ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Кодирзода Заъфари Абдуламин

Структура электромагнитного поля и резонансы в высокочастотных емкостных разрядах низкого давления

01.04.08 – Физика плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители
Доктор физико-математических наук,
доцент С.А. Двинин
Доктор физико-математических наук,
доцент Д.К. Солихов

Москва, Душанбе
2021

Оглавление

Введение

Высокочастотные емкостные (ВЧЕ) разряды низкого давления широко используются для сухого травления тонких пленок и плазменного химического осаждения (ПХО) для производства полупроводникового оборудования и плоско панельных дисплеев [А1 – А3]. Развитие экспериментальных и технологических установок, сопровождалось увеличением как их размеров, так и плотности плазмы, и привело к тому, что межэлектродное расстояние L и размеры электродов R стали превышать глубину скин слоя $\Delta_S = c/\omega_{Pe}$. Необходимость увеличения плотности электронов для увеличения скорости травления и формирования монохроматической функции распределения ионов, бомбардирующих подложку, по скоростям обусловило необходимость увеличения частоты поля $f=\omega/2\pi$, поддерживающего плазму, вплоть до 100–200 МГц [А4, А5, А6]. В этих условиях квазистатическое описание разряда низкого давления (эффективная частота столкновений электронов $\nu<\omega$) становится недостаточным. Неоднородность пространственного распределения поля влечет за собой необходимость учета электромагнитных эффектов – скин эффекта и возбуждения поверхностных волн, распространяющихся вдоль трехслойной структуры: слой пространственного заряда (СПЗ) – плазма – слой пространственного заряда, окруженной активным электродом и подложкодержателем, приводит к неоднородности распределения плотности плазмы и скорости обработки материалов при размере электродов больше 300 мм. При производстве плоских дисплеев и солнечных батарей используют подложки большего размера, на которых радиальная неоднородность поля наблюдается даже на частоте 13.56 МГц [А1, А2]. Для достижения однородности процесса в технологических установках применяют электроды специальной формы с использованием нескольких каналов подвода энергии и многочастотного возбуждения плазмы. Как правило, эти методы компенсации неоднородности поля хорошо работают только в пределах ограниченной области параметров, а изменение существующих режимов работы технологических установок для реализации новых процессов требует проведения длительных и дорогостоящих экспериментов. Были построены теории разряда малого размера в условиях сильного скин-эффекта [А7] и разряда с электродами большой площади, поддерживаемого только поверхностными волнами [А8 – А11]. Однако для теоретического описания разряда и расчета пространственного распределения необходимо учитывать как возбуждение поверхностных волн, так и высших нераспространяющихся мод поля. К началу настоящей работы такие исследования отсутствовали.

Таким образом, представляется необходимым провести теоретические

исследования пространственного распределения электромагнитного поля в разряде и его эволюции при изменении параметров плазмы и размеров экспериментальной установки. Одновременно необходимо провести расчеты импеданса разряда, так как изменение импеданса может привести к неустойчивости определенных форм разряда, которые могли бы быть перспективными при реализации технологических процессов. Из сказанного следует, что тема диссертационной работы является актуальной.

Объект исследования

Емкостный высокочастотный разряд низкого давления.

Предмет исследования

Электродинамические характеристики (импеданс и пространственное распределение электромагнитного поля) емкостного высокочастотного разряда при произвольном соотношении между характерными размерами разряда и длинами электромагнитных волн, распространяющихся в разряде.

Цель данной работы:

Провести аналитический и численный расчет пространственного распределения высокочастотного (ВЧ) поля в разрядной камере (включая плазму и слой пространственного заряда (СПЗ)) в широком диапазоне плотностей электронов и частот ВЧ поля, поддерживающего плазму, и нескольких типичных конфигураций рабочей камеры и электродов. На основании полученных результатов проанализировать причины появления неоднородности поля и физические условия наблюдения электродинамических резонансов в плазме и указать возможные способы управления пространственным распределением ВЧ поля, плотности электронов и положением резонансных точек на оси плотностей электронов.

Для достижения цели данной работы были поставлены следующие **задачи исследования.**

1. Аналитически исследовать дисперсию и пространственную структуру распространяющихся и не распространяющихся собственных электромагнитных волн в ВЧЕ разряде с электродами большой площади.

2. Аналитически рассчитать амплитуды собственных волн для нескольких различных способов возбуждения разряди.

3. Получить приближенные аналитические формулы для импеданса разряда при одновременном учете как нераспространяющихся мод, так и поверхностных волн.

4. Провести компьютерное моделирование пространственного распределения высокочастотного поля в технологическом плазменном реакторе и импеданса этого реактора и сравнить полученные результаты с результатами расчета по приближенным аналитическим формулам. Проанализировать физические механизмы управления пространственным

распределением поля в плазме и импедансом разряда в целом.

5. Аналитически и с помощью численного моделирования изучить систему собственных волн в разрядной камере и рассчитать дисперсионные кривые для четных и нечетных волн в трехслойной структуре слой-плазма-слой, окружённой металлическими границами, и аналитически и численно рассчитать импеданс разряда и также пространственное распределение электромагнитного поля в различных условиях.

Методы исследования – Аналитическое и численное (методом конечных элементов, пакет Comsol Multiphysics®) решение уравнений Максвелла для типичных конфигураций рабочей камеры технологических плазмохимических установок. Использовалось приближение холодной плазмы и матричная модель слоя пространственного заряда между плазмой и стенками камеры.

Научная новизна

1. Впервые рассчитаны дисперсионные кривые для четной и нечетной поверхностных волн и нераспространяющихся волн в трехслойной структуре слой-плазма-слой, окруженной металлическими границами, при описании слоя пространственного заряда в рамках матричной модели в широком диапазоне параметров плазмы для одинаковой и разной толщины слоев. Впервые исследовано изменение дисперсии собственных волн при изменении частоты столкновений в плазме в окрестности удвоенной критической плотности плазмы.

2. Впервые аналитически рассчитаны амплитуды поверхностных и нераспространяющихся волн в симметричном высокочастотном (ВЧ) емкостном разряде для частично и полностью заполненной плазмой цилиндрической разрядной камеры при симметричном и несимметричном возбуждении как функции плотности плазмы.

3. Впервые получены приближенные аналитические формулы для импеданса ВЧ емкостного разряда, учитывающие возбуждение как поверхностных, так и нераспространяющихся волн, и проведен расчет импеданса по этим формулам для типичных конфигураций технологических установок.

4. Впервые проведено систематическое математическое моделирование электродинамических эффектов в ВЧ емкостном разряде с электродами большой площади (пространственного распределения поля и импеданса разряда) для частично и полностью заполненной рабочей камеры. При расчетах использовался пакет программ Comsol Multiphysics®.

5. Предложена интерпретация различий в численных и аналитических расчетах, позволяющая качественно проанализировать физические процессы, не учитываемые в предложенных аналитических моделях, и дающая возможность построения более сложных моделей.

Теоретическая значимость работы.

Впервые получены аналитические формулы для амплитуд собственных волн (как поверхностных, так и нераспространяющихся мод) в высокочастотном емкостном разряде при учете электромагнитных эффектов.

Практическая значимость работы.

1. Впервые получены приближенные аналитические формулы для импеданса ВЧЕ разряда с электродами большой площади для полностью и частично заполненной плазмой разрядной камеры с учетом влияния внешней линии передачи, подводящей энергию к плазме.

2. Показано, что учет поля основной моды поля (квази-ТЕМ моды для малых плотностей электронов и поверхностной волны для высоких) и нескольких нераспространяющихся мод позволяет корректно рассчитывать импеданс разряда. При этом принципиально необходим учет как поля основной моды, так и поля высших нераспространяющихся мод.

3. Проведена идентификация и интерпретация резонансов, которые могут наблюдаться в ВЧЕ разряде низкого давления и таким образом анализировать устойчивость разряда при различных условиях.

4. Проведенные расчеты пространственных распределений электромагнитного поля могут быть основой для поиска режимов ВЧЕ разряда, обеспечивающих требуемые параметры плазмы (плотность плазмы и энергию ионов) и ее пространственную однородность.

Полученные результаты принципиальны для конструирования технологических реакторов, использующих ВЧЕ разряд низкого давления.

Соответствие паспорту научной специальности

Основная часть диссертационного исследования соответствует паспорту специальности 01.04.08 Физика плазмы.

П.3 – Динамика плазмы: волны, неустойчивости, течения, нелинейные явления (самоорганизация, структуры, турбулентность и т.п), аномальный перенос, электромагнетизм и т. п.

П.5 – Источники и генерация плазмы.

П.12 – Плазменные технологии и устройства.

Положения, выносимые на защиту:

1. Учет поля поверхностных волн и нескольких (2–3) первых нераспространяющихся мод электромагнитного поля позволяет провести корректный расчет импеданса ВЧ емкостного разряда. Соотношение амплитуд поверхностной волны и высших типов мод при изменении плотности электронов может изменяться в ω/ν (до 10 в типичных условиях) раз, что дает возможность управлять пространственным распределением ВЧ поля, добиваясь большей пространственной однородности плазмы.

2. Высшие моды поля вносят в импеданс индуктивную составляющую, в то время как вклад в импеданс, вносимый поверхностными волнами, зависит от соотношения размеров плазмы и длины поверхностной волны и может иметь как индуктивный, так и емкостной характер.

3. Основной наблюдаемый в разряде резонанс тока, связан с компенсацией емкостного импеданса внешней части камеры и индуктивного импеданса разряда в условиях, когда размер разряда существенно меньше, чем длина поверхностной волны. Изменяя геометрию (размеры) установки, плотность электронов n_{resI}, при которых наблюдается этот резонанс, можно изменять в пределах от одной до пяти критических ($n_C = \cdot m\omega^2/4\pi e^2$).

4. Основной резонанс напряжений, наблюдаемый в системе – геометрический резонанс плазмы и слоя, когда емкостной импеданс, вносимый поверхностной волной в условиях, когда ее размер существенно меньше размеров плазмы компенсируется индуктивным импедансом высших типов мод. Плотности электронов n_{resU}, при которых наблюдается этот резонанс в несколько (в типичных условиях 3–10) раз превышают плотности резонансов тока n_{resI}.

5. Положение резонансов тока и напряжения, обусловленных кратностью размеров разряда и длины поверхностной волны существенно модифицируется индуктивным импедансом, вносимых высшими модами поля и в большинстве случаев приводит к появлению всплесков поглощения, не меняя общий индуктивный характер импеданса. Компенсируя импеданс высших мод поля элементами внешней цепи, можно увеличить эффективность возбуждения поверхностных волн.

Достоверность полученных результатов.

Достоверность используемых результатов обеспечивается (1) использованием для проведения расчетов проверенных вычислительных пакетов (Comsol Multyphysics®) с размером сетки в несколько раз меньше, чем характерные неоднородности ВЧ поля, (2) проверкой результатов численного моделирования на сгущающихся сетках, (3) сопоставлением результатов численного моделирования с результатами аналитических расчетов. Теоретически полученные результаты там, где это возможно, сопоставлены с результатами других научных групп. Это позволяет считать полученные результаты полностью обоснованными и достоверными.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано пять статей в рецензируемых научных журналах, индексируемых в RSCI [13, 15, 17, 19, 20] и Scopus [14, 16, 18, 19, 20]:

1. Двинин С.А., Синкевич О.А., Кодирзода З.А., Солихов Д.К. Особенности

возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде I. Общие вопросы. Простая модель симметричного разряда. Физика плазмы, т. 46, 2020, №12, с. 1094–1118 [13]. Dvinin S.A., Sinkevich O.A., Kodirzoda Z.A., Solikhov D.K. Features of electromagnetic field excitation in capacitive RF discharge I. General issues. Simple symmetric discharge model. Plasma Physics Reports. V. 46, 2020, №12, p. 1181-1204 (IF WOS: 0.977; SJR (SCOPUS Q3): 0.333) [14].

2. Двинин С.А., Синкевич О.А., Кодирзода З.А., Солихов Д.К. Особенности возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде II. Симметричный разряд, полностью заполняющий вакуумную камеру при симметричном и несимметричном возбуждении. Физика плазмы, т. 47, 2021, №1, с. 40–60 [15]. Dvinin S.A., Sinkevich O.A., Kodirzoda Z.A., Solikhov D.K. Features of electromagnetic field excitation in capacitive RF discharge. II. Symmetric discharge fully filling a vacuum chamber. Symmetric and asymmetric excitation. Plasma physics reports. V. 47, 2021, №1, p. 28 – 47 (IF WoS: 0.977; SJR: 0.333) [16].

3. Двинин С.А., Синкевич О.А., Кодирзода З.А., Солихов Д.К. Особенности возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде Особенности возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде. III. Симметричный разряд, частично заполненная разрядная камера. Физика плазмы, т. 47, 2021, №3, с. 195–219 [17]. Dvinin S.A., Sinkevich O.A., Kodirzoda Z.A., Solikhov D.K. Specificities of Electromagnetic Field Excitation in a Capacitive HF Discharge. III. Symmetric Discharge Partially Filling the Discharge Chamber, Plasma Physics Reports, 2021, Vol. 47, No. 3, pp. 211 – 234 (IF WoS: 0.977, SJR: 0.333) [18].

4. Двинин С.А., Синкевич О.А., Кодирзода З.А., Солихов Д.К. Об импедансе высокочастотного емкостного разряда при различных способах возбуждения. Прикладная физика, 2021, №3, с. 33–38 (SJR: 0.205) [19].

5. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Синкевич О.А., Солихов Д.К. О спектрах собственных волн в плазменном волноводе при наличии столкновений. Прикладная физика, 2021, №4, с. 25–31 (SJR: 0.205) [20].

Три статьи их них индексируются Web of Science [14, 16, 18]. Статьи [14, 16, 18] представляют собой перевод [13, 15, 17] на английский язык.

Апробация диссертации

По материалам диссертации были сделаны доклады на научных семинарах кафедры физической электроники физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, кафедры теоретической физики физического факультета ТНУ, научных семинарах ИНХС РАН, ФТИ РАН, ФТИ имени А.Б.Иоффе. Основные результаты докладывались на международных научных конференциях:

- XLIII, XLIV, XLV, XLVI, XLVIII Международные (Звенигородские)

конференции по физике плазмы и УТС, Звенигород, Россия, 8–12 февраля 2016 г. [33], 13–17 февраля 2017 г. [21]; 2–6 апреля 2018 г. [22], 18–22 марта 2019 г. [26], 15–19 марта 2021 г. [29].

- X International Workshop on Microwave Discharges: Fundamentals and Applications (MD-10) , 3–7 сентября 2018, Moscow region, Zvenigorod, Россия [23];
- VIII и IX Международных симпозиумах по теоретической и прикладной плазмохимии, Иваново, Россия, 10–15 сентября 2018 г. [24,25]; 13–18 сентября 2021 г. [30, 31];
- 72nd Gaseous Electronic Conference, 28 октября – 1 ноября 2019, Техас, Колледж Стейшн, A&M University, США [27];
- Всероссийская (С международным участием) конференция «Физика Низкотемпературной Плазмы» (ФНТП-2020), 9–13 ноября 2020, Казань [28];
- Международная конференции "Перспективы развития физической науки", 2017, Таджикский национальный университет, Душанбе [32];
- ICRP-9/GEC-68/SPP-33 9th International Conference of Reactive Plasmas / 68 Gaseous Electronic Conference / 33rd Symposium of Plasma Processing., Honolulu, 2015 г. [34, 35]

Личный вклад автора

В диссертации приведены результаты, полученные лично автором или при его активном участии. Автор принимал непосредственное участие в постановке задачи, проведении аналитических расчетов, подготовке статей и докладов на конференциях. Численное моделирование электродинамики разряда с помощью пакета Comsol Multiphysics® выполнено автором полностью самостоятельно.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения, а также списка литературы и 8 приложений. Объем диссертации составляет 139 страниц текста, содержащих 38 рисунков, 3 таблицы и библиографию из 221 ссылок.

Во **введении** показана актуальность темы исследования, степень ее разработанности, сформулированы цели и задачи работы, объект и предмет исследования, научная новизна, методология исследования, научная и практическая ценность. Представлены положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов. Кратко изложено содержание диссертации по главам.

В первой главе представлен обзор литературы. Рассмотрена история, последние достижения и в конце проблемы создания плазмы ВЧЕ разряда. Описаны существующие подходы к изучению газового разряда.

Вторая глава содержит общие вопросы теории газовых разрядов, в ней также рассматривается простая модель симметричного разряда.

В данной главе излучалась система собственных волн в разрядной камере, получены общие соотношения для токов, протекающих через электроды емкостного ВЧ разряда и напряжения между электродами возникающие в разряде при возбуждении этих волн, а также построена простейшая модель разряда, предполагающая возбуждение только одной электромагнитной моды, рассчитывалось импеданс ВЧ разряда в этой модели и оценивалось пределы ее применимости для описания параметров реального разряда [13, 14, 20].

В **третьей главе** рассматривается симметричный разряд, полностью заполняющий вакуумную камеру при симметричном и несимметричном возбуждении [15, 16].

Данная глава посвящена аналитическому и численному расчету импеданса разряда, полностью заполняющему (рис. 1) цилиндрическую разрядную камеру, выполненную из металла, содержащую активный электрод и подложкодержатель, к которым подведен сигнал от ВЧ генераторов. При этом глобально разряд можно описывать как четырехполюсник, параметры которого зависят от размеров вакуумной камеры и электродов, средней плотности электронов в камере, характеристик слоев пространственного заряда, свойств цепи, подводящей ВЧ сигнал от генераторов к электродам.

В **четвертой главе** [17, 18, 19] рассматривается симметричный разряд, частично заполняющий вакуумную камеру в случае, когда размер плазмы меньше размера электронов. В этом случае возбуждение высших типов волн в плазменном столбе обусловлено осевой неоднородностью плазмы, но не связано с электродинамическими эффектами у границ электрода. Показано, что положение резонансов токов и напряжений, связанных с распространением поверхностных волн вдоль трехслойной структуры, существенно модифицируется за счет возбуждения высших мод поля этой же структуры.

В заключении обобщаются полученные результаты и формулируются выводы.

В Приложениях приводятся детали аналитических расчетов.

ГЛАВА 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

§1.1. Применение ВЧ разряда в современных технологиях

Высокочастотные емкостные разряды широко используются в научных исследованиях и технологических установках в течение последних 50 лет [1, 2]. Для нанесения пленок плазма газового разряда успешно применялась со времени открытия эффекта распыления в 1852 году (Grove [36]). Schmellenmeier [37] в 1953 году применил химическое осаждение из паровой фазы (ХОП) для получения аморфных (a-)углеродных пленок. Дальнейшие исследования привели к появлению революционных методов плазменной полимеризации в 1980-х годах. В данный момент метод ХОП очень активно используется для производства алмазоподобных углеродных пленок (АПУ), а также в самых различных областях, таких как трибология, создание биоматериалов и фотоэлектрических солнечных батарей.

Читтик с соавторами [38] в 1969 году впервые сообщил об осаждении тонкой кремниевой пленки методом ХОП. Эти пленки были аморфными (a-Si), и имели высокую плотность дефектов в виде оборванных связей, что делало их непригодными для использования в электронных устройствах (ЭУ). Эту проблему решил Spear в 1975 году [39], он использовал моносилан (SiH_4) в процессе осаждения пленки кремния из газовой фазы (CVD – chemical vapor deposition). Последние достижения в производственных процессах в микроэлектронике связаны с изготовлением суб-10 нм структур на кремниевых пластинах.

Газоразрядные источники с высокой плотностью плазмы, такие как индуктивный и емкостный высокочастотный разряд, являются ключевыми технологиями для разработки высокоточных процессов травления подложек. Однако эти технологии включают несколько типов радиационных повреждений, вызванных накоплением заряда положительных ионов и электронов ([3]) или излучением ультрафиолетовых и рентгеновских лучей во время травления. Напряжения, возникающие при накоплении заряда, искажают траектории ионов и приводят к разрушению тонких пленок. Эти серьезные проблемы должны быть преодолены в будущем при изготовлении нано-размерных устройств, поскольку они сильно ухудшают электрические характеристики пленок и увеличивают несоответствие критических размеров необходимым в процессе травления. В общем, устройство с длиной волны 10 нм требует травления атомного слоя без дефектов и без накопления зарядов. Поскольку плазменная обработка имеет жизненно важное значение для производства полупроводниковых чипов, плоских дисплеев и солнечных

батарей, экономические соображения привели к постоянному увеличению размеров подложек в этих отраслях.

Начиная с 2010 г. ведущие производители полупроводников всерьез рассматривали 450-миллиметровые пластины, в то время как производители дисплейных панелей уже начали использовать стеклянные подложки 10 поколения (2.88 × 3.13 м). Технологические процессы плазменного травления и осаждения, используемые при изготовлении устройств на кремниевых пластинах или стеклянных подложках, чувствительно зависят от концентрации радикалов и заряженных частиц в плазме и энергии ионов на подложках. Пространственная однородность и жесткий контроль над вышеуказанными параметрами становятся очень сложными с ростом размеров плазмы. Плазменная обработка производится, как правило, с помощью радиочастотной (РЧ) плазмы с применением источников РЧ в диапазоне частот от 100 кГц до более чем 100 МГц. Из-за конечных размеров плазмы и отражений волны на границах, возбужденные ВЧ-поля образуют стоячие волны. Если размеры плазменной камеры становятся соизмеримы с длиной возбуждаемой волны, проявление резонансных эффектов, то появление пространственных неоднородностей становится неизбежным [9, 40]. Плазменные технологические процессы, в которых используются источники питания низкой частоты или постоянного тока, не страдают от этих электромагнитных нежелательных явлений. Однако они часто используют статические магнитные поля, которые нетривиально влияют на равномерность распределения плазмы на больших площадях. Пространственные неоднородные электрические и магнитные поля и связанные с ними неоднородности плазмы являются одной из основных технологических трудностей при масштабировании плазменных процессов на очень большие подложки.

Использование плазмы емкостного ВЧ разряда (ЕВЧР), пожалуй, наиболее распространенная технология в обрабатывающей промышленности для травления и осаждения покрытий. Многие критические приложения используют очень высокие частоты (60 МГц и выше), при этом электромагнитные неоднородности стали заметными на подложках размером более 300 мм. При производстве плоских дисплеев и солнечных батарей используют более крупные подложки, на которых электромагнитные эффекты воздействия нарушают однородность процесса на даже на частоте 13.56 МГц [9, 40]. Эти плазменные неоднородности могут быть подавлены или скомпенсированы изменением формы электродов, использованием нескольких каналов подвода энергии (или генераторов), оптимизацией расхода газа или с помощью низких частот возбуждения. Например,

используя криволинейные электроды [6], можно изменять электромагнитное поле, его пространственный профиль и, следовательно, профиль распределения плазмы. Как правило, эти методы компенсации хорошо работают только в пределах ограниченной области параметров, а изменение существующих технологий очень дорого стоит.

Другой важной технологией для обработки плазмы является индуктивный высокочастотный разряд (ИВЧР). ИВЧР основаны на электромагнитной силовой связи между током в радиочастотных катушках и плазме, и вблизи катушек плазма становится неоднородной. Кроме того, любые изменения ВЧ напряжения или тока вдоль катушек из-за электромагнитных эффектов приводят к неоднородному образованию плазмы вдоль катушки. Для исключения этих неоднородностей, как правило, тщательно проектируют форму антенны и соответствующим образом выбирают частоты РЧ для минимизации отклонений напряжения и тока вдоль антенны. При увеличении размеров плазмы конструкция антенны также должна гарантировать, что напряжение на катушках не станет чрезмерным, что приведет к проблемам с надежностью и нежелательному возбуждению емкостных составляющих электромагнитного поля. Масштабирование обычной технологии ICP становится все более сложной задачей с увеличением размера подложки, что часто приводит к сложным конструкциям антенн. Несколько многообещающих подходов было разработано в исследовательских лабораториях, где неоднородности электрического поля вдоль катушек удается избежать, используя бегущие волны в линии с согласованной нагрузкой [41], либо понижая рабочую частоту и используя магнитные материалы [42]. Обычные технологии ЕВЧР, ИВЧР и микроволновой плазмы испытывают проблемы с однородностью, когда они масштабируются до больших размеров. Электромагнитные эффекты делают ЕВЧР чувствительными к неоднородному образованию плазмы с увеличенным размером электрода. Хотя методы аппаратного проектирования были разработаны для компенсации этих неоднородностей, эти методы обычно ограничивают диапазон, в котором могут использоваться эти инструменты плазменной обработки. Такие методы, как управление фазой, где однородность может динамически контролироваться во время работы, могут привести к более гибким плазменным инструментам. Подобные электромагнитные эффекты усложняют конструкцию традиционных источников ИВЧР и микроволновых источников в больших размерах. Источники ИВЧР и ЕВЧР бегущей волны кажутся более перспективными в отношении масштабирования в более крупные измерения. В дополнение к исследованиям методов контроля однородности плазмы для

традиционных плазменных технологий, существует повышенная потребность в исследовании и разработке плазменных технологий, которые более легко масштабируются для больших размеров. Для построения новых конструкций технологических плазменных реакторов необходимо проанализировать как поглощение ВЧ поля в реакторе в целом, поскольку оно определяет средние значения параметров плазмы, так и неоднородности поля, так как они определяют возможность осуществления данного процесса на подложках большого размера. Первая задача решается разработкой глобальных моделей разряда, а вторая – расчетом пространственной структуры электромагнитного поля. Пример реализации подобной модели был продемонстрирован еще в 1982–1983 годах [43–47], наша задача – разработать подобные подходы для современных технологических реакторов.

§1.2. Существующие подходы к описанию газового разряда. Простые глобальные модели

Широкое использование высокочастотных разрядов в технологии ставит практическую задачу описания их свойств. При этом необходимо знать процессы в различных пространственных областях разряда. В настоящее время сложилось два подхода к решению этих задач.

