Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Максаев Артем Максимович

Характеризации гомоморфизмов графов матричных отношений

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика (01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2022

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель:	**Гутерман Александр Эмилевич,** доктор физико-математических наук, профессор.
Официальные оппоненты:	**Шабат Георгий Борисович,** доктор физико-математических наук, профессор, Российский Государственный Гуманитарный Университет, Кафедра математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере, профессор.
	Волков Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Уральский федеральный университет, Лаборатория комбинаторной алгебры, главный научный сотрудник.
	Адрианов Николай Михайлович, кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Кафедра теоретической информатики, старший научный сотрудник.

Защита диссертации состоится 3 июня 2022 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4(МГУ.01.17) ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: *sbgashkov@gmail.com*

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций Фундаментальной библиотеки Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИСА «ИСТИНА»:

`https://istina.msu.ru/dissertations/450303925/`

Автореферат разослан 29 апреля 2022 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, **С. Б. Гашков**
профессор

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

Пусть X — произвольное множество. Отношение на X — это подмножество $\mathcal{U} \subseteq X \times X$. Отношению $\mathcal{U}$ соответствует ориентированный граф $G_{\mathcal{U}}$ с множеством вершин X и множеством ребер $\mathcal{U}$. Изучение матричных отношений, то есть отношений на множестве матриц, является популярной задачей, и один из эффективных подходов к ней — построение соответствующего графа.

Исследования графов, соответствующих отношениям на кольцах, начались сравнительно недавно. В 1988 году Бек[1] определил граф делителей нуля коммутативного кольца, позже Андерсон и Ливингстон[2] его модифицировали. До настоящего момента, кроме графов делителей нуля, активно изучались графы отношений коммутативности[3] и ортогональности[4], см. также библиографические ссылки, приведенные в работах.

Для получения дополнительной информации об отношении $\mathcal{U}$ полезно знать структуру группы автоморфизмов графа $G_{\mathcal{U}}$. Поэтому особую важность представляет исследование автоморфизмов (и эндоморфизмов) таких графов. Напомним, что автоморфизмом графа называется биекция на множестве его вершин, строго сохраняющая отношение их смежности.

Таким образом, главным вопросом, который мы рассматриваем, является задача характеризации (биективных) отображений, сохраняющих различные матричные отношения и, возможно, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такие отображения также позволяют генерировать семейства матриц и графов с определенными свойствами. История этого вопроса восходит к работе Фробениуса[5], в которой были описаны линейные отображения комплексных квадратных матриц, сохраняющие определитель.

За последнее столетие было разработано множество методов, развивающих эту теорию. По-

[1] I. Beck, Coloring of commuatitive rings. — J. Algebra 116, No. 1 (1988), 208–226.

[2] D. F. Anderson, P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring. — J. Algebra 217, No. 2 (1999), 434–447.

[3] S. Akbari, H. Bidkhori, A. Mohammadian (2008) Commuting Graphs of Matrix Algebras, Communications in Algebra, 36:11, 4020-4031.

[4] Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, Графы, определенные ортогональностью. — Зап. научн. семин. ПОМИ 428 (2014), 49–80.

[5] G. Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1897, 994-1015.

добными задачами занимались такие ученые, как Шур, Дьёдонне, Хуа, Маркус, Мойлз, Бисли, Шемрл и др. Для ознакомления с современным состоянием теории отображений, сохраняющих матричные инварианты, читатель может обратиться к обзору[6], где подробно рассказывается про линейные отображения. Автором настоящей работы изучаются три направления этой теории, о которых рассказывается ниже.

Первое из них относится к функции скрамблинг-индекса. В 2009 году Акельбек и Киркланд[7] ввели понятие скрамблинг-индекса примитивного ориентированного графа G, обозначаемого через $k(G)$. Согласно их определению, $k(G)$ равно наименьшему натуральному k такому, что для любых двух вершин a и b графа G найдется третья вершина u, для которой есть ориентированные пути длины k из a в u и из b в u (в путях допускаются повторения ребер и/или вершин). За счет рассмотрения матрицы смежности графа, это определение можно естественным образом распространить на примитивные неотрицательные матрицы.

Скрамблинг-индекс находит применения в теории марковских цепей, конечных автоматов и массовых коммуникаций. Например, при рассмотрении $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ конечной ациклической марковской цепи важную роль играет значение второго по абсолютной величине собственного значения A (наибольшее по модулю собственное значение A равно 1). Оно дает информацию об асимптотике скорости сходимости последовательности A^k, $k \geqslant 1$. В связи с этим, любая нетривиальная оценка на второе собственное значение таких матриц является значимой. В статье[7] была предъявлена такая оценка, использующая скрамблинг-индекс: для любого собственного значения λ матрицы A, не равного 1, было показано, что

$$|\lambda| \leqslant (\tau_1(A))^{1/k(A)} < 1,$$

где

$$\tau_1(A) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \sum_{l=1}^{n} |a_{il} - a_{jl}|.$$

Таким образом, исследование различных свойств скрамблинг-индекса и, в особенности, верхних оценок на него является актуальным. В той же статье[7] была установлена точная верхняя оценка на скрамблинг-индекс примитивного ориентированного графа: $k(G) \leqslant \left\lceil \frac{(n-1)^2+1}{2} \right\rceil$, где n — поря-

[6]Pierce S, et al. A survey of linear preserver problems. Linear Multilinear Algebra 33 (1992) 1–119.

[7]M. Akelbek, S. Kirkland. Coefficients of ergodicity and scrambling index, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 1111-1130.

