

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Штейнер Павел Михайлович

МАЖОРИЗАЦИИ МАТРИЦ И ИХ ЭНДОМОРФИЗМЫ

1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2022

Работа выполнена на кафедре алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:

Гутерман Александр Эмилевич,

доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

Тыртышников Евгений Евгеньевич,

доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук, директор.

Шрамов Константин Александрович,

доктор физико-математических наук, Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, отдел алгебраической геометрии, ведущий научный сотрудник.

Бычков Борис Сергеевич,

кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», факультет математики, научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 3 июня 2022 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: *sbgashkov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИСА «ИСТИНА»:

<https://istina.msu.ru/dissertations/450303865/>

Автореферат разослан 3 мая 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук,
профессор

С. Б. Гашков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Матричные мажоризации являются важнейшим и динамично развивающимся направлением линейной алгебры, как представляющим самостоятельный интерес, так и имеющим приложения в экономике, математической статистике, комбинаторном анализе и других областях математики.

Развитие теории началось с исследований векторной мажоризации — способа формально определить возникающее во множестве различных контекстов представление о том, что элементы одного вектора менее разбросаны между собой, чем элементы другого. Пусть $v^\downarrow$ — вектор, полученный из вектора v перестановкой координат в порядке невозрастания.

Определение. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ говорим, что y мажорируется x ($y \preceq x$), если

$$\sum_{j=1}^k y_j^\downarrow \leq \sum_{j=1}^k x_j^\downarrow \quad \text{для } k = 1, \dots, n-1 \text{ и } \sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n x_j.$$

Первое условие, эквивалентное современной векторной мажоризации, возникло в работе Мюрхеда¹ о неравенствах симметрических многочленов. Другой важной предпосылкой к возникновению теорий мажоризаций стали исследования в области экономики. Сравнение различных распределений совокупного дохода лежит в основе экономики благосостояния. Идеи Далтона², Лоренца³ и Пигу (Пигу)⁴ вплотную связаны с понятием мажоризации векторов, введенным Харди, Литтлвудом и Поля (Поля)⁵. В обиход экономической теории математическое понятие мажоризации ввели Аткинсон⁶ и Колм⁷. Многие другие авторы внесли свой вклад в развитие этого направления. Однако они рассматривали только одномерный индикатор экономического статуса, а именно, доход. В современных теориях общественного выбора в большинстве случаев рассматривается множество различных показателей, таких как образование, свободное время, здоровье, жилье, финансовые активы. Это привело к тому, что мажоризации векторов стали обобщаться на случай матриц. Существует множество видов таких обобщений, приведем некоторые из них.

¹R. F. Muirhead, Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **21**, 144–157 (1903).

²H. Dalton, The measurement of the inequality of incomes, *Econ. J.*, **30**, 348–361 (1920).

³M.O. Lorenz, Methods of measuring concentration of wealth, *J. Amer. Statist. Assoc.* **9**, 209–219 (1905).

⁴A.C. Pigou, *Wealth and Welfare*, Macmillan, New York (1912).

⁵G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press (1934, 1952, 1978).

⁶A. B. Atkinson, On the measurement of inequality, *J Econ Theory*, **2**, 244–263 (1970).

⁷S. C. Kolm, The optimal production of social justice, *Marjolis J*, Gutton H (eds), Public Economics, MacMillan, New York, 145–200 (1969).

Пусть $e \in \mathbb{R}^n$ — вектор, все координаты которого равны 1. Множество действительных матриц размера $n \times m$ обозначается $M_{n,m}$, пишем M_n при $m = n$. Матрица $R \in M_n$ называется *строчно-стохастической*, если все ее элементы неотрицательны и $Re = e$. Множество всех таких матриц обозначается Ω_n^{row} . Если, к тому же, $e^t R = e^t$, то R называется дважды стохастической. Множество дважды стохастических матриц обозначается Ω_n .

Определение. Пусть $A, B \in M_{n,m}$.

- *Сильная мажоризация:* $A \preceq^s B$, если существует такая $D \in \Omega_n$, что $A = DB$.
- *Мажоризация по направлению:* $A \preceq^d B$, если $Av \preceq Bv$ для любого $v \in \mathbb{R}^m$.
- *Слабая мажоризация:* $A \preceq^w B$, если существует такая $R \in \Omega_n^{row}$, что $A = RB$.
- *Строчная мажоризация:* $A \preceq^r B$, если существует такая $R \in \Omega_m^{row}$, что $A = BR$.