Во-первых, это численное моделирование движения частиц и эволюции электрических полей в плазме с целью получения полной картины процессов в разряде [48–51]. При учете трехмерности реальных газовых разрядов, можно сделать вывод, что даже с помощью суперкомпьютеров можно рассчитать очень небольшое количество режимов разряда. Как правило, с помощью этого метода уже изучаются процессы в найденных экспериментально оптимальных условиях, при которых идет технологический процесс.

Во-вторых, это описание разряда с помощью расчета «усредненных» параметров плазмы, так называемые глобальные модели. Термин «глобальная модель» для различных типов разрядов был введен в теорию и практику газовых разрядов М.А. Либерманом [2, 52, 53], хотя аналогичные модели строились очень давно, начиная с 30 годов прошлого века. Например, известные модели Шоттки и Ленгмюра-Тонкса [54, 55] представляют собой разновидности глобальных моделей разряда постоянного тока. Модель Шоттки основана на совместном решении уравнений баланса заряженных частиц, уравнений баланса энергии электронов и уравнения непрерывности электрического тока. Для того, чтобы развязать решения уравнений баланса частиц и баланса энергий используется предположение о независимости

температуры электронов от точки в пространстве. Модель Ленгмюра и Тонкса отличается заменой решения гидродинамического уравнения баланса частиц на решение кинетического уравнения для ионов методом характеристик. Модели, использовавшиеся в диссертациях, защищенных на кафедре физической электроники [43–47], могут рассматриваться как глобальные модели СВЧ разрядов в волноводе. К недостаткам используемых глобальных моделей можно указать отсутствие регулярной процедуры вывода уравнений, что приводит к тому, что точность моделей априори оказывается неизвестной, поэтому их справедливость для описания той или иной из форм разряда проверяется сопоставлением с экспериментом. Впрочем, такое же замечание можно сделать и к результатам математического моделирования.

Глобальные модели дают гораздо более простые уравнения, чем методы численного моделирования. Поэтому эти модели не требуют больших вычислительных ресурсов. Поведение решений уравнения и результирующие параметры плазмы становится более понятными. Простая глобальная модель описана в работе M.A. Lieberman'a и S. Ashid'a [56]. Глобальные (усредненные по объему) модели высокоплотных электроположительных и электроотрицательных разрядов низкого давления описаны как для непрерывного волнового (CW), так и для импульсного возбуждения [2]. После отработки стандартов построения глобальных моделей на разрядах в инертных газах были отработаны модели разрядов с более сложной кинетикой.

Хотя импульсные разряды в аргоне были полезными стандартами для проведения тестовых расчетов, во многих приложениях для обработки материалов используются разряды в электроотрицательных газах. Упрощенная глобальная модель импульсных разрядов в O_2 и Cl_2, представлена в работе [57], в которой также показано, что для разрядов низкого давления с высокой плотностью заряженных частиц электроотрицательность (отношение плотности отрицательных ионов к плотности электронов) обычно меньше единицы в течение времени действия импульса мощности, но может быстро расти до значения, превышающего единицу во время его отключения (послесвечение). В этой же работе проведено сравнение предсказания простых моделей с экспериментами.

§1.3. Глобальные модели ВЧ разряда на основе плазменного конденсатора.

Остановимся теперь на глобальных моделях для высокочастотных разрядов. Для высокочастотных и сверхвысокочастотных разрядов было

проведено много исследований с использованием различных конфигураций, среди которых наиболее часто используются емкостный разряд (CCP) и индуктивный разряд (ICP). Из-за наличия ускоренных ионов, химически активных частиц, радикалов, а также энергетически нейтральных частиц, CCP широко используется в качестве низкотемпературной плазм перерабатывающей среды для обработки материалов во многих областях [58–60]. Ёмкостные разряды широко изучаются для различных применений при различном давлении режимы, варьирующиеся от нескольких мТорр до атмосферного давления [61, 62]. Большинство CCP, используемых в приложениях обработки, поддерживаются одним источником на частоте 13,56 МГц. Однако в последнее время при исследованиях CCP, представляющих практический интерес в индустрии травления, также используется как более низкочастотные источники (1 или 2,26 МГц [63]) так и более высокочастотные.

В 2017 и 2018 были сделаны работа P. Saikia с соавторами [64, 65], о нелинейной глобальной модели одночастотной плазмы с ёмкостной связью. Поведение одночастотной плазмы с емкостной связью (CCP), управляемой источником 13,56 МГц, исследовано с использованием подхода, который объединяет нелинейную глобальную аналитическую модель и экспериментальные данные. Нелинейная модель состоит из описания объема плазмы, основанного на гидродинамическом подходе, связанном с отдельной моделью слои. Параметры, используемые в модели, получены путем проведения одночастотного эксперимента CCP (13,56 МГц) в аргоне при рабочих давлениях от 73 до 400 мТорр. Экспериментально измерены параметры плазмы, такие как электронная плотность, электронная температура, параметр симметрии разряда, а также форма ВЧ-напряжения. Входными данными теоретической модели являются результаты постоянного автосмещения для постоянного тока и ВЧ-тока при различных рабочих давлениях и мощностях генератора. Численные результаты были сопоставлены с экспериментально полученными значениями смещения постоянного тока и ВЧ тока и получено хорошее количественное соответствие между ними. Представленные результаты могут существенно улучшить понимание поведения емкостно-связанной плазмы.

§1.4. Гистерезис в глобальных моделях

Причины появления гистерезиса в разрядах постоянного тока связаны с особенностями (нелинейностью) кинетики процессов в плазме [66]. Модели плазменного конденсатора [67–69] предсказывают появление резонансов и в емкостном разряде. В работе [70] показано, что резонансы могут быть

связаны также с параметрами внешней цепи, подводящей энергию к разряду. В работах [45–47] была построена глобальная модель СВЧ разряда в волноводе. Было показано, что в таком разряде гистерезис может быть связан с возбуждением поверхностной волны. Сравнение результатов расчета и эксперимента показало их качественное согласие.

Индуктивно-связанная плазма (ИСП) широко также широко используется для различных процессов производства полупроводниковых. Существование нескольких режимов работы и в этом типе разрядов было обнаружено в работах [71–77]. Режим с низкой плотностью, в котором мощность передается в плазму за счет емкостной связи с индуктором известен как Е-мода, Режим с более высокой плотностью представляет собой уже действительно индуктивный разряд и известен как Н-мода. Когда входная мощность увеличивается, разряд переключается из режима Е в режим Н, и происходит обратный переход при уменьшении входной мощности, а переходы между этими режимами проявляют гистерезис [78–80].

В настоящее время существуют разные взгляды на происхождении гистерезиса в индуктивном разряде – нелинейное поведение плазмы и цепи, эффект согласования импедансов, потеря мощности во внешней цепи и т. д. Эль-Файуми с соавторами [81] ввели емкостную ветвь связи в разрядную цепь и полагали, что основным механизмом, приводящим к гистерезису, является нелинейность зависимости поглощенной мощности от толщины слоя. Ли с соавторами [82] заметили, что гистерезис четко наблюдался только тогда, когда давление было достаточно высоким, чтобы ступенчатая ионизация была заметной. Таким образом, они пришли к выводу, что ступенчатая ионизация была основным фактором гистерезиса в их типе разряда. Тернер и Либерман [83] предложили различные механизмы, которые могут вызывать гистерезис, и показали, что гистерезис можно качественно понять с точки зрения баланса мощности, предполагая, что, либо поглощенная мощность, либо рассеиваемая мощность, либо оба они имеют нелинейную зависимость от плотности электронов. Дальтрини и др. [84] экспериментально установили, что гистерезис исчез, когда параметры плазмы были построены как функция реальной поглощенной мощности плазмы. Чжао и др. [85] изучали динамические характеристики метастабильных атомов, и их работа показала, что присутствие метастабильных атомов оказало небольшое влияние на поведение плазмы, и никаких признаков нелинейных механизмов или гистерезиса не наблюдалось. Гао и др. [86] обнаружили, что условие согласования оказало значительное влияние на петлю гистерезиса. Экспериментально Ли и др. [87] обнаружили,

что гистерезис не проявлялся в условиях автоматического согласования генератора с плазмой, но присутствует значительная петля гистерезиса при фиксированных условиях согласования при давлении 100 мТорр. Однако при более высоком давлении газа 350 мТорр петля гистерезиса была отчетливо видна в установке как при фиксированных параметрах согласующего устройства, так и при его автоматическом согласовании [88].

Кроме того, хорошо известно, что согласование в цепи играет важную роль во время переходов мод и, вероятно, является доминирующим фактором, вызывающим гистерезис. В работе [89], влияние этого эффекта на скачки между модами в водородном ИСП было изучено с моделью, которая основана на предыдущих исследованиях [90], но содержала дополнительно модуль эквивалентной схемы [89]. В работе [91] с помощью той же модели, систематически исследовалось влияние внешней цепи на переходы мод и особенно гистерезис, а также зависимость от давления.

В ёмкостном высокочастотном разряде [92] наблюдался гистерезис зависимость плотности плазмы от мощности генератора, аналогичный гистерезису в индуктивно связанной плазме при переходе между Е-модой (емкостный разряд) и Н-модой (индуктивный разряд).

Из вышеприведенного обзора литературы мы можем видеть гистерезис в разряде может вызываться множеством процессов. При этом одним из основных является качественные изменения механизмов передачи энергии от генератора в разряд.

§1.5. Численное моделирование разряда

Высокочастотный емкостный разряд низкого давления – это сложное явление, и любое аналитическое приближение описывает лишь отдельные стороны процесса и оставляет многие важные вопросы без ответа. По этой причине особую роль в физике ВЧ разряде играет численное моделирование, в особенности самосогласованные расчеты, когда задаются самые общие внешние условия и микроскопические характеристики процессов и в результате возможно получить все параметры разряда и их пространственные распределения.

К настоящему времени численное моделирование основывается на разных моделях разряда. Одним из простых распространенных методов является гидродинамическое или диффузионно-дрейфовое приближение. В условиях не очень низких давления, когда длины пробега электронов и ионов малы по сравнению с характерными размерами задачи [93–95] этот метод даёт удовлетворительные результаты. Гидродинамические модели обычно содержат законы сохранения для массы частицы, импульса и энергия.

Численная процедура основана на поиске приближенных решений, которые удовлетворяют определенным строгим математическим формам. Наиболее очевидным преимуществом такого метода является вычислительная эффективность.

На основе уравнений гидродинамики в дрейфово-диффузионном создана математическая модель для емкостно-связанной плазмы в ВЧ-разрядах в конфигурации с параллельными пластинами. Модель состоит из уравнений для непрерывности ионов и электронов, уравнения для энергии электронов и уравнения Пуассона для электрического поля, и, по-видимому, дает разумные результаты. Эти уравнения нормированы, и нормализованные уравнения решаются численно методом конечных разностей с равномерной ступенчатой сеткой в пространстве и неявной схемой во времени (использовалась одномерная гидродинамическая модель) [96–98].

Подходы гидродинамического моделирования сталкиваются с несколькими трудностями при использовании для моделирования емкостно-связанных плазменных разрядов, особенно в условиях низкого давления и высокой частоты. Например, модели жидкости не могут точно предсказать важные характеристики, такие как бесстолкновительный нагрев электронов и профили температуры электронов в этих разрядах [99].

При низких давлениях, когда длины пробега электронов и ионов сравнимы с характерными размерами задачи (толщинами слоев и межэлектродным расстоянием), метод гидродинамическое приближение неприменима. Больше всего здесь подходит метод Монте-Карло (МС) решения кинетического уравнения [100–102]. Метод Монте-Карло стал стандартным методом моделирования газовых разрядов в плазменных реакторах с травлением или осаждением. В отличие от гидродинамического подхода, алгоритм Монте-Карло требует больших компьютерных ресурсов, но он обеспечивает детальную кинетическую картину процессов в газовом разряде [103, 104]. Моделирование методом Монте-Карло также применялось к большому количеству сильноточных разрядов, главным образом для описания эффектов неоднородных электрических полей и нелокального переноса, которые происходят в слоях высокочастотных разрядов [105, 106], для моделирования электронной циклотронной резонансной плазмы [107].

Метод моделирования частиц в ячейке (PIC) является хорошо зарекомендовавшим себя инструментом для кинетического моделирования в физике плазмы [108–110]. Основная идея PIC-моделирования заключается в том, чтобы позволить тысячам смоделированных на компьютере частиц представлять гораздо больше (10^8–10^{12} см$^{-3}$) реальных частиц в лабораторном

устройстве [111–113]. В настоящее время что основным методами численного моделирования является модель PIC-MC.

§1.6. Слои пространственного заряда на границе плазмы

Толщина слоев пространственного заряда зависит от плотности электронов в плазме и падения потенциала на слое, поэтому она может быть функцией радиальной (для приэлектродных слоев толщиной d_1 и d_2) и осевой (для бокового слоя толщиной d_3) координат. Размер слоев пространственного заряда определяется родом газа, температурой электронов и падением напряжения на слое. Обычно при расчете толщины слоя предполагают, что ток ионов определяется критерием Бома [114] и пренебрегают плотностью электронов в слое, так как она экспоненциально убывает с увеличением потенциала. При нахождении потенциала слоя плотность ионов считают постоянной (матричная модель слоя), либо считают убывающей вследствие ускорения ионов электрическим полем. В последнем случае потенциал слоя подчиняется закону 3/2 Чайлда-Ленгмюра [115, 116], при этом толщина слоя определяется формулой

$$d = \frac{2^{5/4}}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 T_e}{n_e e^2}}\left(\frac{e\phi_S}{T_e}\right)^{3/4} \quad (1.1)$$

В данном выражении использованы обозначения: e – элементарный электрический заряд, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, n_e, T_e – плотность (в м$^{-3}$) и температура (в энергетических единицах) электронов, ϕ_S – потенциал слоя.

Разряды обычно используются в двух режимах: 1) режим минимальной энергии ионов (обычно реализуется в установках осаждения покрытий или химического травления); 2) режим физического распыления, для которого падение напряжение на слое стараются увеличить для увеличения коэффициента распыления. Например, в [117] в рабочем режиме смещение подложки относительно плазмы в зависимости от режима разряда изменялось в пределах 200–400 В. Аналогичные режимы часто используются при физическом травлении кремния и оксида кремния [2, 3]. Измерения напряжения на слое в разрядах при давлении аргона 0.015 Тор и ионном токе на стенку 0.03 – 0.3 мА/см^2 (это примерно соответствует области плотностей электронов на границе плазмы и слоя от $5\cdot10^8$ до 10^{10} см$^{-3}$) при частотах от 13.56 до 81,36 МГц в работе [118] показали, что оно лежит в пределах от 30 до 200 В (напряжение увеличивается с ростом тока и уменьшением частоты). Зависимость толщины слоя от плотности электронов для аргона, рассчитанная по приведенной выше формуле, представлена на рис. 1.1 [119–122]. Плотность электронов на границе плазмы и слоя может быть

существенно ниже, чем в центре вакуумной камеры, и этот эффект также должен учитываться при расчетах характеристик реального разряда.

Альтернативный подход к расчету толщины слоев предложен Либерманом. В работах [2, 123, 124] в предположении малости тока смещения и питания разряда синусоидальным током аналитически решена самосогласованная задача движения электронов слое в бесстолкновительном и столкновительном режимах. При этом размер слоя оказывается близок к амплитуде колебаний электронов в слое. Такой подход обычно приводит к качественно другой зависимости толщины слоя от плотности электронов и его следует использовать при построении самосогласованной модели разряда. Попытки аналитического описания слоя пространственного заряда, сформулированные в [123, 124], получили дальнейшее развитие в [125]. В данной диссертационной работе, посвященной исследованию исключительно электродинамических свойств разряда, размер слоя считается заданным.

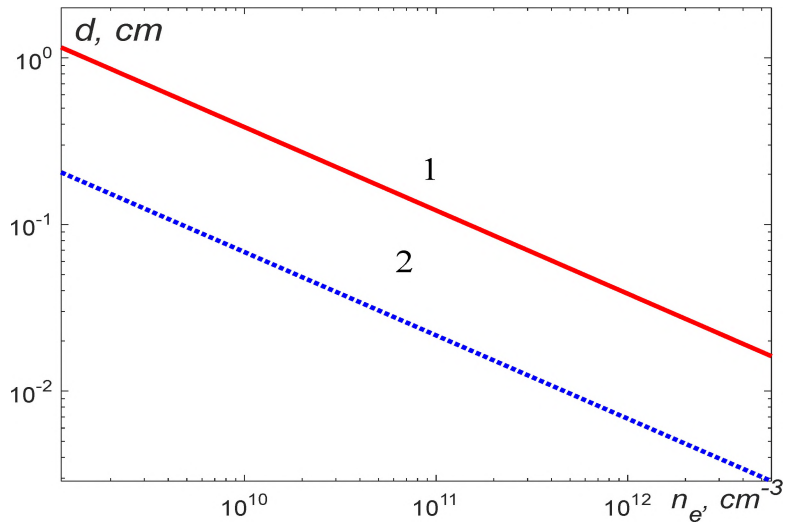

Рис. 1.1. Толщина слоя в см как функция плотности электронов в аргоновой плазме. 1 – напряжение на слое 300 В, 2 – напряжение на слое 30 В

§1.7. Сопряжение уравнений слоя и плазмы

Модель положительного столба низкого давления впервые разработали Шоттки (в условиях $\lambda_i \ll L$, L – характерный размер системы) [54] и Ленгмюр и Тонкс ($\lambda_i \gg L$) [55]. Они рассматривали положительный столб тлеющего и дугового разряда в цилиндрических трубках. Ленгмюр и Тонкс показали, что на границе плазмы со стенкой формируется слой пространственного заряда, размером порядка радиус Дебая. Шоттки в диффузионной модели использовал нулевые граничные условия, которые не позволили корректно рассмотреть процессы в приграничной области и слое. Persson [126] в 1964

модифицировал эти условия путем учета в уравнениях гидродинамики инерции ионов. Он установил, что в неоднородной плазме скорость разлета одномерно не может превышать ионно-звуковой скорости. Это условие сразу получило известность как условие перехода от квазинейтральной плазмы к слою пространственного заряда, формирующемуся на границе плазмы (критерий Бома [114, 126, 127]).

Актуальность задачи заключается в том, что применение критерия Бома не позволяет рассчитать размер слоя пространственного заряда, который оказывается бесконечным. Постановка согласующихся граничных условий очень сложно, потому что как решение в плазме, так и решение в слое, по существу, представляют собой различные асимптотики точных решений. В данное время существуют различные подходы к решению данной задачи [128 – 139].

В инженерном подходе для сопряжения решений используется граничное условие, полученное в [131] и приведенное в [2]. Однако, как показано в [135], процесс получения этого решения все еще содержит внутреннее противоречие и не может считаться окончательно обоснованным. Мы не будем в рамках задач, поставленных в нашей работе, связанных с исследованием особенностей электродинамики разряда рассматривать данный вопрос более подробно.

Еще одна задача связана с расчетом перехода от разряда в диффузионном режиме к разряду в режиме Ленгмюра-Тонкса. В современных плазменных технологиях газовый разряд при этих условиях используется довольно часто [1–4]. Работа Перссона представляет собой попытку рассмотреть этот переход в рамках гидродинамического приближения [126]. Такой подход может дать только качественное решение. В кинетическом приближении с учетом перезарядки рассмотрен в работах [128, 140].

§1.8. Электродинамические эффекты в ВЧ емкостных разрядах низкого давления

Крупномасштабные плазменные установки, использующие емкостной ВЧ разряд на частотах выше обычной промышленной частоты 13,56 МГц и двухчастотные емкостные реакторы с одним высокочастотным и одним низкочастотным генератором, вызвали большой интерес у исследователей и производителей полупроводниковых приборов для кремниевых пластин и обработка плоских панелей [1, 2, 36–38, 141–146]. Более высокая частота приводит к уменьшению энергии ионной бомбардировки при заданном потоке ионов на подложку [1, 36, 39, 147–149]. В ближайшем будущем

требуется уменьшить энергию бомбардировки для обработки интегральных схем с меньшими критическими размерами (шириной затвора) и увеличения производительности реактора. Более высокая частота также допускает добавление второго низкочастотного напряжения смещения для дополнительной гибкости. При двухчастотном возбуждении в емкостных реакторах удается независимо управлять как потоком ионов, так и энергией ионной бомбардировки [6, 11, 40–42, 150–152]. В ранних работах ВЧ ёмкостный разряд обычно исследовался в квазистатическом приближении [2, глава 11, 9; 56, 68, 69]. Эта модель не может быть использована для расчета при высокой частоте возбуждения в погоне за более высокой электронной плотностью, поскольку если длина высокочастотной волны λ становится сравнимой с радиусом электрода, а глубина скин слоя δ становится сопоставимой с расстоянием между электродами. Эти условия определяют переход от квазистатического к электромагнитному режиму [6, 9, 11, 12, 41, 88, 113, 153–164]. При электромагнитной модели следует рассматривать реактор как волновод, содержащий плазму, а не два параллельных электрода, на которые подается переменное напряжение. Также очень важно понимать, что в электромагнитном режиме разность потенциалов между электродами не будет постоянной в пространстве, хотя электроды выполнены из проводящего материала. В вакуумной и диэлектрической областях волны в основном поперечные и распространяются со скоростью света. Для $\omega \ll \omega_{pe}$ (что обычно представляет интерес), волны не будут распространяться в плазме, вместо этого они распространяются вдоль поверхности между слоем и плазмой с некоторой характерной длиной затухания в перпендикулярном к границе направлении. Вследствие симметрии системы радиально распространяются внутрь разряда волны отражаются от центра разряда, образуя стоячую волну. Когда электромагнитные поля не полностью проникают в плазму, то есть, когда глубина проникновения не бесконечна, высокочастотный ток не течет перпендикулярно электродам, и, следовательно, электрическое поле имеет компонент, параллельный электроду, E_r. Два типа эффектов распространения электромагнитных волн, называемые в литературе влиянием стоячей волны [1, 6, 9, 12, 144, 153, 154, 159, 165–171] и телеграфным эффектом [165, 172–175], были определены как источники неоднородности плазменной обработки подложек. Эффект стоячей волны связан с высокими частотами в больших реакторах, где размер реактора превышает примерно одну десятую длины волны в вакууме при высокочастотном возбуждении. Эффект телеграфа связан с асимметричными электродами, которые требуют перераспределения высокочастотного тока вдоль плазмы для поддержания непрерывности высокочастотного тока. Оба

эффекта вызывают неоднородности высокочастотного потенциала плазмы, которые ответственны за неравномерное рассеивание мощности и, следовательно, неоднородные скорости осаждения или травления.

Неравномерная энергия ионной бомбардировки также будет иметь место для непроводящих подложек [171, 176, 177]. Эти два эффекта распространения волн были изучены отдельно, как правило, с использованием подхода эквивалентной схемы [99, 171, 173, 174, 177]. Решение электромагнитного волнового поля для исследования эффекта стоячей волны было дано Либерманом и др. [9] для случая симметричного цилиндрического высокочастотного емкостного разряда. Однако в случае высокочастотного возбуждения в асимметричных реакторах требуется одновременное рассмотрение как эффекта стоячей волны, так и эффекта телеграфа [11]. Поэтому цель работы авторов [11] – поместить описание эффектов стоячей волны и телеграфа в один и тот же контекст единого решения электромагнитного волнового поля. Эквивалентная схема каждой моды затем выводится из соответствующего дисперсионного соотношения для общего случая высокочастотного возбуждения в асимметричных реакторах.

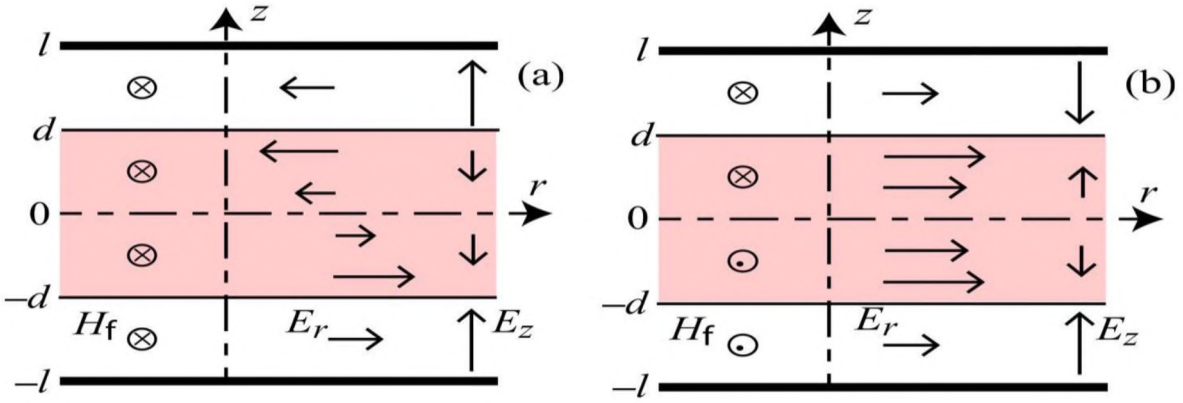

Рис. 1.2. Пространственная структура электромагнитных полей H_φ, E_z и E_r для (а) первой четной моды и (б) первой нечетной моды. Z-компонента электрического поля E_z в плазме мала и направлена в противоположную сторону по сравнению с полем E_z в слоях пространственного заряда.

