнейшей полет оставалась в полупространстве $Z_2 > 0$. Движение на рис. 17, 18 уже явно похоже на регулярную прецессию Эйлера.

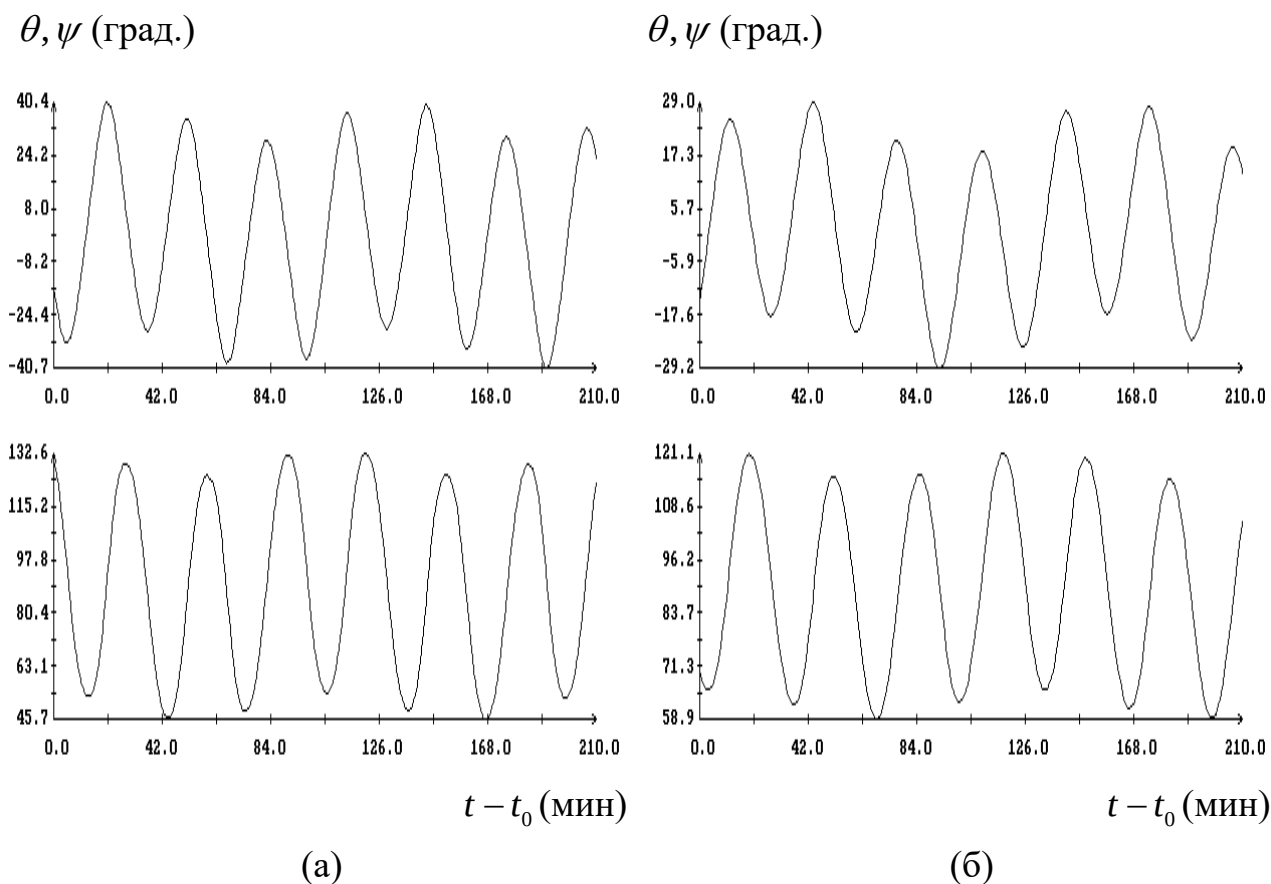


Рис. 18. Углы, задающие направление оси Ox_1 ; (а) – на интервале 14; (б) – на интервале 17.

Дополнительную информацию о движении спутника дает рис. 19. Здесь для двух рассмотренных выше реконструкций приведены графики угла α между осью Ox_1 и вектором кинетического момента спутника в его движении относительно

центра масс и угла ρ между этим вектором и осью OX_2 . В регулярной прецессии Эйлера $\alpha = \text{const}$. В примерах на рис. 19 этот угол меняется в достаточно узких пределах вблизи значений $\alpha_* = \arctg(\bar{\omega}_\perp / \lambda \bar{\omega}_1)$, указанных в подписи к рисунку. Вектор кинетического момента колеблется вблизи оси OX_2 (см. графики угла ρ), угловая скорость которой менее 5 град./сут. Движения такого типа имели место 15–19 сентября, в частности, на интервалах 10 и 14–18.

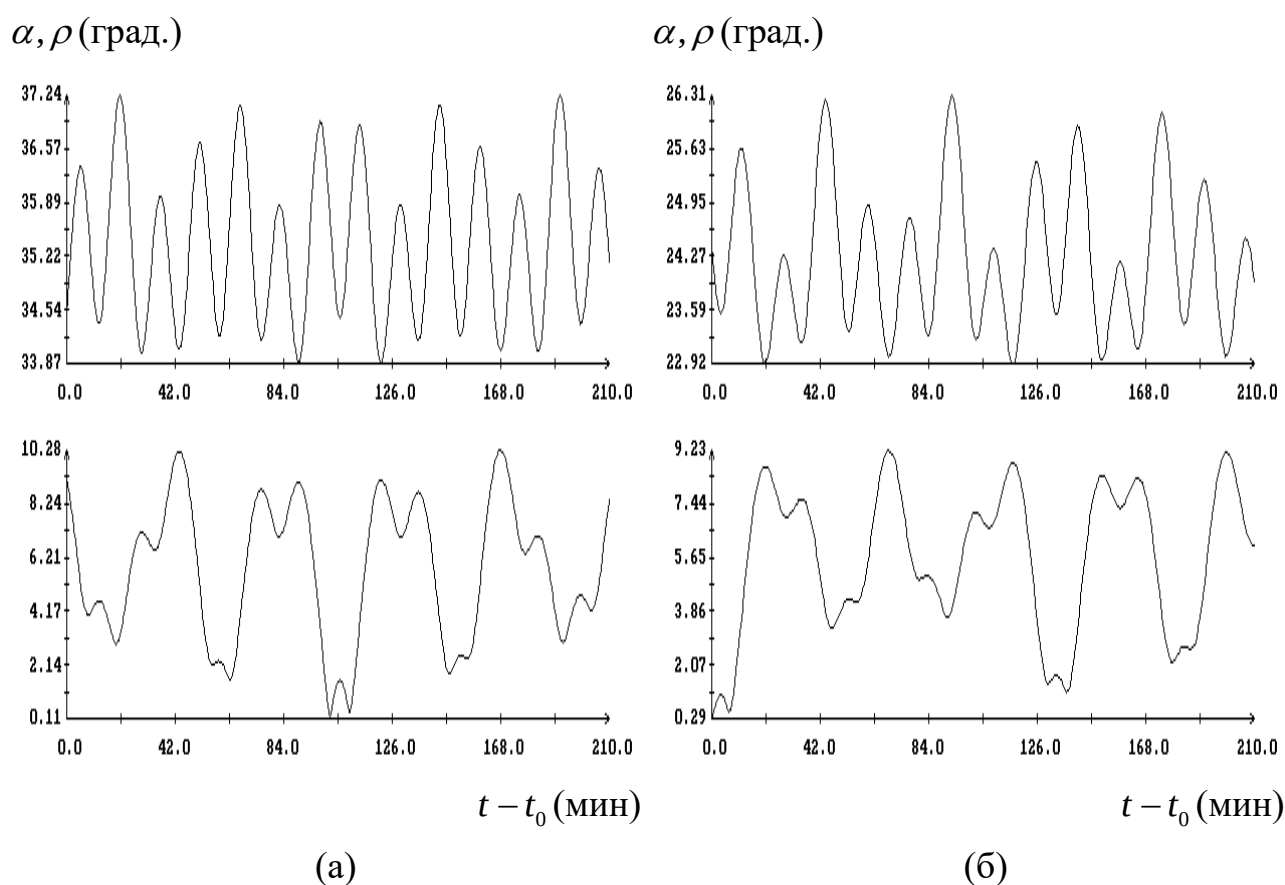


Рис. 19. Угол нутации спутника α и угол ρ между вектором кинетического момента спутника относительно центра масс и осью OX_2 ; (а) – на интервале 14, $\alpha_* = 35.4^\circ$; (б) – на интервале 17, $\alpha_* = 24.3^\circ$.

Оценки параметров p , λ , ε , α_c , β_c и их стандартные отклонения для этих интервалов приведены в табл. 8 и 9. Здесь углы выражены в радианах, величины p и ε – в единицах 10^{-6} с^{-2} . Данные этой таблицы характерны для всех интервалов 1–25 [61]. Стандартные отклонения начальных условий реконструкций на интервалах 1–25, выраженные в радианах и 0.001 с^{-1} , лежат в диапазонах [61]: $\sigma_\delta = 0.01 \div 0.025$

, $\sigma_{\theta, \psi} = 0.01 \div 0.02$, $\sigma_{\Omega} = 0.01 \div 0.025$, $\sigma_{w2, w3} = 0.02 \div 0.08$. Приведенные примеры демонстрируют менее точную, чем в [1, 20], аппроксимацию псевдоизмерений. Значения σ_H в табл. 7 несколько выше, чем в [1, 20]. Тем не менее, реконструкции данной работы передают все особенности вращательного движения спутника.

Интервалы 10 и 14–18 представляют особый интерес для дальнейшего исследования, поскольку движения на них допускают приемлемую аппроксимацию периодическими движениями обобщенно-консервативной механической системы.

Таблица 8. Оценки параметров уравнений движения для спутника Фотон-12

№ инт.	p	λ	ε	α_c	β_c
10	– 0.0187	0.2323	0.0185	–0.0120	–0.0665
14	– 0.0300	0.2362	–0.0044	–0.0344	–0.0563
15	– 0.0802	0.2302	0.0023	–0.0149	–0.0638
16	– 0.0846	0.2395	0.0194	–0.0296	–0.0560
17	0.0216	0.2403	0.0070	–0.0461	–0.0591
18	– 0.2518	0.2379	0.0041	–0.0531	–0.0651

Таблица 9. Стандартные отклонения параметров уравнений движения для спутника Фотон-12

№ инт.	σ_p	σ_λ	σ_ε	$\sigma_{\alpha c}$	$\sigma_{\beta c}$
10	0.041	0.0013	0.0011	0.0065	0.0065
14	0.033	0.0013	0.00069	0.0045	0.0045
15	0.043	0.00085	0.00079	0.0047	0.0047
16	0.046	0.00075	0.00072	0.0049	0.0049
17	0.029	0.00059	0.00071	0.0053	0.0053
18	0.029	0.00051	0.00070	0.0044	0.0044

Аналогичное упрощение математической модели в части перехода от фактической к круговой орбите и упрощения аэродинамического восстанавливающего момента, а также при $\varepsilon = 0$ было исследовано для спутника Фотон М-2. Обобщенно-консервативная модель вращательного движения ($\varepsilon = 0$) обсуждается в следующем разделе, результаты с повторяющейся легендой приведены на рис. 20 и 21., а также в табл. 10 – 13.

В дальнейшем на интервалах из той части табл. 8, где значения ε малы, для реконструкции движения спутника можно использовать решения уравнений (3.1) при $\varepsilon = 0$. Уравнения (3.1) с заменой $\varepsilon = 0$ совпадают с одной из систем уравнений, принятой в [61], и несколько отличаются от уравнений, использованных в [19, 20] – в (3.1) опущен постоянный момент вдоль оси Ox_1 (поэтому $\dot{\omega}_1 = 0$). Постоянство ω_1 вынуждает рассматривать движения спутника, близкие его установившемуся движению, т.е. движения с достаточно большой и мало меняющейся компонентой угловой скорости ω_1 . Введение уточняемых углов α_c, β_c (хотя их оценки малы) несколько увеличивает точность обработки магнитных измерений.

Уравнения (3.1) при $\varepsilon = 0$ допускают обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(w_2^2 + w_3^2) - \omega_0(\lambda\Omega\tilde{a}_{21} + w_2\tilde{a}_{22} + w_3\tilde{a}_{23}) - \frac{3}{2}\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}^2 - p\tilde{a}_{11},$$

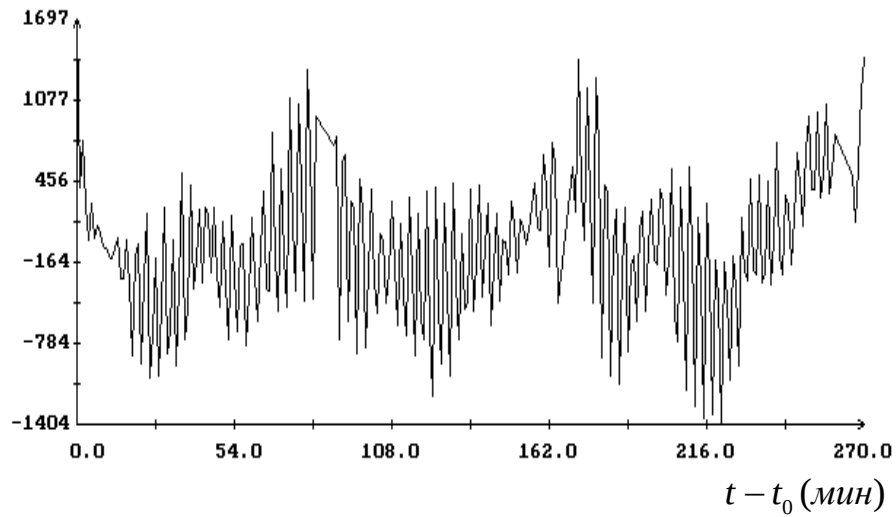
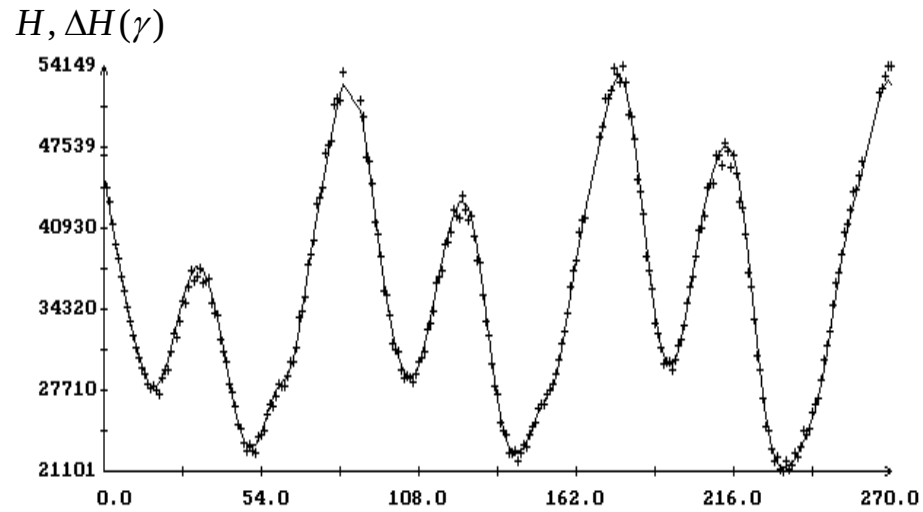
т.е. спутник – обобщенно-консервативная механическая система.