Мажоризации матриц стали важным инструментом в экономике, математической статистике и других областях математики. Экономические аспекты, связанные с мажоризациями матриц рассматривались Арнольдом⁸, Аткинсоном и Бургиньоном⁹, Бхандари¹⁰, Кольмом¹¹, Кошевым¹², Маасуми¹³, Мозлером¹⁴, Ритвелдом¹⁵ и другими. Кроме того, мажоризации матриц играют важную роль в исследованиях стохастических матриц¹⁶.

Некоторые виды мажоризаций матриц, например, строчная мажоризация, уходят корнями в функциональный подход к базовым понятиям статистики, связанным с теорией статистических экспериментов¹⁷. Такие виды мажоризаций и их геометрические свойства были исследованы в работах Даля^{18,19}.

⁸B. C. Arnold, *Majorization and the Lorenz order: a brief introduction*, Springer, Berlin (1987).

⁹A. B. Atkinson, F. Bourguignon, The comparison of multidimensioned distributions of economic status, *Rev Econ Stud* **49**, 183–201 (1982).

¹⁰S. K. Bhandari, Multivariate majorization and directional majorization; positive results, *Sankhya A*, **50**, 199–204 (1988).

¹¹S. C. Kolm, Multidimensional egalitarianisms, *Q J Econ*, **91**, 1–13 (1977).

¹²G. Kosheboy, The Lorenz zonotope and multivariate majorizations, *Soc. Choice Welfare*, **15**, 1–14 (1998).

¹³E. Maasoumi, The measurement and decomposition of multidimensional inequality, *Econometrica*, **54**, 991–997 (1986).

¹⁴K. Mosler, Majorization in economic disparity measures, *Linear Algebra Appl.*, **199**, 91–114 (1994).

¹⁵P. Rietveld, Multidimensional inequality comparisons, *Econ Lett*, **32**, 187–192 (1990).

¹⁶S. Sherman, On a conjecture concerning doubly stochastic matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**, 511–513 (1952).

¹⁷E. Torgersen, *Stochastic Orders and Comparison of Experiments*, Stochastic Orders and Decision under Risk, IMS Lecture Notes – Monograph Series (1991).

¹⁸G. Dahl, Matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **288(1)**, 53–73 (1999).

¹⁹G. Dahl, Majorization polytopes, *Linear Algebra Appl.*, **297(1)**, 157–175 (1999).

В данной диссертации вводится новое понятие мажоризации классов матриц, обобщающее мажоризацию на случай множеств матриц.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — два конечных класса (множества) действительных матриц из $M_{n,m}$. Тогда класс $\mathcal{A}$ мажорируется классом $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$), если для любой $A \in \mathcal{A}$ найдется такая $B \in \mathcal{B}$, что $A \preceq B$.

Мотивацией к изучению такого понятия служат прикладные вопросы теории статистических экспериментов. Следующий пример иллюстрирует эти приложения.

Пример. Рассмотрим два медицинских прибора для измерения давления. Приборы имеют простую шкалу: низкое (L), среднее (M) и высокое (H) давление. Из-за качества приборов показания могут быть неточны. Вероятности разных ответов для разных исходных значений можно описать строчно-стохастическими матрицами, в которых и строки, и столбцы отвечают L, M, и H. Приборы можно задавать квадратными матрицами следующим образом: (i, j) -й элемент матрицы есть вероятность того, что прибор покажет j , если правильный ответ — i . Предположим, два эксперимента заданы матрицами E и F ,

$$E = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.39 & 0.06 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим прибор, задаваемый матрицей E . Предположим, что он предсказал j . Если $j = 1$ (т. е. L), мы можем точно заключить, что верное значение параметра i есть 1, а если $j = 3$, то возможно только $i = 3$. Если, однако, $j = 2$, то i может быть как 1, так и 2. Поскольку прибор говорит, что $j = 2$ с вероятностью 0.3, если $i = 1$ и всегда, когда $i = 2$, мы можем заключить, что $i = 2$ более вероятно, хотя это зависит от априорных вероятностей $i = 1$ и $i = 2$.