Рассмотрим два параллельных круговых электрода радиуса R, разделенных расстоянием 2l (Рис. 1.2) [11]. Цилиндрическая геометрия важна для реакторов травления. Плазма (полуширина *d*) отделена от электродов двумя слоями шириной s (d+s=l) и локально моделируется как стационарный во времени однородный диэлектрик, имеющий комплексную относительную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_P = 1 - n_e / n_C (1 - i\nu/\omega)$, где $n_C = m\omega^2 / \varepsilon_0 e^2$. Следовательно, общая ширина слоя и, следовательно, его емкость примерно постоянны во времени. Предполагая гармоническую зависимость от времени

для электромагнитных полей, магнитное поле можно записать в двумерных цилиндрических координатах как $H_\varphi(r,z)\exp(j\omega t)$, где ω – угловая частота ВЧ возбуждения. Благодаря осесимметричной геометрии реактора и высокочастотному возбуждению магнитное поле является чисто азимутальным и не зависит от φ, и можно определить соответствующие компоненты электрического поля E_z и E_r.

$$\frac{\partial H\varphi}{\partial r} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon E_r\,. \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rH\varphi)}{\partial r} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 H\varphi \tag{1.4}$$

Здесь ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, ε – диэлектрическая проницаемость среды. Подставляя для E_r и E_z из (1.2) и (1.3) в (1.4), получаем уравнение распространения для H_φ:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r\varepsilon}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right] + k_0^2 H_\varphi = 0 \tag{1.5}$$

где $k_0 = \omega/c$, в слоях пространственного заряда будем считать $\varepsilon = 1$, в плазме $\varepsilon = \varepsilon_P = 1 - n_e/n_C(1 - i\nu/\omega)$, $n_C = m\omega^2/\varepsilon_0 e^2$.

§1.9. Собственные волны на границе плазма-слой пространственного заряда-металл

Теоретический анализ распределения поля в разряде при высоких плотностях электронов и большом размере электродов показал, что возбуждаемое в разряде поле может быть представлено в виде суммы распространяющихся вдоль границы плазма – слой пространственного заряда – электрод поверхностных волн [6, 9, 11, 178–180] и высших нераспространяющихся мод разряда [10, 11, 181], сосредоточенных вблизи боковой границы плазмы и резких пространственных неоднородностей разрядной камеры. Глубина проникновения высших мод в плазму при большом расстоянии между электродами была близка к глубине скин-слоя c/ω_{Pe}.

Дальнейшие теоретические исследования [11, 181] показали, что кроме симметричной поверхностной волны в плазме могут распространяться и антисимметричные волны, магнитное поле которых у противоположных электродов противофазно. При расчетах толщина слоев у различных электродов считалась равной, а влияние высших не распространяющихся мод поля не учитывалось. При больших размерах плазмы в разрядах, поддерживаемых поверхностными волнами, должны были наблюдаться

резонансы токов и напряжений, когда поперечные размеры плазмы кратны целому числу полуволн поверхностной волны (для плоской геометрии).

Поле внутри плазмы может быть представлено в виде суммы собственных волн трехслойной структуры металл – слой пространственного заряда – плазма – слой пространственного заряда – металл [8–12].

Граничные условия для решения уравнений (1.2–1.5) состоят в том, что E_r=0 при r=0 (в силу симметрии) и что E_r=0 на поверхностях электродов z=±l (для идеально проводящих пластин). Мы также имеем граничное условие E_r=0 при r=R (предполагая, что весь ВЧ-ток должен проходить через плазму). Из (1) это соответствует условиям $\partial H_\varphi/\partial z = 0$ при z=±l и при r=R, а H_φ =0 при r=0 (по симметрии), общее решение для магнитного поля H_φ в пределах радиуса плазмы $r<R$ приводится ниже, как сумма двух бесконечных рядов для каждой области плазмы и слоя.

Общие решения уравнений (1.2–1.5) в плазме ($-d\le z\le d$)

$$H_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^e}{\alpha_{p,n}^e}\cos\left(\alpha_{p,n}^e z\right)J_1\left(h_n^e r\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^0}{\alpha_{p,n}^0}\sin\left(\alpha_{p,n}^0 z\right)J_1\left(h_n^0 r\right),$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_p}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^e h_n^e}{\alpha_{p,n}^e}\cos\left(\alpha_{p,n}^e z\right)J_0\left(h_n^e r\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^0 h_n^0}{\alpha_{p,n}^0}\sin\left(\alpha_{p,n}^0 z\right)J_0\left(h_n^0 r\right)\right), \qquad (1.6)$$

$$E_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon_p}\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n^e\sin\left(\alpha_{p,n}^e z\right)J_1\left(h_n^e r\right)-\sum_{n=0}^{\infty}C_n^0\cos\left(\alpha_{p,n}^0 z\right)J_1\left(h_n^0 r\right)\right).$$

а для слоя (d≤±z≤l)

$$H_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^e}{\alpha_{s,n}^e}\cos\left(\alpha_{s,n}^e\left(l\mp z\right)\right)J_1\left(h_n^e r\right)\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^0}{\alpha_{s,n}^0}\cos\left(\alpha_{s,n}^0\left(l\mp z\right)\right)J_1\left(h_n^0 r\right)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^e h_n^e}{\alpha_{s,n}^e}\cos\left(\alpha_{s,n}^e\left(l\mp z\right)\right)J_0\left(h_n^e r\right)\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n^0 h_n^0}{\alpha_{s,n}^0}\cos\left(\alpha_{s,n}^0\left(l\mp z\right)\right)J_0\left(h_n^0 r\right)\right) \qquad (1.7)$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\mp\sum_{n=0}^{\infty}D_n^e\sin\left(\alpha_{s,n}^e\left(l\mp z\right)\right)J_1\left(h_n^e r\right)-\sum_{n=0}^{\infty}D_n^e\sin\left(\alpha_{s,n}^0\left(l\mp z\right)\right)J_1\left(h_n^0 r\right)\right).$$

где J_0 и J_1 - функции Бесселя нулевого и первого порядка первого рода, представляющие стоячие волны, образованные встречными модами поверхностных волн, C и D - амплитуды мод, h и α – комплексные волновые числа, связанные соотношениями $\alpha_{p,n}^2 = k_0^2\varepsilon_p - h_n^2$ и $\alpha_{s,n}^2 = k_0^2 - h_n^2$. Все моды в первой сумме (1.6), и (1.7) для H_φ в плазме и слоях являются четными функциями по z, это режимы помечены как «четные режимы» с индексом «е». Вторая сумма в (1.6), и (1.7) включает в себя все моды, которые являются нечетной функцией по z для H_φ в плазме и слоях. Они помечены как «нечетные режимы» с индексом «о».

Для нахождения дисперсионных соотношений четной и нечетной мод используются условия равенства тангенциальных компонент поля на границе

раздела слои с объемной плазмой. Первое условие соответствия в z=d для уравнений. (1.6) и (1.7) обеспечивает соотношение между амплитудами мод в слое и объемной плазме, а второе условие согласования дает дисперсионное соотношение. Дисперсионные соотношение для четных мод:

$$\varepsilon_з \alpha_{s,n}^{e} \sin\left(\alpha_{s,n}^{e} s\right)\cos\left(\alpha_{s,n}^{e} d\right)+\alpha_{p,n}^{e}\cos\left(\alpha_{p,n}^{e} s\right)\sin\left(\alpha_{p,n}^{e} d\right)=0 \qquad (1.8)$$

для нечетных мод:

$$\varepsilon_з \alpha_{s,n}^{0} \sin\left(\alpha_{s,n}^{0} s\right)\sin\left(\alpha_{s,n}^{0} d\right)-\alpha_{p,n}^{0}\cos\left(\alpha_{p,n}^{0} s\right)\cos\left(\alpha_{p,n}^{0} d\right)=0$$

§1.10. Кинетические эффекты и их соотношение с электродинамическими

Газовый разряд, в условиях, когда длина свободного пробега электронов меньше характерных размеров разрядной камеры, описывается с помощью системы уравнений баланса частиц, баланса энергии электронов и уравнений Максвелла [182–184]. При описании электродинамических свойств плазмы мы пренебрегаем движением ионов, поэтому как в плазме так и в слоях пространственного заряда, частота поля должна быть много больше ионной ленгмюровской частоты ω_{Li}, $\omega^2 >> \omega_{Li}^2$, где $\omega_{Li}=\sqrt{n_e e^2/\varepsilon_0 M}=210\sqrt{n_e\left(см^{-3}\right)/A}$, n_e – плотность электронов, e – элементарный электрический заряд, M – масса иона, A – атомный вес плазмообразующего газа в а.е. Для аргона и частоты генератора 13.56 МГц равенство частоты поля и ионной ленгмюровской частоты соответствует плотности электронов на границе плазмы и слоя $6.58\cdot10^{12}$ см$^{-3}$. Кроме того, существование поверхностных волн предполагает, что частота поля ω много больше частоты столкновений электронов, $\omega^2>>\nu^2$.

В данной работе при аналитическом анализе электродинамических свойств разряда, плотность электронов в плазме и их частота столкновений считаются заданными, а для расчета диэлектрической проницаемости используется приближение холодной плазмы. Это означает пренебрежение формированием пучков заряженных частиц в приграничной области плазмы вследствие аномального скин эффекта [185], который может иметь место в индуктивном ВЧ разряде и стохастическим ускорением электронов в слое пространственного заряда [186], наблюдающимся при низких давлениях газа в емкостном разряде. Оба этих эффекта обычно рассматриваются в приближении одномерно неоднородной плазмы, когда отсутствие радиальной неоднородности поля понижает размерность и сложность задачи, а также необходимый объем вычислений при численном моделировании.

Аномальный скин эффект приводит к формированию неэкспоненциально убывающего хвоста (пучков) на функции распределения

[187]), изменению глубины проникновения поля в плазму и пространственного распределения поглощаемой в плазме энергии [188, 189]. Возможно появление в пространстве областей, где электроны возвращают полю энергию, полученную в других областях [190–193]. В качестве одной из последних аналитических работ упомянем работу [194].

Искажение функции распределения при взаимодействии со слоем пространственного заряда рассмотрено в работе [195], см. также обзор [196]. С точки зрения электродинамики, отвлекаясь от возможного искажения профиля плотности плазмы вследствие неоднородности ионизации, стохастическое поглощение энергии может быть описано введением эффективной частоты столкновений. Хотя, величина самой частоты столкновений [197–199] и даже наличие стохастического поглощения при определенных пространственных профилях плазмы является предметом дискуссии [200, 201].

Рассматриваемые эффекты приводят к двум главным следствиям для разрядов в быстропеременном поле. В слабых полях наблюдается изменение импеданса [202] границы плазмы. Возникающее бесстолкновительное поглощение может быть описано с помощью эффективной частоты столкновений как в индуктивном [203, 204], так и емкостном [69] разрядах.

Энергия, необходимая для ионизации набирается в данном случае электронами постепенно, в процессе диффузии электронов по оси энергий. При этом пространственно-временное распределение электронов по энергиям должно стать более однородным вследствие процессов переноса.

В режиме сильных полей необходимая для инициации неупругих процессов (возбуждения или ионизации) энергия может быть получена в процессе однократного нахождения частицы в области неоднородности (с учетом той энергии, которая у нее была), частоты этих процессов начинают зависеть от пространственной координаты и фазы ВЧ поля. Эти эффекты были обнаружены [205–208] применительно к экспериментам и к численному моделированию нестационарных процессов в плазме методом частиц (в одномерной задаче).

При учете электродинамических эффектов и поддержания разряда поверхностной волной оба рассмотренных выше эффекта могут играть существенную роль. Они являются следствием нарушения адиабатичности движения электронов в неоднородном электрическом поле. Скин эффект будет аномальным, если время пребывания электронов в скин слое холодной плазмы оказывается меньше обратной частоты поля $\omega c/(\omega_{Le} V_{Te}) < 1$ и меньше времени столкновений $\nu c/(\omega_{Le} V_{Te}) < 1$. Здесь $\omega_{Le} = \sqrt{n_e e^2/\varepsilon_0 m}$ – ленгмюровская

частота электронов, ν –эффективная частота столкновений электронов, m – их масса, $V_{Te} = \sqrt{T_e/m}$ – тепловая скорость электронов. В этом случае нельзя пользоваться выражением для диэлектрической проницаемости в приближении холодной плазмы [202]. Кроме изменения электродинамических свойств плазмы, уход в область аномального скин-эффекта означает обсужденное выше формирование в граничных областях плазмы на функции распределения пучков электронов, распространяющихся вдоль границы разряда.

При учете электродинамических явлений характерная длина изменения поля может быть разной в разных частях разряда. Поэтому могут быть области, в которых достаточно использовать гидродинамическое приближение, и области, где оно недостаточно и нужно учитывать нелокальные эффекты. Проведем соответствующие оценки.

Для высших мод характерная длина изменения поля есть L/N, где N – номер моды. Время пребывания электрона в области высшей моды $\tau = L/NV_{Te}$. Таким образом, нарушение адиабатичности движения электрона в поле высшей моды есть $\omega, \nu < NV_{Te}/L \approx 2 \cdot N \cdot 10^7$ с$^{-1}$. Для L равной 4 см и тепловой скорости электронов 10^8 см/с, и первой моды получим, что частота поля должна быть меньше 3 МГц. Для высших мод граница по частотам будет увеличиваться с увеличением номера моды. Для поверхностной волны мы должны взять в качестве характерного размера длину волны $\lambda_{0\pm}$ (если она меньше глубины скин-слоя) или глубину скин-слоя в холодной плазме. Таким образом, условие имеют вид $\omega, \nu < V_{Te}\sqrt{4\pi^2/\lambda_{0\pm}^2 + \omega_{Pe}^2/c^2}$. Если исходить из длины поверхностной волны и плотности электронов при том же значении тепловой скорости, получим $\omega, \nu < \sqrt{3.95 \cdot 10^{17}/\lambda_{0\pm}^2(см) + 3.54 \cdot 10^4 n_e(см^{-3})}$. Для плотности электронов 10^{10} см$^{-3}$ и длины поверхностной волны 30 см получим ω, ν<$3 \cdot 10^7$ с$^{-1}$. Таким образом, в рассматриваемых в данной статье условиях можно пользоваться приближением холодной плазмы, кроме, возможно, области, где большую амплитуду имеют высшие (3, 4 и выше) моды нераспространяющихся волн. Тем не менее при низких частотах электромагнитного поля существуют области параметров разряда, когда необходимо учитывать как электродинамические, так и кинетические эффекты.

Мы видим, что существует широкий диапазон условий в разряде, когда можно ограничиться приближением холодной плазмы. Кинетическое приближение необходимо использовать только для высших мод плазмы выше пятой. Однако для этой моды будет несправедливым и рассмотрение

слоя пространственного заряда в виде области пространства с диэлектрической проницаемостью равной единицы, т. е. матричная модель слоя.

Обсудим кратко теперь возможное влияние неоднородности плазмы на рассматриваемые эффекты. Плотность плазмы у границы в реальном разряде меньше плотности в центре плазмы (а также и средней плотности по сечению), а распространение поверхностной волны определяется средней плотностью (при $pL<1$) или плотностью у границы плазмы (при $pL>1$). Поэтому положение резонансов будет сдвигаться в область более низких значений плотности электронов. В целом неоднородность плазмы приводит к появлению следующих эффектов: 1) Расширению области наблюдения рассматриваемых в работе эффектов на область более низких частот высокочастотного поля, меньших размеров плазмы или более высоких плотностей электронов в центре плазмы. 2) К модификации свойств плазмы при плотностях близких критической в силу появления области резонансного усиления поля у границ. Влияние этого эффекта на импеданс СВЧ разряда в волноводе экспериментально исследовалось в работе [209]. В данном цикле статей авторы пожертвовали возможностью учесть неоднородность плазмы при численном моделировании в пользу более корректного сравнения результатов численного и аналитического (хотя и приближенного) расчетов.

§1.11. Проблемы описания процессов в высокочастотных разрядах низкого давления

На основании проведенного обзора исследований ВЧ разрядов сформулируем основные задачи диссертационной работы.

Изучить систему собственных волн в разрядной камере и рассчитать дисперсионные кривые для четных и не четных волн в трехслойной структуре слой-плазма-слой, окружённой металлическими границами, и аналитический и численно рассчитать импеданс разряда и также пространственное распределение электромагнитного поля в различные условия.

Для достижения поставленной цели исследовались следующие задачи:

1. Какова роль поверхностных волн и высших (затухающих) мод поля в формировании пространственной структуры плазмы и от каких параметров зависят плотности электронов в разряде, для которых наблюдается резонанс? Как меняется пространственная структура электромагнитного поля в зависимости от изменения плотности электронов в плазме?
2. Какую роль в поддержании разряда играют антисимметричные моды поверхностных волн, длины которых оказываются существенно меньше,

чем у симметричных [17]? Какими параметрами определяются амплитуды различных мод поля и как они изменяются при изменении плотности плазмы?

3. Насколько отличаются характеристики разряда при полном и частичном заполнении разрядной камеры?
4. Как сказывается несимметрия разряда (в частности отличие размеров электродов, слоев пространственного заряда, неоднородность распределения плотности плазмы в пространстве) на амплитудах симметричных и антисимметричных мод и импедансе разряда?
5. Какую роль в резонансных свойствах разряда играет возбуждение высших гармоник электромагнитного поля гармоник играет нелинейность слоев пространственного заряда и нелинейность выходного каскада источника высокочастотного поля?

ГЛАВА II. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ СИММЕТРИЧНОГО РАЗРЯДА[1] [13, 14, 20]

§2.1. Система уравнений. Граничные условия и представление электромагнитного поля

Рассмотрим различные способы организации разряда в экспериментальных и технологических установках (рис.2.1). На рис. 2.1a изображен самый простой способ, на рис. 2.1b – технологическая установка с разрядом, частично заполняющем металлическую вакуумную камеру, а на рис. 2.1c –установка, допускающая создание разряда как синфазным, так и противофазным ВЧ полем. Радиус электрода равен R, а высота камеры и расстояние между электродами равна $2L$. Между плазмой 3 и электродами расположены слои пространственного заряда [3, 5], с толщины толщинами d_1 и d_2. Размер слоя пространственного заряда между плазмой и боковой стенкой вакуумной камеры будем считать равным d_3. Напряжение на выходе высокочастотного генератора – U, внутреннее сопротивление – Z (соответственно U_1 и U_2, и Z_1 и Z_2.в случае двух генераторов, рис. 1b,c).

В уравнениях Максвелла (в системе СИ) выделим в явном виде волновое сопротивление вакуума $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$:

$$[\nabla\times\mathbf{H}] + ik\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\varepsilon\mathbf{E} = 0,\ [\nabla\times\mathbf{E}] - ik\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H} = 0. \qquad (2.1,\ 2.2)$$

Здесь k=ω/c, $c = \left(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{-1}$ – скорость света; ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, $E(\mathbf{r})$, $H(\mathbf{r})$ – комплексные напряженности электрического и магнитного полей, временная зависимость выбрана в виде exp($-i\omega t$); ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды. В слоях считаем $\varepsilon = 1$ (матричная модель [2]), в плазме $\varepsilon = \varepsilon_P = 1 - n_e/n_C\left(1 + i\nu/\omega\right)$, $n_e = m\omega^2/4\pi e^2$, e, m – заряд и масса электрона, ν – эффективная частота столкновений электронов. Так как диссертация посвящена электродинамическим особенностям задачи, воспользуется наиболее простая кинетическая модель плазмы. На стенках рабочей камеры тангенциальная составляющая электрического поля равнялась нулю

$$\mathbf{E}_\tau = 0. \qquad (2.3)$$

При n_e выше удвоенной критической [10, 11, 180] осевое и азимутальное электромагнитные поля в разрядной камере могут быть представлены в виде

[1] Содержание этой главы основано на работах [13, 14]. При написании §2.4 использована работа [20].

суммы собственных функций электромагнитных операторов (2.1-2.2), содержащих две поверхностных волны (с амплитудами $A_{0\pm}$, постоянные распространения $h_{0\pm}$, собственные функции (с.ф.) $\left\{\mathbf{e}_{0+}\left(h_{0+}r,z\right),\mathbf{h}_{0+}\left(h_{0+}r,z\right)\right\}$) и не распространяющиеся волны E- и H- типа (коэффициенты $A_{n\pm}$ и $B_{n\pm}$, постоянные затухания $\tilde{h}^{E}_{n\pm}$ и $\tilde{h}^{H}_{n\pm}$, собственные функции $\left\{\mathbf{e}^{E}_{n\pm}\left(\tilde{h}^{E}_{n\pm}r,z\right),\mathbf{h}^{E}_{n\pm}\left(\tilde{h}^{E}_{n\pm}r,z\right)\right\}$ и $\left\{\mathbf{e}^{H}_{n\pm}\left(\tilde{h}^{H}_{n\pm}r,z\right),\mathbf{h}^{H}_{n\pm}\left(\tilde{h}^{H}_{n\pm}r,z\right)\right\}$) [182 – 184].

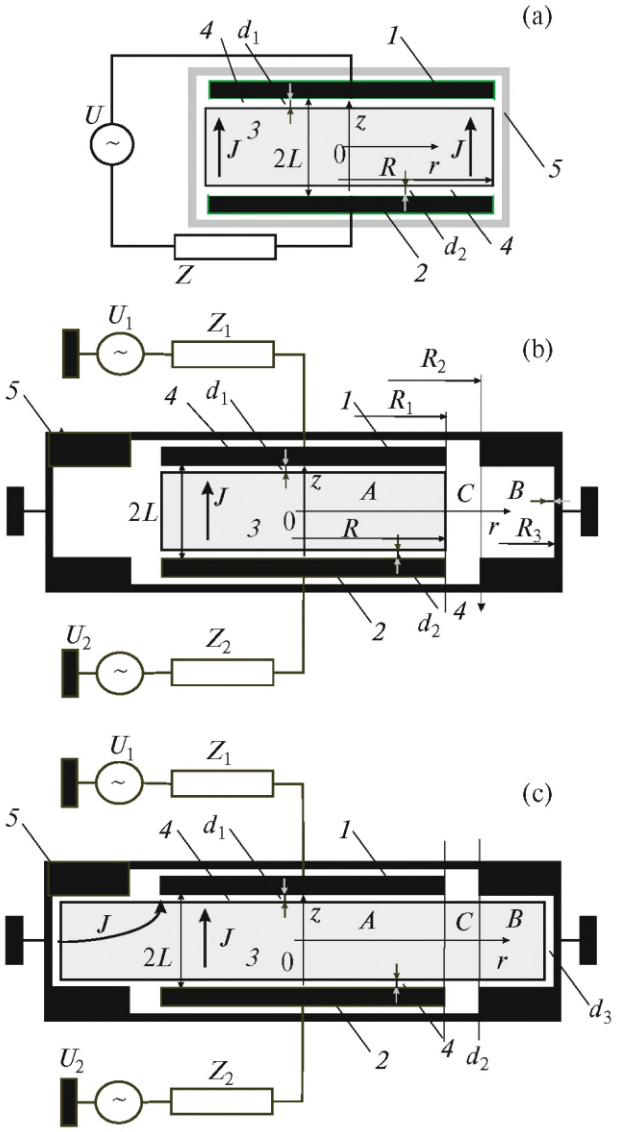

Рис. 2.1. Типичные схемы экспериментальных установок: простая исследовательская разрядная камера a), частично b) и полностью заполненная c) разрядные камеры. 1, 2 – электроды, 3 – плазма, 4 – слои пространственного заряда между плазмой и стенкой (электродами), 5 – вакуумная камера, $2L$ – межэлектродное расстояние, d_1, d_2, d_3 – толщины слоев пространственного заряда.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}=A_{0+}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{0+}\left(h_{0+}r,z\right)\\ \mathbf{h}_{0+}\left(h_{0+}r,z\right)\end{pmatrix}\exp\left(-i\omega t\right)+A_{0-}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{0-}\left(h_{0-}r,z\right)\\ \mathbf{h}_{0-}\left(h_{0-}r,z\right)\end{pmatrix}\exp\left(-i\omega t\right)+ \qquad (2.4)$$

$$+\sum_{\pm=+,-}\sum_{n=1}^{\infty}A_{n\pm}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{n\pm}^{E}\left(\tilde{h}_{n\pm}^{E}r,z\right)\\ \mathbf{h}_{n\pm}^{E}\left(\tilde{h}_{n\pm}^{E}r,z\right)\end{pmatrix}\exp(-i\omega t)+\sum_{\pm=+,-}\sum_{n=1}^{\infty}B_{n\pm}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_{n\pm}^{H}\left(\tilde{h}_{n\pm}^{H}r,z\right)\\ \mathbf{h}_{n\pm}^{H}\left(\tilde{h}_{n\pm}^{H}r,z\right)\end{pmatrix}\exp(-i\omega t),$$

При (n_e<2n_C) поверхностные волны отсутствуют. Тем не менее все результаты остаются справедливыми (при учете $A_{0\pm}$=0), с учетом того, что первая четная мода при этих условиях представляет собой распространяющуюся (при n_e<n_C) квази-ТЕМ волну (см. подробнее §2.3). При записи (2.4) в силу симметрии задачи мы ограничились волнами без азимутальной зависимости (азимутальное волновое число m=0). Для расчета пространственного распределения полей будем использовать z-компоненты электромагнитного поля, так как в однородной плазме уравнения для этих компонент сводятся к уравнениям Бесселя. В общем случае решение для поверхностных волн (и для квази-ТЕМ волны при n_e<n_C) может быть записано в виде

$$\mathbf{e}_{0\pm z}(r,z)\exp(-i\omega t)=\mathbf{z}_0J_0\left(h_{0\pm}r\right)f_{0\pm}(z)\exp(-i\omega t),$$

а для высших Е- и Н- мод

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{n\pm z}^{E}\left(\tilde{h}_{n\pm}^{E}r,z\right)\exp(-i\omega t)&=\mathbf{z}_0I_0\left(\tilde{h}_{n\pm}^{E}r\right)f_{n\pm}(z)\exp(-i\omega t),\\ \mathbf{h}_{n\pm z}^{H}(r,z)\exp(-i\omega t)&=\mathbf{z}_0I_0\left(\tilde{h}_{n\pm}^{H}r\right)g_{n\pm}(z)\exp(-i\omega t).\end{aligned}\qquad(2.5)$$

В (2.4) – (2.5) $\mathbf{z}_0$ – единичный орт, направленный вдоль оси z. Поперечные компоненты электромагнитного поля собственных рассчитываются через z-компоненты напряженностей электрического E_z и магнитного H_z полей по формулам [206, 207]

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{\mathrm{t}}&=\left(k^2\varepsilon+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1}\left\{ik\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\varepsilon\left[\nabla\times\mathbf{e}_{\mathrm{z}}E_{\mathrm{z}}\right]+\nabla_{\mathrm{t}}\frac{\partial H_z}{\partial z}\right\},\\ \mathbf{e}_{\mathrm{t}}&=\left(k^2\varepsilon+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{-1}\left\{\nabla_{\mathrm{t}}\frac{\partial E_z}{\partial z}-ik\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\nabla\times\mathbf{e}_{\mathrm{z}}H_z\right]\right\}.\end{aligned}\qquad(2.6)$$

При m=0 Е- и Н- моды возбуждаются независимо друг от друга даже при осевой неоднородности волноведущей структуры. В индуктивных ВЧ разрядах преобладают Н-моды. Хотя полностью исключить Е-моды не удается, но их амплитуда обычно существенно ниже, чем амплитуда Н-мод. В «идеальных» индуктивных разрядах Е-моды могут рассматриваться как паразитные. В емкостных ВЧ разрядах (для установок, приведенных на рис. 2.1), Н-моды не возбуждаются, мы ограничимся только волнами Е-типа. Далее будем считать $B_{n\pm}$≡0, и исключим индекс ^{E} в обозначениях. Выражения для электромагнитных полей, из которых легко определяются осевые зависимости $f(z),g(z)$ приведены в Приложении I, при этом $\nabla_{\mathrm{t}}=\mathbf{r}_0\,\partial/\partial r+\boldsymbol{\varphi}_0r^{-1}\,\partial/\partial\varphi$, $\mathbf{r}_0,\boldsymbol{\varphi}_0$ – единичные векторы вдоль радиальной и азимутальной осей координат. Расчет собствен-

ных значений будет проведен в следующем разделе. Формулы для поля поверхностной волны, высших мод и волноводных мод см. в Приложении 2. Напряжение на разряде $U(R)$ и токи верхнего $i^{(1)}$ и нижнего $i^{(2)}$ электродов в произвольной точке r цилиндрической поверхности при $r<R$ могут быть представлены в виде:

$$U(r)=A_{0+}U_{0+}(r)+A_{0-}U_{0-}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}U_{n+}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-}U_{n-}(r),$$

$$i^{(1)}(r)=A_{0+}i_{0+}^{(1)}(r)+A_{0-}i_{0-}^{(1)}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}i_{n+}^{(1)}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-}i_{n-}^{(1)}(r), \qquad (2.7)$$

$$i^{(2)}(r)=A_{0+}i_{0+}^{(2)}(r)+A_{0-}i_{0-}^{(2)}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}i_{n+}^{(2)}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-}i_{n-}^{(2)}(r).$$

где $U_{n\pm}(r)=-\int_{-L}^{L}e_{zn\pm}(r,z)dz$.