Глава 4. Обобщенно-консервативная модель вращательного движения

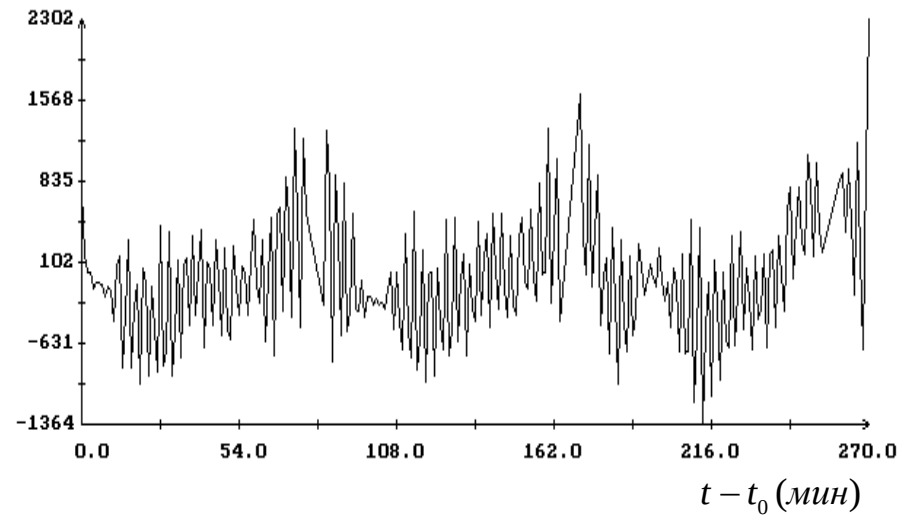
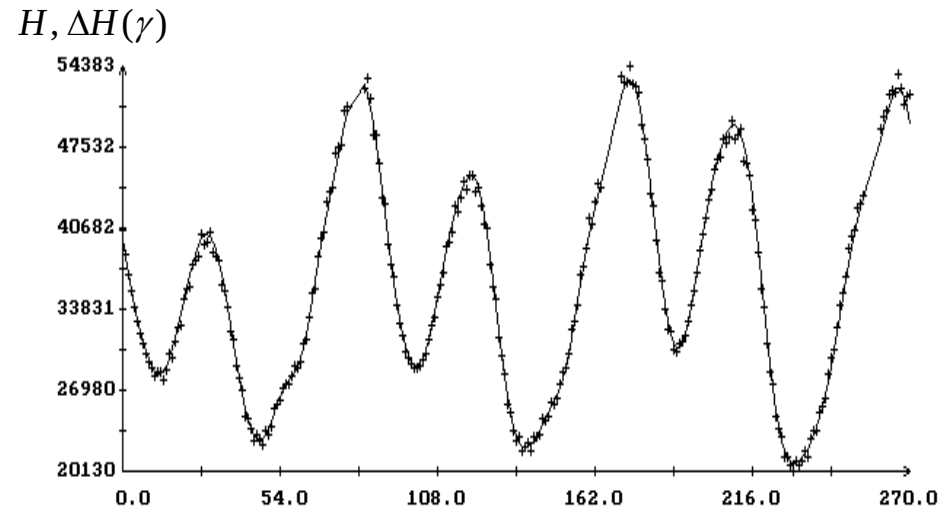
4.1. Обобщенно-консервативная модель вращательного движения

Дальнейшее исследование будет основано на модели вращательного движения, которая является упрощением модели, рассмотренной в третьей главе. Как видно из табл. 2 и 7, значения $\bar{\omega}_1$ со временем стабилизировались, а также оказались близки к предельным значениям, полученным в разделе 1.4. По-видимому, возростал не учитываемый в уравнениях (3.1) момент сопротивления, пропорциональный ω_1 [20]. На интервалах из той части табл. 6 и 8, где значения ε малы, для реконструкции движения спутника можно использовать решения уравнений (3.1) при $\varepsilon = 0$. Графики, иллюстрирующие такую реконструкцию на интервалах 10 и 14–18, приведены в [61]. Они очень похожи на графики, полученные с помощью исходной системы (3.1), но имеют увеличенные значения СКО(ΔH) (см. рис. 15 – 16). На рис. 15 в скобках указаны значения СКО(ΔH) из модели вращательного движения, рассматриваемой в разделе 1.3. Значения σ_H на упомянутых интервалах приведены в табл. 10 и 12, 7 и 14 вместе с оценками величин Ω , p , λ , α_c , β_c и их стандартными отклонениями. В этой таблице $[p] = 10^{-6} \text{ с}^{-2}$. Сравнение данных в табл. 7 с 14 позволяет понять, что дало сделанное огрубление модели в случае спутника Фотон-12 (см. значения σ_H). Результаты огрубления модели вращательного движения за счет перехода от фактической к круговой орбите, а также к автономной системе на примере спутника Фотон М-2 представлены в табл. 10, 11 (для сравнения см. табл. 2, 5) и на рис. 20, 21. Найденные при новой обработке значения Ω весьма близки соответствующим значениям $\bar{\omega}_1$ из табл. 2.

Раздел изложен в соответствии с публикациями [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25], написанными соискателем в соавторстве с В.В. Сазоновым.



(a)



(б)

Рис. 20. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ; (а) момент времени $t_0 = 09: 18: 53$ UTC 07.06.2005, $СКО(\Delta H) = 322 \gamma$; (б) момент времени $t_0 = 09: 21: 25$ UTC 09.06.2005, $СКО(\Delta H) = 318 \gamma$

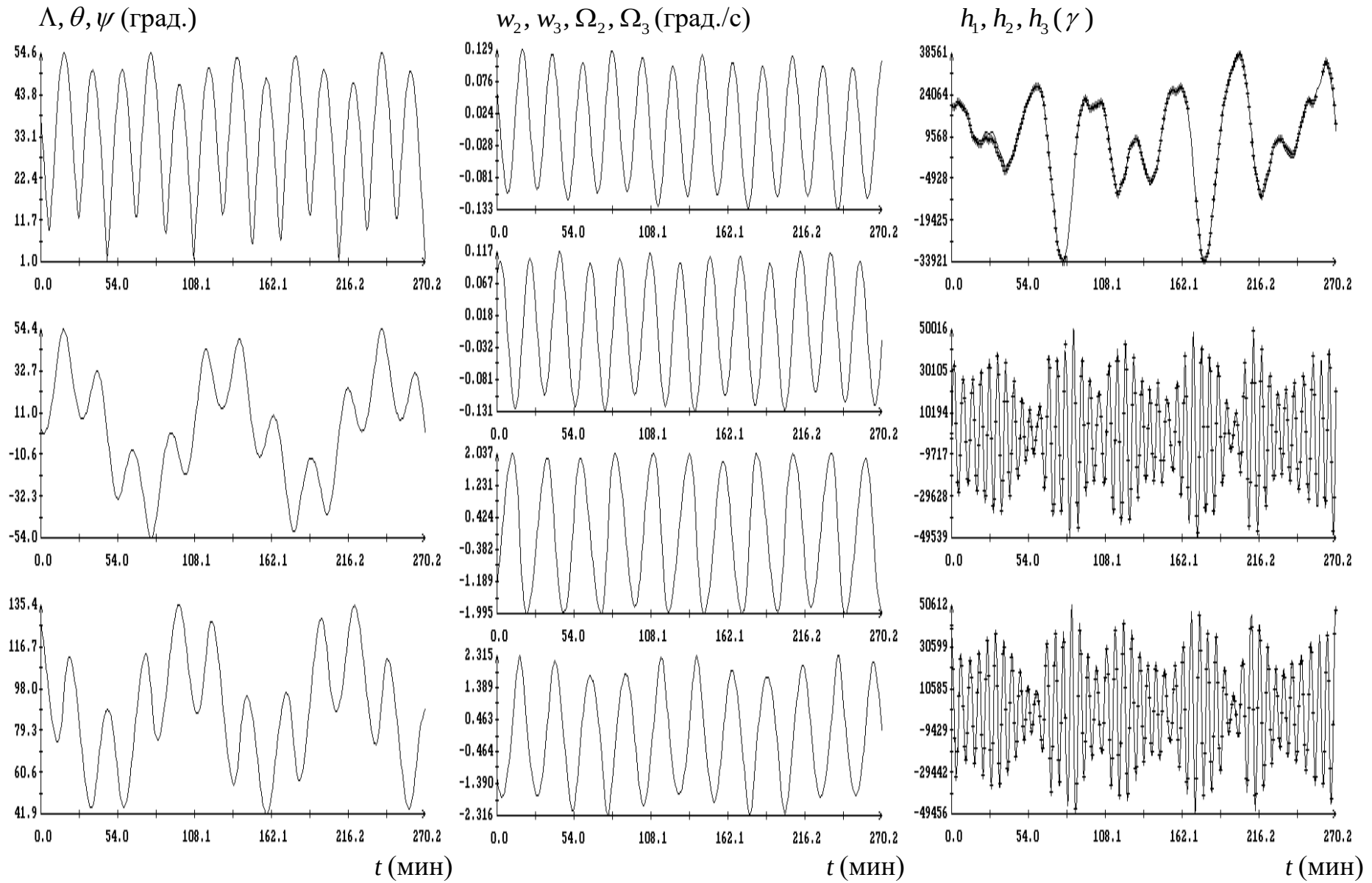


Рис. 21. Интервал d8. Момент $t = 0$ соответствует 09:20: 09 UTC 08.06.2005, $\Omega = 1.1120^\circ/\text{с}$, $\sigma_H = 1210 \gamma$.

Таблица 10. Результаты обработки измерений МПЗ, выполненных на спутнике Фотон М-2

Инт. №	Дата VI.05	t_0 UTC	σ_H , γ	Ω град./с	$\bar{\omega}_\perp$ град./с	$\delta\omega_\perp$ град./с
d5	5	10:36:28	1460	0.9322	0.1464	0.011
d7	7	09:18:53	1256	1.0673	0.1295	0.010
d8	8	09:20:09	1210	1.1120	0.1128	0.010
d8_5a	8	18:57:22	1233	1.1258	0.1079	0.010
d8_5d	9	01:21:00	1348	1.1357	0.1119	0.010
d9	9	09:21:25	1033	1.1499	0.1122	0.011

Таблица 11. Стандартные отклонения оценок начальных условий вращательного движения для спутника Фотон М-2

Инт. №	σ_ψ	σ_θ	σ_ϕ	σ_Ω	σ_{w2}	σ_{w3}
d5	0.0059	0.0068	0.0067	0.0052	0.032	0.011
d7	0.0057	0.0063	0.0049	0.0048	0.012	0.030
d8	0.0052	0.0063	0.0065	0.0043	0.024	0.021
d8_5a	0.0046	0.0039	0.0050	0.0035	0.024	0.013
d8_5d	0.0056	0.0069	0.0063	0.0046	0.032	0.018
d9	0.0064	0.0020	0.0088	0.0039	0.012	0.026

Таблица 12. Оценки параметров уравнений движения для спутника Фотон М-2

Инт. №	p	λ	α_c	β_c
d5	-0.1229	0.2642	-0.0045	0.0184
d7	-0.0948	0.2611	-0.0022	0.0156
d8	-0.1073	0.2623	-0.0039	0.0179
d8_5a	-0.1805	0.2619	-0.0044	0.0193
d8_5d	-0.1383	0.2612	-0.0046	0.0176
d9	-0.1354	0.2608	-0.0073	0.0161

Таблица 13. Стандартные отклонения параметров уравнений движения для спутника Фотон М-2

Инт. №	σ_p	σ_λ	$\sigma_{\alpha c}$	$\sigma_{\beta c}$
d5	0.021	0.00024	0.0033	0.0033
d7	0.022	0.00022	0.0029	0.0029
d8	0.022	0.00019	0.0027	0.0028
d8_5a	0.020	0.00015	0.0024	0.0024
d8_5d	0.025	0.00019	0.0028	0.0028
d9	0.020	0.00017	0.0023	0.0023

Таблица 14. Оценки параметров уравнений движения при $\varepsilon = 0$ для спутника Фотон-12

№ инт.	σ_H, γ	Ω град./с	p	λ	α_c	β_c
10	3393	0.8135	-0.1388	0.2281	-0.0114	-0.0667
14	2107	0.938	-0.0372	0.2362	-0.0345	-0.0565
15	2193	0.9694	-0.0802	0.2302	-0.0149	-0.0638
16	3228	0.9885	0.0969	0.2415	-0.0302	-0.0552
17	2063	1.0097	-0.0159	0.2398	-0.0451	-0.0597
18	1862	1.0164	-0.2323	0.2379	-0.0532	-0.0651

Таблица 15. Стандартные отклонения параметров уравнений движения при $\varepsilon = 0$ для спутника Фотон-12

№ инт.	σ_Ω	σ_p	σ_λ	$\sigma_{\alpha c}$	$\sigma_{\beta c}$
10	0.027	0.049	0.0015	0.0078	0.0078
14	0.026	0.033	0.0014	0.0047	0.0047
15	0.017	0.043	0.00085	0.0047	0.0047
16	0.022	0.066	0.0010	0.0072	0.0072
17	0.014	0.031	0.00064	0.0057	0.0056
18	0.011	0.030	0.00052	0.0045	0.0045

Ниже в этом разделе полагаем в (3.1) $\varepsilon = 0$, $\omega_1 = \Omega$ и считаем Ω параметром согласования. Уравнения (3.1) дополним уравнениями Пуассона для компонент орта оси OX_2 в системе $Ox_1x_2x_3$:

$$\dot{\tilde{a}}_{21} + w_2 \tilde{a}_{23} - w_3 \tilde{a}_{22} = 0, \quad \dot{\tilde{a}}_{22} + w_3 \tilde{a}_{21} = 0, \quad \dot{\tilde{a}}_{23} - w_2 \tilde{a}_{21} = 0$$

и получившуюся систему обозначим (4.1). Уравнения (4.1) допускают обобщенный интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(w_2^2 + w_3^2) - \omega_0(\lambda\Omega\tilde{a}_{21} + w_2\tilde{a}_{22} + w_3\tilde{a}_{23}) - \frac{3}{2}\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}^2 - p\tilde{a}_{11}. \quad (4.2),$$

т.е. спутник представляет собой обобщенно-консервативную механическую систему. Уравнения (4.1) имеют также семейства частных решений, в которых $\tilde{a}_{11}$ — постоянные величины, связанные соотношениями

$$\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{21}^2 + \tilde{a}_{31}^2 = 1, \quad \tilde{a}_{31}[3\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{11} + p] = 0, \quad (4.3)$$

$$\omega_0(\omega_0\tilde{a}_{21} - \lambda\Omega)(1 - \tilde{a}_{21}^2) + \tilde{a}_{21}[3\omega_0^2(1-\lambda)\tilde{a}_{31}^2 - p\tilde{a}_{11}] = 0,$$

а остальные элементы матрицы $\|\tilde{a}_{ij}\|$ определяются соотношениями

$$\dot{\tilde{a}}_{22} + \omega_0\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{23} = 0, \quad \dot{\tilde{a}}_{23} - \omega_0\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{22} = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{12} &= \frac{\tilde{a}_{31}\tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{22}}{1 - \tilde{a}_{21}^2}, & \tilde{a}_{13} &= -\frac{\tilde{a}_{31}\tilde{a}_{22} + \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{23}}{1 - \tilde{a}_{21}^2}, \\ \tilde{a}_{32} &= -\frac{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{31}\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{22}}{1 - \tilde{a}_{21}^2}, & \tilde{a}_{33} &= \frac{\tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{31}\tilde{a}_{21}\tilde{a}_{23}}{1 - \tilde{a}_{21}^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пусть соотношения (4.3) выполнены. Уравнения (4.4) для переменных $\tilde{a}_{22}$ и $\tilde{a}_{23}$ имеют решение $\tilde{a}_{22} = \sqrt{1 - \tilde{a}_{21}^2} \cos[\tilde{a}_{21}\omega_0(t - t_0)]$, $\tilde{a}_{23} = \sqrt{1 - \tilde{a}_{21}^2} \sin[\tilde{a}_{21}\omega_0(t - t_0)]$, где t_0 – произвольная постоянная; переменные $\tilde{a}_{12}$, $\tilde{a}_{13}$, $\tilde{a}_{32}$, $\tilde{a}_{33}$ находятся по формулам (4.4). Орт оси Ox_1 в системе $OX_1X_2X_3$ имеет компоненты $\tilde{a}_{i1}$, поэтому решения (4.3), (4.4) описывают покой оси Ox_1 в этой системе. При $p = 0$ эти решения совпадают с известными решениями, называемыми конической, цилиндрической и гиперболоидальной прецессиями [10]. Их сложный вид и неожиданный период связаны со способом введения системы координат $Ou_1u_2u_3$. Эта система, удобная в задаче обработки магнитных измерений, плохо подходит для описания движения спутника относительно орбитальной системы координат. Оказалось, что на интервалах 10, 14–18 для реконструкции можно использовать периодические движения специального вида. Но чтобы прийти к ним, уравнения (4.1) надо заменить эквивалентными уравнениями в других переменных.

4.2. Выводы

Модель, представленная в разделе 1.3, позволила реконструировать эволюцию фактического движения исследуемых спутников с возрастающей угловой скоростью. В третьей главе используется еще более простая модель, в которой реальная орбита спутника (высота апогея 380км, высота перигея 220км для Фотона-12, для Фотона М-2 300км и 260км, соответственно), заменена круговой орбитой. Эта замена позволила описать вращательное движение спутника дифференциальными уравнениями, которые в случае установившегося движения с достаточно большой угловой скоростью (результат указанной выше эволюции) можно свести к обобщенно-консервативной системе. При значениях продольной угловой скорости, близких ее предельному значению $1^\circ/\text{с}$, в полученных уравнениях можно опустить неконсервативную составляющую приложенного к спутнику внешнего момента. Значения σ_H данной модели несколько выше, чем в разделе 1.3 и третьей главе. Тем не менее, достигнутая точность достаточна.