Таким образом, эксперимент E дает много информации о неизвестном параметре i , и прибор можно считать хорошим. Что же касается прибора, заданного матрицей F , то здесь ситуация другая: для любой реализации j существует по крайней мере два возможных значения i , и вероятности разных истинных ответов достаточно близки. Итак, прибор/эксперимент E кажется лучше, чем F . На самом деле, можно проверить, что E более информативен, чем F , используя следующий метод.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что X также строчно-стохастическая. Кроме того, легко проверить, что $EX = F$. Из этого следует, что $F \preceq^r E$. Так называемый, *рандомизационный критерий*²⁰ в теории статистических экспериментов говорит, что (относительно некоторых слабых предположений, выполненных в этом случае) эксперимент E более информативен, чем эксперимент F тогда и только тогда, когда $F \preceq^r E$.

Теперь мы расширим описанное упорядочивание пар экспериментов до сравнения *множеств* экспериментов. Пусть $\mathcal{A} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_p\}$ и $\mathcal{B} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_q\}$ — два множества приборов, исследующих одну и ту же величину. Предположим, что статистик A выбирает прибор из множества $\mathcal{A}$, а другой статистик B из множества $\mathcal{B}$. Кто из них может получить больше информации о неизвестном параметре? Мы можем ввести следующее понятие, чтобы смоделировать эту ситуацию: говорим, что $\mathcal{B}$ *более информативно*, чем $\mathcal{A}$, если для любого $\mathcal{E}_j$ ($j \leq p$), существует такое $i \leq q$, что $\mathcal{F}_i$ более информативен, чем $\mathcal{E}_j$. Другими словами, какой бы эксперимент статистик A ни выбрал из $\mathcal{A}$, статистик B может найти более информативный из $\mathcal{B}$, то есть B имеет больше информации для принятия решений. Таким образом, естественной интерпретацией большего качества $\mathcal{B}$ по сравнению с $\mathcal{A}$ является отношение $\mathcal{A} \preceq^r \mathcal{B}$.

Подробное изложение теории статистических экспериментов, включающее теорию игр, выпуклый и функциональный анализ, приведено в работе Торгерсена²¹. Роль мажоризаций матриц в этой теории описана в работах Даля²² и Торгерсена²³.

В диссертации исследуются свойства введенного понятия. В частности, поставлена и решена задача нахождения минимального покрывающего класса для различных типов мажоризации. Значительную роль в этих исследованиях играют геометрические методы.

В данной диссертации также исследуются мажоризации $(0, 1)$ -матриц, то есть матриц, все элементы которых равны 0 или 1. Такое ограничение зачастую позволяет найти новые критерии исследуемых мажоризаций. Они позволяют лучше понять мажоризации действительных матриц. Кроме того, $(0, 1)$ -матрицы играют ключевую роль в задании многих комбинаторных объектов. Таким образом, представляет особенный интерес отношение мажоризации двух комбинаторных объектов (заданных $(0, 1)$ -матрицами). В работе Даля²⁴ впервые был поставлен

²⁰G. Dahl, Matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **288**(1), 53–73 (1999).

²¹E. Torgersen, *Comparison of Statistical Experiments*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Volume 36, Cambridge University Press, Cambridge (1991)

²²G. Dahl, Pseudo-experiments and majorization, *Research report*, **11**, Department of Mathematics, University of Oslo (1984).

²³E. Torgersen, *Comparison of Statistical Experiments*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Volume 36, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

²⁴G. Dahl, Matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **288**(1), 53–73 (1999).

вопрос существования комбинаторных интерпретаций мажоризаций $(0, 1)$ -матриц. В частном случае $(0, 1)$ -матриц с ровно двумя единицами в каждой строке был найден критерий строчной мажоризации в терминах теории графов. Общий случай оставался открытым.

В диссертации получены характеристики сильной, по направлению, слабой и строчной мажоризаций $(0, 1)$ -матриц. Были найдены новые приложения мажоризаций $(0, 1)$ -матриц в теории графов, в частности, связь мажоризаций таких матриц с паросочетаниями в двудольных и произвольных графах.

В теории мажоризаций важно строить новые упорядоченные в смысле разных типов мажоризации пары матриц. Одним из подходов к нахождению новых пар является использование линейных операторов, сохраняющих мажоризацию матриц или конвертирующих одну мажоризацию матриц в другую. Это позволяет по уже известным упорядоченным парам строить новые. Такой подход к исследованию функций и отношений на векторных и матричных пространствах применяется во множестве разделов линейной алгебры и функционального анализа. Так сформировалась теория линейных отображений, сохраняющих инварианты (Linear Preserver Problems). Начало этой теории положил Фробениус в 1897 году, дав полное описание линейных операторов, сохраняющих определители комплексных матриц²⁵.