Расчет тока разряда при использовании (2.6) не так однозначен. В силу граничных условий для магнитного поля, ток каждой из волн, протекающий на электрод через цилиндрическую поверхность радиуса r, есть

$$i_{n\pm}^{(1)}(r)=2\pi r h_{\varphi n\pm}(r,L),\ i_{n\pm}^{(2)}(r)=2\pi r h_{\varphi n\pm}(r,-L). \qquad (2.8)$$

При симметричном возбуждении разряда (нет тока на боковую стенку) $I=i^{(2)}(r)=i^{(1)}(r)$. Если размер электрода равен размеру плазмы, то импеданс разряда следует из формулы (2.7) с учетом поля высших мод, амплитуды которых необходимо будет рассчитать. Из (2.7), (2.8), опуская индексы $^{(1)}$, $^{(2)}$, получим

$$\frac{U(r)}{I(r)}\equiv Z(r)=\frac{A_{0+}U_{+}(r)+A_{0-}U_{-}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}U_{n+}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-}U_{n-}(r)}{A_{0+}i_{0+}(r,L)+A_{0-}i_{0-}(r,L)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}i_{n+}(r,L)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n-}U_{n-}(r)}, \qquad (2.9)$$

где токи $i_{n\pm}^{(1)}(r)$, вычисляются по формулам (2.8).

Если размер электрода превышает размер плазмы, то при $R>r$ поле представляет собой сумму собственных волн пустого волновода, составленного их двух плоскостей. Поскольку на некотором расстоянии от плазмы высшие моды этого волновода затухают, то их амплитуды равны нулю, и ток внешней цепи, подводимый к электроду, определяется только полем волны ТЕМ, для которой токи обоих электродов будут равны. Тогда

$$I_{TEM}(r)=\frac{2\pi r}{2L}\left(A_{0+}\int_{-L}^{L}h_{0+}(r,z)dz+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}\int_{-L}^{L}h_{n+}(r,z)dz\right). \qquad (2.10)$$

Импеданс разряда в данном случае будет определяться формулой

$$\frac{U(r)}{I(r)} \equiv Z(r) = \frac{A_{0+}U_{+}(r) + A_{0-}U_{-}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+}U_{n+}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-}U_{n-}(r)}{A_{0+}\tilde{i}_{0+}(r,L) + A_{0-}\tilde{i}_{0-}(r,L) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n+}\tilde{i}_{n+}(r,L) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-}\tilde{i}_{n-}(r)}, \qquad (2.11)$$

где $\tilde{i}_{n\pm}(r) = \pi r \int_{-L}^{L} dz h_{\varphi n\pm}(r,z) \Big/ L$. Ток, вносимый каждой модой, в данном случае определяется усредненным по оси значением магнитного поля. Поэтому импеданс разряда зависит от того, насколько далеко от границы электрода расположена плазма.

Резонанс токов соответствует обращению в нуль знаменателя (2.9), либо (2.11), а резонанс напряжений – числителя. Импеданс разряда в общем случае будет близок к волновому сопротивлению одной из мод только в тогда, когда ее амплитуда (например, поверхностной или первой не распространяющейся моды) значительно выше остальных. Для расчета амплитуд всех собственных волн необходимо решить уравнения для поля в разрядной камере. В третьей главе будет проведено это решение для цилиндрической разрядной камеры полностью заполненной плазмой (рис. 2.1c), а в четвертой главе– частично заполненной плазмой (рис. 2.1b).

§2.2. Дисперсия поверхностных и не распространяющихся волн. Численный расчет и приближенные выражения

Дисперсионное уравнение для E-волн для разрядов емкостного типа в геометрии рис. 2.1 (см. Приложение I), имеет вид:

$$D = 0,$$

где

$$D = \left(\frac{\varepsilon_P\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}}{\varepsilon_1\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right) + th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_p}L_2\right)\right)\left(1+\frac{\varepsilon_P\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}}{\varepsilon_2\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right) th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}d_2\right)\right) +$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_P\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}}{\varepsilon_2\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}d_2\right) + th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)\right)\left(1+\frac{\varepsilon_P\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}}{\varepsilon_1\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right) th\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)\right), \qquad (2.12)$$

$L_2 = L - d_1 - d_2$. Наряду с постоянной распространения h удобно в качестве зависимой переменной использовать поперечную постоянную распространения в плазме $p = \sqrt{k^2\varepsilon_P - h^2}$, (либо $\tilde{p} = \sqrt{h^2 - k^2\varepsilon_P}$). При этом вместо (2.12) имеем[2]

[2] Уравнения (2.12, 2.13) записаны в форме, удобной для расчета дисперсии поверхностных волн. Их аналоги для затухающих волн может быть легко получены из (2.12, 2.13) заменами $p \to i\tilde{p}$, $th(i\tilde{p}L_2) \to itg(\tilde{p}L_2)$, $i\tilde{p}th(i\tilde{p}L_2) \to -\tilde{p}tg(\tilde{p}L_2)$

$$D(\tilde{p}) =$$

$$= \left(\varepsilon_P \sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_p)} th\left(\sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_p)} kd_1 \right) + \varepsilon_1 \frac{\tilde{p}}{k} th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) \right) \left(\varepsilon_2 \frac{\tilde{p}}{k} + \varepsilon_P \sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_p)} th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) th\left(\sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_p)} kd_2 \right) \right) +$$

$$+ \left(\varepsilon_P \sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_p)} th\left(\sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_p)} kd_2 \right) + \varepsilon_2 \frac{\tilde{p}}{k} th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) \right) \left(\varepsilon_1 \frac{\tilde{p}}{k} + \varepsilon_P \sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_p)} th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) th\left(\sqrt{\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_p)} kd_1 \right) \right) = 0$$

(2.13)

В приближении узких слоев пространственного заряда, которое обычно справедливо для поверхностных волн и нескольких нераспространяющихся волн с малыми номерами, уравнение (2.13) могут быть упрощено и сведено к виду:

$$\left(\varepsilon_P \left(\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_p) \right) kd_1 + \varepsilon_1 \frac{\tilde{p}}{k} th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) \right) \left(\varepsilon_2 \frac{\tilde{p}}{k} + \varepsilon_P \left(\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_p) \right) kd_2 th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) \right) +$$

$$+ \left(\varepsilon_P \left(\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_p) \right) kd_2 + \varepsilon_2 \frac{\tilde{p}}{k} th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) \right) \left(\varepsilon_1 \frac{\tilde{p}}{k} + \varepsilon_P \left(\frac{\tilde{p}^2}{k^2} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_p) \right) kd_1 th\left(\frac{\tilde{p}}{k} kL_2 \right) \right) = 0 .$$

В давнейшем мы будем предполагать, что диэлектрические проницаемости слоев пространственного заряда равны: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Тогда из последнего уравнения можно выразить диэлектрическую проницаемость как функцию $\tilde{p}$:

$$\varepsilon_P^2 - \varepsilon_P \left(\varepsilon_1 - \frac{\tilde{p}^2}{k^2} \right) - \frac{\tilde{p}\varepsilon_1}{2k^2} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \tilde{Q}_{1,2} = 0 , \qquad (2.14)$$

где

$$\tilde{Q}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\left(th(\tilde{p}L_2) + cth(\tilde{p}L_2) \right) \pm \sqrt{\left(th(\tilde{p}L_2) - cth(\tilde{p}L_2) \right)^2 + 4 \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right)^2} \right) . \qquad (2.15)$$

Для четырех корней уравнения (2.14) получим

$$\varepsilon_{P1,2,3,4} = \frac{1}{2} \left(\left(\varepsilon_1 - \frac{\tilde{p}^2}{k^2} \right) \pm \sqrt{\left(\varepsilon_1 - \frac{\tilde{p}^2}{k^2} \right)^2 + \frac{2\tilde{p}\varepsilon_1}{k^2} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \tilde{Q}_{1,2}} \right) . \qquad (2.16)$$

При записи этих соотношений учтено $\mathrm{Re}\,\varepsilon_P < 1$, поэтому для нераспространяющихся мод физически реализуются только решения с отрицательным знаком перед корнем. Для поверхностных волн имеют смысл оба решения. Равенство нулю подкоренного выражения в уравнении (2.16) соответствует максимальной глубине проникновения поля поверхностной волны в плазму. Формулы (2.14) – (2.16) дают возможность рассчитать аналитически затухание волн в среде с поглощением с помощью теории возмущений.

, $th(i\tilde{p}L_2)/i\tilde{p} \to tg(\tilde{p}L_2)/\tilde{p}$, $h \to i\tilde{h}$, $J_n(ihr) \to i^n I_n(\tilde{h}r)$, поэтому, как правило, не будут приводиться соответствующие выражения для затухающих волн ввиду их громоздкости.

$$\Delta\tilde{p} = 2\left(-\frac{2\tilde{p}}{k^2} \pm \frac{2\left(\varepsilon_1 - \frac{\tilde{p}^2}{k^2}\right)\frac{2\tilde{p}}{k^2} + \frac{2\tilde{p}\varepsilon_1}{k^2}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\left(\tilde{Q}_{1,2} + \tilde{p}\frac{\Delta\tilde{Q}_{1,2}}{\Delta\tilde{p}}\right)}{2\sqrt{\left(\varepsilon_1 - \frac{\tilde{p}^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2\tilde{p}\varepsilon_1}{k^2}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)\tilde{Q}_{1,2}}}\right)^{-1} \Delta\varepsilon_{P1,2,3,4},$$

$$\frac{\Delta\tilde{Q}_{1,2}}{\Delta\tilde{p}} = \frac{1}{2}L_2\left(\left(\frac{1}{\cosh^2(\tilde{p}L_2)} - \frac{1}{\sinh^2(\tilde{p}L_2)}\right) \pm \frac{\left(th(\tilde{p}L_2) - cth(\tilde{p}L_2)\right)\left(\frac{1}{\cosh^2(\tilde{p}L_2)} + \frac{1}{\sinh^2(\tilde{p}L_2)}\right)}{\sqrt{\left(th(\tilde{p}L_2) - cth(\tilde{p}L_2)\right)^2 + 4\left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}\right)^2}}\right).$$

(2.17)

В точках ветвления (нули подкоренных выражений в (2.16)) поправка к поперечной постоянной распространения в плазме будет равна нулю. Тем не менее, это не означает равенства нулю поправки к постоянной распространения волны h, так как $h^2 = k^2\varepsilon_P - p^2$ и $\Delta h = \left(k^2\Delta\varepsilon_P - 2p\Delta p\right)/2h$.

Квадрат постоянной распространения поверхностной волны (1) и нераспространяющихся мод (2, 3, 4) для частоты 135.6 МГц и постоянной толщины слоев 3 мм показан на рис. 2.2. Зависимости $h^2/k^2(n_e)$ представляют собой границу между темной и светлой областями. Из рисунка следует, что поверхностные волны имеют длину волны существенно ниже, чем длина волны в вакууме [180]. На дисперсионных кривых можно выделить три характерных области. При высоких ($n_e >> 2n_C$) и при относительно ($n_e \approx> 2n_C$) низких плотностях электронов, поверхностные волны у разных границ не взаимодействуют друг с другом. Это следует из уравнений (2.10), если считать $th\left(\sqrt{h^2 - k^2\varepsilon_P}L_2\right) = 1$.

В области положительных диэлектрических проницаемостей существует четная распространяющаяся волна (при $n_e \to 0$ это волна типа ТЕМ), которая с ростом плотности электронов при $n_e > n_C$ переходит в нераспространяющуюся. Нечетные волны при типичных для ВЧ плазменных реакторов межэлектродных расстояниях всегда нераспространяющиеся (кривые с $h^2 < 0$). На рис. 2.3 приведены аналогичные кривые для плазмы, размеры слоев которой $d_1 = d_2 = d$ на границе согласованы с плотностью электронов, и они убывают с ростом последней. Падение потенциала на слоях предполагалось равным 200 В, а размер плазменного столба $2L_2$ постоянным и равным 8 см. Межэлектродное расстояние представляло собой сумму размера плазмы и слоев пространственного заряда, поэтому увеличивалось с уменьшением плотности электронов. В силу изменения толщины слоев при малых плотностях плазмы замедление поверхностной волны в самосогласованном случае оказывается

более слабым, а при высоких плотностях – более сильным. В тех случаях, когда размер слоя пропорционален радиусу Дебая, длина поверхностных волн в области высоких концентраций электронов перестает зависеть от плотности электронов (правая часть кривой рис. 2.3).

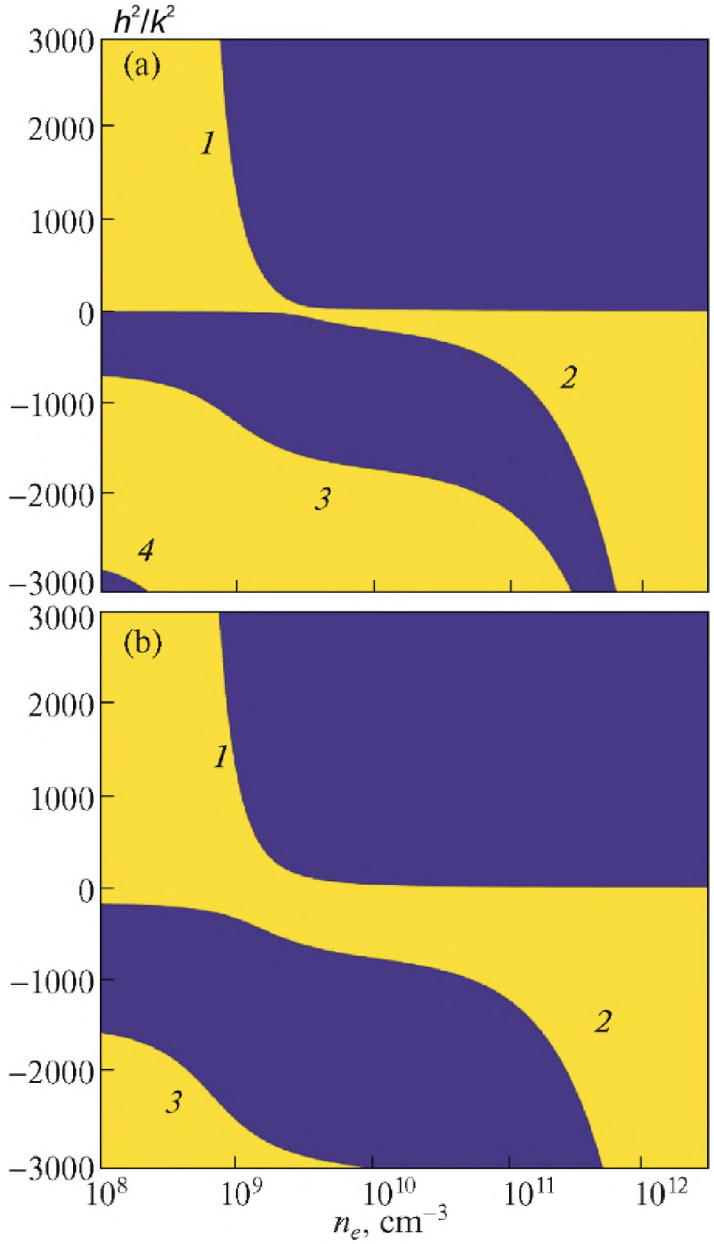

Рис. 2.2. Квадрат безразмерной постоянной распространения h^2/k^2 поверхностных волн (1) и нераспространяющихся волн (2, 3, 4) как функция плотности электронов в симметричном разряде. Зависимости представляют собой границу между темной и светлой областями. Толщина слоев пространственного заряда 3 мм. Частота поля 135.6 МГц. a) – четная поверхностная волна, b) – нечетная. Толщина плазмы – 8 см

Для расчета импеданса разряда представляет интерес зависимость постоянной затухания волны в плазме $p = \sqrt{h^2 - k^2\varepsilon_p}$ как функции плотности электронов. Пример таких зависимостей приведен на рис. 2.4. Из рисунка следует,

что постоянные затухания четных и нечетных поверхностных волн близки, для волны квази-ТЕМ и нераспространяющихся волн $p^2<0$, то есть эти волны присутствуют во всем сечении плазмы r=const.

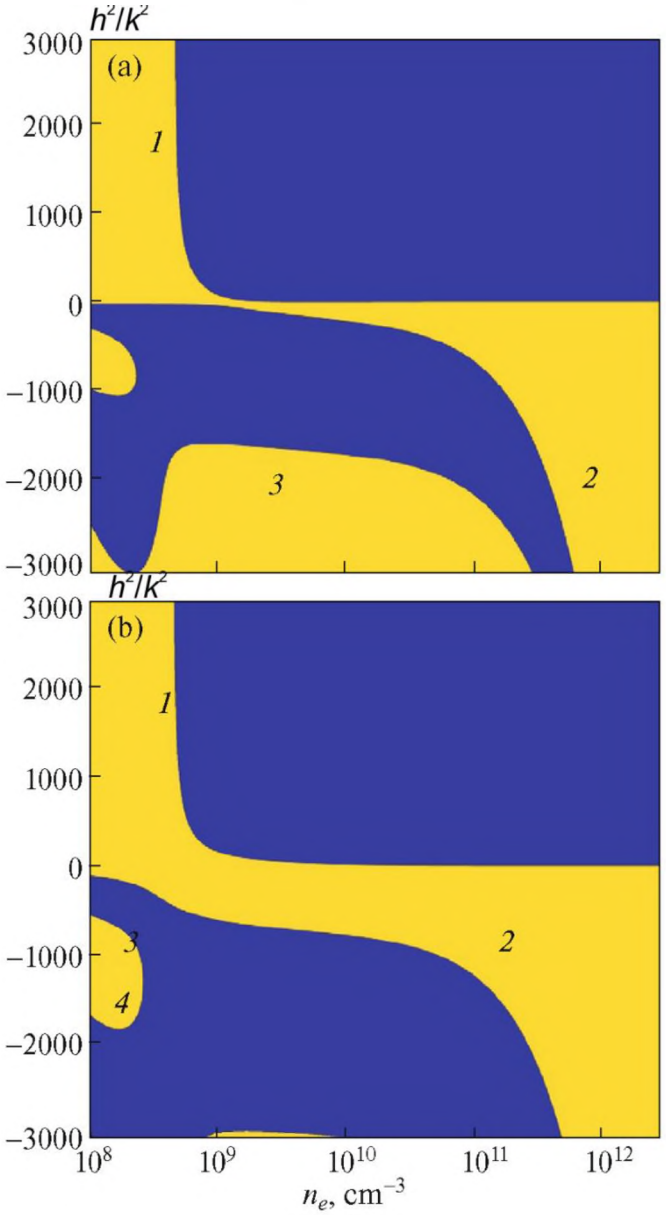

Рис. 2.3. Квадрат безразмерной постоянной распространения h^2/k^2 поверхностных (1) и нераспространяющихся волн (2, 3, 4) в симметричном разряде как функция плотности электронов. Зависимости представляют собой границу между темной и светлой областями. Толщина слоев пространственного соответствует напряжению на слоях пространственного заряда 200 В. Изменение толщины слоев в соответствии с плотностью плазмы, при постоянном размере плазмы предполагает изменение межэлектродного расстояния при изменении плотности электронов. a) – четная (по магнитному H_φ и осевому E_z электрическому полям) поверхностная волна, b) – нечетная. Частота поля – 135.6 МГц. Полутолщина плазмы L_2 поддерживалась постоянной и равной – 4 см.

Изображенные на рис. 2.2 – рис. 2.4 кривые получены при отсутствии

поглощения электромагнитного поля. В реальной плазме есть столкновительные и бесстолкновительные механизмы поглощения поля [210]. В данной работе второй механизм может быть учтен введением эффективной частоты столкновений электронов [202, 210–212].

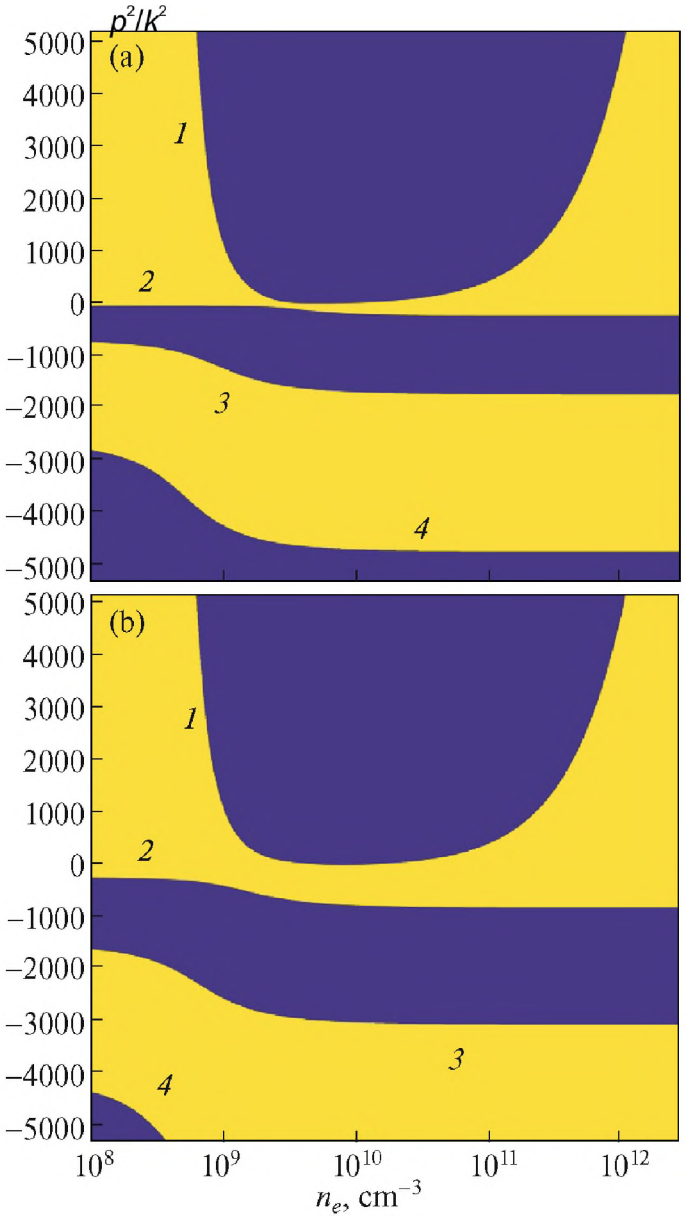

Рис. 2.4. Квадрат безразмерной постоянной затухания волны вдоль оси 0Z p^2 в плазме для различных условий (a) – четная волна, b) – нечетная волна) как функция плотности электронов. Зависимости представляют собой границу между темной и светлой областями. 1 – поверхностная волна, 2, 3, 4 – нераспространяющаяся волна. Условия расчета совпадают с данными рис. 2.2.

В бесстолкновительном случае длина поверхностных волн неограниченно убывает при $n_e \to 2n_C$. В реальных условиях длина поверхностной волны в окрестности этой точки ограничивается параметром ω/ν [213]. Вдали нее учесть поглощение можно с помощью теории возмущений. Изменение постоянной распространения рассчитывается по стандартной формуле [202]

$$h(n_e,\nu/\omega)=h(n_e,0)-iD\left(h,\varepsilon_P(n_e,\nu/\omega)\right)\left(\left.\frac{\partial D}{\partial(\nu/\omega)}\right|_{\nu=0}\right)^{-1}\frac{\nu}{\omega}, \qquad (2.18)$$

где $D\left(h,\varepsilon_P(n_e,\nu/\omega)\right)$ определяется выражением (10), $h(n_e,0)$ - решение уравнения $D\left(h,\varepsilon_P(n_e,\nu/\omega)\right)=0$ в отсутствие столкновений $\nu/\omega=0$.