Показано, что при значениях угловой скорости спутников, близких ее установившемуся значению 1град./с , уравнения их вращательного движения допускают согласованное с измерениями упрощение. Орбиту спутника можно принять круговой и опустить неконсервативную составляющую действующего на спутник внешнего момента. В таком случае эти уравнения и выводимые из них уравнения Белецкого становятся обобщенно-консервативными, если записать их в орбитальной системе координат.

Глава 5. Установившееся вращательное движение спутника

5.1. Уравнения движения оси динамической симметрии спутника

Для описания движений спутника, в которых ось Ox_1 отклоняется от оси Ox_2 менее чем на $\pi/2$, положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ удобно задавать введенными выше углами ψ и θ ; третий угол, поворот на который вокруг оси Ox_1 завершает преобразование системы $OX_1X_2X_3$ в систему $Ox_1x_2x_3$, обозначим φ . Преобразование $OX_1X_2X_3 \rightarrow Ox_1x_2x_3$ можно представить в виде суперпозиции преобразований $OX_1X_2X_3 \rightarrow Oy_1y_2y_3$ и $Oy_1y_2y_3 \rightarrow Ox_1x_2x_3$. Первое преобразование задается углами ψ , θ и δ , второе преобразование – углом χ . Повороты на углы δ и χ выполняются вокруг оси $Ox_1 = Oy_1$ в одном направлении, поэтому $\varphi = \delta + \chi$.

Если интересоваться только движением оси динамической симметрии спутника Ox_1 , то удобно использовать углы ψ , θ и комбинации угловых скоростей

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos \varphi - \omega_3 \sin \varphi = w_2 \cos \delta - w_3 \sin \delta,$$

$$\Omega_3 = \omega_2 \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi = w_2 \sin \delta + w_3 \cos \delta,$$

где

$$\cos \delta = \frac{\tilde{a}_{33}}{\sqrt{\tilde{a}_{32}^2 + \tilde{a}_{33}^2}}, \quad \sin \delta = \frac{\tilde{a}_{32}}{\sqrt{\tilde{a}_{32}^2 + \tilde{a}_{33}^2}}.$$

Такие переменные были использованы в [41, 61]. Величины Ω_2 и Ω_3 – проекции угловой скорости спутника на оси Резаля, отвечающие углам ψ и θ . Графики

этих величин в рассмотренных примерах приведены в средней части рис. 21 для спутника Фотон М-2, а для спутника Фотон-12 – на рис. 18 и 22.

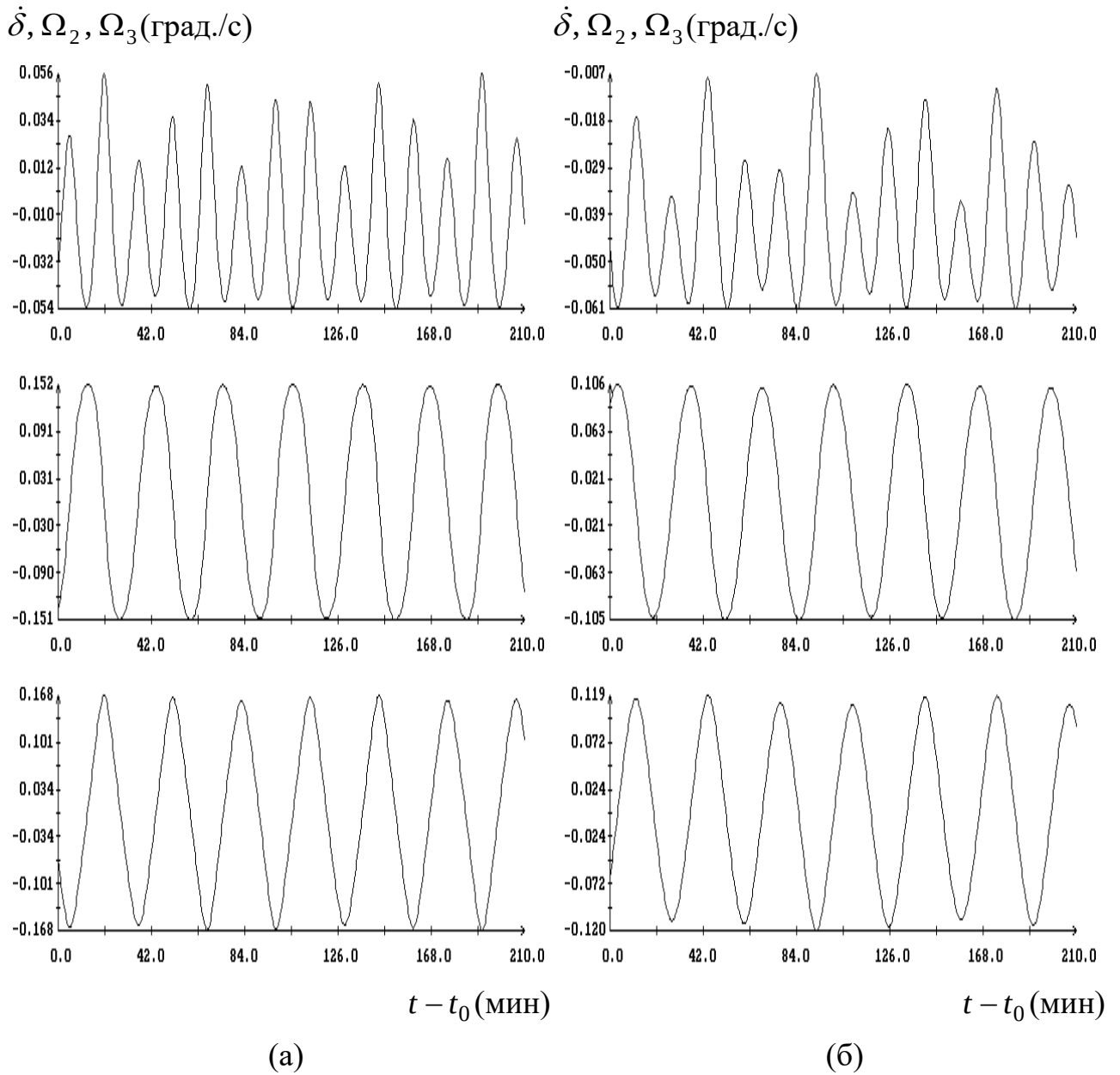


Рис. 22. Угловые скорости $\dot{\delta}, \Omega_2, \Omega_3$, (а) – на интервале 14, $t_0 = 19:05:14$ UTC 17.09.1999; (б) – на интервале 17, $t_0 = 08:54:51$ UTC 19.09.1999.

Для переменных ψ , θ , Ω_2 , Ω_3 справедливы уравнения [41, 61]

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \Omega_2 - \Omega \cos \psi, & \dot{\psi} &= \frac{\Omega_3}{\cos \theta} - \Omega \operatorname{tg} \theta \sin \psi, \\ \dot{\Omega}_2 &= -\left(\lambda \Omega + \Omega_3 \operatorname{tg} \theta - \Omega \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \Omega_3 + 3\Omega^2 (1 - \lambda) \sin \theta \cos \theta + p \cos \psi \sin \theta, & (5.1) \\ \dot{\Omega}_3 &= \left(\lambda \Omega + \Omega_3 \operatorname{tg} \theta - \Omega \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \Omega_2 + p \sin \psi.\end{aligned}$$

Где $\omega_1 = \Omega$ - параметр ввиду перехода к обобщенно-консервативной системе, описанного в четвертой главе. Удобство переменных Ω_2 , Ω_3 при спектральном анализе найденных движений заключается в том, что согласно уравнениям (5.1) эти переменные имеют одинаковый набор частот с переменными θ и ψ . Выраженные через ψ , θ , Ω_2 и Ω_3 решения системы (4.1), описывающих движения спутника на интервалах из табл. 8 и 10, это – графики переменных θ , ψ , Ω_2 , Ω_3 на рис. 18, 22, 21 для Фотон-12 и Фотон М-2 соответственно. Судя по графикам, решения, найденные из реконструкции вращательного движения, являются соответственно периодическими и похожими на условно-периодические с двумя доминирующими частотами. Эти частоты были определены с помощью спектрального анализа. Чтобы надежно определить их, исследуемые решения были продолжены на отрезок $t_0 \leq t \leq t_0 + 50000c$ и вычислены в узлах сетки $\{t'_m\}_{m=0}^M$, $t'_m = t_0 + mh$, $h = 20c$, $M = 2500$. Основные приемы спектрального анализа изложим на примере последовательности $\theta_m = \theta(t'_m)$ для спутника Фотон М-2. Аналогичные последовательности, отвечающие спутнику Фотон-12 и оставшимся переменным системы (5.1) были исследованы по той же схеме. Более подробно эти приемы описаны в [53, 61].

5.2. Спектральный анализ построенных реконструкций

Спектральный анализ построенных реконструкций начинался с попытки выделить из данных θ_m отдельные гармонические составляющие (их еще называют циклическими трендами). С этой целью данные аппроксимировались функцией

$$\theta_{\text{ap}}(t) = a_0 + a \cos 2\pi ft + b \sin 2\pi ft, \quad (5.2)$$

где a_0 , a , b и f – параметры. Значения параметров ищались методом наименьших квадратов. Составим выражение

$$Z = \sum_{m=0}^M [\theta_m - \theta_{\text{ap}}(t'_m)]^2. \quad (5.3)$$

Согласно методу наименьших квадратов определение параметров a_0 , a , b и f сводится к минимизации по ним выражения (5.3). Функция $Z = Z(a_0, a, b, f)$ имеет, как правило, много локальных минимумов, поэтому ее минимизация проводилась поэтапно. Сначала в результате решения ряда одинаковых линейных задач наименьших квадратов вычислялись значения функции

$$Z_1(f) = \min_{a_0, a, b} Z(a_0, a, b, f)$$

в узлах достаточно мелкой равномерной сетки на отрезке $0 \leq f \leq F = (2h)^{-1}$ (смысл величины F пояснен ниже), строился график этой функции. Затем перебором по сетке находились приближенные значения точек минимума $Z_1(f)$. Абсциссы значимых (с достаточно малыми ординатами) точек минимума могут быть частотами искомым гармоник. Значения пробной частоты f , отвечающие значимым сеточным минимумам функции Z_1 , служат оценками искомым частот исследуемых решений.

Для проверки значимости найденных частот другим способом наряду с

функцией $Z_1(f)$ рассматривалась функция

$$I(f) = \left[\sum_{m=0}^M (\theta_m - \theta_*) \cos 2\pi f t'_m \right]^2 + \left[\sum_{m=0}^M (\theta_m - \theta_*) \sin 2\pi f t'_m \right]^2,$$

$$\theta_* = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \theta_m,$$

называемая периодограммой Шустера [53]. Пусть исследуемый набор данных θ_m образован значениями в точках t'_m функции

$$\theta_H(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t), \quad (5.4)$$

где все $f_k > 0$ и среди них нет одинаковых. Составим выражение

$$I_1(f) = \left\{ \sum_{m=0}^M [\theta_H(t'_m) - a_0] \cos 2\pi f t'_m \right\}^2 + \left\{ \sum_{m=0}^M [\theta_H(t'_m) - a_0] \sin 2\pi f t'_m \right\}^2.$$

Его можно преобразовать к виду

$$I_1(f) = \frac{(M+1)^2}{4} \sum_{k=1}^K (a_k^2 + b_k^2) [W(f - f_k) + W(f + f_k)] + \Delta I_1(f),$$

$$W(f) = \frac{1}{(M+1)^2} \left[\left(\sum_{m=0}^M \cos 2\pi f t'_m \right)^2 + \left(\sum_{m=0}^M \sin 2\pi f t'_m \right)^2 \right] = \frac{\sin^2 \pi (M+1) f h}{(M+1)^2 \sin^2 \pi f h}.$$

Здесь $\Delta I_1(f)$ – сумма тригонометрических выражений вида $A \cos \phi + B \sin \phi$, где $\phi = f(t'_j - t'_i) \pm f_p t'_i \pm f_q t'_j$ ($i < j$), коэффициенты A и B зависят от a_k, b_k .

Функция $W(f)$ называется функцией окна [53]. Она – четная, периодическая с периодом h^{-1} и удовлетворяет соотношениям $0 \leq W(f) \leq 1$, $W(0) = 1$. Ее наименьший положительный нуль равен $[(M+1)h]^{-1}$. Функция окна периодическая с периодом $2F$. Значимые максимумы (пики) функции окна равны 1 и достигаются

в точках $F_l = 2lF$ ($l = 0, 1, 2, \dots$). Вне малых окрестностей этих точек $W(f) < 0.01$. С увеличением M ширина пиков этой функции сужается. В силу четности и периодичности функция окна полностью определяется своими значениями на отрезке $0 \leq f \leq F$.

Для $\Delta I_1(f)$ не удастся найти простых эффективных оценок, но при $M \gg K$ вкладом этого слагаемого в значения функции $I_1(f)$ вблизи точек ее значимых максимумов можно пренебречь и принять

$$I_1(f) \approx \frac{(M+1)^2}{4} \sum_{k=1}^K (a_k^2 + b_k^2) [W(f - f_k) + W(f + f_k)].$$

Отсюда, учитывая поведение функции $W(f)$, находим точки таких максимумов. Они определяются соотношениями $|f \pm f_k| = F_l$. Пусть все $f_k < F_1/2 = F$. Тогда на отрезке $0 \leq f \leq F$

$$I_1(f) \approx \frac{(M+1)^2}{4} \sum_{k=1}^K (a_k^2 + b_k^2) W(f - f_k),$$

и отыскание значимых максимумов функции $I_1(f)$ на этом отрезке позволяет в принципе определить все частоты выражения (5.4). Частота F называется частотой Найквиста. Именно она служила верхней границей диапазона частот, для которых вычислялась функция $Z_1(f)$. В случае рассматриваемых видеоданных $F = 12.5$ Гц.

Здесь необходимо отметить следующее. Корректная интерпретация частот в данных на равномерной временной сетке с шагом h возможна лишь в том случае, если в этих данных отсутствуют частоты, превышающие частоту Найквиста $F = 0.5/h$. Если в данных присутствует гармоническая составляющая частотой $f > F$, то она либо исказит составляющие с частотами $|f \pm F_l|$ при значениях l , для которых $0 \leq |f \pm F_l| \leq F$, либо проявится как дополнительная частота. Этот эффект называется наложением частот. Чтобы избежать его, надо быть уверенным, что на интервале $f > F$ исследуемая функция не имеет значимых циклических

трендов. В случае рассматриваемых движений спутника Фотон М-2 значимых циклических трендов нет уже при $f > 0.002 \Gamma_{\text{ц}}$.

Периодограмма Шустера используется следующим образом. Если функция $I_1(f)$ имеет значимый максимум в точке f_* , то f_* близка одной из частот выражения (5.4). При $f_* \approx f_k$ величина $2\sqrt{I_1(f_*)}/(M+1) \approx \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, т.е. является оценкой амплитуды гармоники с частотой f_k . Так как погрешность соотношения $a_0 = \theta_*$ обычно весьма мала, в выписанных соотношениях функцию $I_1(f)$ можно заменить функцией $I(f)$.

Ниже для удобства вместо графиков функций $\Psi_1(f)$ и $I(f)$ приводятся графики функций

$$E(f) = \sqrt{\frac{Z_1(f)}{M-2}}, \quad A(f) = \frac{2}{M+1} \sqrt{I(f)}. \quad (5.5)$$

Минимумы функции $E(f)$ дают оценки средней квадратичной ошибки аппроксимации функции $x(t)$ выражением (1), максимумы функции $A(f)$ – оценки амплитуды $\sqrt{a^2 + b^2}$. Функцию $A(f)$ называют амплитудным спектром. Вне малой окрестности точки $f = 0$ амплитудным спектром может служить и функция $\tilde{A}(f) = \sqrt{a^2(f) + b^2(f)}$, где $a(f)$ и $b(f)$ находятся при вычислении функции $Z_1(f)$ (при $f < \pi/T$ соответствующая задача наименьших квадратов плохо обусловлена). Значимые максимумы функций $A(f)$ и $\tilde{A}(f)$, практически, совпадают.