док графа G. В других работах: Акельбека и Киркланда[8]; Акельбека, Фиталя и Шена[9]; Чжена и Лью[10]; Лью и Хуанга[11] — эта теория получила дальнейшее развитие. А именно, появились верхние оценки на скрамблинг-индекс для различных семейств примитивных графов, а также во многих случаях были охарактеризованы графы, для которых достигается максимальное значение индекса. В работе[12] было предложено обобщение скрамблинг-индекса в зависимости от параметра $1 \leqslant \lambda \leqslant n$, полезное для задач теории массовых коммуникаций, было введено понятие λ-скрамблинг матрицы.

Нетрудно видеть, что определение скрамблинг-индекса без изменений распространяется на более широкий класс ориентированных графов, нежели примитивные графы. Этот класс не был исследован, равно как и проблема верхних оценок на скрамблинг-индекс внутри этого класса. Кроме того, не изучены алгоритмы для нахождения точного значения скрамблинг-индекса для графа или хотя бы проверки того, что скрамблинг-индекс для графа определен корректно (т. е. существует и является натуральным числом). Одним из возможных методов для рассмотрения семейств матриц и графов с фиксированным значением скрамблинг-индекса может быть исследование различных отображений матриц, сохраняющих данный инвариант. Несмотря на то, что в последние годы активно изучаются отображения, сохраняющие комбинаторные инварианты (например, перманент), см. главу 9 в статье[6], в литературе не были охарактеризованы отображения, сохраняющие значения скрамблинг-индекса.

Второй решаемой задачей является вопрос описания отображений, сохраняющих отношения Грина на моноиде матриц. Отношения, введенные Дж. Грином в 1951 году в работе[13] и позже названные в его честь, — это пять отношений эквивалентности, рассматриваемые на произвольной полугруппе, которые естественным образом возникают при изучении идеалов полугруппы и играют фундаментальную роль. Приведем определения отношений Грина для случая моноида.

[8] M. Akelbek, S. Kirkland, Primitive digraphs with the largest scrambling index, Linear Algebra Appl. 430 (2009) 1099–1110.

[9] M. Akelbek, S. Fital, J. Shen. A bound on the scrambling index of a primitive matrix using Boolean rank, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 1923-1931.

[10] S. Chen, B. Liu. The scrambling index of symmetric primitive matrices, Linear Algebra Appl. 433 (2010) 1110–1126.

[11] B. Liu, Y. Huang. The scrambling index of primitive digraphs, Computers and Mathematics with Applications 60 (2010) 706–721.

[12] Y. Huang, B. Liu. Generalized scrambling indices of a primitive digraph, Linear Algebra Appl. 433 (2010) 1798–1808.

[13] J. A. Green. On the structure of semigroups. Annals of Math. 54 (1951), 163-172.

Определение. Пусть $\mathcal{M}$ — моноид. Будем писать, что элементы $a, b \in \mathcal{M}$ связаны одним из отношений Грина:

(i) $a\,\mathcal{R}\,b$, если $a\mathcal{M} = b\mathcal{M}$;

(ii) $a\,\mathcal{L}\,b$, если $\mathcal{M}a = \mathcal{M}b$;

(iii) $a\,\mathcal{J}\,b$, если $\mathcal{M}a\mathcal{M} = \mathcal{M}b\mathcal{M}$;

(iv) $a\,\mathcal{H}\,b$, если $a\,\mathcal{R}\,b$ и $a\,\mathcal{L}\,b$;

(v) $a\,\mathcal{D}\,b$, если $\exists\, c \in \mathcal{M} \colon a\,\mathcal{R}\,c$ и $c\,\mathcal{L}\,b$.

Авторы работы[14], мотивированные повышенным интересом к тропической алгебре в последние годы, классифицировали биективные линейные отображения, сохраняющие каждое из отношений Грина на моноиде $n \times n$ матриц над антинегативным полуполем. Таким образом, классификация была осуществлена для всех полуполей, кроме полей. Это является необычным, в свете того, что развитие теории полуполей во многом основано на обобщениях классических результатов теории полей, и побуждает исследовать эту проблему для случая полей, что и было сделано диссертантом.

Третья задача связана с отношением вырожденности суммы матриц. В 2008 году Д. Андерсон и А. Бадави[15] ввели понятие тотального графа коммутативного кольца с единицей, а в статье[16] аналогичные графы были рассмотрены и над некоммутативными кольцами. Для кольца квадратных матриц $M_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ вершинами этого графа является все множество $M_n(\mathbb{F})$, и две различные матрицы A, B соединяются ребром, если и только если $\det(A+B) = 0$. Будем обозначать этот граф через $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

В 2017 году математики Чжоу, Вонг и Ма[17] доказали, что всякий автоморфизм σ графа $\mathcal{T}_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов нечетной характеристики, имеет следующий вид:

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} Q \quad \text{для любой матрицы } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{F}_q)$$

[14] A. Guterman, M. Johnson, M. Kambites. Linear isomorphisms preserving Green's relations for matrices over anti-negative semifields, Linear Algebra Appl. 545 (2018), 1-14.

[15] D.F. Anderson, A. Badawi, The total graph of a commutative ring, J. Algebra 320 (2008) 2706–2719.

[16] S. Akbari, F. Heydari, The regular graph of a noncommutative ring, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 89(1) (2014) 132-140.

[17] J. Zhou, D. Wong, X. Ma, Automorphism group of the total graph over a matrix ring, Linear and Multilinear Algebra 65(3) (2017) 572-581.