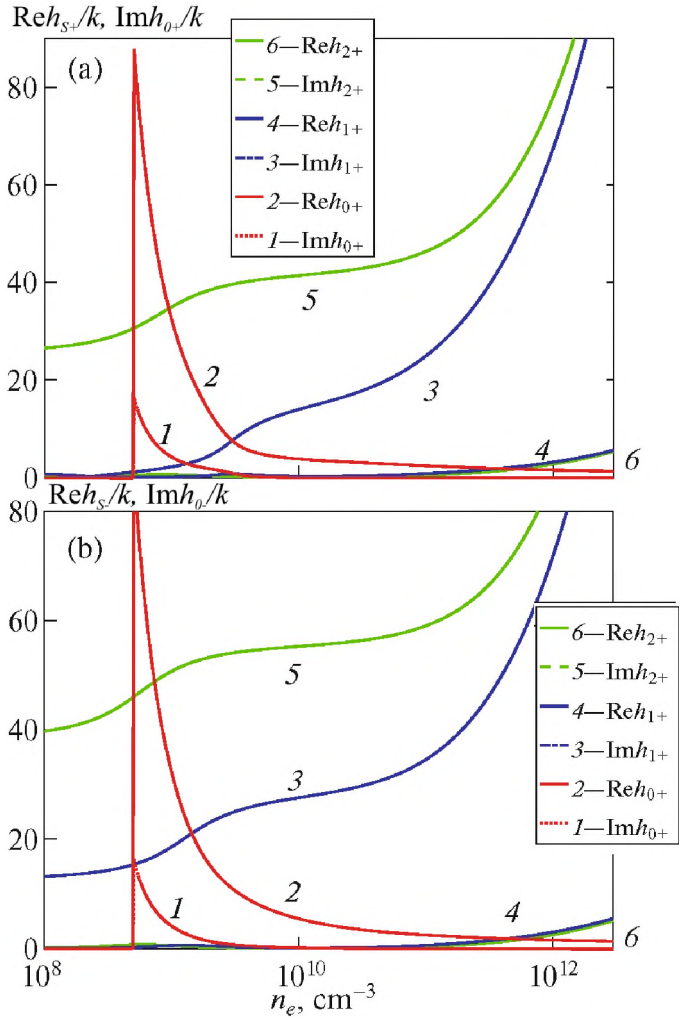

Рис. 2.5. Зависимость действительной и мнимой частей постоянных распространения для поверхностных и затухающих волн при учете столкновений (d_1=d_2=0.3 см, $2L$ = 8 см) от плотности электронов. Частота электромагнитного поля 135.6 МГц. a) – четная волна, b) – нечетная волна).

Комплексные постоянные распространения для поверхностных и затухающих волн при малых частотах столкновений изображены на рис. 2.5. (a) – четная волна, b) – нечетная, 1, 3, 5, – мнимые части постоянной распространения, 2, 4, 6 – действительные). Кривые 1, 2 соответствуют поверхностной волне, кривые 3–6 – высшим нераспространяющимся модам. Для докритических плотностей электронов первая нераспространяющаяся четная мода (4), (5) переходит в квази-ТЕМ моду.

В точке ε_P=–1 в отсутствие поглощения волны постоянная распространения и ее производная обращаются в бесконечность, а сама точка будет существенно особой точкой комплексной функции $h(\varepsilon)$. Методы теории возмущений, приводящие к (18), в ее окрестности не применимы. В [89] показано, что при учете столкновений действительная часть постоянной распространения ограничена, а коэффициент замедления не превышает ω/ν.

Оценку постоянной распространения в условиях, когда указанными эффектами нельзя пренебречь, можно провести с помощью вариационных методов [214 – 216]. В условиях больших частот столкновений можно рекомендовать аналитические формулы, полученные в предположении малости толщин слоев пространственного заряда [180].

Предложенные методы могут быть использованы в тех случаях, когда фиксирована пространственная мода электромагнитной волны. Однако в точке $\varepsilon_P = -1$ происходит ветвление функций и обход в плоскости комплексной переменной вокруг данной точки приводит к переходу от одной ветви к другой. Численно данный вопрос исследован ниже в §2.4.

§2.3. Структура поля поверхностных и затухающих волн в симметричном разряде

Формулы для пространственного распределение поля приведены в Таблице 1 Приложения 2. Их аналог для нераспространяющихся волн – в таблице II. Детального расчет осевых распределений поля для всех качественно различных условий в плазме приведен на рис. 2.6. Магнитные поля нормированы, чтобы максимальное значение модуля функции было равно единице. На рисунке 2.6a представлены распределения поля для малых концентраций электронов (n_e=10^8 см$^{-3}$ <n_C) – квази-ТЕМ мода (1), и четная (3) и две нечетные (2, 4) затухающие моды. На рисунке 2.6b (n_C<n_e=$3.16\cdot10^8$ см$^{-3}$ <$2n_C$) квази-ТЕМ волна (1) стала нераспространяющейся, так же как остальные моды (2, 3, 4). Пространственные распределения поля, пока заметно не изменились, однако производные магнитного поля на границе плазмы и слоя на рисунке 2.6b) уже имеют разные знаки, ибо разные знаки имеет диэлектрическая проницаемость, причем на границе плазмы и слоя наблюдается локальный минимум поля. Для собственных волн при n_e<$2n_C$ выполняется теорема Штурма, то есть поле квази-ТЕМ волны не имеет перемен знака, поле первой затухающей моды (2) – одну перемену знака, поля второй (3) и третьей (4) затухающих мод – две и три перемены знака.

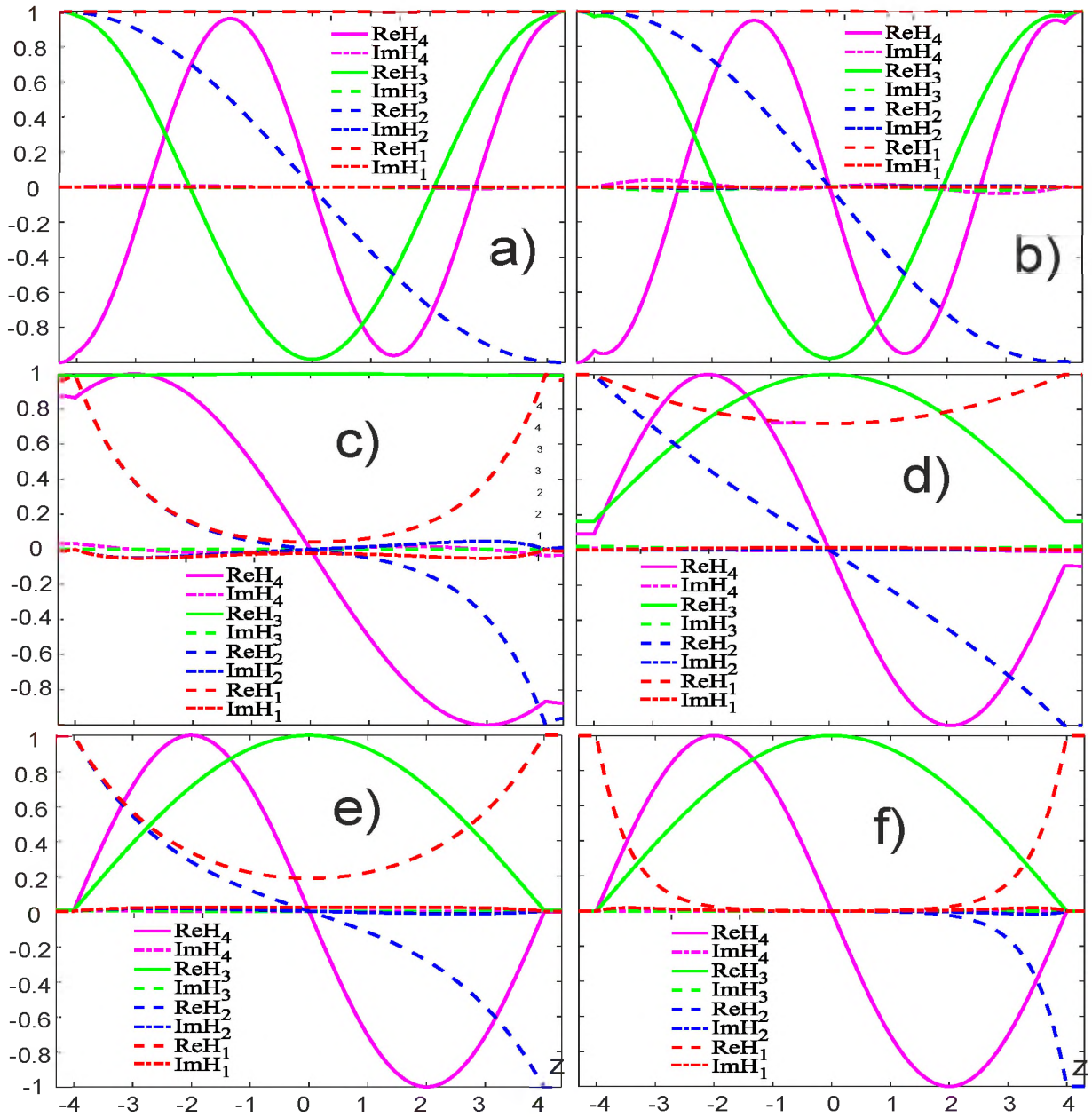

Рис. 2.6. Осевое распределение электромагнитных полей в плазме для квази-ТЕМ волны, поверхностной и затухающей волн. Частота поля 135.6 МГц, Плотности электронов a) 10^8 см$^{-3}$ (n_e=10^8 см$^{-3}$ <n_C), b) $3.16\cdot10^8$ см$^{-3}$ (n_C <n_e<$2n_C$), c) 10^9 см$^{-3}$, d) 10^{10} см$^{-3}$, e) 10^{11} см$^{-3}$ см$^{-3}$, f) 10^{12} см$^{-3}$, (c)–f) – n_e>$2n_C$)

При плотностях электронов выше удвоенной критической (рис. 2.6c)–f)) пространственная структура поля собственных волн перестраивается. На рисунках изображены поля четной (1) и нечетной (2) поверхностных волн, а также четной (3) и нечетной (4) затухающих волн. Обе четные волны не имеют перемен знака (следующая четная затухающая волн будет иметь две перемены знака), а обе нечетные – по одной перемене знака. Таким образом, теорема Штурма выполняется только для затухающих волн. Производные

магнитного поля на границе плазмы и слоя также имеют разные знаки, поэтому поле имеет на этой границе локальный максимум (для поверхностной волны) или локальный минимум (для затухающих волн). При $n_e \approx n_c$ (но $n_e > n_c$, рис. 2.3с)) глубина проникновения поверхностной волны в плазму мала, однако магнитное поле первой четной затухающей моды (кривая (3)) распределено в плазме почти равномерно, так как эта волна – продолжение квази-ТЕМ волны. При дальнейшем увеличении плотности электронов глубина проникновения поля обеих (четной и нечетной) поверхностных волн в плазму увеличивается (рис. 2.4), поле затухающих волн на границе плазмы и слоя уменьшается, а конфигурация поля начинает существенно отличаться той, которая была при малых плотностях электронов. Последующий рост n_e опять приводит теперь уже к монотонному уменьшению глубины проникновения обеих (1, 2) поверхностных волн в плазму. Магнитное поле высших мод, наоборот, сосредотачивается в плазме, как будто на границе плазмы и слоя поставлено граничное условие неидеального «магнитного проводника», идеальность которого растет с плотностью электронов. Отметим, что в реальном разряде для нераспространяющихся волн высокого порядка с характерным размером затухания волны в слое близким к его толщине необходимо учитывать перемещение границы плазмы и слоя и рассматриваемая нами матричная модель слоя неприменима.

Проведенные расчеты демонстрируют, что для поверхностных волн поле в окрестности слоя существенно выше среднего поля в плазме и радиальный перенос энергии к центру разряда происходит по слою пространственного заряда. Для затухающих мод поток энергии к центру разряда по плазме значительно больше, чем поток по слоям пространственного заряда.

Для поверхностных волн поле в слое существенно выше, чем поле в плазме (в особенности при высоких плотностях электронов, когда $|\varepsilon| \gg 1$) и можно было бы ожидать, что импеданс разряда, поддерживаемого поверхностными волнами, определяется прежде всего падением постоянного напряжения на слоях пространственного заряда. Для нераспространяющихся волн магнитное поле, наоборот, сосредотачивается в плазме, поэтому вносимый этими модами импеданс должен быть индуктивным.

Расчеты показывают, как изменяется пространственное распределение электромагнитного поля и его математическое описание при переходе от квазистатического описания к электродинамическому в простейшем варианте конденсатора с электродами радиуса R, заполненного плазмой (Рис. 2.1а). В квазистатическом приближении электрическое и магнитное поля описываются независимо друг от друга. Потенциальное приближение означает ради-

альную однородность электрического поля и рост магнитного поля пропорционально радиусу. Вблизи ребер электродов наблюдаются «краевые эффекты», то есть искажения поля, связанные с необходимостью выполнения граничных условий для полей на боковой границе плазмы. В квазистатическом приближении этими возмущениями можно пренебречь (при выполнении условий L, $R>>d_1$, d_2). Важно, что в квазистатическом приближении возмущения электрического и магнитного поля можно рассчитывать независимо друг от друга. Связь их обеспечивается только через граничные условия.

Переход к электродинамическому описанию означает, что поля собственных функций электрического и магнитного поля оказываются связанными не только через граничные условия, но и непосредственно через уравнения Максвелла. При $n_e<2n_C$ осевое распределение электрического поля квази-ТЕМ волны, которая представляет собой поле внутри плазменного конденсатора, слабо отличается от распределения, получаемого в квазистатическом приближении. Поэтому последнее можно использовать при выполнении условия $\left|k\sqrt{\varepsilon_P}R\right|=\left|k\left(\sqrt{1-\omega_{Pe}^2/\left(\omega^2\left(1+i\nu/\omega\right)\right)}\right)R\right|<<1$. Условие пренебрежения возбуждением поля высших мод остается таким же, как в потенциальном приближении.

При росте плотности электронов свыше двух критических происходит полная перестройка системы собственных функций, появляются поверхностные волны, радиальный перенос энергии к центру разряда в которых происходит через слои пространственного заряда, и высшие типы поля, в которых основная передача энергии происходит через плазму. Поскольку диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна, поле высших типов мод не может проникнуть в плазму в радиальном направлении больше, чем на глубину скин слоя. Кроме того, осевое распределение электромагнитного поля в плазме также становится неоднородным. Поэтому, если подходить к описанию процесса проникновения поля строго, то квазистатическое приближение в этой области параметров не применимо.

Опишем условия, при которых квазистатическое приближение дает приемлемые результаты. При $R>>L$ поле всех высших мод, кроме первой, сосредоточено вблизи границ плазмы. При относительно малых плотностях электродов поле в центре плазмы будет представлено суммой поверхностной волны и первой высшей моды. Пренебрегая высшими модами, получим, что радиальное распределение плотности плазмы однородно при выполнении условий $\left|h_{0+}R\right|<1$ и $\left|h_{1+}R\right|<1$. Условие осевой однородности распределения поля в плазме дает $\left|p_{0+}L\right|<1$. При $L<R$ условие осевой однородности поля первой высшей моды при выполнении предыдущих условий будет выполнено

автоматически.

При высоких плотностях электронов первая высшая мода не проникает в плазму на расстояние больше глубины скин слоя, поэтому в глубине положительного столба поле будет представлено только поверхностной волной. Это предполагает, что выполнены условия $|h_{0+}R|<1$ и $|h_{1+}R|>>1$. Условие осевой однородности распределения поля в плазме такое же, что и в предыдущем случае $|p_{0+}L|<1$.

Приведенные в данном пункте условия касаются только получения однородного распределения поля в центральной части плазмы. Соотношение энергий, передаваемых в поверхностную волну и в высшие моды, зависит от геометрии области возбуждения поля в камере и разных случаях реализуется как преимущественная передача энергии в поверхностную волну, так и наоборот – в высшие моды поля.

§2.4. Численный расчет и приближенные формулы дисперсионных кривых собственных волн при наличии столкновений [20].

Как было отмечено в §2.2, поглощение электромагнитного поля в плазме запрещает обращение постоянной распространения в бесконечность [213]. Хотя в [213] это показано для волны в полупространстве, аналогичная ситуация имеет место и в плазменном волноводе с неоднородным заполнением. Изменение поведения зависимости постоянной распространения от плотности электронов в окрестности точки перестройки ($\mathrm{Re}\,\varepsilon_P \approx -1$) в отсутствие и при наличии поглощения до настоящей работы не исследовано, хотя этот вопрос принципиален для расчетов плазменных технологических реакторов и других высокочастотных устройств. Использование для расчета дисперсионных кривых плазменного волновода теорию возмущений, предполагает задание в качестве невозмущенной моды одной из волн пустого волновода [216]. Из результатов этого параграфа следует, что выбор этой моды – нетривиальная задача и зависит даже от такого параметра, как частота столкновений электронов. Для простоты ограничимся симметричными волнами в изучаемом нами трехслойном волноводе (§2.1, рис. 2.1). В безразмерных переменных $H=hL$, $P=\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_p}L$, $A=\sqrt{h^2-k^2}L$ уравнение (2.13) примет вид)

$$D=\varepsilon_P A\,\mathrm{th}\left(Ad/L\right)+P\,\mathrm{th}\left(P\right)=0. \qquad (2.19)$$

Оно содержит две периодические функции $\mathrm{th}\left(Ad/L\right)$, и $\mathrm{th}\left(P\right)$ комплексного аргумента, зависящие от ε_p, поэтому положение его корней на комплексной плоскости будет изменяться с изменением плотности электронов сложным

образом. Нас интересует прежде всего спектр поверхностных волн и наиболее глубоко проникающих в плазму нераспространяющихся мод. В качественном анализе сначала ограничимся рассмотрением случая

$$d \ll L \qquad (2.20).$$

Теперь комплексную плоскость переменной P можно разбить на участки $-\pi/2 < \operatorname{Im} Ad/L < \pi/2$, $\pi/2 < \operatorname{Im} Ad/L < 3\pi/2$, $3\pi/2 < \operatorname{Im} Ad/L < 5\pi/2$ и т. п. Расчет показывает, что кривые, описывающие перемещение корней дисперсионного уравнения (2.19) при изменении плотности и частоты столкновений электронов, в условиях (2.20) всегда лежат в пределах одного участка. Далее рассмотрим моды поля, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{Im} Ad/L < \pi/2, \qquad (2.21)$$

поскольку они отвечают за поддержание емкостных ВЧ разрядов [13, 14]. Условие (2.21) означает ограничение значений плотности электронов

$$n/n_C < 2(L/d)^2\left(\pi^2/4 + (\operatorname{Im} P)^2\right)\Big/(kL)^2 \qquad (2.22).$$

Рассматриваемые ниже аналитические асимптотики (но не численные решения) предполагают выполнение этого условия.

§2.4.1. Классификация решений

Численное решение уравнения (2.19) показывает, что можно выделить несколько типов поведения решений.

1. Плазма без поглощения (§2.3)**.** Есть следующие типы волн:

1.1. Поверхностная волна. Появляется при $\varepsilon_P < -1$, при $\varepsilon_P \to -1$ постоянная распространения h, а также поперечная постоянная распространения p стремятся к бесконечности. При $\varepsilon_P \to \infty$ постоянная распространения поверхностной волны h стремится к k (соответственно $p \to ik\sqrt{1-\varepsilon_P}$).

1.2. Квази-ТЕМ волна (переходит в ТЕМ волну в пустом волноводе, ограниченном двумя металлическими плоскостями при $\varepsilon_P \to 1$). При $\varepsilon_P \to 1$ и $\varepsilon_P \to 0$, получим $P \to 0$ и $h \to k$. При $\varepsilon_P < 0$ эта волна превращается в первую нераспространяющуюся моду. Для $\varepsilon_P \to \infty$, получаем $pL \to i\pi/2$ и $h \to \sqrt{k^2\varepsilon_P - (\pi/2L)^2}$.

1.3. Нераспространяющиеся моды. При $\varepsilon_P \to +\infty$ получим $pL \to i(\pi/2+n)$, $n=0,1,2\ldots\infty$. При $\varepsilon_P \to -\infty$ эти моды стремятся к другому предельному значению $pL \to i(\pi/2+n+1)$.

2. Слабо поглощающая плазма ($\nu/\omega \ll 1$).

2.1. Поверхностная волна. Постоянная распространения при $\operatorname{Re}\varepsilon_P \to -1$, не может обращаться в бесконечность. Поскольку зависимость постоянной

распространения от диэлектрической проницаемости представляет собой непрерывную функцию, она не может оборваться в конечной точке.

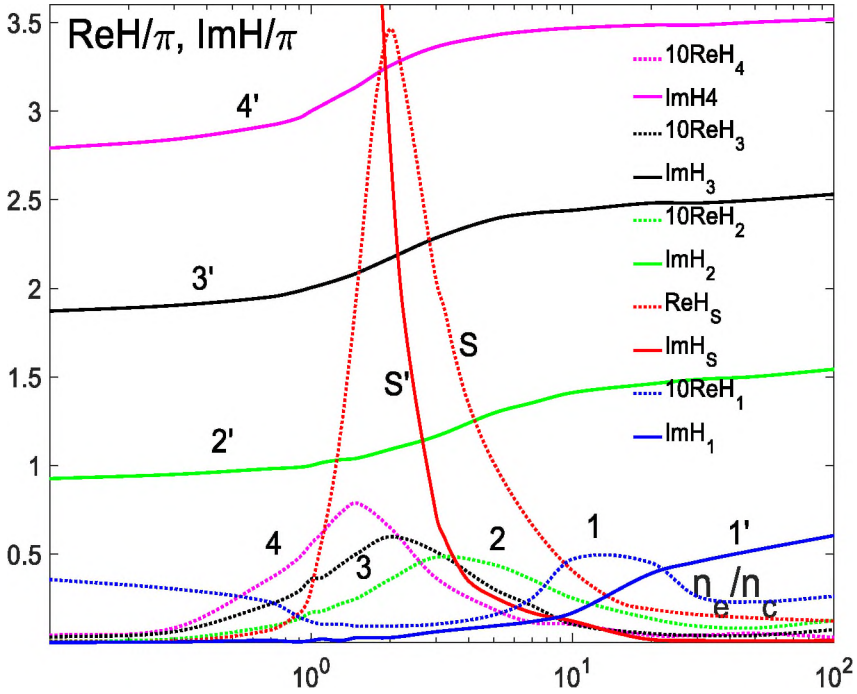

Рис. 2.7. Постоянная распространения H как функция плотности электронов. Первые четыре моды (1–4) и поверхностная волна (S). Частота поля 135.6 МГц, полуширина плазмы L – 4 см, толщина слоя d – 3 мм, ν/ω=0.2.

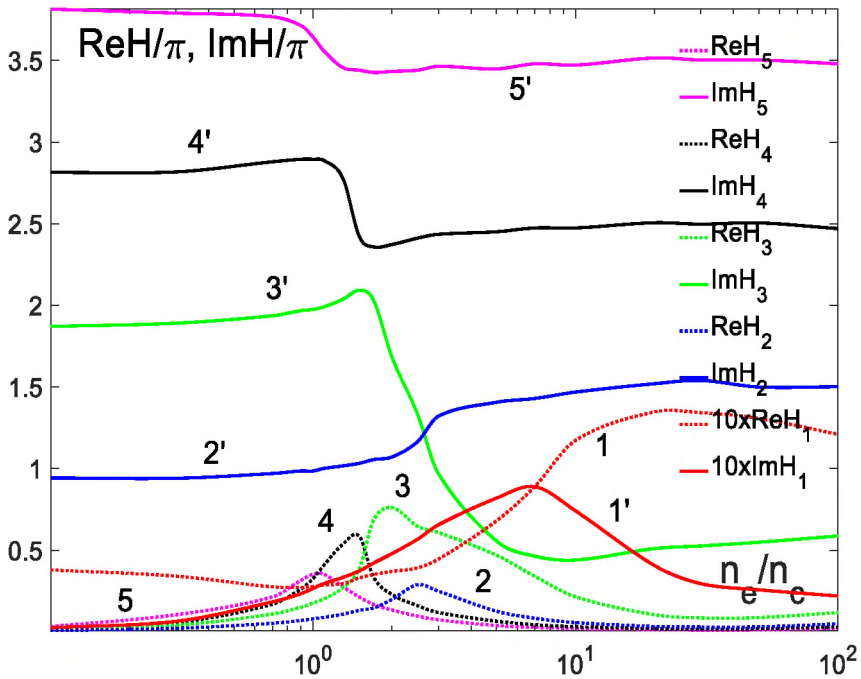

Рис. 2.8. Постоянная распространения H как функция плотности электронов. Все данные как на рис. 2.7, но ν/ω=1.

Поэтому происходит перезамыкание ветвей. Расчеты показывают, что

при $\mathrm{Re}\,\varepsilon_P \to -1$ постоянная распространения резко уходит в комплексную область, потом начинает уменьшаться ее действительная часть и при $\varepsilon_P > 0$ эта волна замыкается на одну из нераспространяющихся (высших) мод. Номер этой моды (m) зависит от отношения (ν/ω) и геометрии плазменного волновода. При ν/ω=0.2 и решении полного уравнения (2.19) поверхностная волна (рис. 2.7, кривая S) замыкается с шестой высшей модой. При ν/ω=0.01 с 8 модой. Обозначим номер моды, с которой происходит перезамыкание как *m*.