Теорема. Пусть Φ — линейный оператор на пространстве $M_n(\mathbb{C})$.

Тогда $\det(\Phi(A)) = \det(A)$ для любого $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда существуют такие $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, что $\det(MN) = 1$ и выполнено одно из условий:

1. $\Phi(X) = MXN$;
2. $\Phi(X) = MX^tN$.

Также одним из первых результатов в этой области является характеристика биективных линейных операторов, сохраняющих вырожденные матрицы, полученная Дьедонне²⁶.

Теорема. Пусть Φ — биективный линейный оператор на пространстве $M_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда Φ переводит вырожденные матрицы в вырожденные тогда и только тогда, когда существуют такие $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, что $\det(MN) \neq 0$ и выполнено одно из условий:

1. $\Phi(X) = MXN$;

²⁵G. Frobenius, Über die darstellung der endlichen gruppen durch linear substitutionen, *Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin*, 994–1015 (1897).

²⁶J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables, *Arch. Math.*, **1**, 282–287 (1949).

2. $\Phi(X) = MX^tN$.

Теория линейных операторов, сохраняющих инварианты, продолжает активно развиваться. Можно выделить три основных типа задач. Пусть V — пространство $n \times m$ матриц над полем $\mathbb{F}$.

- А Изучение линейных операторов, сохраняющих некоторую функцию f , определенную на V . То есть таких операторов ϕ на V , что $\phi(f(A)) = f(A)$ для любого $A \in V$;
- В Изучение линейных операторов, сохраняющих некоторое множество $S \subseteq V$. То есть таких операторов ϕ на V , что $\phi(S) \subseteq S$;
- С Изучение линейных операторов, сохраняющих некоторое бинарное отношение $\prec$ на V . То есть таких операторов ϕ на V , что из $A \prec B$ следует $\phi(A) \prec \phi(B)$ для любых $A, B \in V$.

Первое такое исследование в теории мажоризаций можно встретить в статье²⁷ Андо 1989 года, в которой была найдена характеристика линейных отображений, сохраняющих векторную мажоризацию.

Пусть $P(n)$ обозначает множество матриц перестановки порядка n , а J обозначает $n \times n$ матрицу, все элементы которой равны 1, т. е. $J = ee^t$.

Теорема. Пусть Φ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1. Φ сохраняет векторную мажоризацию.
- 2. Выполнено одно из следующих условий:

(a) $\Phi(x) = (e^t x)s$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $P \in P(n)$.

Этот результат положил начало исследованиям линейных отображений, сохраняющих мажоризацию матриц. В прикладных задачах рассматривается много различных типов мажоризаций, и для большинства из них задачи характеристики линейных отображений, сохраняющих

²⁷T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118**, 163–248 (1989).

конкретный тип мажоризации, были решены. В решении этих задач участвовали многие выдающиеся математики, например, Бисли^{28,29}, Кошевой³⁰, Ли, Пун³¹, Раджабалипур^{32,33}.

В тех разделах математики, в которых возникают семейства функций или отношений, становится актуальным исследование линейных операторов, конвертирующих одну функцию (отношение) этого семейства в другую. Такие исследования особенно востребованы в случае, когда разные объекты такого семейства, с одной стороны, наделены общими свойствами, а с другой, существенно отличаются по методам работы с ними. Таким образом, задачи А, В, С можно обобщить следующим образом:

А' Для функций f_1, f_2 , определенных на V , исследовать такие операторы ϕ на V , что $\phi(f_1(A)) = f_2(A)$ для любого $A \in V$;

В' Для множеств $S_1, S_2 \subseteq V$ исследовать такие операторы ϕ на V , что $\phi(S_1) \subseteq S_2$;

С' Для бинарных отношений $\prec_1, \prec_2$ на V исследовать такие операторы ϕ на V , что из $A \prec_1 B$ следует $\phi(A) \prec_2 \phi(B)$ для любых $A, B \in V$.

Например, задачу нахождения линейных конвертеров из перманента в определитель поставил Пойа в 1913 году³⁴, см. также³⁵. Существует множество типов мажоризаций матриц, поэтому естественным образом возникает задача характеристики соответствующих конвертеров. Разные типы мажоризаций отличаются по методам исследования, однако имеют множество общих свойств. Один из таких конвертеров был получен в статье Ли и Пуна³⁶.