или

$$\sigma\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\right) = P\left(\begin{array}{cc} f(a) & f(c) \\ f(b) & f(d) \end{array}\right)Q \quad \text{для любой матрицы } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{F}_q),$$

где P, Q — невырожденные матрицы над полем $\mathbb{F}_q$, а f — некоторый автоморфизм поля $\mathbb{F}_q$.

На данный момент, вопрос описания автоморфизмов графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ при $n > 2$ остается открытым для произвольного поля $\mathbb{F}$ и довольно сложным. Это обстоятельство побуждает изучить схожие вопросы, с ослабленным условием на автоморфизм — далее мы в хронологическом порядке приводим ряд результатов по этой тематике.

Первый из таких вопросов, как уже говорилось выше, был рассмотрен Фробениусом[5] в конце XIX века. Он показал, что линейные отображения кольца квадратных матриц над полем комплексных чисел $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, которые сохраняют определитель, т. е.

$$\det(T(A)) = \det(A) \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{C}),$$

имеют *стандартный* вид:

$$\begin{gathered} T(A) = PAQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{C}) \\ \text{или} \\ T(A) = PA^TQ \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{C}), \end{gathered} \tag{1}$$

где P, Q — невырожденные матрицы такие, что $\det(PQ) = 1$.

В 1949 году этот результат был обобщен Дьёдонне[18], который для произвольного поля $\mathbb{F}$ доказал, что если линейное биективное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ сохраняет свойство вырожденности (т. е. $\det(A) = 0 \Rightarrow \det(T(A)) = 0$), то оно имеет вид (1), за исключением условия $\det(PQ) = 1$.

Для нелинейного случая результат был получен Долинаром и Шемрлом[19] в 2002 году. Они показали, что если сюръективное отображение $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ удовлетворяет следующему условию:

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B))$$

для всех $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}$, — то оно линейно (а значит, стандартно).

[18] D. J. Dieudonné, Sur une généralisation du groupe orthogonal á quatre variables, Arch. Math. 1 (1949), pp. 282–287.

[19] G. Dolinar, P. Šemrl, Determinant preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl. 348 (2002), pp. 189–192.

Вскоре Тан и Ванг[20] получили обобщение этого результата для произвольного поля, в котором более n элементов. Ими было доказано, что если отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ удовлетворяет аналогичному условию:

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B)) \tag{2}$$

для всех $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и всех $\lambda \in \mathbb{F}$, — то оно стандартно (1). Более того, они выяснили, что в случае сюръективности T вывод останется прежним, если равенство (2) будет выполнено лишь для двух значений параметра $\lambda = \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}^*$ таких, что $(\lambda_1/\lambda_2)^k \neq 1$ при $1 \leqslant k \leqslant n-2$. В 2019 году Костара[21] усилил этот результат для полей из более n^2 элементов, показав, что если T сюръективно, то достаточно потребовать выполнения равенства (2) всего при одном значении параметра $\lambda \neq 0, -1$ — вывод будет аналогичен.

Наконец, в 2020 году Костара[22] рассмотрел *пучковое условие для вырожденности* для пары отображений $\varphi, \psi\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$:

$$\det(\lambda A + B) = 0 \iff \det(\lambda\varphi(A) + \psi(B)) = 0 \quad \text{для всех } A, B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ и всех } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Он показал, что если одно из отображений φ, ψ сюръективно или непрерывно, то $\varphi = \psi$ и эти отображения стандартны (1), за исключением условия $\det(PQ) = 1$. В доказательстве активно использовались топологические методы, специфичные для поля комплексных чисел.

Пучковое условие для вырожденности представляет наибольший интерес в контексте изучения автоморфизмов тотального графа кольца квадратных матриц. Отметим, что пары удовлетворяющих ему отображений были охарактеризованы только над полем комплексных чисел и при дополнительных ограничениях на отображения (непрерывность или сюръективность).

В диссертации получены результаты по каждой из трех описанных выше задач. В частности, получено описание класса ориентированных графов, скрамблинг-индекс которых корректно определен, и предъявлен алгоритм проверки принадлежности графа данному классу. Получены верхние оценки на скрамблинг-индекс в рамках указанного класса. Описаны линейные отображения квадратных матриц над полем, сохраняющие отношения Грина (при некоторых дополнительных условиях на поле). Получено описание пар отображений квадратных матриц над

[20] V. Tan, F. Wang, On determinant preserver problems, Linear Algebra Appl., 369 (2003), pp. 311-317.

[21] C. Costara, Nonlinear determinant preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl., 583 (2019), pp. 165–170.

[22] C. Costara, Nonlinear invertibility preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl., 602 (2020), pp. 216-222.

алгебраически замкнутым полем, удовлетворяющих пучковому условию для вырожденности (без дополнительных ограничений на отображения).

Цели и задачи работы

Целью диссертации является исследование вида гомоморфизмов и автоморфизмов графов следующих матричных отношений:

- отношений, определяемых значениями специальной функции на графах — скрамблинг-индекса, — над антинегативными коммутативными полукольцами с 1 и без делителей нуля;
- отношений Грина $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{J}, \mathcal{D}$ на моноиде матриц над полем;
- отношения вырожденности суммы матриц над полем.