2.2. Поведение квази-ТЕМ волны (1, 1') качественно по сравнению с бесстолкновительным случаем не изменяется, но появляется затухание в области распространения (Im*H*>0 при Reε$_P$>0) и изменение фазового сдвига в области нераспространения (Re*H*>0, при Reε$_P$<0).

2.3. Для затухающих волн с номером $n < m$ (кривые 2, 2', 3, 3', 4, 4') асимптотическое поведение не изменяется, т.е. их предельные значения при $\varepsilon_P \to \pm\infty$ остаются различными и совпадают с их значениями в непоглощающих плазменных волноводах. В поглощающей среде их дисперсионные кривые могут быть рассчитаны с помощью теории возмущений к бесстолкновительным решениям.

2.4. Дисперсионные кривые волн с $n > m$ перезамыкаются, предельные значения при $\varepsilon_P \to \pm\infty$ становятся одинаковыми: $pL \to i(\pi/2 + n)$, n=0,1,…,∞. Переход от одной моды к другой происходит в окрестности точки $\mathrm{Re}\,\varepsilon_p \approx -1$. Для этих волн теорию возмущений необходимо строить по аналогии с [15], задавая структуру поля невозмущенной волны. Кривая зависимости постоянной распространения этих волн от плотности электронов аналогична приведенным на рис. 2.8, кривым 4, 4', 5, 5'. Заметим, что для некоторых кривых на рис. 2.7 и последующих масштаб увеличен в 10 раз.

3. Сильно поглощающая плазма ($\nu/\omega >> 1$). Поскольку замедление поверхностных волн связано с компенсацией разнонаправленных потоков энергии в диэлектрическом слое и в плазме [13, 14], при сильном поглощении второй поток энергии пренебрежимо мал, поэтому поверхностные волны отсутствуют (кривые 1, 1' рис. 2.8), превращаясь при $|\varepsilon_P| \to \infty$ в ТЕМ волну, распространяющуюся по диэлектрическому слою между плазмой и металлом. Высшие моды ($n \geq 1$, индекс $n = 0$ принадлежит ТЕМ- волне) при $\mathrm{Re}\,\varepsilon_P \to \pm\infty$ имеют такие же зависимости от плотности электронов, как и кривые 4, 4', 5, 5' на рис. 2.8.

4. Промежуточная область ($\nu/\omega \approx 1$, реально $\nu/\omega \approx 0.7 \div 3$ для условий рис. 2.7–2.8). Слабозатухающие поверхностные волны отсутствуют, однако в области малых Reε$_P$ поведение первых трех мод имеет сложный характер

(рис. 2.8), например, при $\nu/\omega=1$ перезамыкаются не только квази-ТЕМ (1) мода и квази-поверхностная волна, но и 2 и 3 мода. Более высокие моды ведут себя так же, как и моды 4 и 5.

§2.4.2. Приближенные аналитические решения

Проверить точность (и совпадение) численных и аналитических расчетов удобнее перейдя к новой зависимой переменной P. При этом в определенных областях параметров плазмы и для некоторых мод в соответствии с §2.2 возможно получение аналитических решений уравнения (2.19) в приближении $Ad/L<<1$, когда оно принимает вид

$$D=\varepsilon_P A^2\, d/L+P\mathrm{th}(P)=0. \qquad (2.23).$$

Перечислим эти случаи.

1. $|\varepsilon_P|\to\infty$ (конечные постоянные распространения).

Высшие нераспространяющиеся моды: при $|\varepsilon_P|\to\infty$ из (2.19) следует $\mathrm{th}(P)\to i\infty$, $P\to P_n=ip(n+1/2)$. Учет поправки первого приближения по $|\varepsilon_P|^{-1}$ дает

$$P=i(\pi/2+\pi n)\left(1-\left(\varepsilon_P\left(-(\pi/2+\pi n)^2+k^2dL(\varepsilon_P-1)\right)+1\right)^{-1}\right). \qquad (2.24)$$

Полученная формула справедлива, если $|P-P_n|<<1$. При малых потерях поперечная постоянная распространения P уменьшается с уменьшением плотности электронов. При больших потерях наоборот, P растет.

2. $|\varepsilon_P|\to 0$ (квази-ТЕМ волна).

Получим аналогичные решения при $|\varepsilon_P|\to 0$. Тогда $\mathrm{th}(P)\to 0$, $P\to P_n^{(0)}=i\pi n$. Это приближение не реализуется при $\nu/\omega>>1$. Для квази-ТЕМ волны n=0 и $\tanh P\approx P$. Поэтому

$$P^2/k^2L^2=-\varepsilon_P(\varepsilon_P-1)/(\varepsilon_P+L/d), \qquad (2.25)$$

3. $|\varepsilon_P|\to 0$ (высшие моды).

Используем аналогичный предыдущему пункту и подход, получим (n – номер моды)

$$P=i\pi n+\frac{\varepsilon_P d\left(\pi^2n^2-k^2L^2(\varepsilon_P-1)\right)}{i\pi nL(L+2\varepsilon_P d)}. \qquad (2.26)$$

4. Дисперсия поверхностной волны. Для поверхностной волны как при $|\varepsilon_P|\to 0$, так и при $|\varepsilon_P|\to\infty$ получим $P\to\infty$ и $\mathrm{th}(P)\to 1$. Из уравнения (1) следует

$$P_{(1),(2)}/kL=-(2\varepsilon_P kd)^{-1}\pm\sqrt{(2\varepsilon_P kd)^{-2}-(\varepsilon_P-1)} \qquad (2.27)$$

Фактически эта формула имеет хорошую точность при ReP>1, качественно правильно описывает кривую при ReP>1 и неприменима при ReP <1.

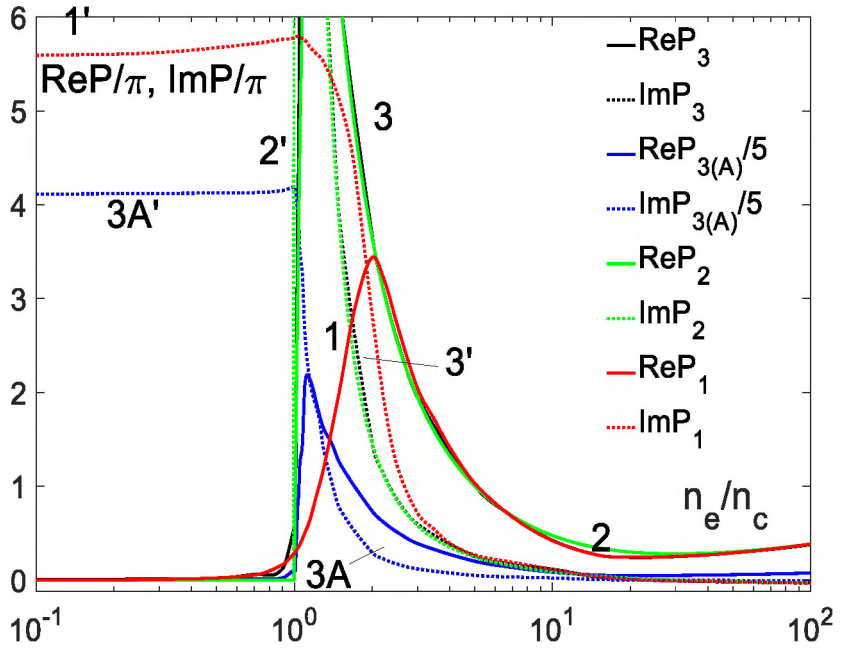

Рис. 2.9. Поперечная постоянная затухания поверхностной волны P как функция плотности электронов при использовании различных приближений. Все данные как на рис. 2.7.

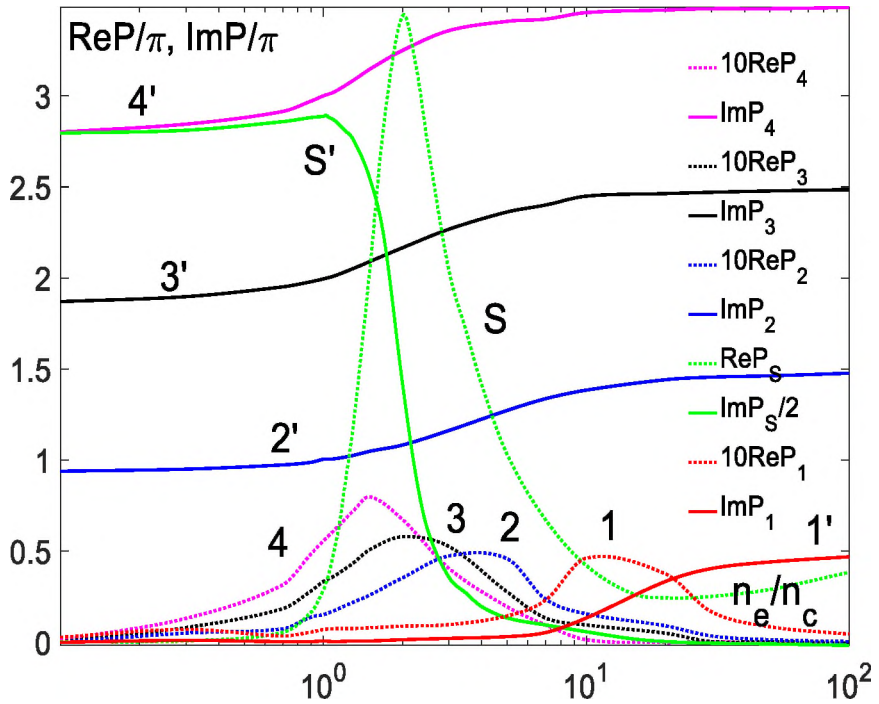

Рис. 2.10. Поперечная постоянная затухания P как функция плотности электронов. Расчетные данные совпадают с рис. 2.7.

В непоглощающей плазме решение с одинаковыми знаками обоих слагаемых соответствует поверхностной волне. Второе решение должно было бы описывать квази-ТЕМ волну, но так как приближение $\mathrm{Re}\,P > 1$ не выполняется, вместо него необходимо использовать соотношение (8). Сравнение различных приближений для поверхностной волны для отношения ν/ω=0.2

показаны на рис. 2.9. Кривые 1, 1' соответствуют численному решению полного уравнения (2.19), кривые 2, 2' – уравнения (2.26) а кривые 3, 3' (3А, 3А') – приближенного уравнения (2.23). Из рисунка следует, что в области существования поверхностной волны $\mathrm{Re}\,\varepsilon_p < -1$ уравнения (2.19) и (2.24) дают совпадающие решения, приближенное соотношение (2.26) – незначительное отклонение в области наибольшего проникновения поля в плазму, а при $0>\mathrm{Re}\varepsilon_P>-1$ совпадающие решения дают уравнения (2.23) и (2.26), но именно в этой области они неприменимы.

Приближенные значения постоянной распространения $H=hL$ рассчитываются по формуле $H^2 = P^2 + k^2L^2\varepsilon_p$. Номер m моды, в которую перезамыкается поверхностная волна, можно оценить, рассчитав значение ReP по формуле (2.27) при $\mathrm{Re}\varepsilon_P\approx-1$: $m \approx P_{\max}/\pi$. Эта оценка справедлива, если выполнено условие (2.21) (или (2.22)), так как при его нарушении $\mathrm{th}(Ad/L)$ меняет знак.

Для проверки применимости асимптотических формул (2.24)–(2.26) в условиях реального разряда был проведен расчет полного уравнения (2.19) относительно постоянной затухания P. Расчет показал, что асимптотические формулы дают правильные значения P и хорошо описывают их поведение в окрестности точек $|\varepsilon_P|\to\infty$ и $|\mathrm{Re}\varepsilon_P|\to 0$. Пример расчета для четырех мод (1–4) и поверхностной волны (S) приведен на рис. 2.10.

§2.4.3. Выводы

Проведенный в данном разделе анализ показал.

1. Наличие столкновений качественно меняет поведение собственных мод плазменного волновода. Можно выделить несколько вариантов наблюдаемых зависимостей.

2. При малых частотах столкновений и приближении диэлектрической проницаемости к удвоенной критической поверхностная волна сначала становится сильно затухающей, когда действительная и мнимая часть постоянной распространения становятся близкими по величине, а затем при плотностях меньше критической волна переходит в одну из высших нераспространяющихся мод. Номер моды m определяется параметрами ν/ω, d/L и kL.

3. Для мод с номерами меньше m в расчетах можно использовать теорию возмущений к бесстолкновительному случаю.

4. Для расчета дисперсии поверхностной волны при Re$pL>1$ можно использовать приближенную формулу (2.27). В промежуточной области Re$pL<1$ наиболее простой способ – использование теории возмущений к бесстолкновительному случаю.

§2.5. Импеданс разряда. Приближенные методы расчета

Общие выражения для импеданса разряда были приведены в §2.1 ((2.9), (2.11)). На рис. 2.11–2.12a–d приведены различные частные случаи расчета по этим формулам. Самые простые приближенные выражения для импеданса учитывают только одну возбуждаемую моду. Поскольку в главах 3 и 4 приведены гораздо более полные расчеты, в данном разделе ограничимся коротким изложением результатов (более полные см. в работе [13]).

При больших плотностях плазмы ($n_e>2n_c$) обычно предполагается, что возбуждается поверхностная волна [10, 180], при меньших плотностях это квази-ТЕМ волна или первая затухающая мода. В этом случае из (2.10) следует для поверхностной волны

$$Z_{0+}=\frac{2L}{2\pi R}i\rho\frac{h_{0+}}{k}\frac{\left(\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)}{\varepsilon_P\sqrt{h_{0+}^2/k^2-\varepsilon_P}}+\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}{\varepsilon_1\sqrt{h_{0+}^2/k^2-\varepsilon_1}}\right)}{\left(\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)}{\sqrt{h_{0+}^2/k^2-\varepsilon_P}}+\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}{\sqrt{h_{0+}^2/k^2-\varepsilon_1}}\right)}\frac{J_0\left(h_{0+}R\right)}{J_1\left(h_{0+}R\right)} \tag{2.28}$$

и для квази-ТЕМ волны или первой высшей моды

$$Z_{1+}=-\frac{\tilde{h}_{1+}}{k}i\rho\frac{2L}{2\pi R}\frac{\left(\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P+\tilde{h}_{1+}^2}L_2\right)}{\varepsilon_P\sqrt{\varepsilon_P+\tilde{h}_{1+}^2/k^2}}+\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1+\tilde{h}_{1+}^2}d\right)}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1+\tilde{h}_{1+}^2/k^2}}\right)}{\left(\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P+\tilde{h}_{1+}^2}L_2\right)}{\sqrt{\varepsilon_P+\tilde{h}_{1+}^2/k^2}}+\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1+\tilde{h}_{1+}^2}d\right)}{\sqrt{\varepsilon_1+\tilde{h}_{1+}^2/k^2}}\right)}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{1+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{1+}R\right)}. \tag{2.29}$$

При записи последних формул предполагалось, что токи различных мод определяются соотношением (2.11). В случае (2.9), уравнения (2.19) и (2.20) принимают вид

$$Z_{0+}=\frac{2}{2\pi kR}i\rho\frac{h_{0+}}{k}\frac{\left(\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)}{\varepsilon_P\sqrt{h_{0+}^2/k^2-\varepsilon_P}}+\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}{\varepsilon_1\sqrt{h_{0+}^2/k^2-\varepsilon_1}}\right)}{ch\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}\frac{J_0\left(h_{0+}R\right)}{J_1\left(h_{0+}R\right)},$$

$$Z_{1+}=-\frac{\tilde{h}_{1+}}{k}i\rho\frac{2}{2\pi kR}\frac{\left(\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P+\tilde{h}_{1+}^2}L_2\right)}{\varepsilon_P\sqrt{\varepsilon_P+\tilde{h}_{1+}^2/k^2}}+\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1+\tilde{h}_{1+}^2}d\right)}{\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_1+\tilde{h}_{1+}^2/k^2}}\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1+\tilde{h}_{1+}^2}d\right)}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{1+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{1+}R\right)}.$$

Для малых размеров плазмы ($h_{0+}R<2.4$) выражение (2.28) всегда дает емкост-

ной импеданс, напротив, импеданс вносимый нераспространяющимися модами (2.29) всегда индуктивный. Этот результат подтверждается численным расчетом (Рис. 2.11 – 2.12a, b). Для коротких поверхностных волн коэффициент затухания велик (рис. 2.5), поэтому отражение поверхностной волны от центра плазменного столба незначительно и вносимый ими импеданс имеет активный характер.

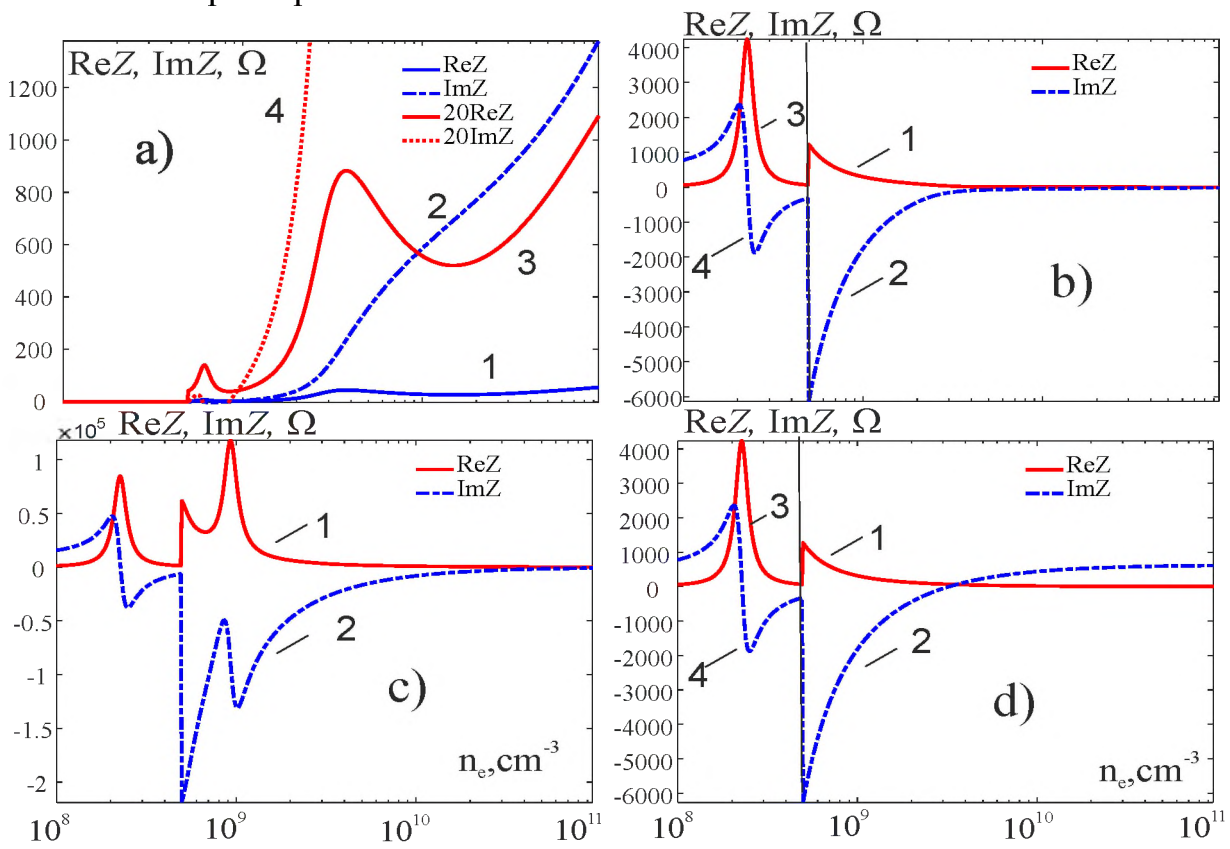

Рис. 2.11. Импеданс симметричного разряда, рассчитанный в различных приближениях. a) – импеданс при учете только поверхностной волны, b) – при учете только первой высшей моды, c) – при учете поверхностной волны и первой высшей моды с амплитудами, полученными из условия соответствия расчету в квазистатическом приближении, d) – расчет в квазистатическом приближении. Частота поля 135.6 МГц, радиус разряда 2 см, межэлектродное расстояние 2L – 8 см, размер слоев пространственного заряда 0.3 см, отношение частоты столкновений к частоте поля ν/ω – 0.1. На рисунках b) и d) при плотностях ниже $5\cdot10^8$ см$^{-3}$ масштаб 3, 4 кривых (3, 4) уменьшен в 20 раз. Кривые 3 и 4 на рис. a) увеличены по масштабу в 20 раз

По мере роста плотности электронов коэффициент затухания уменьшается и существенную роль начинает играть реактивная составляющая, а затем, после нескольких колебаний, связанных с изменением соотношения длины поверхностной волны и радиуса плазмы, импеданс приобретает емкостной характер. Количество колебаний увеличивается с ростом радиуса разряда. Поскольку импеданс резко изменяется с изменением плотности плазмы, на рис. 2.11–

2.12a представлены отдельными кривыми также значения импеданса в увеличенном в 20 раз масштабе. Напротив, на рис. 2.11–2.12b и d в области $n_e<2n_C$, где распространение поверхностных волн отсутствует и сопротивление плазменного столба велико, значение импеданса уменьшено в 20 раз.

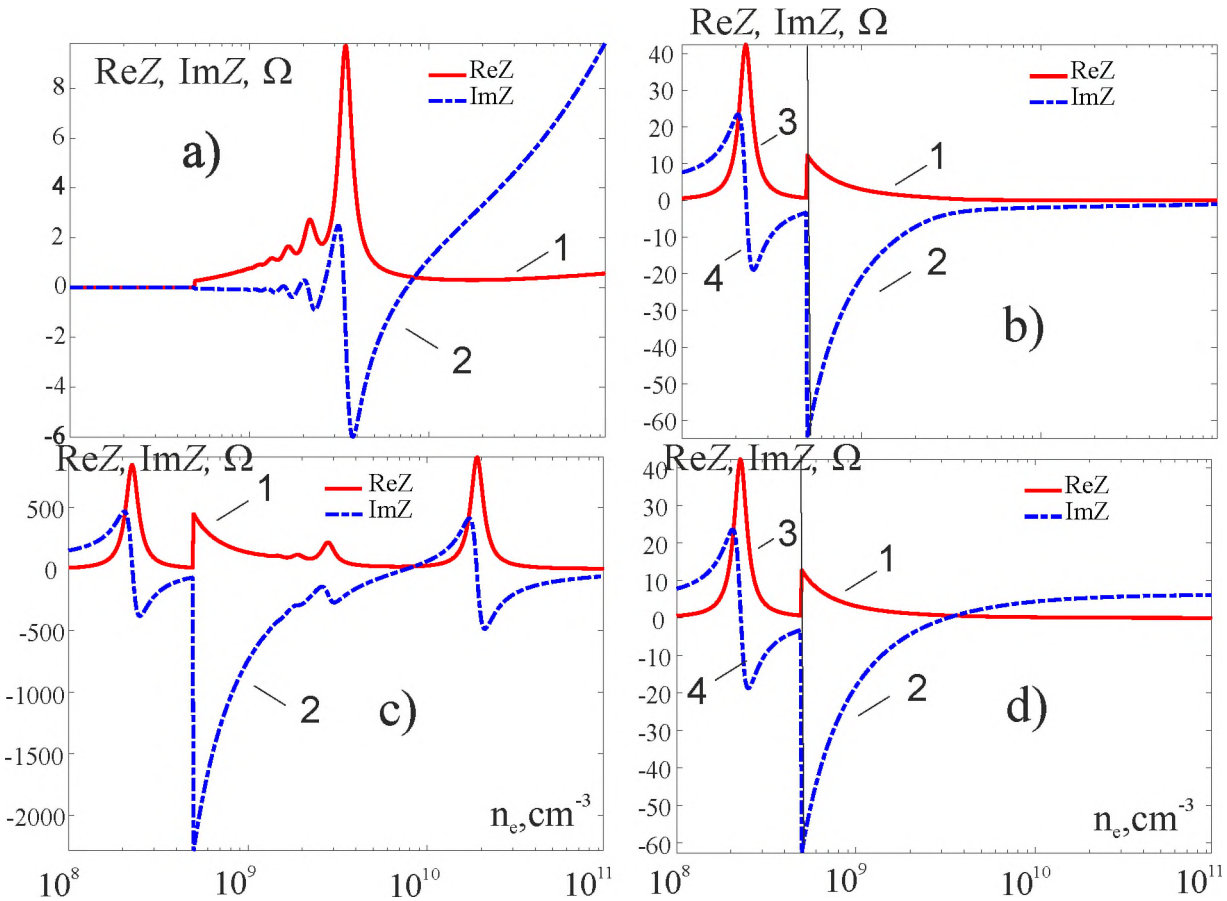

Рис. 2.12. Импеданс симметричного разряда, рассчитанный в различных приближениях. a) – импеданс при учете только поверхностной волны, b) – при учете только первой высшей моды, c) – при учете поверхностной волны и первой высшей моды с амплитудами, полученными из условия соответствия расчету в квазистатическом приближении, d) – расчет в квазистатическом приближении. Частота поля 135.6 МГц, радиус разряда 20 см, межэлектродное расстояние 2L – 8 см, размер слоев пространственного заряда 0.3 см, отношение частоты столкновений к частоте поля ν/ω – 0.1. На рисунках b) и d) при плотностях ниже $5\cdot10^8$ см$^{-3}$ масштаб кривых (3, 4) уменьшен в 20 раз.

Сравнение показывает (Рис. 2.11 – 2.12d), что при пренебрежении полем поверхностной волны ($n_e<2n_c$) и учете только первой высшей моды результат близок к получаемому в потенциальном приближении, для которого

$$Z_{1+} = i\rho\frac{2}{k\pi R^2}\left(d+\frac{L_2}{\varepsilon_p}\right).$$

Для поверхностной волны близкий к этому результат получается при

плотностях много выше плотности, при которой наблюдается геометрический резонанс плазма – слой пространственного заряда.