Пусть с использованием периодограмм $Z_1(f)$ и $I(f)$ описанным выше способом найдены частоты f_k ($k = 1, 2, \dots, K$; $K \ll N$). Отвечающий этим частотам тренд (сумму циклических трендов) ищем в виде (5.4). Коэффициенты a_k и b_k находим, решая линейную задачу наименьших квадратов. Сравнение выражения (5.4) с исходной функцией $\theta(t)$ на сетке $\{t'_m\}$ дает объективную оценку точности построенной аппроксимации и определения частот f_k .

Ниже функции (5.5), построенные по сеточным значениям переменных θ , ψ , Ω_2 , Ω_3 , снабжены одноименными нижними индексами. Примеры построенных аппроксимаций для движений, продолженных с интервала d8, приведены на рис. 23 – 26. В левых частях этих рисунков приведены графики функций (5.5), в правых частях – графики, иллюстрирующие точность построенных аппроксимаций. В верхней половине правых частей в единых системах координат приведены графики исходных функций и аппроксимирующих выражений (5.4) (ломаные с абсциссами вершин в узлах сетки $\{t'_m\}$ и ординатами, равными значениям функций). Графики практически совпадают, поэтому в нижней половине правых частей рис. 23 – 26 приведены графики разностей $\Delta\theta = \theta(t) - \theta_H(t)$ и т. д. В подписях к рисункам приведены частоты и амплитуды циклических трендов, использованных в аппроксимациях; амплитуда указана под частотой. В каждой реконструкции частоты трендов с большими амплитудами в разных переменных практически совпадают, частоты с малыми амплитудами совпадают несколько хуже. Схожие результаты по спутнику Фотон-12 представлены в разделе 6.1.

5.3. Установившееся вращательное движение спутника Фотон М-2

Вращательное движение спутника Фотон М-2 в конце полета можно описать обобщенно-консервативной системой дифференциальных уравнений. Вековое изменение собственного кинетического момента этого спутника описывается так называемыми эволюционными уравнениями В.В. Белецкого, также образующими обобщенно-консервативную систему.

Как видно из рисунков 23 – 26, в рассматриваемых реконструкциях присутствуют две доминирующие частоты. Более точно, в переменных θ и ψ присутствуют две таких частоты, назовем их низкая и высокая, а в переменных Ω_2 и Ω_3 присутствует только одна из них – высокая. Низкая частота в Ω_2 и Ω_3 также

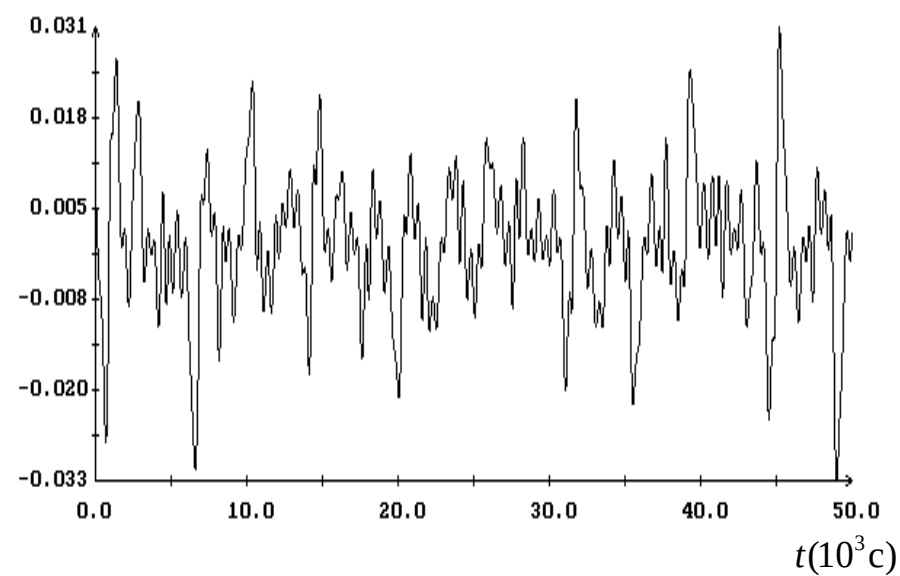
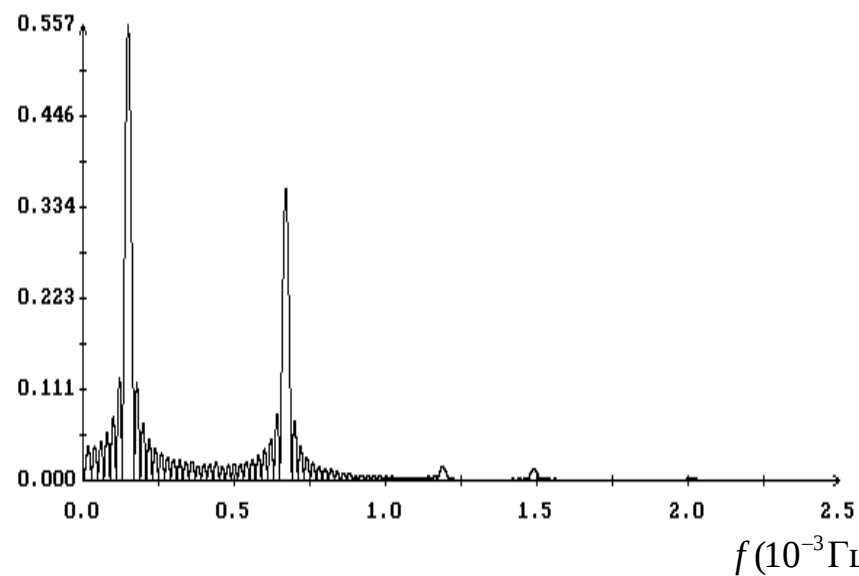
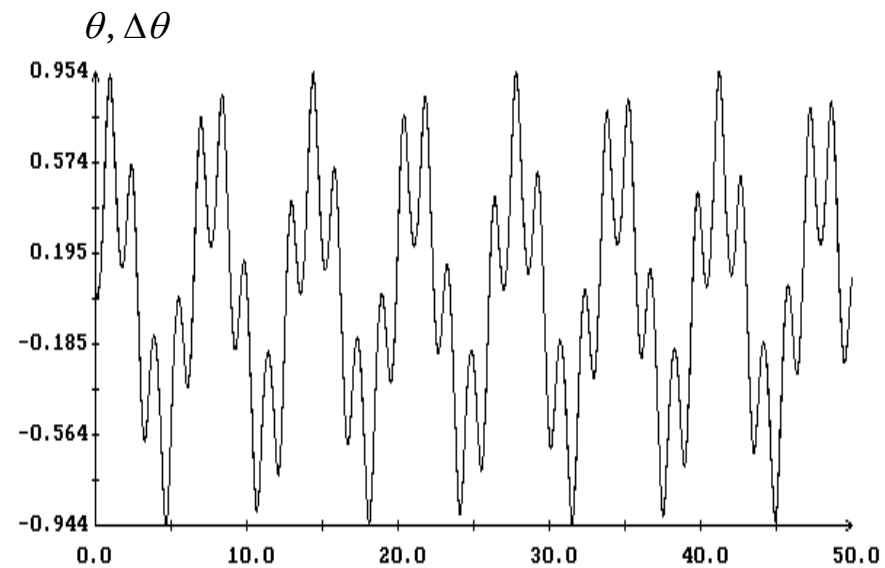
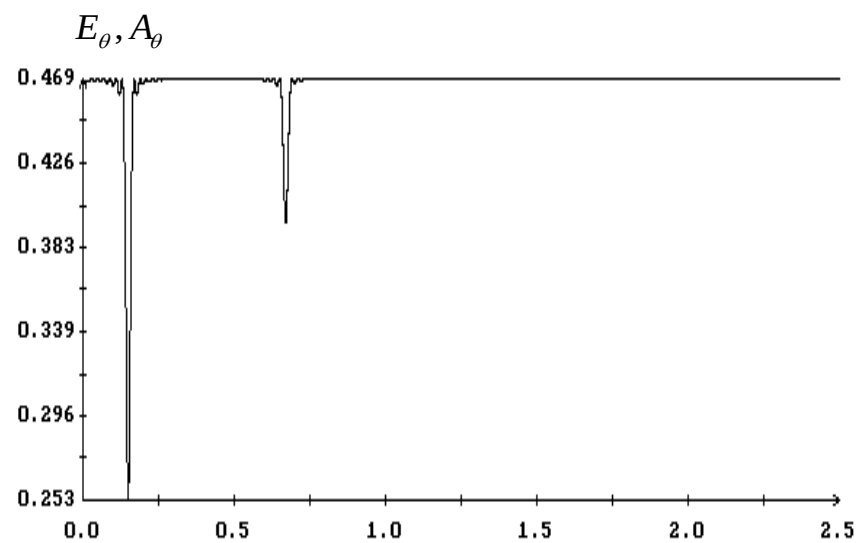


Рис. 23. Интервал d8. Угол θ . Частоты: 0.1493, 0.6702, 1.1893, 1.4902 (0.001 Гц); амплитуды: 0.5580, 0.3572, 0.0164, 0.0145 (рад.).

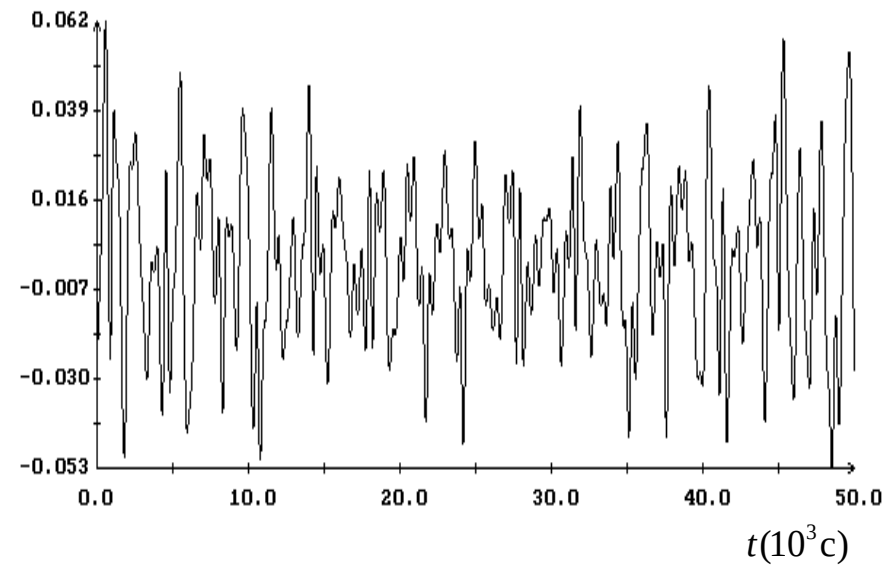
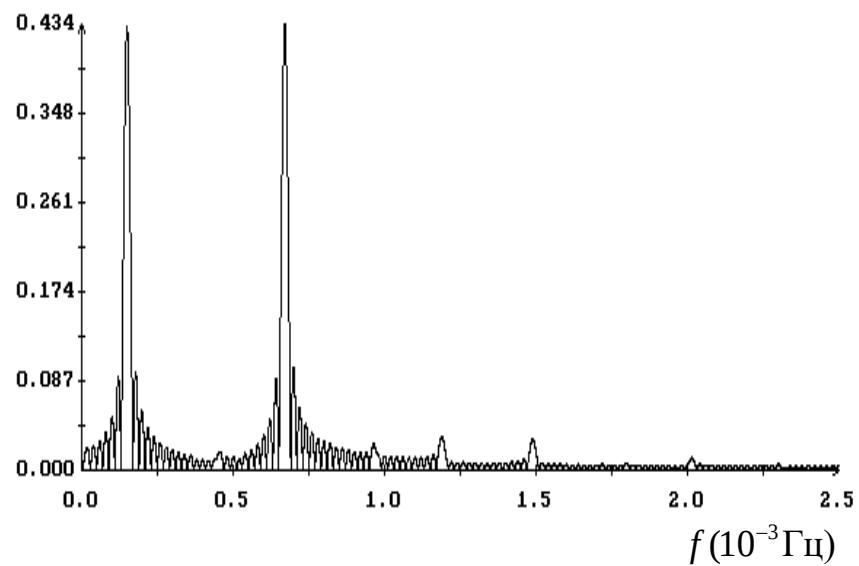
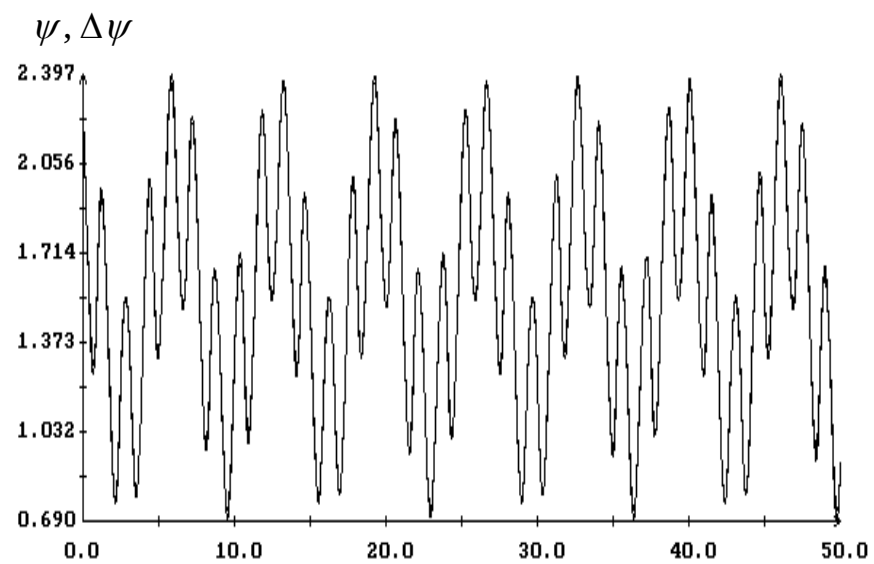
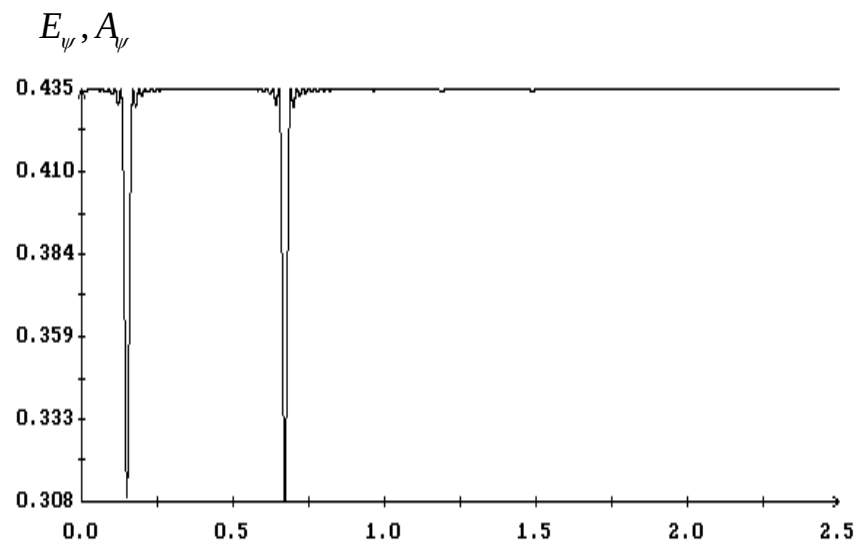


Рис. 24. Интервал d8. Угол ψ . Частоты: 0.1492, 0.6707, 1.4889, 1.1879, 0.9631 ($0.001 \Gamma y$);
амплитуды: 0.4324, 0.4329, 0.0299, 0.0294, 0,0171 (рад.).