В этих задачах мы вынуждены накладывать дополнительные условия на соответствующие отображения или на элементы матриц.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты диссертации выносятся на защиту:

- Получение точных верхних оценок на скрамблинг-индекс произвольного ориентированного графа. Построение примеров, для которых достигается максимальное значение в верхних оценках.
- Характеризация линейных отображений, сохраняющих все значения скрамблинг-индекса на моноиде квадратных $n \times n$ матриц $M_n(S)$, где S — антинегативное коммутативное полукольцо с 1 и без делителей нуля. Описание линейных отображений, строго сохраняющих множество λ-скрамблинг матриц при $1 < \lambda \leqslant n$.
- Характеризация линейных отображений, сохраняющих отношения Грина на моноиде квадратных $n \times n$ матриц $M_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — поле. В случае отношений $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ такое описание предъявлено при условии, что каждый многочлен степени n с коэффициентами в $\mathbb{F}$ имеет корень в $\mathbb{F}$. В случае отношения $\mathcal{H}$ — при условии, что $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Для отношения $\mathcal{J}$ поле произвольно.

- Характеризация отображений $T_1, T_2 \colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ для алгебраически замкнутого поля $\mathbb{F}$ таких, что для всех $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и всех $\lambda \in \mathbb{F}^*$

$$\det(A + \lambda B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0,$$

  если при этом существует невырожденная матрица D такая, что $T_2(D)$ невырождена.

- Доказательство того факта, что кликовое число регулярного графа любого многочлена конечно, и предъявление явной верхней оценки на него. Доказательство того, что в тотальном графе любого бесконечного множества найдется конечный подграф с неограниченно большой минимальной степенью вершины.

Объект и предмет исследования

Объект исследования — графы матричных отношений (порожденных значениями функции скрамблинг-индекса; Грина; вырожденности суммы матриц).

Предмет исследования — гомоморфизмы и автоморфизмы указанных графов, их свойства.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

1. Получение точных верхних оценок на скрамблинг-индекс произвольного ориентированного графа. Построение примеров графов, для которых достигается максимальное значение в верхних оценках.

2. Характеризация линейных отображений, сохраняющих все значения скрамблинг-индекса на моноиде квадратных матриц над антинегативным коммутативным полукольцом с 1 и без делителей нуля.

3. Характеризация линейных отображений, сохраняющих отношения Грина на моноиде квадратных матриц над полем при соблюдении определенных условий на поле.

4. Характеризация пар отображений, сохраняющих вырожденность пучков квадратных матриц над алгебраически замкнутым полем.

5. Установление факта конечности кликового числа регулярного графа любого многочлена, предъявление явной верхней оценки на него. Доказательство того, что в тотальном графе любого бесконечного множества найдется конечный подграф с неограниченно большой минимальной степенью вершины.

Методы исследования

В исследовании используются классические методы линейной и общей алгебры, комбинаторики и теории графов. Также используются известные теоремы об отображениях, сохраняющих матричные инварианты.

Теоретическая и практическая значимость

Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты относятся к теории графов и теории отображений, сохраняющих матричные инварианты, и могут быть использованы в задачах линейной и общей алгебры, комбинаторики, теории марковских цепей, конечных автоматов, массовых коммуникаций.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты опубликованы в 10 статьях автора [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] в журналах, индексируемых Web of Science, Scopus и RSCI. Из них 8 статей в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ по физико-математическим специальностям. Автор выступал с докладами по результатам работы на спецсеминаре «Кольца, модули и матрицы» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Кроме того, автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих международных конференциях:

- 4th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and Applications, (MMMA-2015), Сколково, Россия, 2015 (устный доклад).

- XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», Москва, Россия, 2016 (устный доклад).

- XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017», Москва, Россия, 2017 (устный доклад).

- Fourth Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics, Турку, Финляндия, 2017 (устный доклад).

- A Tropical Panorama, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Лейпциг, Германия, 2018 (стендовый доклад).

- Международная алгебраическая конференция, посвященная 90-летию кафедры высшей алгебры, Москва, Россия, 2019 (устный доклад).

- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021», Москва, Россия, 2021 (устный доклад в формате онлайн).

- 8th European Congress of Mathematics, Порторож, Словения, 2021 (устный доклад в формате онлайн).

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем работы: 150 страниц. Список литературы включает 71 наименование.

Содержание работы

Введение посвящено актуальности рассматриваемой темы, краткой истории вопроса, изложению цели работы и основных результатов.

Глава 1. В этой главе исследуются два вопроса:

- Получение верхних оценок на скрамблинг-индекс для произвольных ориентированных графов (орграфов).

- Получение критерия и полиномиального алгоритма проверки того, что у орграфа существует (конечный) скрамблинг-индекс.

В разделе 1.1 вводятся основные определения и обозначения, используемые на протяжении всего текста.

Пусть u, v — вершины орграфа G. Через $u \xrightarrow{k} v$ мы обозначаем факт существования в G ориентированного пути длины k с началом u и концом v.

Определение. Скрамблинг-индексом орграфа G назовем наименьшее такое натуральное k, что $\forall u, v \in V(G)$ $\exists w \in V(G)$, для которого $u \xrightarrow{k} w$, $v \xrightarrow{k} w$. Обозначим его через $k(G)$. Если таких натуральных k нет, то скажем, что $k(G) = 0$. Пусть $u, v \in V(G)$. Введем следующие числа:

$$k_{u,v}(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \,|\, \text{существует } w \in V(G)\colon u \xrightarrow{k} w, v \xrightarrow{k} w\}.$$

Если множество в правой части пусто, то определим: $k_{u,v}(G) = 0$. Будем называть данное число локальным скрамблинг-индексом для вершин u и v.