Детальные расчеты демонстрируют: приближенные выражения (2.28) и (2.29) не описывают поведение импеданса разряда в промежуточном диапазоне плотностей электронов и геометрический резонанс плазма-слой пространственного заряда. Естественным уточнением модели было бы включение в расчет импеданса как поверхностной волны, так и хотя бы одной из высших мод. Пока мы приведем феноменологическое выражение, предполагающее, что амплитуда первой высшей моды равна амплитуде поверхностной волны (рис. 2.11–2.12c). Можно ожидать, что данное выражение будет давать правдоподобный результат для тонкого столба плазмы и для плотностей, при которых наблюдается резонанс плазма-слой и выше. Использованная формула, полученная из эвристических соображений, не может считаться справедливой при низких плотностях электронов в разряде. При плотностях ниже удвоенной критической на рис. 2.11c– 2.12c учитывается только квази-ТЕМ мода, поэтому в этой области результаты совпадают с рис. 2.11b – 2.12b.

$$Z_{0+}=\frac{\dfrac{i\rho L}{\pi R}\left(\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)}{\varepsilon_P\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}}+\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}{\varepsilon_1\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}}+\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{1+}^2}L_2\right)}{\varepsilon_P\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{1+}^2}}+\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{1+}^2}d\right)}{\varepsilon_1\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{1+}^2}}\right)}{\dfrac{kJ_1\left(h_{0+}R\right)}{h_{0+}J_0\left(h_{0+}R\right)}\left(\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)}{\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}}+\dfrac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}{\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}}\right)+\dfrac{kI_1\left(\tilde{h}_{1+}R\right)}{\tilde{h}_{1+}I_0\left(\tilde{h}_{1+}R\right)}\left(\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{1+}^2}L_2\right)}{\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{1+}^2}}+\dfrac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{1+}^2}d\right)}{\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{1+}^2}}\right)}.$$

При $n_e>2n_C$ добавлен вклад в импеданс новой собственной функции (поверхностной волны), при $n_e>2n_C$ рис. 2.11c– 2.12c импеданс в окрестности этой точки в диапазоне плотностей $\Delta n_e \approx n_C\,\nu/\omega$ испытывает резкий скачок. На рисунках 2.11b– 2.12b и 2.11d– 2.12d импеданс изменяется плавно, а скачки на рисунках обусловлены изменением масштаба кривых.

Согласно расчетам, импеданс разряда при высоких плотностях плазмы приближается к квазистатическому, и в нем появляется геометрический резонанс плазма–слой пространственного заряда. Поскольку поле высших мод плохо проникает в плазму и вносимый ими индуктивный импеданс оказывается меньше, чем в квазистатическом приближении, плотности, при которых наблюдается геометрический резонанс, увеличиваются и для камеры большого радиуса (рис. 2.12c) он должен наблюдаться при плотностях вне диапазона, представленного на рисунке. Еще раз скажем, что используемый в данном разделе подход к расчету импеданса разряда является приближенным и явно демонстрирует необходимость проведения более точных расчетов.

ГЛАВА III.

СИММЕТРИЧНЫЙ РАЗРЯД, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЯЮЩИЙ ВАКУУМНУЮ КАМЕРУ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ И НЕСИММЕТРИЧНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ[1]

§3.1. Математическое моделирование импеданса разряда

В продолжение второй главы [13, 14], рассмотрим разряд в цилиндрической металлической камере радиуса R_3 (рис. 3.1). Камера содержит два пластинчатых электрода 1 и 2 радиуса R_1 с межэлектродным расстоянием $2L$, подключенных к источникам ВЧ мощности U_1 и U_2 на частоте ω с внутренними сопротивлениями Z_1 и Z_2 через отверстия в стенках вакуумной камеры (на рисунке не показаны). Эти электроды расположены на том же уровне, что и боковые торцы разрядной камеры, по существу являясь их продолжением, но отделенным от торцов диэлектрической свободной от плазмы щелью размером R_2–R_1. Образующаяся в разряде плазма 3 отделена от электродов и боковой части рабочей камеры 5 слоями пространственного заряда 4. Толщины слоев у электродов, торцов рабочей камеры и ее боковой стенки равны d_1, d_2 и d_3 (в данной работе мы предполагаем d_1=d_2).

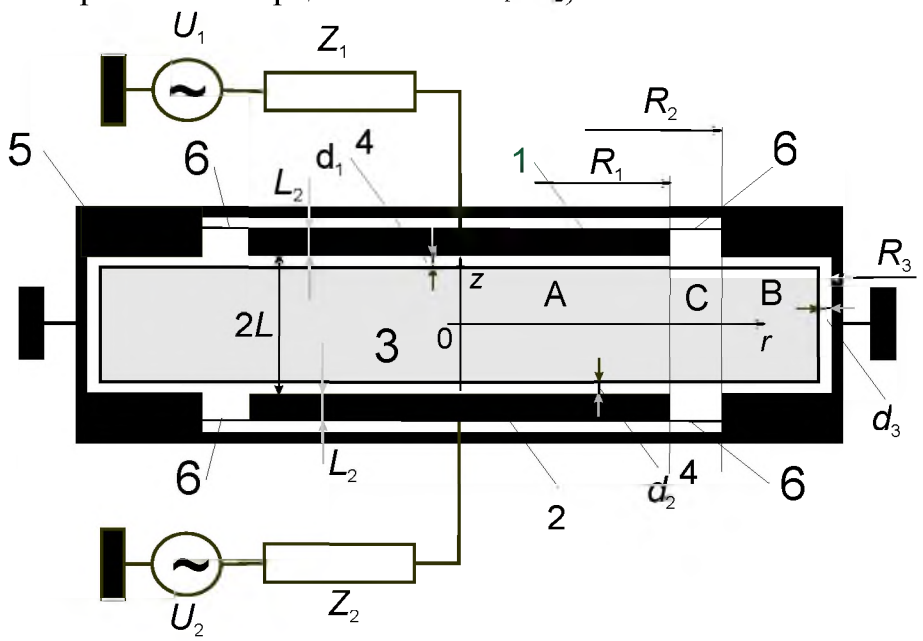

Рис. 3.1. Типичная схема экспериментальной установки 1, 2 – электроды, 3 – плазма, 4 – слои пространственного заряда между плазмой и стенкой (электродами), 5 – вакуумная камера, 6 – сечения, в которых рассчитывался импеданс разряда. $2L$ – межэлектродное расстояние, d_1, d_2, d_3 – толщины слоев пространственного заряда.

Распределение плотности электронов n_e в разрядной камере предполагается однородным. Относительная диэлектрическая проницаемость плазмы

[1] Содержание этой главы основано на работах [15, 16].

рассчитывалась в модели холодной плазмы [202, 210]. В реальном разряде толщина слоев пространственного заряда определяется плотностью плазмы, напряжённостью электрического поля в слое, его частотой, формой напряжения (наличием гармоник) и т. п. Слои рассматривались в рамках матричной модели [2], толщина слоя предполагается постоянной, не зависящей от других параметров. Данное упрощение позволяет исключить из многопараметрического расчета импеданса разряда изменения толщины слоя пространственного заряда, которая может зависеть от плотности электронов и напряженности поля сложным образом. Частичным оправданием использования данного приближения может быть также тот факт, что очень часто разряд поддерживается одновременно полем нескольких частот, причем толщина слоя пространственного заряда определяется сигналом более низкой частоты.

Система уравнений Максвелла (2.1, 2.2) для описанной выше геометрии разрядной камеры (рис. 3.1) решалась с помощью пакета COMSOL Multiphysics® (лицензия принадлежит физическому факультету МГУ имени М.В.Ломоносова). Расчет проводился в области пространства, включающей центральную часть камеры ($0<r<R_3$, $-L<z<L$) и межэлектродное пространство, ($R_1<r<R_2$, $-L<|z|<L+L_2$). На электродах ставились нулевые граничные условия для тангенциальной компоненты электрического поля. На внешней границе 6 ($R_1<r<R_2$, $|z|=L+L_2$) азимутальное магнитное поле считалось заданным $H_\varphi\left(r,\pm\left(L+L_2\right)\right)=I_\pm/2\pi r$. Отдельно рассматривались синфазный режим (токи электродов равны и ток, втекающий через верхний электрод I_+, равен току, вытекающему через нижний I_-, а ток на корпус вакуумной камеры равен нулю) и противофазный (равные токи втекают через электроды и замыкаются на корпус вакуумной камеры, $I_+=-I_-$). Разность потенциалов между электродом и камерой и импеданс разряда рассчитывались на границе 6 по формулам $U_\pm=\int_{R_1}^{R_2}E_r\left(r,\pm(L+L_2)\right)dr$, $Z_\pm=\pm U_\pm/I_\pm$. При синфазном возбуждении напряжение между электродами U_{12} будет равно $2U_+$. При этом цепь подвода энергии (область расчета $L<|z|<L+L_2$) вносит дополнительный емкостной импеданс. Распределение плотности электронов в плазме при расчетах было однородно, а диэлектрическая проницаемость рассчитывалась в модель холодной плазмы.

Результаты расчетов импеданса разряда Z приведены на рис. 3.2 (синфазное возбуждение) и на рис. 3.3 (противофазное возбуждение), далее мы везде опускаем индексы ±. Частота поля 135.6 МГц, межэлектродное расстояние $2L$= 8 см. Радиус разрядной камеры R_3 10 (a)), 20 (b)) и 30 (c)) см. Радиусы R_1 и R_2 при расчетах были равны 4, 14 и 24 см, и 5, 15 и 25 см, отношение ν/ω = 0.1. Толщины всех слоев пространственного заряда считались равными

0.3 см. Размер L_2 был равен 1 см. Расчеты показывают, что при высоких плотностях электронов длина поверхностной волны близка к длине волны в вакууме и поле высших мод плохо проникает в плазму, поэтому импеданс выходит на постоянное значение.

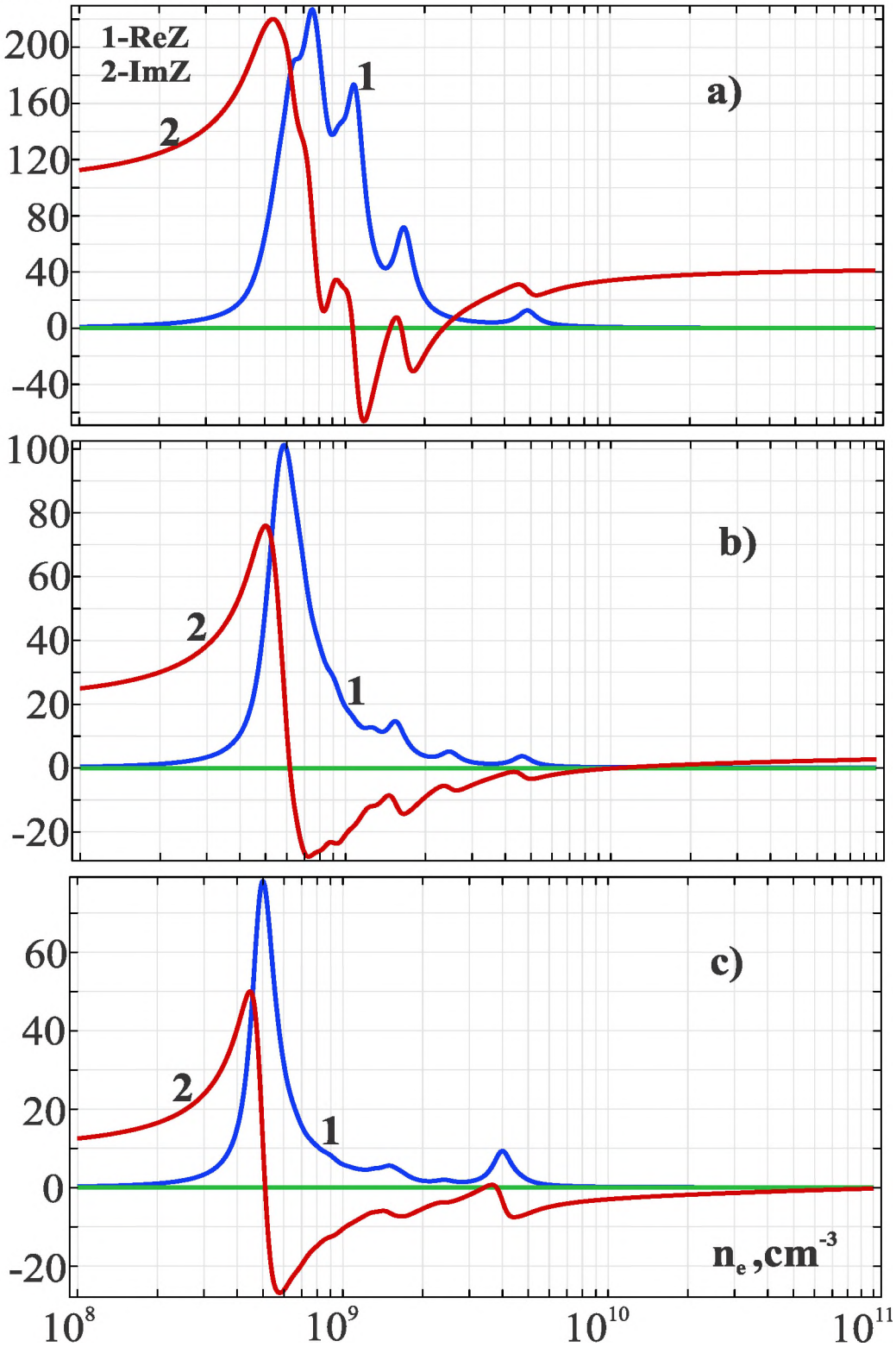

Рис. 3.2. Импеданс разряда в Омах для полностью заполненной плазмой камеры (1 – ReZ, 2 – ImZ) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Частота поля 135.6 Мгц, межэлектродное расстояние 2L= 8 см. Радиус разрядной камеры 10 (a)), 20 (b)) и 30 (c)) см. Отношение ν/ω равно 0.1. Синфазное возбуждение.

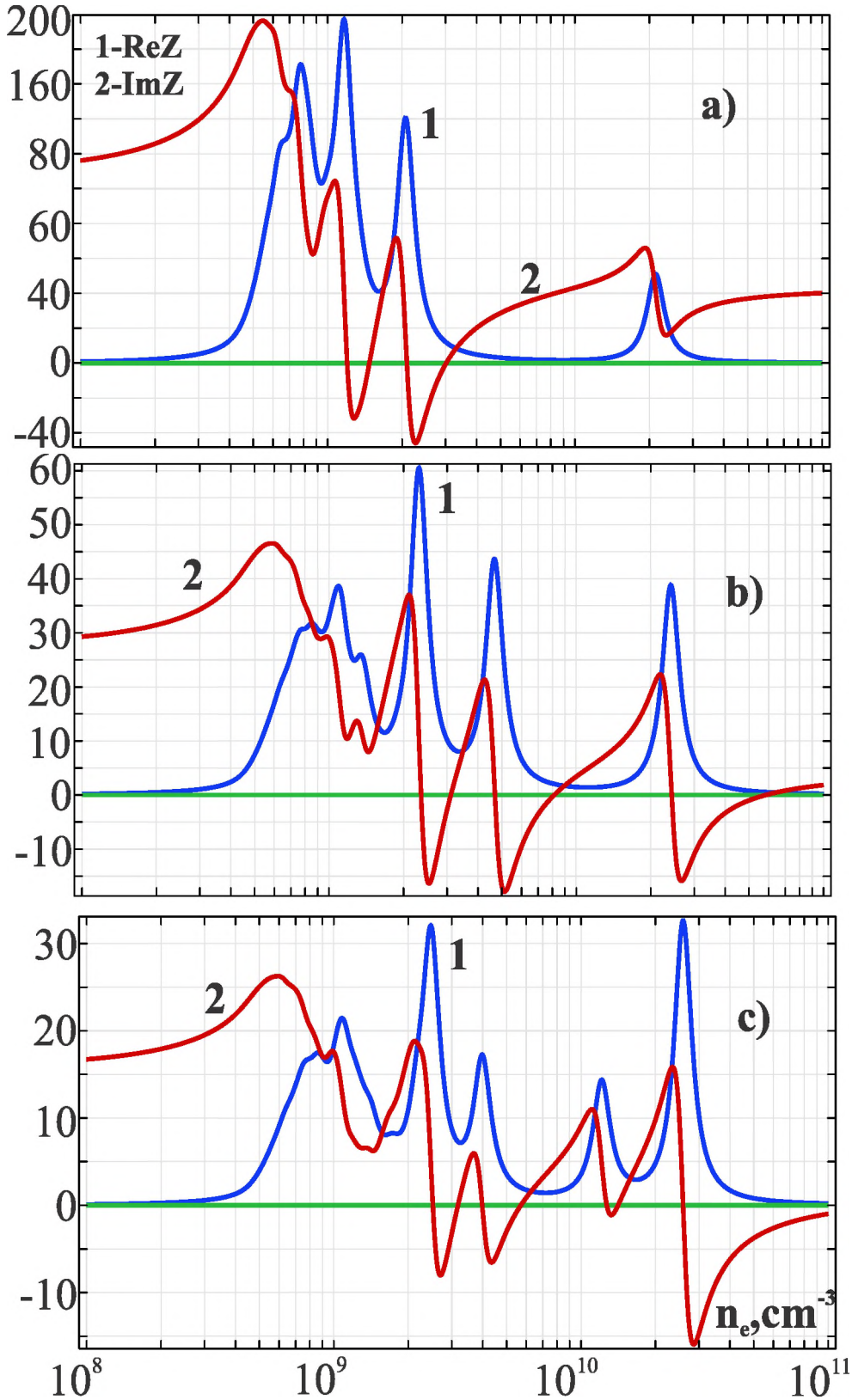

Рис. 3.3. Импеданс разряда в Омах для полностью заполненной плазмой камеры (1 – ReZ, 2 – ImZ) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Частота поля 135.6 Мгц, межэлектродное расстояние 2L= 8 см. Радиус разрядной камеры 10 (a)), 20 (b)) и 30 (c)) см. Отношение ν/ω равно 0.1. Противофазное возбуждение.

Укорочение поверхностной волны, происходящее при уменьшении плотности электронов, приводит к появлению резонансов, если размеры системы

кратны некоторому числу полуволн (мнимая часть импеданса разряда Z проходит через ноль). На зависимостях Z от плотности можно выделить резонансы тока (в резонансной точке $d\,\mathrm{Re}\,Z/dn_e<0$) и напряжения ($d\,\mathrm{Re}\,Z/dn_e>0$). На зависимостях $Y(n_e)=1/Z(n_e)$ знаки производных в резонансной точке $d\,\mathrm{Re}\,Y/dn_e$ будут обратными. Для антисимметричного поля (поверхностная волна короче) резонансы наблюдается при более высоких плотностях электронов, чем для симметричного. Рассчитанные численно зависимости импеданса от плотности электронов имеют сложный изрезанный характер, который не может быть объяснен при учете возбуждения только одной поверхностной волны, без учета высших мод, что необходимо принять во внимание при проведении аналитических расчетов.

§3.2. Аналитические формулы для импеданса, основанные на использовании собственных функций трехслойной волноведущей структуры

Для аналитического расчета импеданса плазмы, по аналогии с [13], представим поле внутри разрядной камеры в виде суммы собственных волн трехслойной структуры (ТС) металл – слой пространственного заряда – плазма – слой пространственного заряда – металл [10, 12, 217, 219]. Используя выражения, приведенные в главе 2 для электромагнитного поля при $r<R_1$, получим следующие представления для E_z и H_φ:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E_z}\\ \mathbf{H_\varphi}\end{pmatrix}=\left(A_{0+}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{0+z}}(z)J_0(h_{0+}r)\\ \mathbf{h_{0+\varphi}}(z)J_1(h_{0+}r)\end{pmatrix}+A_{0-}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{0-z}}(z)J_0(h_{0-}r)\\ \mathbf{h_{0-\varphi}}(z)J_1(h_{0-}r)\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{n+}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{n+z}}(z)I_0(\tilde{h}_{n+}r)\\ \mathbf{h_{n+\varphi}}(z)I_1(\tilde{h}_{n+}r)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{n-}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{n-z}}(z)I_0(\tilde{h}_{n-}r)\\ \mathbf{h_{n-\varphi}}(z)I_1(\tilde{h}_{n-}r)\end{pmatrix}\right)\exp(-i\omega t)\,. \qquad (3.1)$$

Здесь два первых слагаемых соответствуют возбуждению симметричной и антисимметричной поверхностных волн с радиальными постоянными распространения h_{0+} и h_{0-}, а сумма содержит затухающие моды (постоянные затухания $\tilde{h}_{n\pm}=ih_{n\pm}$). Для поля волны в периферийной области ($r>R_1$) можно записать аналогичные выражения

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E_z}\\ \mathbf{H_\varphi}\end{pmatrix}=\left(B_{0+}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{0+z}}(z)Q_0(h_{0+}r)\\ \mathbf{h_{0+\varphi}}(z)Q_1(h_{0+}r)\end{pmatrix}+B_{0-}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{0-z}}(z)Q_0(h_{0-}r)\\ \mathbf{h_{0-\varphi}}(z)Q_1(h_{0-}r)\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}B_{n+}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{n+z}}(z)K_0(\tilde{h}_{n+}r)\\ \mathbf{h_{n+\varphi}}(z)K_1(\tilde{h}_{n+}r)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}B_{n-}\begin{pmatrix}i\mathbf{e_{n-z}}(z)K_0(\tilde{h}_{n-}r)\\ \mathbf{h_{n-\varphi}}(z)K_1(\tilde{h}_{n-}r)\end{pmatrix}\right)\exp(-i\omega t)\,. \qquad (3.2)$$

В выражении (3.2)

$$Q_0\left(h_{0\pm}r\right)=H_0^{(1)}\left(h_{0\pm}r\right)+DH_0^{(2)}\left(h_{0\pm}r\right),\ Q_1\left(h_{0\pm}r\right)=H_1^{(1)}\left(h_{0\pm}r\right)+DH_1^{(2)}\left(h_{0\pm}r\right)$$

– решения уравнения Бесселя, удовлетворяющие условию $Q_0\left(h_{0\pm}R_1\right)=0$ на боковой стенке, откуда следует

$$D=-H_0^{(1)}\left(h_{0\pm}R\right)/H_0^{(2)}\left(h_{0\pm}R\right).$$

$J_n(x)$, $H_n^{(1,2)}(x)$, $I_n(x)$, $K_n(x)$ – функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода, Бесселя мнимого аргумента и Макдональда порядка n. В (3.1), (3.2) функции $\mathbf{e}_{m\pm}(z)$ и $\mathbf{h}_{m\varphi\pm}(z)$ зависят только от z, они приведены в приложении 2. Мы считаем, что расстояние между электродом и вакуумной камерой по радиусу мало, поэтому подводимое ВЧ напряжение равно разности напряжений на наружной и внутренней линиях передачи. Для расчета амплитуд поверхностной волны и высших мод будем предполагать, что это напряжение приложено на границах волновода $z=\pm L$. В разряде с одинаковой толщиной слоев у электродов $d_1=d_2=d$ условия равенства тангенциальных полей в точке возбуждения удобно записать отдельно для четных и нечетных волн:

$$\begin{gathered}A_{0-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{0-z}(z)J_0\left(h_{0-}r\right)\\ \mathbf{h}_{0-\varphi}(z)J_1\left(h_{0-}r\right)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{n-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{\mathbf{n}-z}(z)I_0\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\\ \mathbf{h}_{\mathbf{n}-\varphi}(z)I_1\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\end{pmatrix}-\\ -\left(B_{0-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{0-z}(z)Q_0\left(h_{0-}r\right)\\ \mathbf{h}_{0-\varphi}(z)Q_1\left(h_{0-}r\right)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}B_{n-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{\mathbf{n}-z}(z)K_0\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\\ -\mathbf{h}_{\mathbf{n}-\varphi}(z)K_1\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(U_1-U_2)\delta(z-L)/2\\ 0\end{pmatrix}\end{gathered},\quad (3.3)$$

$$\begin{gathered}A_{0-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{0-z}(z)J_0\left(h_{0-}r\right)\\ \mathbf{h}_{0-\varphi}(z)J_1\left(h_{0-}r\right)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_{n-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{\mathbf{n}-z}(z)I_0\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\\ \mathbf{h}_{\mathbf{n}-\varphi}(z)I_1\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\end{pmatrix}-\\ -\left(B_{0-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{0-z}(z)Q_0\left(h_{0-}r\right)\\ \mathbf{h}_{0-\varphi}(z)Q_1\left(h_{0-}r\right)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}B_{n-}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{\mathbf{n}-z}(z)K_0\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\\ -\mathbf{h}_{\mathbf{n}-\varphi}(z)K_1\left(\tilde{h}_{n-}r\right)\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(U_1-U_2)\delta(z-L)/2\\ 0\end{pmatrix}\end{gathered}.$$

В силу симметрии при расчетах рассматривается только одна из половин ($z>0$) разрядной камеры, для нее же рассчитывается падение напряжение и импеданс. Для определения коэффициентов разложения в рядах (3.1) и (3.2) необходимо умножить скалярно выражения (3) на соответствующие собственные функции сопряженного оператора $\mathbf{e}^{+}_{m\pm z}(z)$ и $\mathbf{h}^{+}_{m\varphi\pm}(z)$ [183, 214] и проинтегрировать по оси 0Z с учетом веса и условий ортогональности (глава 2). Магнитные поля (H_φ) Е-волн удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{dH_\varphi}{dz}+\left(k_0^2-\frac{h^2}{\varepsilon(z)}\right)H_\varphi=0$$

поэтому собственные функции магнитного поля будут ортогональны с весом $\varepsilon(z)^{-1}$. Поскольку в условиях газового разряда в пределах волновода весовой множитель $\varepsilon(z)^{-1}$ будет знакопеременным, общие математические теоремы об