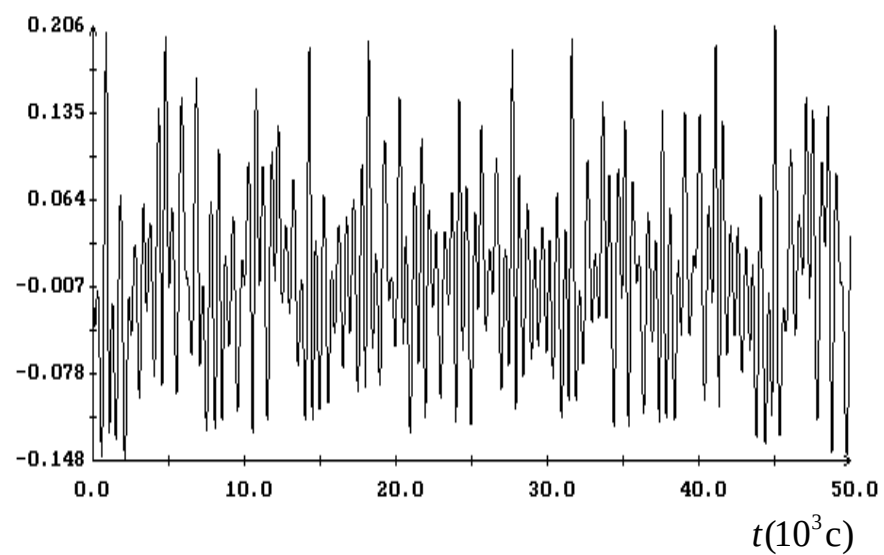
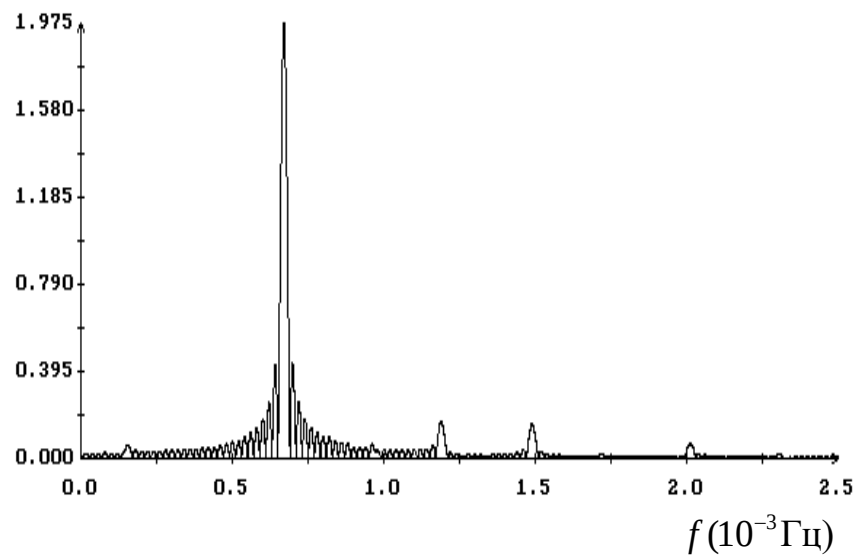
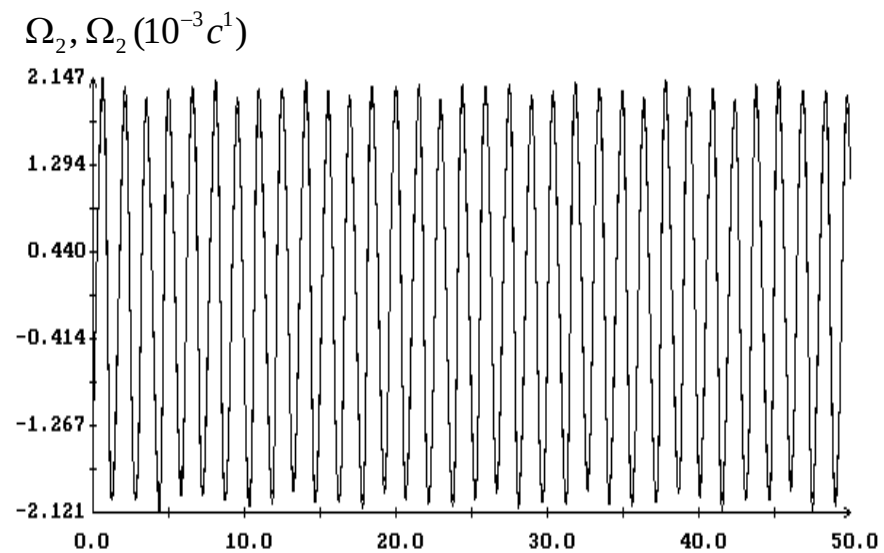
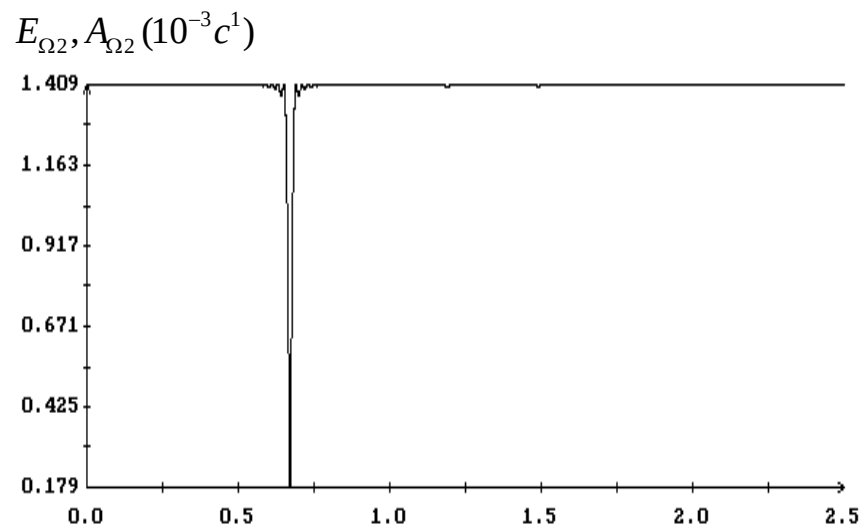


Рис. 25. Интервал d8. Угловая скорость Ω_2 . Частоты: 0.6704, 1.1879, 1.4899, 0.1558 ($0.001 \Gamma y$); амплитуды: 1.9746, 0.1671, 0.1578, 0.0445 ($0.001 c^{-1}$).

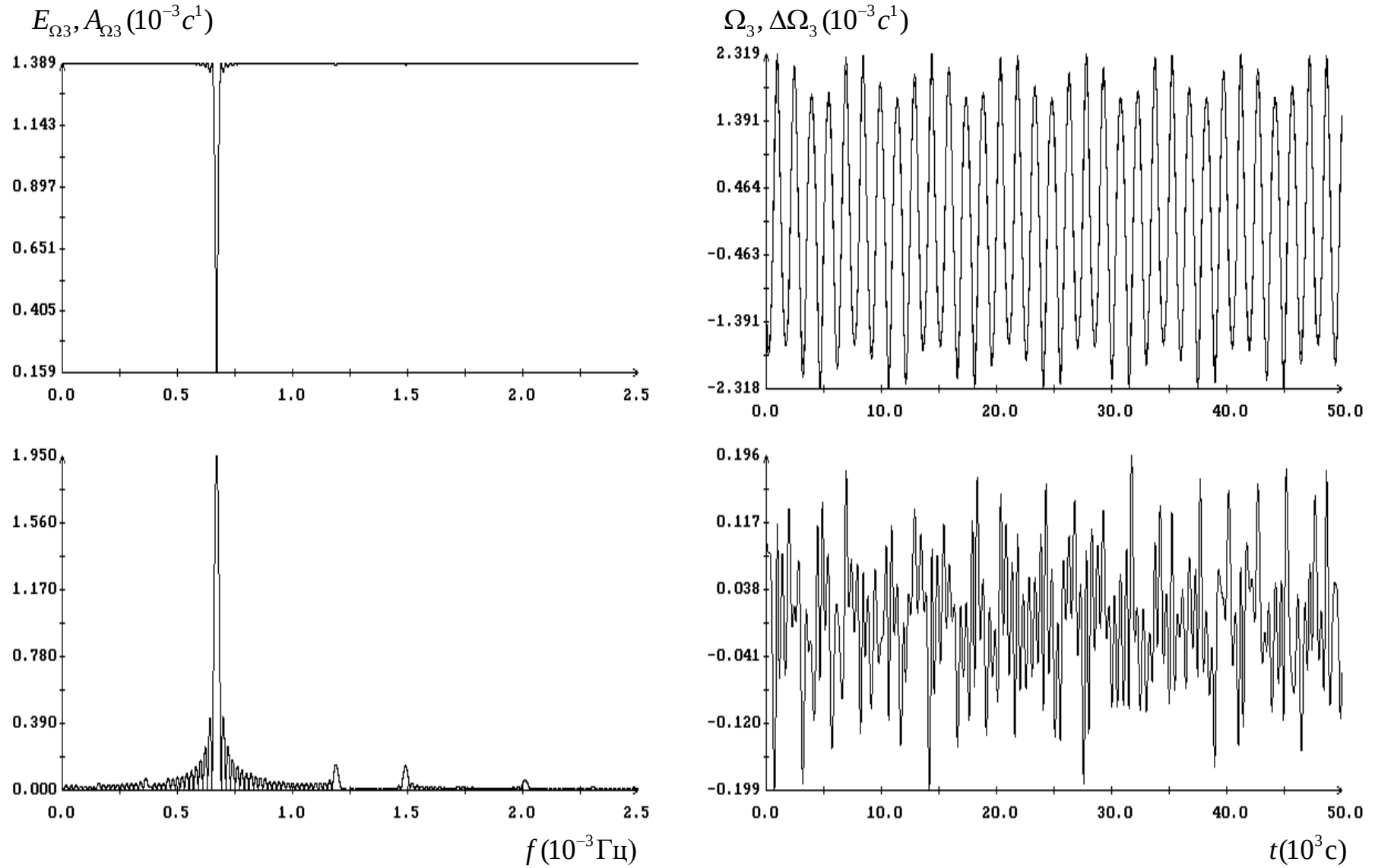


Рис. 26. Интервал d8. Угловая скорость Ω_3 . Частоты: 0.6704, 1.1885, 1.4912, 0.1585, 2.0402 ($0.001 \Gamma_{\text{ц}}$); амплитуды: 1.9492, 0.1452, 0.1395, 0.0144, 0.0142 ($0.001 c^{-1}$).

присутствует, но определяется со смещением, и ей отвечает весьма малая амплитуда. Высокая частота связана с так называемым нутационным движением спутника. Оно существует при угле нутации (между вектором кинетического момента и осью динамической симметрии Ox_1), отличном от нуля и π . Это движение проявляется в компонентах угловой скорости $\Omega_2, \Omega_3, \omega_2, \omega_3$ и w_2, w_3 . Для пары w_2, w_3 эта частота (циклическая) близка $\lambda\Omega$, для пары ω_2, ω_3 она близка $(1-\lambda)\Omega$. В регулярной прецессии Эйлера указанные выражения для частот – точные. Низкая частота, как будет сейчас показано, это частота векового движения собственного кинетического момента спутника относительно орбитальной системы координат. Чтобы установить это, рассмотрим эволюционные уравнения В.В. Белецкого, полученные усреднением уравнений по регулярной прецессии Эйлера (2.9) с учетом заявленного перехода на круговую орбиту и принятия $\varepsilon = 0$. Эти уравнения имеют вид [19, 62]

$$\dot{\mathbf{E}}_1 = \frac{3\omega_0^2}{2l}(1-\lambda)(1-3c^2)(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E}_1)(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{E}_1) + \frac{pc}{l}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{E}_1),$$

$$\dot{\omega}_\perp = 0, \quad l = \sqrt{\lambda^2\Omega^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda\Omega}{l}.$$

Здесь $\mathbf{E}_1$ – орт собственного кинетического момента спутника, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ – орты осей Ox_1 и Ox_3 соответственно. В этих уравнениях $\omega_\perp, l$ и c – постоянные величины. В скалярной форме последние уравнения запишем в орбитальной системе координат. Орт $\mathbf{E}_1$ параметризуем углами $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ так, чтобы в орбитальной системе $\mathbf{E}_1 = (\cos\tilde{\psi} \cos\tilde{\theta}, \sin\tilde{\psi} \cos\tilde{\theta}, -\sin\tilde{\theta})$. Заметим, что орт оси Ox_1 в орбитальной системе параметризуется такими же формулами, в которых вместо углов $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ используются углы ψ и θ . В переменных $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ эволюционные уравнения В.В. Белецкого выглядят так:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}} \cos\tilde{\theta} &= -\kappa_g \sin\tilde{\theta} \cos\tilde{\theta} + (\kappa_a \cos\tilde{\psi} - \omega_0 \sin\tilde{\psi}) \sin\theta, \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\kappa_a \sin\tilde{\psi} - \omega_0 \cos\tilde{\psi}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\kappa_g = \frac{3\omega_0^2}{2l}(1-\lambda)(1-3c^2), \quad \kappa_a = \frac{pc}{l}, \quad l = \sqrt{\lambda^2\Omega^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda\Omega}{l}.$$

Здесь κ_g и κ_a – параметры, значения которых на каждом интервале обработки магнитных измерений выражаются через найденные для этого интервала величины Ω , λ , p и $\bar{\omega}_\perp$.

Уравнения (5.6) допускают первый интеграл

$$\frac{\kappa_g}{2} \sin^2 \tilde{\theta} + (\kappa_a \cos \tilde{\psi} - \omega_0 \sin \tilde{\psi}) \cos \tilde{\theta}$$

и интегрируются в квадратурах [10]. Они также сохраняют свой вид при замене

$$t \rightarrow -t, \quad \theta \rightarrow -\theta. \quad (5.7)$$

Решения уравнений (5.7), расположенные в области $|\theta| < \pi/2$, $|\tilde{\psi} - \pi/2| < \pi/2$, периодические. Сдвиг по времени, допускаемый в решениях автономных систем, можно выбрать так, чтобы сдвинутое периодическое решение удовлетворяло краевым условиям

$$\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad (5.8)$$

где T – период решения. Используя только инвариантность уравнений (5.6) относительно преобразования (5.7), можно доказать [54], что всякое решение краевой задачи (5.6), (5.8) является T -периодическим, в котором переменная $\tilde{\psi}$ – четная, а переменная $\tilde{\theta}$ – нечетная функции времени.

Решения краевой задачи (5.6), (5.8), аппроксимирующие низкочастотную составляющую в угловых переменных системы (5.1), находились следующим образом. Величина, обратная низкой частоте на данном временном интервале, принималась в качестве периода T . Параметры κ_g и κ_a в (5.6) рассчитывались по значениям величин Ω , λ , p и $\bar{\omega}_\perp$, полученным в результате обработки магнитных измерений на этом интервале. Методом пристрелки решалась краевая задача (5.6), (5.8). Определяемой величиной служило начальное условие $\tilde{\psi}(0)$. Ее первое приближение находилось вычитанием из $\pi/2$ амплитуды тренда с низкой частотой T^{-1} . Решения задачи (5.6), (5.8) для интервалов 3 и 6 представлены в левых частях

рис. 27 графиками функций $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)$, $0 \leq t \leq 2T$. Этих же результатов возможно достигнуть, но сходимость потребует большего времени, за счет продолжения по периоду T до искомым значений периодического решения Ляпунова, существующего в окрестности стационарного решения системы [36] (5.6):

$$\tilde{\theta} = 0, \quad \tilde{\psi} = \arctg(-\omega_0/\kappa_a).$$

Сопоставление движений, найденных обработкой магнитных измерений, и решений задачи (5.6), (5.8) выполнялось по следующей схеме. Периодические функции $\tilde{\theta}(t)$ и $\tilde{\psi}(t)$ аппроксимировались дискретными рядами Фурье [35]. Нечетная функция $\tilde{\theta}(t)$ разлагалась в ряд по синусам, четная функция $\tilde{\psi}(t)$ разлагалась в ряд по косинусам. В каждом аппроксимирующем выражении использовалось 200 гармоник. Построенные ряды обозначим $\tilde{\theta}_F(t)$, $\tilde{\psi}_F(t)$. Составлялось выражение

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^M \{ [\theta(t'_m) - \tilde{\theta}_F(t'_m - t_0 - \tau)]^2 + [\psi(t'_m) - \tilde{\psi}_F(t'_m - t_0 - \tau)]^2 \},$$

которое минимизировалось по τ на достаточно мелкой сетке. Найденные таким образом значения τ приведены в подписях к рис. 27. В правых частях этих рисунков приведены графики функций $\tilde{\theta}_F(t - t_0 - \tau)$ и $\tilde{\psi}_F(t - t_0 - \tau)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + 50000$ с.

В левых частях рис. 28, 29 в единых системах координат приведены графики функций $\theta(t)$, $\psi(t)$ и рядов Фурье $\tilde{\theta}_F(t - t_0 - \tau)$, $\tilde{\psi}_F(t - t_0 - \tau)$. В правой части этих рисунков представлены графики разностей $\Delta\theta = \theta(t) - \tilde{\theta}(t - t_0 - \tau)$, $\psi(t) - \tilde{\psi}(t - t_0 - \tau)$. Все графики построены по значениям соответствующих функций на сетке $\{t'_m\}_{m=0}^M$. Как видно из графиков, решения уравнений (5.7) адекватно представляют низкочастотную составляющую в переменных θ и ψ построенных реконструкций. Низкая частота действительно связана с вековым движением собственного кинетического момента спутника.