В разделе 1.2 проводится обзор известных результатов, касающихся верхних оценок на скрамблинг-индекс.

В разделе 1.3 представлены верхние оценки на скрамблинг-индекс произвольного орграфа.

Мы говорим, что G имеет $(G_1 \to G_2)$-*разбиение*, если G_1 и G_2 — непустые подграфы G и выполнено следующее:

(i) $V(G_1) \sqcup V(G_2) = V(G)$, то есть множества вершин орграфов G_1 и G_2 не пересекаются и образуют разбиение $V(G)$;

(ii) для каждого ориентированного ребра $e = (v_1, v_2) \in E(G)$ выполнено: $e \in E(G_1)$, или $e \in E(G_2)$, или $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$.

Подграф H орграфа G назовем *достижимым*, если для каждой вершины u орграфа G существует ориентированный путь с началом в u, оканчивающийся в некоторой вершине H. Для достижимого орграфа H орграфа G и вершины $u \in V(G)$ определим расстояние $d(u, H) = \min\limits_{v \in V(H)} d(u, v)$, где $d(u, v)$ — минимальная длина ориентированного пути с началом в u и концом в v.

Основным инструментом для получения верхних оценок на скрамблинг-индекс является следующая лемма.

Лемма. *Рассмотрим $(G_1 \to G_2)$-разбиение орграфа G. Предположим, что $k(G) \neq 0$. Тогда*

1. *$k(G_2) \neq 0$ и $k(G) \geqslant k(G_2)$,*
2. *подграф G_2 орграфа G достижим,*
3. *$k_{u,v}(G) \leqslant \max\{d(u, G_2), d(v, G_2)\} + k(G_2)$ для всех $u, v \in V(G)$,*
4. *$k(G) \leqslant \max\limits_{u \in V(G_1)} d(u, G_2) + k(G_2) \leqslant |G_1| + k(G_2)$, где $|G_1|$ — порядок орграфа G_1.*

Пусть $V_1, V_2, \dots, V_s$ — компоненты сильной связности G. Показано, что если $k(G) \neq 0$, то ровно одна из этих компонент, скажем, V_s не имеет исходящих ребер в другие компоненты. Назовем $(G_1 \to G_2)$-разбиение орграфа G *каноническим*, если $G_2 = V_s$ и $G_1 = V_1 \cup \ldots \cup V_{s-1}$.

Указанное понятие используется для доказательства критерия того, что $k(G) \neq 0$, и построения проверяющего это алгоритма.

Теорема. *Для произвольного орграфа G следующие условия эквивалентны:*

1. $k(G) \neq 0$.

2. *В G найдется примитивный достижимый подграф H.*

Введем обозначение: $K(n, s) = n - s + k(n, s)$ и

$$k(n,s) = \begin{cases} \left(\frac{s-1}{2}\right) n, & \text{если } s \text{ нечетно;} \\ \left(\frac{n-1}{2}\right) s, & \text{если } s \text{ четно.} \end{cases}$$

Используя вышеприведенную лемму, доказываются следующие оценки.

Теорема. *Пусть G не сильно связный орграф порядка n с $k(G) \neq 0$. Рассмотрим его каноническое $(G_1 \to G_2)$-разбиение. Пусть s — обхват G_2 и $|G_2| = b \leqslant n - 1$. Тогда $k(G) \leqslant n - b + K(b, s)$. Если достигается равенство, то $k(G_2) = K(b, s)$ и найдется единственная вершина u орграфа G_1, такая что $d(u, G_2) = n - b$.*

Теорема. *Пусть G не сильно связный орграф n с $k(G) \neq 0$. Рассмотрим его каноническое $(G_1 \to G_2)$-разбиение. Пусть $|G_2| = b$. Тогда $k(G) \leqslant n - b + \left\lceil \frac{(b-1)^2+1}{2} \right\rceil$.*

Теорема. *Пусть G не сильно связный орграф порядка $n \geqslant 3$. Тогда*

$$k(G) \leqslant 1 + \left\lceil \frac{(n-2)^2 + 1}{2} \right\rceil. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть G — произвольный орграф порядка $n \geqslant 3$. Тогда*

$$k(G) \leqslant \left\lceil \frac{(n-1)^2 + 1}{2} \right\rceil.$$

В последних двух теоремах также классифицированы орграфы (с точностью до изоморфизма), на которых достигаются равенства.

В разделе 1.4 рассматривается обобщение понятия скрамблинг-индекса для *раскрашенных в r цветов мультиграфов*, здесь подразумеваются, что каждое ребро мультиграфа раскрашено в один из r цветов. Пусть D такой мультиграф и $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_r) \in \mathbb{Z}_+^r$. Скажем, что $u \xrightarrow{\mathbf{c}} v$ в D, где $u, v \in V(D)$, если в D найдется ориентированный путь из u в v, в котором встречается ровно c_i ребер цвета $i = 1, 2, \ldots, r$. Раскрашенный в r цветов мультиграф D называется *примитивным*, если $\exists \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_+^r$, такое что $\forall u, v \in V(D)$ выполнено: $u \xrightarrow{\mathbf{c}} v$.

Определение. Пусть D — раскрашенный в r цветов мультиграф. Назовем положительное число k скрамблинг-индексом D, если оно наименьшее из таких чисел, что найдется некоторый набор $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}_+^r$, $|\mathbf{c}| = k$, что для любых $u, v \in V(D)$ существует $w \in V(D)$, такая что $u \xrightarrow{\mathbf{c}} w$, $v \xrightarrow{\mathbf{c}} w$. Обозначение: $k(D)$. Если такого числа k не существует, то скажем, что $k(D) = 0$.