В данной диссертационной работе была поставлена и решена задача характеристики линейных конвертеров между сильной, слабой, столбцовой мажоризациями и мажоризацией по направлению.

²⁸L.B. Beasley and S.-G. Lee, Linear operators preserving multivariate majorization, *Linear Algebra Appl.*, **304**(1), 141–159 (2000).

²⁹L. B. Beasley, S.-G. Lee, and Y.-H. Lee, A characterization of strong preservers of matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **367**, 341–346 (2003).

³⁰G. Koshevoy, K. Mosler, Lift zonoids, random convex hulls and the variability of random vectors, *Bernoulli*, **4**(3), 377–399 (1998).

³¹C.-K. Li, E. Poon, Linear operators preserving directional majorization, *Linear Algebra Appl.*, **325**, 141–146 (2001).

³²A. M. Hasani, M. Radjabalipour, Linear preserver of matrix majorization, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **32**(4), 475–482 (2006).

³³A. M. Hasani and M. Radjabalipour, On linear preservers of (right) matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **423**, 255–261 (2007).

³⁴G. Pólya, Aufgabe 424, *Arch. Math. Phys.*, **20**(3), 271 (1913).

³⁵M. V. Budrevich, M. A. Duffner, A. E. Guterman, Absence of linear permanent-determinant converters on skew-symmetric matrices, *Sarajevo Journal of Mathematics* **14**(2), 143–155 (2018).

³⁶C.-K. Li, E. Poon, Linear operators preserving directional majorization, *Linear Algebra Appl.*, **325**, 141–146 (2001).

В диссертации введено новое понятие мажоризации кортежей матриц, обобщающее матричный случай.

Определение. Пусть $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k), \mathcal{B} = (B_1, \dots, B_k)$ — два кортежа матриц из $M_{n,m}$. Тогда $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, если $A_i \preceq B_i$ для любого $i \leq k$.

В диссертации получены характеристики линейных операторов, сохраняющих различные типы мажоризаций кортежей матриц. Кроме того, получены характеристики линейных операторов, сохраняющих комбинаторные матричные множества, в том числе, линейные операторы, сохраняющие множество $(0, 1)$ -матриц, играющее существенную роль в теории мажоризаций.

Цели и задачи работы

1. Исследовать мажоризацию классов матриц.
2. Исследовать мажоризации $(0, 1)$ -матриц.
3. Найти характеристики линейных отображений, меняющих тип мажоризации.
4. Найти характеристики линейных отображений, сохраняющих мажоризации кортежей матриц.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения:

1. Новое понятие мажоризации классов матриц и решение задачи нахождения минимального покрывающего класса для слабой мажоризации и мажоризации по направлению.
2. Характеристики слабой, по направлению, сильной и строчной мажоризаций $(0, 1)$ -матриц.
3. Исследование линейных операторов, конвертирующих мажоризации матриц. В частности,
 - Характеризация линейных конвертеров из векторной мажоризации в слабую мажоризацию и усиление классического результата Андо о линейных отображениях, сохраняющих векторную мажоризацию.
 - Характеризация линейных операторов, конвертирующих сильную мажоризацию в слабую и усиление теоремы Ли-Пуна о линейных отображениях, сохраняющих мажоризации матриц.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются мажоризации действительных матриц и связанные с ними линейные операторы.

Предметом исследования являются мажоризации кортежей матриц, мажоризации специальных матриц и линейные конвертеры мажоризаций.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Автор диссертации введено новое понятие мажоризации классов матриц и решена задача нахождения минимальных покрывающих классов в смысле слабой мажоризации и мажоризации по направлению. Впервые даны полные характеристики различных типов мажоризации $(0, 1)$ -матриц. Получены характеристики линейных отображений, меняющих типы мажоризаций и линейных отображений, сохраняющих мажоризацию кортежей матриц. В частности, были усилены некоторые классические результаты теории линейных операторов, сохраняющих мажоризации.

Методы исследования

В диссертации используются методы линейной алгебры, теории линейных операторов, сохраняющих инварианты, комбинаторные методы и выпуклый анализ. Предложенные в диссертации методы позволяют доказывать некоторые известные результаты теории мажоризаций в значительно более слабых предположениях.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в абстрактной и линейной алгебре, теории операторов, математической статистике, теории оптимизации и их приложениях.