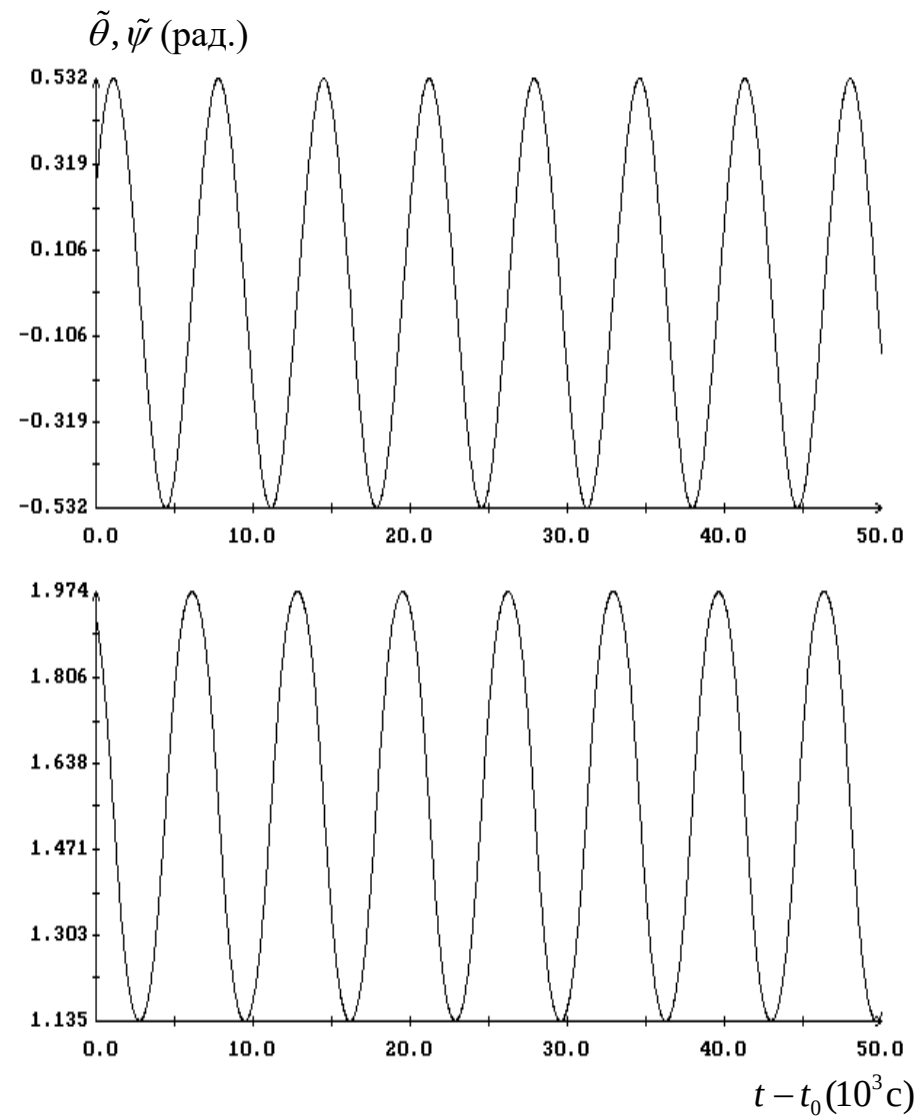
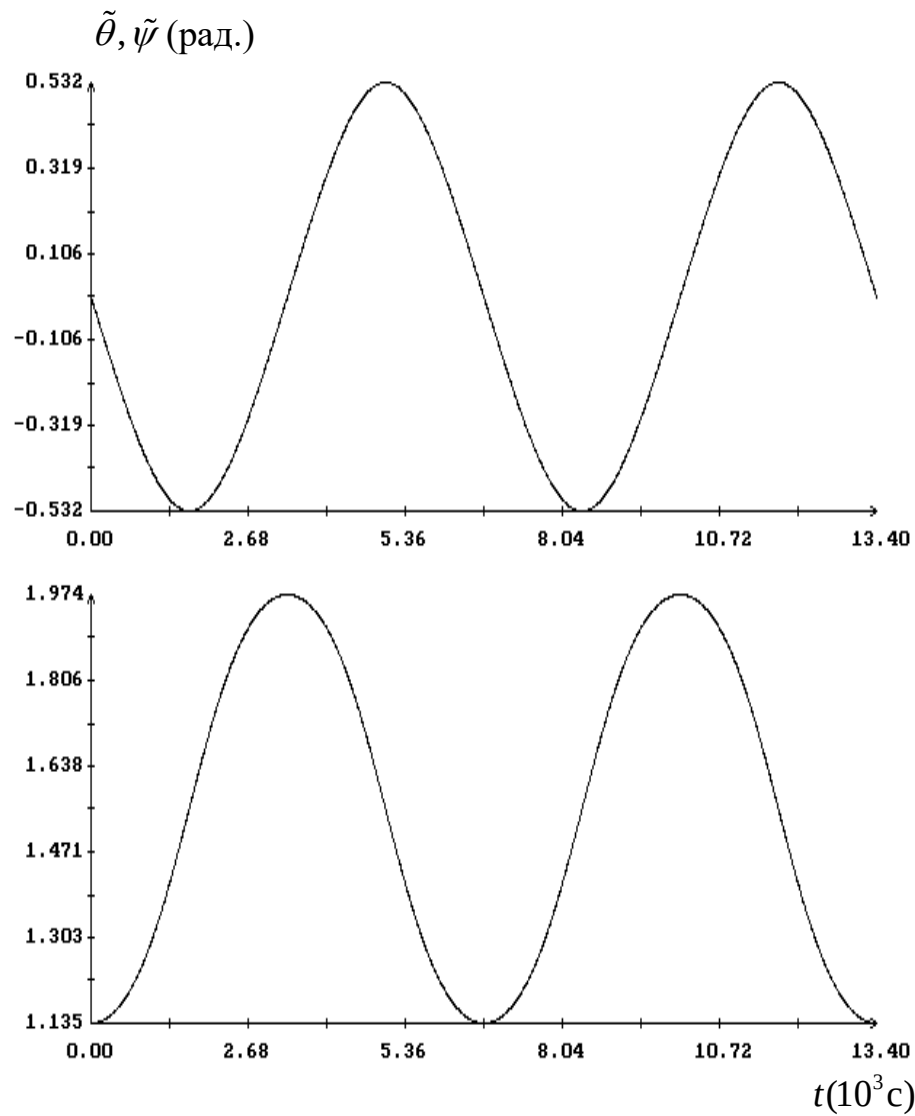


Рис. 27. Интервал d8. Слева – периодическое решение уравнений (5.6), $T = 6702.41 \text{ c}$. Справа – аппроксимация этим решением низкочастотной составляющей решения уравнений (4.1) в переменных системы (5.1), $\tau = 2763 \text{ c}$

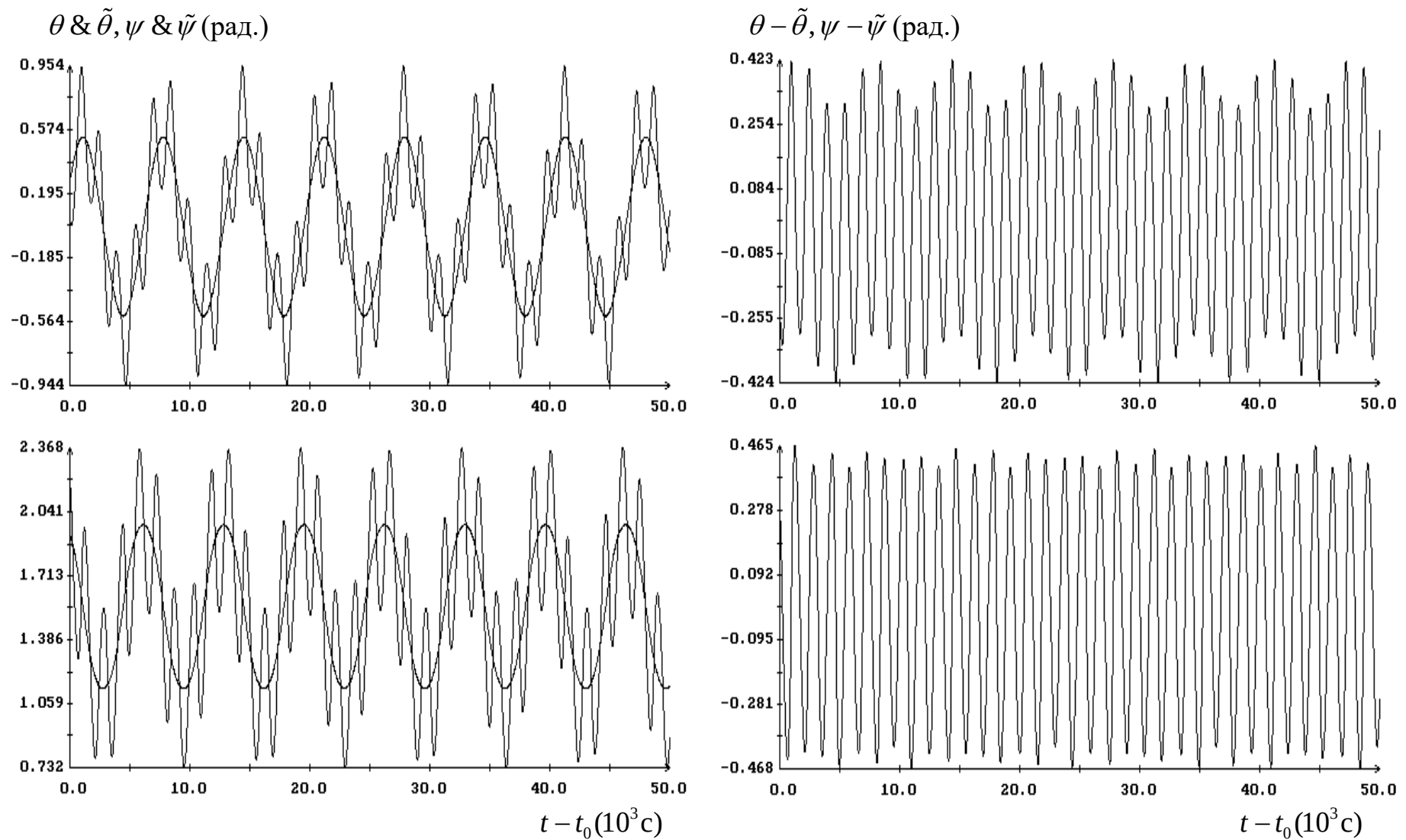


Рис. 28. Интервал d8. Слева – сравнение решений уравнений (4.1) в переменных системы (5.1) с решениями уравнений (5.6). Справа высокочастотная составляющая угловых переменных.

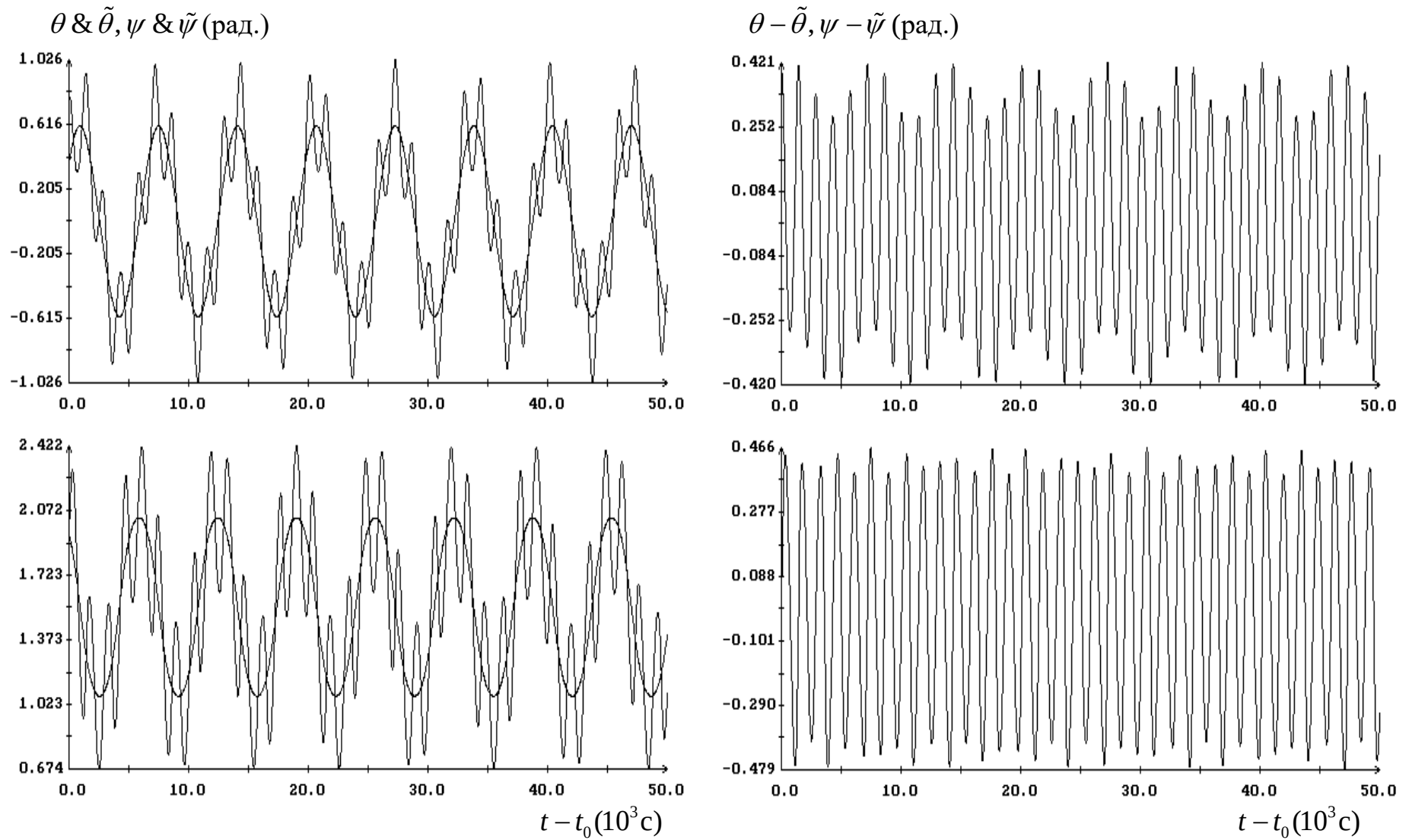


Рис. 29. Интервал d9. Слева – сравнение решений уравнений (4.1) в переменных системы (5.1) с решениями уравнений (5.6). Справа высокочастотная составляющая угловых переменных.

5.4. Выводы

Исследована связь между эволюционными уравнениями В.В. Белецкого и обобщенно-консервативной системой дифференциальных уравнений. Уравнения движения спутника редуцированы к уравнениям 4-го порядка, описывающим движение оси динамической симметрии спутника. Уравнения В.В. Белецкого, имеют второй порядок и описывают движение орта собственного кинетического момента спутника. Решения этих систем уравнений, отвечающие реальному движению спутника, являются соответственно похожими на условно-периодические и периодическими. В решениях системы 4-го порядка доминируют две частоты – высокая и низкая. Спектральный анализ показал, что низкая частота совпадает с частотой решений уравнений В.В. Белецкого, а решения этих уравнений достаточно точно совпадают с низкочастотной составляющей в решении системы 4-го порядка относительно переменных, задающих направление оси динамической симметрии спутника. Как видно из графиков, решения уравнений (5.6) адекватно представляют низкочастотную составляющую в переменных θ и ψ построенных реконструкций. Низкая частота действительно связана с вековым движением собственного кинетического момента спутника.

Система (5.6) при аналогичном исследовании Фотон-12 не использовалась, но если ее использовать и выполнить необходимые расчеты, то и в случае Фотона-12 придем к результатам, качественно и даже количественно совпадающим с описанными выше. Периодические решения, найденные в [61] и описанные в следующей главе, возникают в случаях, когда низкочастотная составляющая реконструированном движении оси динамической симметрии в переменных системы (5.1) из [61] имеет малую амплитуду и в реконструкциях движения Фотона-12 присутствует только одна доминирующая частота. Эти случаи характеризуются тем, что собственный кинетический момент спутника лежит вблизи нормали к плоскости его орбиты, и в таких движениях его изменение весьма мало – происходит в основном за счет регрессии узла орбиты спутника.