Основной результат раздела — обобщение критерия того, что скрамблинг-индекс мультиграфа не равен 0.

Теорема. *Пусть D — раскрашенный в r цветов мультиграф автоматного типа (то есть из каждой его вершины выходят ребра всех цветов). Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $k(D) \neq 0$;
2. $k_{u,v}(D) \neq 0$ *для любых* $u, v \in V(D)$;
3. D *содержит примитивный достижимый подграф* H.

Глава 2 посвящена характеризации линейных отображений матриц над антинегативными полукольцами с единицей и без делителей нуля, сохраняющих определенные значения скрамблинг-индекса.

В разделе 2.1 вводятся основные определения и обозначения этой главы, освещается краткая история вопроса.

В разделе 2.2 характеризуются отображения, сохраняющие определенные значения скрамблинг-индекса. В первую очередь, интерес представляют экстремальные значения: $0, 1, \omega_n = \left\lceil \frac{(n-1)^2+1}{2} \right\rceil$.

Через $\mathscr{S}$ обозначим антинегативное коммутативное кольцо с 1 и без делителей нуля. Пусть $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$, скажем, что T *сохраняет скрамблинг-индекс* l, если $\forall\ A \in M_n(\mathscr{S})$ из того, что $k(A) = l$, следует, что $k(T(A)) = l$. Будем говорить, что T *сохраняет скрамблинг-индекс*, если оно сохраняет скрамблинг-индекс l для любого неотрицательного числа l. Скажем, что T сохраняет *ненулевой скрамблинг-индекс*, если T сохраняет скрамблинг-индекс l для любого $l > 0$.

Доказываются следующие теоремы.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$ и $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ — аддитивное отображение, примитивно сохраняющее скрамблинг-индекс. Тогда T биективно.*

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$ и $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ — аддитивное биективное отображение, сохраняющее значения 1 и $\omega_n = \left\lceil \frac{(n-1)^2+1}{2} \right\rceil$ скрамблинг-индекса. Тогда существует $P \in \mathcal{P}_n$ такая, что для всех $A \in M_n(\mathbf{B})$ выполнено:*

$$T(A) = P^T A\, P.$$

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$ и $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ — аддитивное биективное отображение, сохраняющее скрамблинг-индекс 0. Тогда существует $P \in \mathcal{P}_n$ такая, что для всех $A \in M_n(\mathbf{B})$ выполнено:*

$$T(A) = P^T A\, P.$$

В разделе 2.3 рассматривается обобщение скрамблинг-индекса, основанное на понятии λ-скрамблинг матрицы. Цель данного раздела — характеризация линейных отображений матриц над полукольцом $\mathscr{S}$, сохраняющих множество λ-скрамблинг матриц.

Определение. Пусть $A \in M_n(\mathscr{S})$ и пусть λ — целое число, такое, что $1 \leqslant \lambda \leqslant n$. Матрица A называется λ-скрамблинг матрицей, если для любых индексов $i_1, i_2, \ldots, i_\lambda \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдется индекс $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, для которого

$$A(i_1, j) \neq 0,\ A(i_2, j) \neq 0, \ldots,\ A(i_\lambda, j) \neq 0.$$

Иными словами, любые λ строк матрицы A пересекаются с некоторым столбцом матрицы A лишь по ненулевым элементам.

Теорема. *Пусть $1 < \lambda \leqslant n$ и $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ — аддитивное отображение, строго сохраняющее множество $\Lambda_{\mathbf{B}}(n, \lambda)$. Тогда T — биекция.*

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$, $1 < \lambda < n$ и $T\colon M_n(\mathbf{B}) \to M_n(\mathbf{B})$ — некоторое отображение. Тогда T — аддитивное биективное отображение, сохраняющее множество $\Lambda(n, \lambda)$, в том и только том случае, когда найдутся матрицы $P, Q \in \mathcal{P}_n$, такие что*

$$T(A) = PAQ.$$

В разделе 2.4 результаты подытоживаются и обобщаются на произвольные коммутативные антинегативные кольца с 1 и без делителей нуля. Через $A \circ B$ обозначается произведение Адамара или Шура (поэлементное произведение) матриц A и B.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$ и $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ — линейное отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1. *T — сюръективно и сохраняет скрамблинг-индекс 1 и ω_n;*

2. *T — сюръективно и сохраняет скрамблинг-индекс 0;*

3. *T имеет следующий вид:*
$$T(A) = P^T (A \circ B)\, P$$
для любой матрицы $A \in M_n(\mathscr{S})$, где $P \in \mathcal{P}_n$, а $B \in M_n(\mathscr{S})$ — матрица, каждый элемент которой обратим в $\mathscr{S}$.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$ и $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ — линейное отображение. Тогда T сохраняет ненулевой скрамблинг-индекс в том и только том случае, когда $T(A) = P^T(A \circ B)\, P$ для произвольной матрицы $A \in M_n(\mathscr{S})$. Здесь $P \in \mathcal{P}_n$ и $B \in M_n(\mathscr{S})$ — матрица, все элементы которой отличны от 0.*

Теорема. *Пусть $n \geqslant 2$, $1 < \lambda \leqslant n$ и $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ — линейное отображение. Тогда T строго сохраняет множество $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$ в том и только том случае, когда:*

а) при $\lambda < n$: найдутся перестановочные матрицы P и Q порядка n и матрица $B \in M_n(\mathscr{S})$, все элементы которой отличны от 0, такие, что $T(A) = P(A \circ B)Q$ для всех $A \in M_n(\mathscr{S})$;