Степень достоверности и апробация результатов

Соискатель имеет 10 опубликованных работ, в том числе 6 статей по теме диссертации [1,2,3,4,5,6], из них 6 опубликованы в научных журналах, входящих в базы данных Scopus, Web of Science и RSCI.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- на «Научно-исследовательском семинаре по алгебре» (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова) в 2022 году.
- на научном семинаре «Кольца, модули и матрицы» (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова) в 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022 годах.
- на научном семинаре «Algebra», Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Будапешт, Венгрия, 2019, 2021.
- на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ имени М.В. Ломоносова в 2016, 2018, 2019, 2020, 2021 годах.
- на конференции «A Tropical Panorama», Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Лейпциг, Германия, 2018.
- на международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018.
- на международной алгебраической конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры, МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019.
- на конференции «Preserver Weekend in Szeged», Сегед, Венгрия, 2019.
- на конференции международных математических центров мирового уровня, Сириус, Сочи 2021.

Структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Общий объем работы составляет 127 страниц. Список литературы включает 51 наименование.

Содержание работы

Введение посвящено краткой истории вопроса, актуальности рассматриваемых проблем, изложению цели работы, методов и основных результатов.

В **главе 1** собраны основные понятия теории мажоризаций матриц и теории линейных операторов, сохраняющих мажоризации. Приводятся известные результаты этих теорий, которые используются в диссертации.

В **главе 2** рассматривается новое понятие мажоризации классов матриц, введенное в данной диссертации и обобщающее различные типы мажоризаций матриц.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два конечных класса матриц из $M_{n,m}$. Говорим, что $\mathcal{A}$ мажорируется $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$), если для любой $A \in \mathcal{A}$ существует такая матрица $B_A \in \mathcal{B}$, что $A \preceq B_A$.

Раздел 2.1 посвящен статистическим приложениям мажоризаций матриц, в рамках которых возникает потребность в изучении введенного понятия мажоризации классов матриц. Раздел 2.2 содержит основные свойства мажоризаций классов матриц, обобщающих многие свойства мажоризаций матриц. В разделе 2.3 формулируются и решаются задачи 2.24, 2.40 нахождения минимального по числу элементов покрывающего класса. В случае слабой мажоризации эта задача решена геометрическими методами, в частности, изложенными в теореме 2.23. Доказана теорема 2.37, позволяющая свести задачу нахождения минимального покрывающего класса в случае мажоризации по направлению к случаю слабой мажоризации.

Теорема 2.37. Пусть $\mathcal{A}$ — класс матриц из $M_{n,m}$. Предположим, что существует такая матрица $B \in M_{n,m}$, что $\mathcal{A} \preceq^w \{B\}$ и векторы столбцовых сумм всех $A_i \in \mathcal{A}$ совпадают, то есть $e^t A_i = e^t A_j$ для любых i, j . Тогда существует такая $C \in M_{n,m}$, что $\mathcal{A} \preceq^d \{C\}$.

В **главе 3** изучаются мажоризации $(0, 1)$ -матриц. В разделе 3.1 доказаны

Теорема 3.2. Пусть $A, B \in M_{n,m}(0, 1)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $A \preceq^w B$,
2. $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, где $\mathcal{R}(X)$ — множество строк X ,
3. $A = RB$ для некоторой $(0, 1)$ -матрицы $R \in \Omega_n^{\text{row}}$.

Теорема 3.4; следствие 3.5. Пусть $A, B \in M_{n,m}(0, 1)$. Тогда

1. $A \preceq^d B$, если и только если A — перестановка строк матрицы B , т. е. $A = PB$ для некоторой $P \in P(n)$,
2. $\preceq^d$ есть отношение эквивалентности на $M_{n,m}(0, 1)$.
3. Для $(0, 1)$ -матриц отношения $\preceq^d$ и $\preceq^s$ эквивалентны.

Таким образом, в разделе 3.1 получены характеристики слабой, по направлению и сильной мажоризаций $(0, 1)$ -матриц. Кроме того, показано, что сильная мажоризация и мажоризация по направлению на множестве $(0, 1)$ -матриц совпадают между собой и являются простыми отношениями эквивалентности.

В разделе 3.2 изучается строчная мажоризация $(0, 1)$ -матриц. Приводятся различные необходимые и различные достаточные условия такой мажоризации. Многие из них имеют комбинаторный смысл. Например, лемма 3.16 показывает связь строчной мажоризации $(0, 1)$ -матриц с двудольными графами. В Теореме 3.24 получен геометрический критерий строчной мажоризации $(0, 1)$ -матриц.