Глава 6. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12

6.1. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12

В пятой главе представлены результаты изучения общего случая, однако, Фотон-12 имел участок полета длиной около $3\tau_{\text{сут}}$, на котором собственный кинетический момент спутника лежал вблизи нормали к плоскости его орбиты. На этом участке низкочастотная составляющая в решениях системы 4-го порядка оказалась малой, и ее решения были практически одночастотными. Эта глава посвящена аппроксимации вращательного движения спутника Фотон-12 периодическими решениями, продолженными из решений Ляпунова, существующих в окрестности стационарного решения.

Лежащая в основе новой модели система дифференциальных уравнений автономна и оказалась достаточно точной для реконструкции движения спутника по магнитным измерениям в случае, когда угловая скорость спутника была не очень мала и постепенно возрастала. В последней трети полета, когда движение спутника практически установилось и имело достаточно большую угловую скорость, эту систему можно свести к обобщенно-консервативной системе. Такое сведение делает более определенным набор ее решений, подходящих для приближенного описания реального движения спутника.

Для переменных ψ , θ , Ω_2 , Ω_3 справедливы уравнения (5.1) [41]. Выраженные через ψ , θ , Ω_2 и Ω_3 решения системы (4.1) на интервалах 10 и 14–18 похожи на периодические решения системы (5.1), изучавшиеся в [41]. Решения

на этих интервалах отличаются от решений на остальных интервалах тем, что кинетический момент движения спутника относительно центра масс мало отклоняется от нормали к плоскости орбиты.

Уравнения (5.1) допускают первый интеграл (обобщенный интеграл энергии)

$$H = \frac{1}{2}(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \frac{3}{2}(1 - \lambda)\sin^2 \theta - \lambda\Omega \cos \theta \sin \psi - \Omega_2 \cos \psi - \Omega_3 \sin \theta \sin \psi + p \cos \theta \cos \psi$$

допускают стационарные решения

$$\psi = \psi_p, \theta = 0, \Omega_2 = \cos \psi_p, \Omega_3 = 0$$

где ψ_p – корень уравнения

$$(\lambda\Omega - \sin \psi) \cos \psi + p \sin \psi = 0$$

инвариантны относительно преобразования переменных

$$t \rightarrow -t, \theta \rightarrow -\theta, \Omega_3 \rightarrow -\Omega_3,$$

поэтому можно искать ее решения, в которых переменные θ и Ω_3 – нечетные, а переменные ψ и Ω_2 – четные функции времени. Симметричные периодические решения с периодом T определяются краевыми условиями

$$\theta(0) = \Omega_3(0) = \theta\left(\frac{T}{2}\right) = \Omega_3\left(\frac{T}{2}\right) = 0. \quad (6.1)$$

В [41] построены симметричные периодические решения системы (5.1), продолженные из решений Ляпунова, существующих в окрестности ее стационарного решения $\theta = 0, \psi = \psi(p), |p| \leq 0.5, \psi(0) = \pi/2$. При $p = 0$ это стационарное решение переходит в цилиндрическую прецессию. Существует два семейства таких периодических решений, называемых короткопериодическими и длиннопериодическими.

Для аппроксимации использовались короткопериодические решения. Параметры системы (5.1) p, λ, Ω для каждого аппроксимируемого интервала определялись в результате обработки магнитных измерений (табл. 14, 15). Значение периода T находились в результате спектрального анализа решений

системы (4.1), аппроксимирующих магнитные измерения на исследуемом интервале согласно методологии, изложенной в разделе 5.2. Пробный период находился по формуле $T = 1 / f_{\min}$. Если функция $Z_1(f)$ имеет несколько значимых минимумов, то исследуемая переменная $\theta(t)$ содержит несколько составляющих вида (5.2). В этом случае периодическая аппроксимация может оказаться невозможной.

На интервалах 10 и 14–18 функции $Z_1(f)$ для переменных $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\Omega_2(t)$, $\Omega_3(t)$ имели только один значимый минимум, причем значения $\min Z_1$ отличались от значений этих функций вне малой окрестности точки $f_{\min}$ (они близки $\max Z_1$) в 10 и более раз [61].

Пробные периоды, найденные по функциям $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\Omega_2(t)$ и $\Omega_3(t)$, совпадали достаточно точно. Так как в движениях на интервалах 10 и 14–18 наиболее интенсивно изменялись переменные Ω_2 и Ω_3 , пробный период определялся по периодограммам функций $\Omega_2(t)$ и $\Omega_3(t)$. Для них значения $f_{\min}$ попадали в одни и те же узлы сетки с шагом $2 \cdot 10^{-7}$ Гц. Найденное значение пробного периода использовалось для построения аппроксимирующего решения краевой задачи (5.1), (6.1). Эта задача решалась методом пристрелки (см. [41]). Начальным приближением неизвестных начальных условий $\psi(0)$ и $\Omega_2(0)$ служили амплитуды соответствующих выражений (5.2) при $f = f_{\min}$. Можно также использовать значения переменных ψ и Ω_2 в аппроксимируемом решении в точке t_* , определяемой соотношением $\theta(t_*) \approx 0$. Этих же результатов возможно достигнуть, но сходимость потребует большего времени, за счет продолжения по периоду T до искомых значений периодического решения Ляпунова, существующего в окрестности стационарного решения системы [36] (5.1).

Примеры построенных периодических решений приведены на рис. 30 и в табл. 16. В таблице указаны параметры решений задачи (5.1), (6.1): $T / 2$, $\psi(0)$ и $\Omega_2(0)$, а также орбитальная частота ω_0 на данном интервале и коэффициент a в характеристическом уравнении $(\rho - 1)^2(\rho^2 - 2a\rho + 1) = 0$, определяющем

мультипликаторы периодического решения. Здесь единица измерения времени – $1000c$, единицы измерения угловой скорости – $0.001 c^{-1}$. Как видим, все найденные периодические решения орбитально устойчивы в первом приближении. На рисунках приведены графики переменных $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\Omega_2(t)$ и $\Omega_3(t)$ в периодических решениях на отрезке $0 \leq t \leq 2T$ и проекции орта оси Ox_1 и орта кинетического момента спутника на плоскость Ox_1X_3 . Проекция орта кинетического момента лежит внутри проекции орта оси Ox_1 .

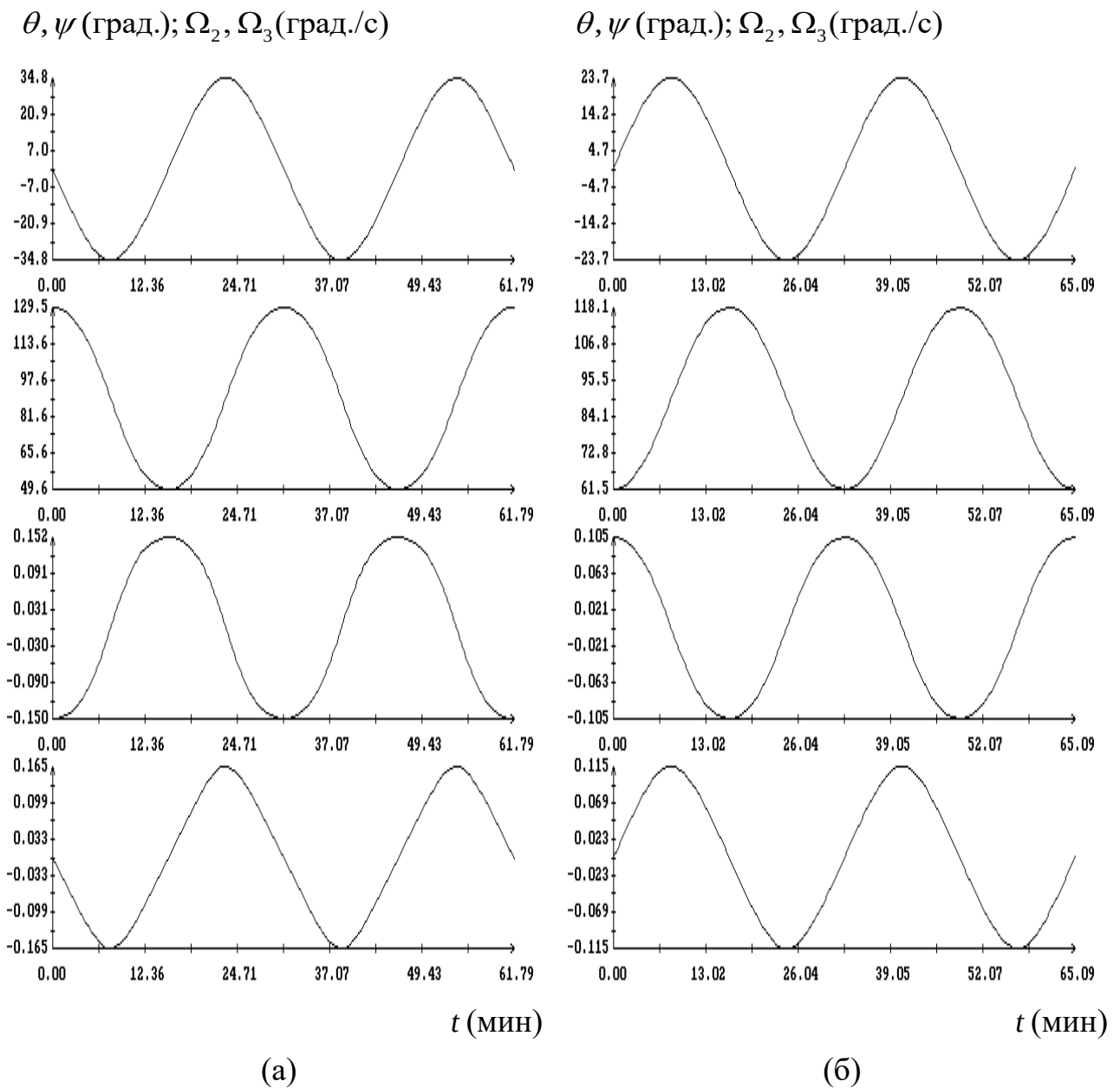


Рис. 30. Периодические решения, используемые для аппроксимации движения спутника; (а) – на интервале 14, (б) – на интервале 17.

Сопоставление движений, найденных обработкой магнитных измерений, и периодических решений выполнялось по следующей схеме. Переменные $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\Omega_2(t)$ и $\Omega_3(t)$ в периодическом решении аппроксимировались дискретными рядами Фурье [35]. Четные функции разлагались в ряд по косинусам, нечетные – в ряд по синусам. В каждом аппроксимирующем выражении использовалось 200 гармоник. Построенные ряды обозначим, $\tilde{\theta}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$, $\tilde{\Omega}_2(t)$ и $\tilde{\Omega}_3(t)$. Составлялось выражение

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^M \{ [\theta(t'_m) - \tilde{\theta}(t'_m + \tau)]^2 + [\psi(t'_m) - \tilde{\psi}(t'_m + \tau)]^2 + [\Omega_2(t'_m) - \tilde{\Omega}_2(t'_m + \tau)]^2 + [\Omega_3(t'_m) - \tilde{\Omega}_3(t'_m + \tau)]^2 \},$$

которое минимизировалось по τ на достаточно мелкой сетке. Найденные таким образом значения τ приведены в табл. 16.

Таблица 16. Параметры периодических решений

№ инт.	ω_0	$T / 2$	$\psi(0)$	$\Omega_2(0)$	a	τ
10	1.15738	1.05241	0.70850	2.76801	-0.61081	0.7478
14	1.15362	0.92799	0.86721	2.64021	-0.26236	0.7746
15	1.15883	0.86088	0.80933	3.02129	-0.21134	1.1359
16	1.15688	0.84976	0.92197	2.72420	-0.11559	1.1784
17	1.15787	0.97637	1.072764	1.83328	-0.07819	0.2050
18	1.15976	1.00929	1.06703	1.68321	-0.04319	1.6910

В левой части рис. 31 и 32 в единых системах координат приведены графики функций $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\Omega_2(t)$, $\Omega_3(t)$ и соответствующих аппроксимирующих выражений $\tilde{\theta}(t + \tau)$, $\tilde{\psi}(t + \tau)$, $\tilde{\Omega}_2(t + \tau)$, $\tilde{\Omega}_3(t + \tau)$. В правой части этих рисунков представлены графики разностей $\Delta\theta = \theta(t) - \tilde{\theta}(t + \tau)$, и т. п. Все графики построены по значениям на сетке $\{t'_m\}_{m=0}^M$. Как видим, периодическая аппроксимация получилась достаточно точной. Судя по графикам, функции $\Delta\theta(t)$ и $\Delta\psi(t)$ содержат низкочастотную компоненту, которая, по-видимому, как-то связана с длиннопериодическими решениями Ляпунова [41].

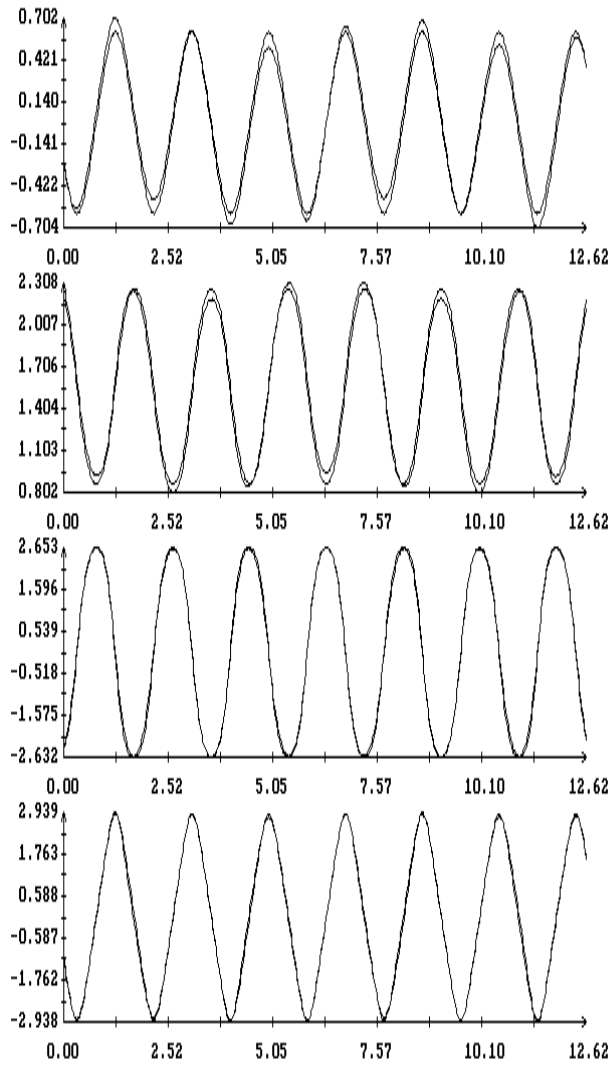
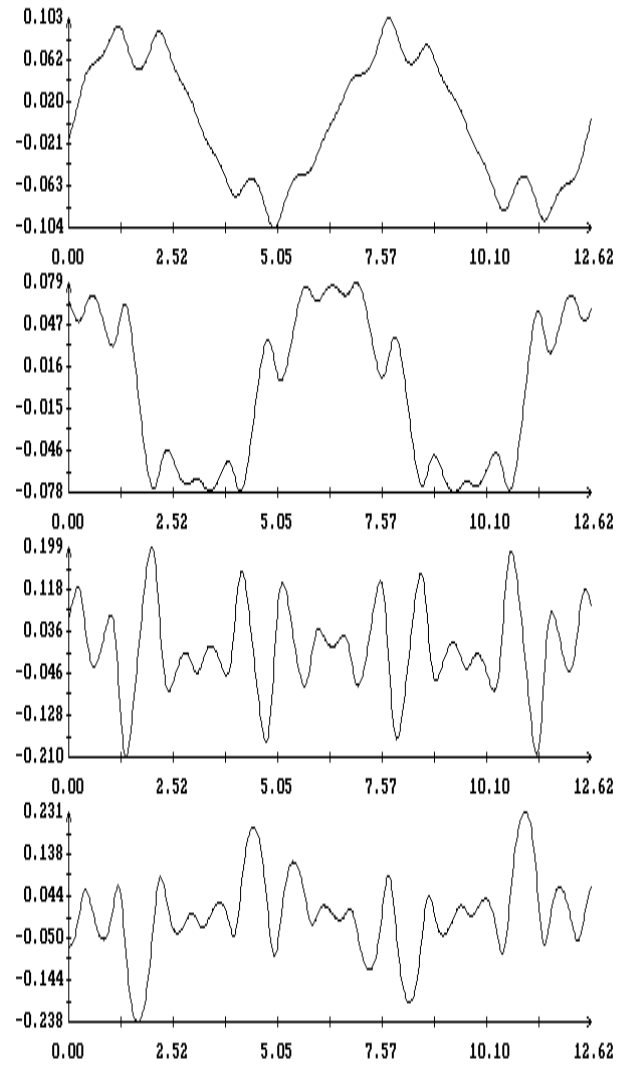
$\theta, \psi(\text{рад.}); \Omega_2, \Omega_3(10^{-3}\text{с}^{-1})$

 $\Delta\theta, \Delta\psi(\text{рад.}); \Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3(10^{-3}\text{с}^{-1})$

 $t - t_0(10^3\text{с})$
 $t - t_0(10^3\text{с})$

Рис. 31. Аппроксимация движения спутника на интервале 14 периодическим решением.