б) при $\lambda = n$: найдутся перестановки $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$ такие, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполнено $T(E_{ij}) = b_{ij} E_{\sigma_j(i), \tau(j)}$, где $b_{ij} \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 2$, $1 < \lambda \leqslant n$ и $T\colon M_n(\mathscr{S}) \to M_n(\mathscr{S})$ — линейное сюръективное отображение. Тогда T сохраняет множество $\Lambda_{\mathscr{S}}(n, \lambda)$ в том и только том случае, когда:*

а) при $\lambda < n$: найдутся перестановочные матрицы P и Q порядка n и матрица $B \in M_n(\mathscr{S})$, все элементы которой обратимы в $\mathscr{S}$, такие, что $T(A) = P(A \circ B)Q$ для всех $A \in M_n(\mathscr{S})$;

б) при $\lambda = n$: найдутся перестановки $\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S_n$ такие, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполнено $T(E_{ij}) = b_{ij} E_{\sigma_j(i), \tau(j)}$, где $b_{ij} \in \mathscr{S}$ — обратимые элементы.

Глава 3. В этой главе характеризуются отношения Грина $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{J}$ на моноиде квадратных $n \times n$ матриц над полем $\mathbb{F}$ (при некоторых дополнительных условиях на поле).

В разделе 3.1 вводятся основные определения и обозначения данной главы.

В разделе 3.2 рассматривается случай отношений $\mathcal{L}, \mathcal{R}$. Получен следующий результат.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 1$ и поле $\mathbb{F}$ таково, что каждый многочлен из $\mathbb{F}[x]$ степени n имеет корень в $\mathbb{F}$. Тогда линейные отображения $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, сохраняющие отношение $\mathcal{L}$ (соответственно $\mathcal{R}$) на $M_n(\mathbb{F})$, — это в точности отображения, имеющие вид $T(A) = PAX$ (соответственно $T(A) = XAP$) для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$, где $P \in GL_n(\mathbb{F})$ и $X \in M_n(\mathbb{F})$.*

В разделе 3.3 рассматривается случай отношения $\mathcal{H}$.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 1$ и $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ сохраняет отношение $\mathcal{H}$ на $M_n(\mathbb{F})$, если и только если оно имеет следующий вид:*

- *T — нулевое;*
- *существуют $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(A) = PAQ$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$;*
- *существуют $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(A) = PA^TQ$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$;*

В разделе 3.4 рассматривается случай отношения $\mathcal{J}$.

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$ и $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Биективное линейное отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ сохраняет отношение $\mathcal{J}$ на $M_n(\mathbb{F})$, если и только если существуют $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(A) = PAQ$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$, или существуют $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T(A) = PA^TQ$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$.*

Теорема. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ сохраняет отношение $\mathcal{J}$ на $M_n(\mathbb{F})$. Тогда T либо тождественно нулевое отображение, либо биекция.*

Глава 4 посвящена рассмотрению автоморфизмов тотального графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ для алгебраически замкнутого поля $\mathbb{F}$, удовлетворяющих пучковому условию для вырожденности. Раздел 4.1 содержит исторический обзор ранее полученных результатов, касающихся данной проблемы.

Определение. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $n \in \mathbb{N}$. Скажем, что пара отображений $T_1, T_2\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ удовлетворяет пучковому условию для вырожденности, если для любых матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и любого $\lambda \in \mathbb{F}^*$ выполнено:

$$A + \lambda B \ \text{ вырождена } \Leftrightarrow \ T_1(A) + \lambda T_2(B) \ \text{ вырождена.}$$

Скажем, что T_1, T_2 удовлетворяют одностороннему пучковому условию для вырожденности, если для любых матриц $A, B \in \mathcal{Y}$ и любого $\lambda \in \mathbb{F}^*$ выполнено:

$$A + \lambda B \text{ вырождена } \Rightarrow T_1(A) + \lambda T_2(B) \text{ вырождена.}$$

Разделы 4.2, 4.3 посвящены доказательству следующего результата, обобщающего классический результат Фробениуса о сохранении определителя.

Теорема. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $n \in \mathbb{N}$ и пусть $T_1, T_2 \colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — некоторое отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1. T_1, T_2 удовлетворяют одностороннему пучковому условию для вырожденности, а также существует $D \in GL_n(\mathbb{F})$ такая, что $T_2(D)$ невырождена.

2. T_1, T_2 удовлетворяют пучковому условию для вырожденности на $M_n(\mathbb{F})$.

3. $T_1 = T_2$, и существуют матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$ такие, что $T_1(A) = T_2(A) = PAQ$ для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$ или $T_1(A) = T_2(A) = PA^TQ$ для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$.

В **главе 5** вводятся определения тотального и регулярного графов произвольного подмножества A векторного пространства $\mathbb{F}^n$, где $\mathbb{F}$ — поле, характеристика которого не равна 2. Эти понятия обобщают тотальный граф кольца квадратных матриц $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$.

В разделе 5.1 вводятся основные обозначения для данной главы и приводится краткий исторический обзор, связывающий материал этой и предыдущей глав.

В разделе 5.2 вводится общее определение тотального и регулярного графов множества и изучаются их основные свойства.

Определение. Пусть n — натуральное число, $\mathbb{F}$ — поле, характеристика которого не равна 2, $A \subseteq \mathbb{F}^n$.