Также доказан следующий критерий:

Следствие 3.30. Пусть $A, B \in M_{n,m}(0, 1)$. Тогда $A \preceq^r B$, если и только если

$$\sum_{i,j : a_{ij}=1} y_{ij} \leq \sum_j \max_k \left(\sum_{i : b_{ij}=1} y_{ik} \right).$$

для любых $Y \in M_{n,m}$.

В главе 4 исследуются вопросы теории линейных операторов, сохраняющих и конвертирующих мажоризации матриц. В разделе 4.1 исследуются важные для этой теории свойства мажоризаций матриц. В частности, леммы 4.9 и 4.10 позволяют обобщить на случай матриц произвольного размера $n \times m$, $n \geq 4$, $m \geq 2$ контрпример³⁷, показывающий, что сильная мажоризация и мажоризация по направлению не совпадают.

В разделе 4.2 получена характеристика линейных операторов, конвертирующих мажоризацию по направлению в сильную мажоризацию.

Теорема 4.17. Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$, где $n > 3$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Φ конвертирует мажоризацию по направлению в сильную.
2. Выполнено одно из условий:

(a) Существуют такие $S_1, \dots, S_m \in M_{n,m}$, что $\Phi(X) = \sum_{j=1}^m (e^t X^{(j)}) S_j$.

(b) Существуют такие $S \in M_m$, $P \in P(n)$ и $R \in M_m$, что $\text{rank } R \leq 1$ и $\Phi(X) = PXR + JXS$.

Теорема 4.22 раздела 4.3 дает характеристику линейных операторов, конвертирующих слабую мажоризацию в сильную мажоризацию и мажоризацию по направлению. В разделе 4.4

³⁷F. D. Martínez Pería, P. G. Massey, L. E. Silvestre, Weak matrix majorization, *Linear Algebra Appl.*, **403**, 343–368 (2005).

решается задача характеристики конвертеров в слабую мажоризацию. Теорема 4.38 дает ответ в векторном случае. Оказывается, все такие операторы должны сохранять векторную мажоризацию.

Теорема 4.38. Пусть ϕ — линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. ϕ сохраняет векторную мажоризацию.
2. ϕ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.
3. Выполнено одно из условий:

$$(a) \phi(x) = (e^t x)s \text{ для некоторого } s \in \mathbb{R}^n.$$

$$(b) \phi(x) = \alpha Px + \beta Jx \text{ для некоторых } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ и } P \in P(n).$$

Теорема 4.44 дает полную характеристику в матричном случае.

Теорема 4.44. Пусть Φ — линейный оператор на $M_{n,m}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Φ сохраняет сильную мажоризацию.
2. Φ сохраняет мажоризацию по направлению.
3. Φ конвертирует сильную мажоризацию в мажоризацию по направлению.
4. Φ конвертирует сильную мажоризацию в слабую.
5. Φ конвертирует мажоризацию по направлению в слабую.
6. Выполнено одно из условий:

$$(a) \Phi(X) = \sum_{j=1}^m (e^t X^{(j)}) S_j \text{ для некоторых } S_1, \dots, S_m \in M_{n,m}.$$

$$(b) \Phi(X) = PXR + JXS \text{ для некоторых } R, S \in M_m \text{ и } P \in P(n).$$

Раздел 4.5 исследует конвертеры столбцовой мажоризации. Теорема 4.50 дает полную характеристику линейных конвертеров из столбцовой мажоризации. В секции 4.5.3 найдены первые примеры линейных конвертеров, не сохраняющих конвертируемые мажоризации.

В разделе 4.6 исследуются линейные операторы, сохраняющие мажоризацию кортежей матриц. Теорема 4.81 дает соответствующий результат для слабой мажоризации, теорема 4.78 — для

сильной и по направлению. В разделе 4.7 изучаются линейные операторы, сохраняющие матрицы с коэффициентами из заданного множества. В частности, в теореме 4.112 дается полный ответ для любого конечного подмножества $\mathbb{R}$.