6.2. Выводы

Упрощенная математическая модель, используемая для реконструкции по магнитным измерениям, позволила описать вращательное движение спутника дифференциальными уравнениями, которые в случае установившегося движения с достаточно большой угловой скоростью (результат указанной выше эволюции)

можно свести к обобщенно-консервативной системе. Именно в последней трети полета, когда движение спутника практически установилось и имело достаточно большую угловую скорость, эту систему можно свести к обобщенно-консервативной системе.

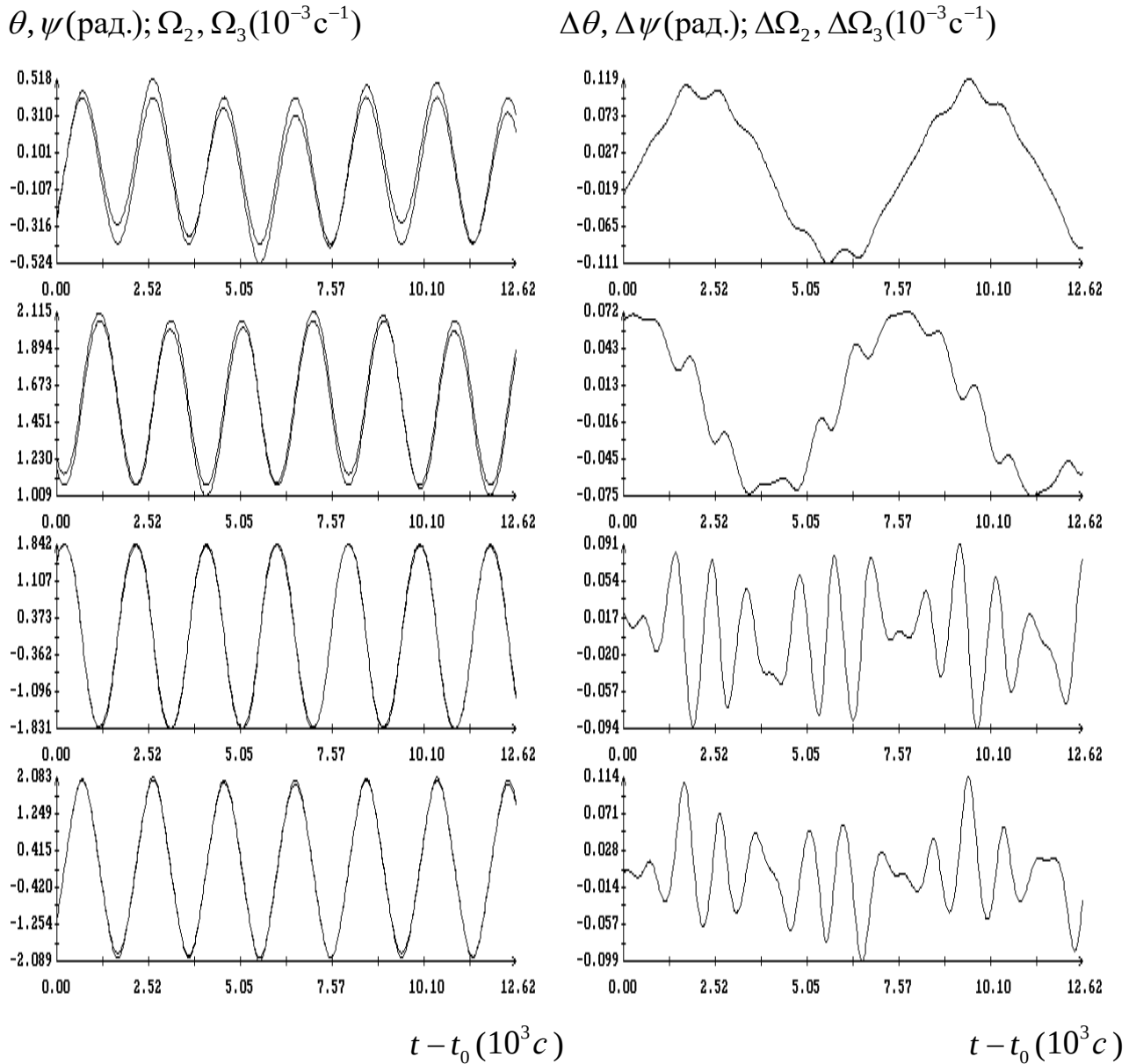


Рис. 32. Аппроксимация движения спутника на интервале 17 периодическим решением.

Такое сведение делает более определенным набор ее решений, подходящих для приближенного описания реального движения спутника. В свою очередь это позволило приближенно, но достаточно точно описать реальное движение

спутника на отрезках времени до $3.5ч$ периодическими решениями, продолженными из периодических решений Ляпунова. Объединение этих отрезков охватывает примерно $3сут.$, на котором собственный кинетический момент спутника лежал вблизи нормали к плоскости его орбиты.

В полете Фотона-12 реализовалась редкая ситуация, когда реальные достаточно сложные вращательные движения спутника удалось аппроксимировать периодическими решениями уравнений движения обобщенно-консервативной механической системы. Этот факт служит очередным оправданием использования упрощенных математических моделей в задачах механики космического полета.

Заключение

Для исследования возможности описания реального вращательного движения двух однотипных ИСЗ Фотон-12 и Фотон М-2 эволюционными уравнениями В.В. Белецкого была проведена повторная обработка отрезков сделанных на борту магнитных измерений и описаны ее результаты. Использовались более простые, чем при обработке, выполненной сразу после полета, математические модели вращательного движения спутника. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким в его теоретическом анализе эволюции неуправляемого вращательного движения спутника в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера динамически симметричного твердого тела. Основным результатом обработки является реконструкция фактического вращательного движения исследуемых спутников и его последующее сопоставление с теорией. В тех случаях, когда такое сравнение возможно, связь между решениями полных и эволюционных уравнений движения была изучена детально. Также были найдены предельные значения продольной составляющей угловой скорости, близость к которым на последних интервалах полета позволила опустить неконсервативную составляющую в уравнениях движения ввиду завершения раскрутки спутника и перейти к описанию вращательного движения обобщенно-консервативной моделью.

В результате за счет некоторого огрубления реконструкции удалось напрямую сопоставить полученные экспериментальные результаты с теорией В.В. Белецкого. Асимптотическое интегрирование уравнений движения спутника выполнялось методом усреднения [9, 26]. В усредненных уравнениях наряду с указанными выше внешними механическими моментами учитывался демпфирующий момент, направленный вдоль оси динамической симметрии. Полученные в рамках теории В.В. Белецкого усредненные уравнения (2.5), (2.6), (2.7) оказались достаточно точными, несмотря на не очень большую угловую

скорость спутников. Они позволили из результатов обработки магнитных измерений на нескольких непродолжительных интервалах времени (3.5 – 4.5 часов) составить единую картину эволюции вращательного движения этого спутника в течение недели и объяснить возникновение режима движения, установившегося к концу полета. Установлена нижняя граница значений угловой скорости, для которых изменение собственного кинетического момента обоих спутников достаточно точно описывается эволюционными уравнениями В.В. Белецкого.

Показано, что при значениях угловой скорости, близких к ее предельному значению, уравнения вращательного движения допускают дальнейшее адекватное упрощение: орбиту спутника можно принять круговой и опустить неконсервативную составляющую действующего на него внешнего момента. В таком случае используемые уравнения вращательного движения и отвечающие им уравнения В.В. Белецкого становятся обобщенно-консервативными. В терминах спектрального анализа описана связь между решениями вышеупомянутых уравнений. Показано, что низкая частота совпадает с частотой решений уравнений В.В. Белецкого, а решения этих уравнений достаточно точно совпадают с низкочастотной составляющей в решении системы 4-го порядка относительно переменных, задающих направление оси динамической симметрии спутника.

Найден участок полета Фотона-12 длиной около 3 сут, внутри которого движения продольной оси спутника относительно орбитальной системы координат удалось аппроксимировать периодическим движением на любом интервале времени длиной 4.5ч. Как удалось убедиться, в полете Фотона-12 реализовалась редкая ситуация, когда реальные достаточно сложные вращательные движения спутника удалось аппроксимировать периодическими решениями уравнений движения обобщенно-консервативной механической системы. Это обстоятельство оправдывает использование упрощенных математических моделей в задачах механики космического полета.

В дальнейшем этот подход и упомянутые методики можно использовать при поиске периодических решений других спутников класса Фотон или Аист, а также более сложного класса систем.

В заключение автор благодарит научного руководителя Сазонова Виктора Васильевича за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство.

Список литературы

1. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника Фотон-12 и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т.41. №1. С.45-56.
2. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Иванов В.В., Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Определение вращательного движения спутника "Фотон-12" по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2000. № 60.
3. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое движение спутника Фотон М-2 и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т.45. №5. С.450-470.
4. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков А.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Филиппов А.С., Чебуков С.Ю., Неуправляемое вращательное движение опытного образца малого космического аппарата «Аист» // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 048, 36 с.
5. Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника Фотон М-2 по данным бортовых измерений угловой скорости // Космические исследования. 2008. Т.46. №2. С.146-167.
6. Аким Э.Л. Определеие поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10» // Космические исследования. 1966. Т.4. № 6.

7. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. М., Наука, 1965.
8. Бахвалов Н.С., Численные методы. – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.
9. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
10. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Издательство МГУ, 1975.
11. Белецкий В.В., Голубков В.В., Лавровский Э.К., Трушин С.И., Хацкевич И.Г. Определение ориентации и вращения искусственных спутников по данным измерений // Космические исследования. 1967. Т.5. № 5.
12. Белецкий В.В., Голубков В.В., Степанова Е.А., Хацкевич И.Г. Определение ориентации искусственных спутников по данным измерений // Препринт, Институт прикладной математики АН СССР, 1967.
13. Белецкий В.В., Зонов Ю.В. Вращение и ориентация третьего советского спутника // Искусственные спутники Земли. № 7, 1961.
14. Белецкий В.В., Трушин С.И. Резонансы во вращении небесных тел и обобщенные законы Кассини // Механика твердого тела. Киев. 1974. № 6. Наукова думка.
15. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка, 1984.
16. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматлит, 1963. — 407 с.
17. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника Фотон М-2 по данным измерений микроускорения // Космические исследования. 2009. Т.47. №6. С.537-549.

18. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В., Теоретическая механика. М.: Академия, 2010.
19. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 166, 2016.
20. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон-12 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 53, 2020.
21. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон М-2 // Космические исследования. – 2020. – Т. 58, № 4. – С. 291–304.
22. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника «Фотон М-2» // Инженерный журнал: наука и инновации. № 9, 2020.
23. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 90, 2020.
24. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Периодическая аппроксимация вращательного движения спутника Фотон-12 // Космические исследования. – 2022. – Т. 60, № 2. – С. 134–150 .
25. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Установившееся вращательное движение спутника Фотон М-2 // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша № 63, 2021.
26. Волосов В.М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1962. Т.27. № 6(108). С.3-126.

27. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические движения гироскопических систем // Прикладная математика и механика. — 1988. — Т. 52, № 5. — С. 719–729.
28. Воронин А.А., Сазонов В.В. Периодические колебания спутника-гиростата с большим собственным кинетическим моментом // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1989. — № 1. — С. 3–12.
29. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967.
30. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М., Наука, 1968.
31. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1968.
32. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Построение и анализ особых поверхностей систем безупорных гиродинов методом продолжения по параметру // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2007. № 27.
33. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления // Космические исследования. — 2018. — Т. 56, № 5. — С. 375–383.
34. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теоретическая физика в 10 т. Т. II. Теория поля. — 7-е изд. — М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
35. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1960.
36. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М. Ленанд, 2004.
37. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. 491 с.

38. Малкин И.Г., Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 532 с.
39. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. — М.; ЧеРо, 1999.
40. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., Наука, 1969.
41. Нейштадт И.А. Сазонов В.В. Периодические колебания оси симметрии спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 4. С. 20-35.
42. Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников Земли // Искусственные спутники Земли. № 16, 1963.
43. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 1. — М.: Наука, 1971. — 772 с.
44. Руш Н., Абетс П., Лалуа М., Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М. Мир. 1980.
45. Сазонов В.В. Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Космические исследования. — 2013. — Т. 51, № 2. — С. 145–158.
46. Сазонов В.В., Троицкая А.В. О периодических движениях спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом // Прикладная математика 76 и механика. — 2017. — Т. 81, вып. 4. — С. 432–444.
47. Сазонов В.В., Троицкая А.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс // Прикладная математика и механика. — 2015. — Т. 79, вып. 5. — С. 595–607.

48. Сазонов В.В. Обработка данных измерений угловой скорости и микроускорения, полученных на спутнике Фотон-12 // Космические исследования. 2011. Т.49. № 5. С.419-435.
49. Сазонов В.В., Сарычев В.А. Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, близких автономным. Препринт Института прикладной математики АН СССР № 90. М, 1997. 59 с.
50. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ Фотон-11 // Космические исследования. 2004. Т.42. №2. С.185-200.
51. Сарычев В.А. Исследование динамики системы гравитационной стабилизации // Искусственные спутники Земли. № 16, 1963.
52. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Мельник Н.В. Пространственные периодические колебания спутника относительно центра масс // Космические исследования. 1980. Т. 18. Вып. 5. С. 659-677.
53. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
54. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966.
55. Хемминг Р.В., Численные методы для научных работников и инженеров. — М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.
56. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 3. С. 474-483.
57. Черноусько Ф.Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1963. Т. 3. № 3. С. 528-538.

58. Энсеев Т.М., Платонов А.К., Казакова Р.К. Определение параметров орбиты искусственного спутника по данным наземных измерений // Искусственные спутники Земли. № 4, 1960.
59. Bandeen W.R., Manger W.P., Angular motion of the Spin Axis of the Tiros I Meteorological Satellite Due to Magnetic and Gravitational Torques // Journal of Geophysical Research, Volume 65, № 9, 1960.
60. Bödewadt U.T., Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft // Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 310-320, 1952.
61. Bulanov D.M., Sazonov V.V., A Study of the Evolution of the Rotational Motion of the Foton-12 Satellite // Cosmic Research (English translation of Kosimicheskije Issledovaniya). – 2021. – V. 59, № 5. – p. 388 – 400.
62. Bulanov D.M., Sazonov V.V., Investigation of the FOTON M-2 Satellite Attitude Motion // AIP Conference Proceedings. – 2021. – V. 2318, № 110018.
63. G. Louis Smith, A theoretical study of the torques induced by a magnetic field on rotating cylinders and spinning thin-wall cones, cone frustrums, and general body of revolution. Langley Research Center, 1962.
64. G. Louis Smith, Effects of magnetically induced eddy-current torques on spin motions of an Earth satellite. Langley Research Center, 1965.
65. Holland R.L., Sperling H.J., A first-order theory for the rotational motion of triaxial rigid body orbiting and oblate primary // Astron. J., v. 74, № 3, 1969.
66. Naumann R.J., Fields S.A., Holland R.L., Analysis of Explorer 11 Orientation // Journal of Geophysical Research, Volume 67, № 9, 1962.
67. S. Fred Singer, Torques and Attitude Sensing in Earth Satellites // Applied Mathematics and mechanics, Volume 7, 1964.

68. Sazonov Vas.V., Sazonov V.V. The Use of Refined Model of Aerodynamic Moment in the Problem of Reconstruction of the Foton Satellite Rotational Motion // Cosmic Research (English translation of Kosimicheskie Issledovaniya). – 2011. – V. 49, № 2. – p. 117 – 127.