- Тотальным графом множества A называется граф $T_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

- Регулярным графом множества A называется граф $\Gamma_A(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus A$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus A$ соединены ребром, если и только если $\frac{x+y}{2} \in A$.

Тотальным и регулярным графами многочлена $p(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ будем называть графы $T_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_{V(p)}(\mathbb{F}^n)$ соответственно, где $V(p) \subseteq \mathbb{F}$ — множество нулей многочлена p. Для краткости они обозначаются соответственно через $T_p(\mathbb{F}^n)$ и $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$.

В разделе 5.3 доказывается, что для всякого многочлена кликовое число его регулярного графа конечно, а также приводится явная верхняя оценка.

Теорема. *Пусть* $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *— произвольный многочлен степени* $k \geqslant 0$. *Тогда* $\omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n))$ *конечно и выполнена оценка* $\omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) \leqslant \binom{n+k}{k}$.

В разделе 5.4 изучаются конечные вложенные подграфы графа $T_A(\mathbb{F}^n)$. Назовем конечный подграф H графа $T_A(\mathbb{F}^n)$ s-*конструкцией*, если минимальная из его степеней вершин $\delta(H) \geqslant s$.

Теорема. *Пусть* n *— натуральное число,* $A \subseteq \mathbb{F}^n$. *Тогда в графе* $T_A(\mathbb{F}^n)$ *существует* s*-конструкция при любом натуральном* s *в том и только том случае, когда множество* A *бесконечно.*

Данная теорема показывает, что доказать конечность хроматического числа тотального графа, ограничиваясь только базовыми утверждениями, не получится.

Благодарность

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задач, ценные обсуждения и годы совместной работы, а также сотрудникам кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и слушателям спецсеминара «Кольца, модули и матрицы» за теплую доброжелательную атмосферу. Отдельно автор благодарит Валентина Промыслова и Наталью Остроухову.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

[1] A. E. Guterman, A. M. Maksaev. Maps preserving scrambling index, *Linear and Multilinear Algebra*, **66(4)**, 840-859 (2018). А.М. Максаевым доказаны теоремы 3.2 и 4.10.

DOI: 10.1080/03081087.2017.1329814

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: SJR 0.688.

[2] A. E. Guterman, A. M. Maksaev. Maps preserving matrices of extremal scrambling index, *Special Matrices*, **6**, 166-179 (2018). А.М. Максаевым доказаны теоремы 2.7 и 3.9.

DOI: 10.1515/spma-2018-0014

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: SJR 0.647.

[3] A. E. Guterman, A. M. Maksaev. Additive maps preserving scrambling index are bijective, *Acta Sci. Math (Szeged)*, **84**, 19–38 (2018). А.М. Максаевым доказаны теоремы 2.1 и 3.6.

DOI: 10.14232/actasm-017-092-2

Журнал индексируется в **Scopus**. IF: SJR 0.39.

[4] A. E. Guterman, A. M. Maksaev. Preserving λ-scrambling matrices, *Fundamenta Informaticae*, **162**, 119–141 (2018). А.М. Максаевым доказаны теоремы 2.20, 3.6 и 4.9.

DOI: 10.3233/FI-2018-1717

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: SJR 0.311.

[5] A. E. Guterman, A. M. Maksaev. Upper bounds on scrambling index for non-primitive digraphs, *Linear and Multilinear Algebra*, **69(11)**, 2143-2168 (2021). А.М. Максаевым доказаны теоремы 4.1, 5.1, 5.4, 5.7, 6.1 и 6.5.

DOI: 10.1080/03081087.2019.1663139

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: SJR 0.688.

[6] A. Guterman, M. Johnson, M. Kambites, A. Maksaev. Linear functions preserving Green's relations over fields, *Linear Algebra Appl.*, **611**, 310-333 (2021). А.М. Максаевым доказаны теоремы 3.16, 3.17 и 5.3. Также им доказана теорема 5.2 при $n \geqslant 3$.

DOI: 10.1016/j.laa.2020.10.033

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

[7] А. М. Максаев. Отображения, строго сохраняющие λ-скрамблинг матрицы, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **482**, 231–243 (2019);

English transl.: *J. Math. Sc.*, **249(2)**, 263-270 (2020).

DOI: 10.1007/s10958-020-04940-9

Журнал индексируется в **Scopus, RSCI**. IF: SJR 0.330.

[8] A.E. Guterman, A.M. Maksaev, V.V. Promyslov. Pairs of maps preserving singularity on subsets of matrix algebras, *Linear Algebra Appl.*, **644**, 1–27 (2022). А.М. Максаевым доказаны теоремы 2.6 и 4.13.

DOI: 10.1016/j.laa.2022.02.035

Журнал индексируется в **WoS, Scopus**. IF: WoS 1.401, SJR 0.951.

Другие публикации

[9] A. E. Guterman, A. M. Maksaev. On the scrambling index of non-negative matrices, *Proceedings of the Fourth Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics*, 57-59 (2017).

https://www.utupub.fi/bitstream/handle/10024/143322/TUCSLN26.pdf

[10] А.М. Максаев, В.В. Промыслов. О тотальном и регулярном графах многочлена, *Фундаментальная и прикладная математика*, **23(4)**, 113—142 (2021). А.М. Максаевым доказаны теоремы 4.2, 6.7 и 6.10. Результаты раздела 2, а также теорема 4.8 получены совместно с В.В. Промысловым.

http://www.mathnet.ru/links/7cfd2bdb14f39af07b3394067b51b1a9/fpm1913.pdf

Журнал индексируется в **RSCI**.