Основные результаты диссертации

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Решена задача нахождения минимального покрывающего класса для слабой мажоризации и мажоризации по направлению. В частности, доказано, что класс матриц с одинаковыми столбцовыми суммами, слабо мажорирующийся одной матрицей, мажорируется одной матрицей по направлению.
2. Получены характеристики слабой, по направлению, сильной и строчной мажоризаций $(0, 1)$ -матриц. Доказано, что если $A, B \in M_{n,m}(0, 1)$, то
 - $A \preceq^w B \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(B)$, где $\mathcal{R}(X)$ — множество строк X .
 - $A \preceq^s B \Leftrightarrow A \preceq^d B \Leftrightarrow A = PB$ для некоторой $P \in P(n)$.
 - $A \preceq^r B \Leftrightarrow \sum_{i,j : a_{ij}=1} y_{ij} \leq \sum_j \max_k \left(\sum_{i : b_{ij}=1} y_{ik} \right)$ для любых $Y \in M_{n,m}$.
3. Исследованы линейные операторы, конвертирующие мажоризации матриц. В частности,
 - Доказано, что любой линейный конвертер из векторной мажоризации в слабую должен сохранять векторную мажоризацию. Тем самым, усилен классический результат Андо о линейных отображениях, сохраняющих векторную мажоризацию.
 - Получена характеристика линейных операторов, конвертирующих сильную мажоризацию в слабую. Доказано, что все такие отображения сохраняют сильную мажоризацию.
 - Теорема Ли-Пуна о линейных отображениях, сохраняющих сильную мажоризацию, доказана в более слабых предположениях.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю А.Э. Гутерману за постановку задач, поддержку и постоянное внимание к работе.

Автор благодарен всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за творческую и доброжелательную атмосферу на кафедре.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[1] G. Dahl, A. Guterman, and P. Shteyner, Majorization for matrix classes, *Linear Algebra Appl.*, **555**, 201–221 (2018). П.М. Штейнером доказаны теоремы 3.17, 4.15 и лемма 4.9.

DOI: 10.1016/j.laa.2018.06.003

Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

[2] G. Dahl, A. Guterman, and P. Shteyner, Majorization for (0,1)-matrices, *Linear Algebra Appl.*, **585**, 147–163 (2020). П.М. Штейнером доказаны теорема 3.5, лемма 4.10 и следствия 3.6, 4.20 и 4.23.

DOI: 10.1016/j.laa.2019.09.038

Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

[3] A. Guterman and P. Shteyner, Linear operators preserving majorization of matrix tuples, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, **53(2)**, 136–144 (2020). П. М. Штейнером доказаны теоремы 14 и 17.

DOI: 10.1134/S1063454120020077

Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.236.

[4] A. Guterman, and P. Shteyner, Linear converters of weak, directional and strong majorizations, *Linear Algebra Appl.*, **613**, 320–346 (2021). П. М. Штейнером доказаны теоремы 4.5, 5.4, 6.14 и 6.20.

DOI: 10.1016/j.laa.2020.11.012

Журнал индексируется в **WoS, Scopus, RSCI**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

[5] П. М. Штейнер, Конвертация столбцовой мажоризации, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **496**, 195–215 (2020);

English transl. *J. Math. Sci.*, **255**, 340–352 (2021).

DOI: 10.1007/s10958-021-05377-4 Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.330.

[6] П. Штейнер, Линейные отображения, сохраняющие некоторые комбинаторные матричные множества, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **504**, 181–199 (2021);

English transl. *J. Math. Sci.*, в печати.

pdmi.ras.ru/zns1/2021/v504.html

Журнал индексируется в **RSCI**.

Другие публикации автора

[7] А. Э. Гутерман, К. Мари, П. М. Штейнер, Частичные порядки, порожденные обратными по направлению, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **463**, 58–80 (2017);

English transl. *J. Math. Sci.*, **232(6)**, 783–796 (2018).

DOI: 10.1007/s10958-018-3908-8

Журнал индексируется в **Scopus**, **RSCI**. IF: SJR 0.330.

[8] A. Guterman, X. Mary, P. Shteyner, On Hartwig–Nambooripad orders, *Semigroup Forum*, **98(1)**, 64–74 (2017).

DOI: 10.1007/s00233-018-9940-7

Журнал индексируется в **WoS**, **Scopus**, **RSCI**. IF: WoS 0.768, SJR 0.52.

[9] A. Guterman, P. Shteyner, Constructing order relations on semigroups, *RIMS Kokyuroku*, **2125**, 86–110 (2019).

repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/252222

[10] A. Guterman, L. Márki, P. Shteyner, Ordering orders and quotient rings, *Semigroups, Categories, and Partial Algebras*, Springer, **345**, 1–17 (2021).

DOI: 10.1007/978-981-33-4842-4_1 Индексируется в **WoS**, **Scopus**, **RSCI**.