ортогональности и полноте системы собственных волн, предполагающие постоянность знака весового множителя [215], могут оказаться неприменимыми для нашего волновода, не удовлетворяющего этому условию. Прямой расчет показывает (См. Приложение 1), что собственные функции для магнитного поля ($\mathbf{h}_{m\varphi}$) ортогональны с весом $\varepsilon(z)^{-1}$. Собственные функции для z-компоненты электрического поля ($\mathbf{e}_{mz}$), ортогональны с весом $\varepsilon(z)$. Функции, представляющие радиальную компоненту электрического поля пропорциональны производной магнитного поля по координате z. Для поперечных компонент поля (E_z и H_φ) условия ортогональности можно записать также исходя из уравнений Максвелла в волноводном представлении, исключая из рассмотрения радиальные компоненты [183, 214]

$$\mathrm{rot}_\perp \mathbf{E}_\perp - ih\left(\mathbf{e}_\mathrm{r}\times\mathbf{E}_\perp\right) = ik\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H}_\perp,\ \mathrm{rot}_\perp \mathbf{H}_\perp + ih\left(\mathbf{H}_\perp\times\mathbf{e}_z\right) = -ik\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\varepsilon\mathbf{E}_\perp. \qquad (3.4)$$

В этом случае они имеют вид $\left(\mathbf{e}_{n\pm},\mathbf{h}^+_{m\pm}\right) = \delta_{nm}N^2_{m\pm}$, $\left(\mathbf{h}_n,\mathbf{e}^+_{m\pm}\right) = \delta_{nm}\tilde{N}^2_{m\pm}$, где $\left\{\mathbf{e}^+_{m\pm},\mathbf{h}^+_{m\pm}\right\}$ – полная система собственных функций сопряженного к (3.4) оператора, а $N_{m\pm}$, $\tilde{N}_{m\pm}$ – соответствующие нормы. Выражения для норм совпадают с приведенными в Приложении 3 с точностью до постоянного множителя. При этом из системы уравнений (3) следуют выражения для коэффициентов $U_\pm = \left(U_1 \pm U_2\right)$

$$\begin{aligned} &A_{0\pm}J_1\left(h_{0\pm}R_1\right) = B_{0\pm}Q_1\left(h_{0\pm}R_1\right),\quad A_{0\pm}J_0\left(h_{0\pm}R_1\right) - B_{0\pm}Q_0\left(h_{0\pm}R_1\right) = -iU_\pm\frac{\mathbf{e}^+_{0\pm z}(L)}{N^{E2}_{0\pm}},\\ &A_{n\pm}I_1\left(\tilde{h}_{n\pm}R_1\right) = -B_{n\pm}K_1\left(\tilde{h}_{n\pm}R_1\right),\quad A_{j\pm}I_0\left(\tilde{h}_{n\pm}R_1\right) - B_{j\pm}K_0\left(h_{0\pm}R_1\right) = -iU_\pm\frac{\mathbf{e}^+_{n\pm z}(L)}{N^{E2}_{j\pm}}. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Из (3.5) следуют выражения для коэффициентов разложения

$$\begin{aligned} A_{0\pm} &= -iU_\pm\frac{\mathbf{e}_{0\pm z}(L)}{N^{E2}_{0\pm}}\left(J_0\left(h_{0\pm}R\right) - \frac{J_1\left(h_{0\pm}R\right)}{Q_1\left(h_{0\pm}R\right)}Q_0\left(h_{0\pm}R\right)\right)^{-1},\\ A_{n\pm} &= -iU_\pm\frac{\mathbf{e}_{0\pm z}(L)}{N^{E2}_{j\pm}}\left(I_0\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right) + \frac{I_1\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right)}{K_1\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right)}K_0\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right)\right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

и для тока разряда

$$\begin{aligned} I_\pm = -2\pi iR_2U_\pm\Bigg(&\left(\frac{J_0\left(h_{0\pm}R\right)}{J_1\left(h_{0\pm}R\right)} - \frac{Q_0\left(h_{0\pm}R\right)}{Q_1\left(h_{0\pm}R\right)}\right)^{-1}\frac{\mathbf{e}^+_{0\pm\varphi}(L)\mathbf{h}_{0\pm\varphi}(L)}{N^{E2}_{0\pm}} +\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{I_0\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right)} + \frac{K_0\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right)}{K_1\left(\tilde{h}_{n\pm}R\right)}\right)^{-1}\frac{\mathbf{e}^+_{n\pm\varphi}(L)\mathbf{h}_{n\pm\varphi}(L)}{N^{E2}_{n\pm}}\Bigg). \end{aligned}$$

Используя связь собственных функций для электрического и магнитного полей, получим

$$I_{\pm} = -2\pi i R_2 U_{\pm}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \times \left(\left(\frac{J_0(h_{n\pm}R)}{J_1(h_{0\pm}R)} - \frac{Q_0(h_{0\pm}R)}{Q_1(h_{0\pm}R)} \right)^{-1} \frac{k}{h_{0\pm}} \frac{\mathbf{h}_{0\pm\varphi}(L)\mathbf{h}^{+}_{0\pm\varphi}(L)}{N^{H2}_{0\pm}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{I_0(\tilde{h}_{n\pm}R)}{I_1(\tilde{h}_{n\pm}R)} + \frac{K_0(\tilde{h}_{n\pm}R)}{K_1(\tilde{h}_{n\pm}R)} \right)^{-1} \frac{k}{\tilde{h}_{n\pm}} \frac{\mathbf{h}_{n\pm\varphi}(L)\mathbf{h}^{+}_{n\pm\varphi}(L)}{N^{H2}_{n\pm}} \right) . \quad (3.7)$$

Импеданс разряда при симметричном Z_+ или антисимметричном Z_- возбуждении может быть рассчитан по формуле

$$Z_{\pm} = \frac{iL}{2\pi R_1}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \times \left(\left(\frac{J_0(h_{n\pm}R_1)}{J_1(h_{0\pm}R_1)} - \frac{Q_0(h_{0\pm}R_1)}{Q_1(h_{0\pm}R_1)} \right)^{-1} \frac{k}{h_{0\pm}} \frac{\mathbf{h}_{0\pm\varphi}(L)\mathbf{h}^{+}_{0\pm\varphi}(L)L}{N^{H2}_{0\pm}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{I_0(\tilde{h}_{n\pm}R_1)}{I_1(\tilde{h}_{n\pm}R_1)} + \frac{K_0(\tilde{h}_{n\pm}R_1)}{K_1(\tilde{h}_{n\pm}R_1)} \right)^{-1} \frac{k}{\tilde{h}_{n\pm}} \frac{\mathbf{h}_{n\pm\varphi}(L)\mathbf{h}^{+}_{n\pm\varphi}(L)L}{N^{H2}_{n\pm}} \right) . \quad (3.8)$$

Простой вид последней формулы по сравнению с приведенной в Главе 2 [13], связан с тем, что согласно (3.5) коэффициенты разложения зависят только от приложенного к разряду напряжения и не зависят от протекающего по разряду тока. В общем случае напряжение на электродах U_1, U_2 и их токи I_1, I_2 связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_+ + Z_- & Z_+ - Z_- \\ Z_+ - Z_- & Z_+ + Z_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что разомкнутая линия передачи между электродами ($r<R_1$) и замкнутая линия передачи между точкой возбуждения и стенкой ($r>R_1$) подключены к источникам питания последовательно. Линии, соответствующие поверхностным волнам и высшим модам поля соединены параллельно. В данном приближении классический геометрический резонанс напряжений плазма-слой пространственного заряда невозможен. В одномодовом режиме резонанс напряжений происходит, если напряжение на внутренней разомкнутой линии ($0<r<R_1$) равно напряжению на внешней замкнутой линии ($0<r<R_1$). Это условие соответствует выполнению соотношения $Q_1(h_{0\pm}R)J_0(h_{0\pm}R) - J_1(h_{0\pm}R)Q_0(h_{0\pm}R) = 0$.

Обращение тока в ноль означает обращение в бесконечность импеданса одной из упомянутых выше соединенных последовательно линий $Q_1(h_{0\pm}R) = 0$ или $J_1(h_{0\pm}R) = 0$. При этом точка подвода мощности совпадает с узлом тока одной из волн. Согласно (3.8) импеданс обращается в бесконечность (в отсутствие потерь), если диэлектрическая проницаемость плазмы равно нулю, так как в этом случае в плазме ток смещения компенсируется током проводимо-

сти, магнитное поле не возбуждается и отсутствует протекание тока по электроду и стенке трубки. Этот резонанс аналогичен резонансу трубки, ограниченной диэлектриком, и при учете ёмкости подводящей линии он сдвигается в область более высоких плотностей электронов [13]. Резонанс напряжений наблюдается в том случае, если емкостной импеданс разомкнутой центральной линии передачи компенсируется индуктивным импедансом замкнутой периферийной линии.

Согласно Приложению 3 при плотностях электронов выше удвоенной критической $N_{0\pm}^2 > 0$ и $N_{n\pm}^2 < 0$, поверхностная волна вносит емкостной импеданс, а высшие моды – индуктивный. Однако в отличие от разряда, ограниченного диэлектрическими стенками [13], в данном случае амплитуды высших мод оказываются достаточно малыми, поскольку они возбуждаются не в центральной области (здесь амплитуды полей высших мод велики), а в области слоя, где поля высших волн малы. Поэтому их амплитуды и вклады в импеданс должны быть существенно ниже, чем в предыдущем случае.

Результаты расчета импеданса разряда по формулам для синфазного и противофазного возбуждения (рис. 3.4) показывают, что для в обоих случаях в области возбуждения поверхностных волн импеданс в среднем имеет индуктивный характер, который приносят нераспространяющиеся моды, но совместно с импедансом, вносимым поверхностными волнами, он может быть и емкостным, и индуктивным в зависимости от радиуса и плотности плазмы. Для симметричного возбуждения индуктивная составляющая импеданса выше из-за большей глубины проникновения волны в плазму (меньших значений постоянной затухания $\tilde{h}_{n\pm}$). Резонансный характер зависимости импеданса от плотности электронов в условиях расчета сильнее проявляется в разряде меньшего размера, что связано с большим затуханием поверхностной волны при распространении к центру разряда. Поскольку импеданс разряда очень сильно зависит от плотности электронов, в области 1 (n_e<2n_C) масштаб кривых на рисунке уменьшен в 20 раз.

Прямое сравнение аналитических расчетов (рис. 3.4) с результатами моделирования (рис. 3.2, 3.3) невозможно, так как в первом случае рассчитывается импеданс в точке возбуждения (r=(R_1+R_2)/2). а во втором – в сечениях 6 (рис. 3.1), поэтому к току протекающему через разряд добавляется ток протекающий по отрезку линии передачи, подводящей ВЧ мощность к разряду. Длина этой линии много меньше длины волны, и, общий импеданс разряда $\hat{Z}$ будет ([51])

$$\hat{Z} = Z_{\pm} \Big/ \left(1 - ikC \cdot Z_{\pm} \Big/ \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\right),$$

Результаты расчета по этой формуле показаны на рис. 3.5. Дополнительная

емкость, вносимая внешней цепью считалась равной 10, 30 и 50 пФ для радиусов разрядной камеры 10, 20 и 30 см, что примерно соответствует емкости цилиндрического конденсатора с радиусами электродов R_1 и R_2 и высотой цилиндра 1 см. Сопоставление с расчетом в COMSOL Multiphysics® (рис. 3.2, 3.3) дают качественное, а иногда и количественное, совпадение для симметричного разряда, несмотря на пренебрежение слоями пространственного заряда у боковой стенки, учете только трех электродинамических мод и пренебрежение конечным размером области возбуждения.

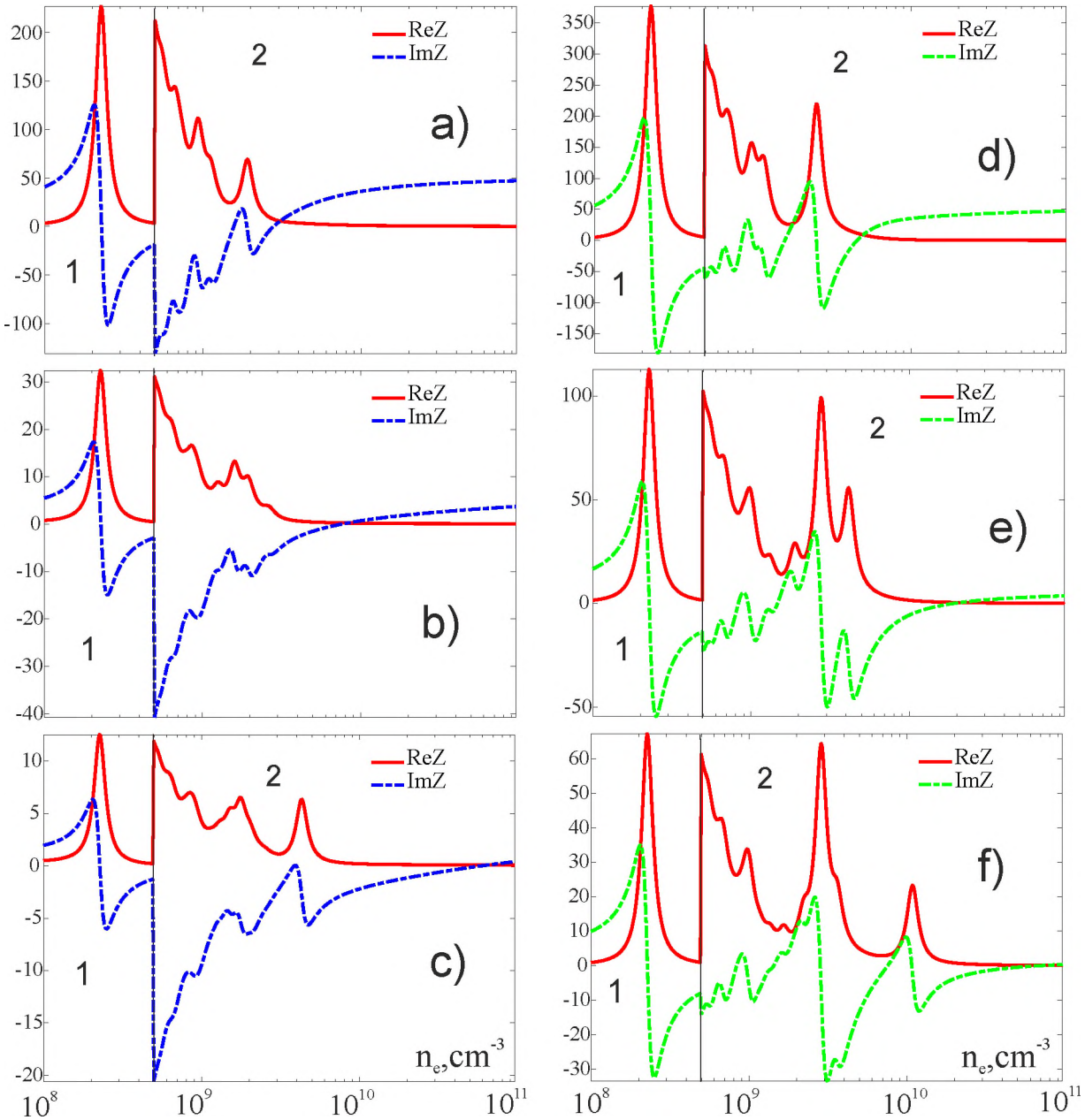

Рис. 3.4. Импеданс разряда в Омах для полностью заполненной плазмой камеры (1 – ReZ, 2 – ImZ) толщина слоев d_1=d_2=d_4=3 мм при симметричном (a), b), c)) и антисимметричном (d), e), f)) возбуждении. Частота 135.6 Мгц. Радиус разрядной камеры 10 (a), d)), 20 (b), e)) и 30 (c), f)) см. Расчет по аналитическим формулам. Отношение ν/ω равно 0.1

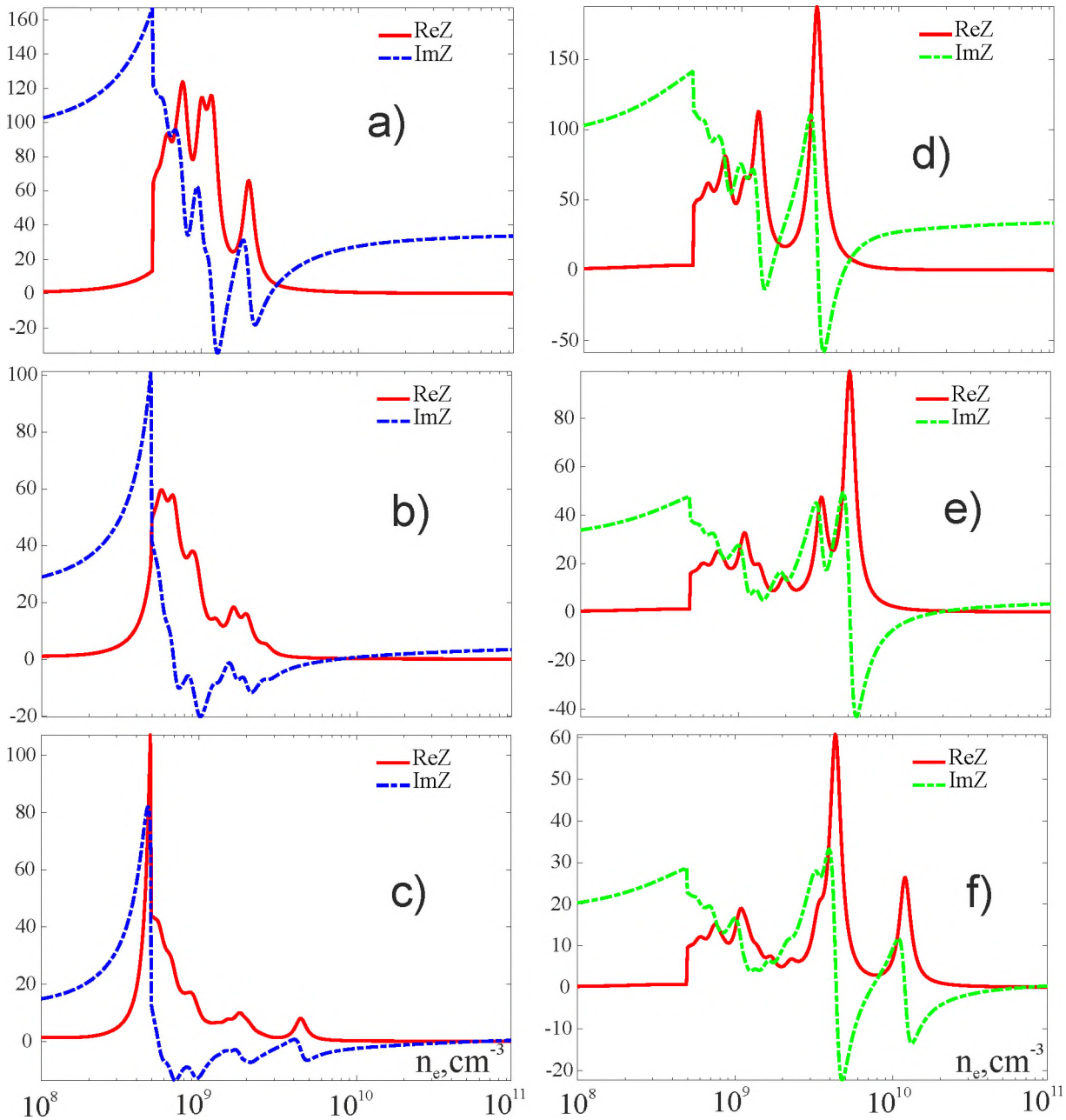

Рис. 3.5. Импеданс разряда в Омах для полностью заполненной плазмой камеры (1 – ReZ, 2 – ImZ) толщина слоев d_1=d_2=d_4=3 мм при симметричном (a), b), c)) и антисимметричном (d), e), f)) возбуждении. Частота 135.6 МГц. Радиус разрядной камеры 10 (a), d)), 20 (b), e)) и 30 (c), f)) см. Расчет по аналитическим формулам при учете дополнительной емкости, вносимой подводящей линией передачи. Отношение ν/ω равно 0.1

Аналитические формулы правильно описывают в среднем индуктивный характер разряда в области концентраций электронов $5\cdot10^8$ – $5\cdot10^9$ см$^{-3}$, положение резонансов и значение импеданса в нерезонансной области. Существенная погрешность наблюдается при описании формы резонанса токов, лежащего в области границы существования поверхностных волн (n_e~$2n_C$), что связано с неприменимостью в этой области использованной для их описания теории возмущений.

Для антисимметричного возбуждения, несмотря на общее качественное согласие аналитических и численных расчетов, наблюдается большее число резонансов и другое их расположение на оси плотностей электронов. Вероятно, это отличие обусловлено отсутствием учета слоя пространственного заряда у боковой стенки в рассматриваемой модели. При симметричном возбуждении ток течет по боковой стенке, параллельно границе плазмы, токи через СПЗ малы и их влияние несущественно. При антисимметричном возбуждении ток обязательно протекает через СПЗ, можно ожидать появления резонанса, аналогичного резонансу плазма-слой пространственного заряда, между индуктивным импедансом плазмы (или длинной линии между областью возбуждения и слоем), и импедансом слоя у боковой границы плазмы. Так как осевое распределение поля неоднородно, то возможно также резонансное возбуждение поверхностных волн, распространяющихся вдоль боковой поверхности вакуумной камеры. В данном разделе эти процессы не рассматриваются в силу их несущественности при симметричном возбуждении плазмы и математической громоздкости.

§3.3. Численный расчет пространственной структуры поля в разряде и анализ природы резонансов

Проведем сравнение результатов аналитического анализа с данными численного моделирования структуры электромагнитного поля с помощью пакета COMSOL Multiphysics®. Будут приведены результаты для плотностей электронов, для которых наблюдался резонанс токов и напряжений (см. рис. 3.2, 3.3) или наблюдалось резкое изменение реактивной части импеданса при увеличении мнимой. В обсуждении мы будем использовать распределения магнитного поля для условий, при которых различные типы распределений проявляют себя наиболее ярко. Картинки действительной и мнимой компонент поля показаны на рис. 3.6–3.8 (для синфазного возбуждения плазмы) и рис. 3.9–3.11 (для противофазного) в разрядных камерах с внешним радиусом 10 см (рис. 3.6, 3.9), 20 см (рис. 3.7, 3.10) и 30 см (рис. 3.8, 3.11).

В области плотностей электронов $3\cdot10^8<n_e<5\cdot10^8$ см$^{-3}$ ($n_C<n_e<2n_C$) поверхностные волны не распространяются, и поле в области возбуждения затухает на глубине скин-слоя (рас. 6a,b, 7a,b, 8a,b,c,d, 9a,b, 10a,b).

При плотности электронов слегка выше удвоенной критической во всех случаях в плазме возбуждается поверхностная волна, распространяющаяся в обе стороны от области возбуждения. Коэффициент поглощения коротких поверхностных волн велик, поэтому волна затухает быстрее, чем дойдет до центра рабочей камеры или до боковой стенки (рис. 6–11).

Увеличение плотности электронов сопровождается увеличением длины

поверхностной волны и уменьшением ее коэффициента затухания (см. [46, 50, 51]. Поэтому в окрестности источника формируется стоячая поверхностная волна, а при определенных плотностях наблюдаются резонансы токов и напряжений.

Поскольку длина поверхностных волн при противофазном возбуждении меньше, чем при синфазном, то для противофазного возбуждения резонанс с целым числом полуволн наблюдается при более высоких плотностях электронов, чем при синфазном возбуждении. Согласно расчетам дисперсионной кривой (Глава 2) резонанс напряжений, соответствующий наибольшей плотности ($h_{0\pm}R$=2.405) должен наблюдаться: при плотностях $5\cdot10^9$ см$^{-3}$ и $3\cdot10^9$ см$^{-3}$ для радиуса 10 см, при $7.3\cdot10^9$ см$^{-3}$ и $1.8\cdot10^9$ см$^{-3}$ для радиуса 20 см (первое число соответствует синфазному, а второе – противофазному возбуждению) и ~$7\cdot10^{10}$ см$^{-3}$ для 30 см. При радиусе 30 см резонансные плотности и в первом, и во втором случае близки, так как волны у различных границ плазмы плохо проникают в нее и взаимодействуют слабо. Для синфазного возбуждения эти цифры близки к полученным в численных расчетах. При более высоких плотностях разряд имеет емкостной импеданс. На ряде рисунков максимум магнитного поля у бокового слоя достигается в центральной (по координате z) части трубки, это свидетельствует о возбуждении в окрестности боковой стенки стоячей поверхностной волны (рис. 3.6m,n,o,p, рис. 3.7j,l). На рисунках 8m,n магнитное поле поверхностной волны сдвинуто примерно на $\pi/2$ относительно поля основной моды, что говорит о резонансном характере возбуждения. На рисунке 8 таких распределений нет, что, по-видимому, связано с более сильным затуханием основной поверхностной волны, распространяющейся вдоль электродов. Вносимые этой волной потери подавляют возможность резонанса.

Для противофазного возбуждения (рис. 3.9–3.11) рост плотности электронов также приводит к появлению ярко выраженной стоячей поверхностной волны в радиальном направлении, число полуволн которой уменьшается с ростом плотности электронов. Резонанс напряжений при этом наблюдается при более высоких плотностях электронов, чем это следует из простой оценки, следующей из расчета дисперсионной зависимости. Для разряда в камере радиусом 30 см эта плотность, соответствующая резонансу напряжений, лежит при плотностях выше 10^{11} см$^{-3}$ поэтому этот резонанс на рис. 3 отсутствует. Анализ пространственных распределений магнитного поля показывает, что максимальные поля сосредоточены в периферийной области (рис. 3.10o,p,q,r и 3.11s,t,u,v), поэтому разряд при этих плотностях должен существовать в режиме резонанса плазма-слой в периферийной области. При радиусе электрода 10 см разряд и без учета слоя пространственного заряда

имеет емкостной импеданс, поэтому дополнительная емкость, вносимая периферийным слоем пространственного заряда, не меняет емкостной характер

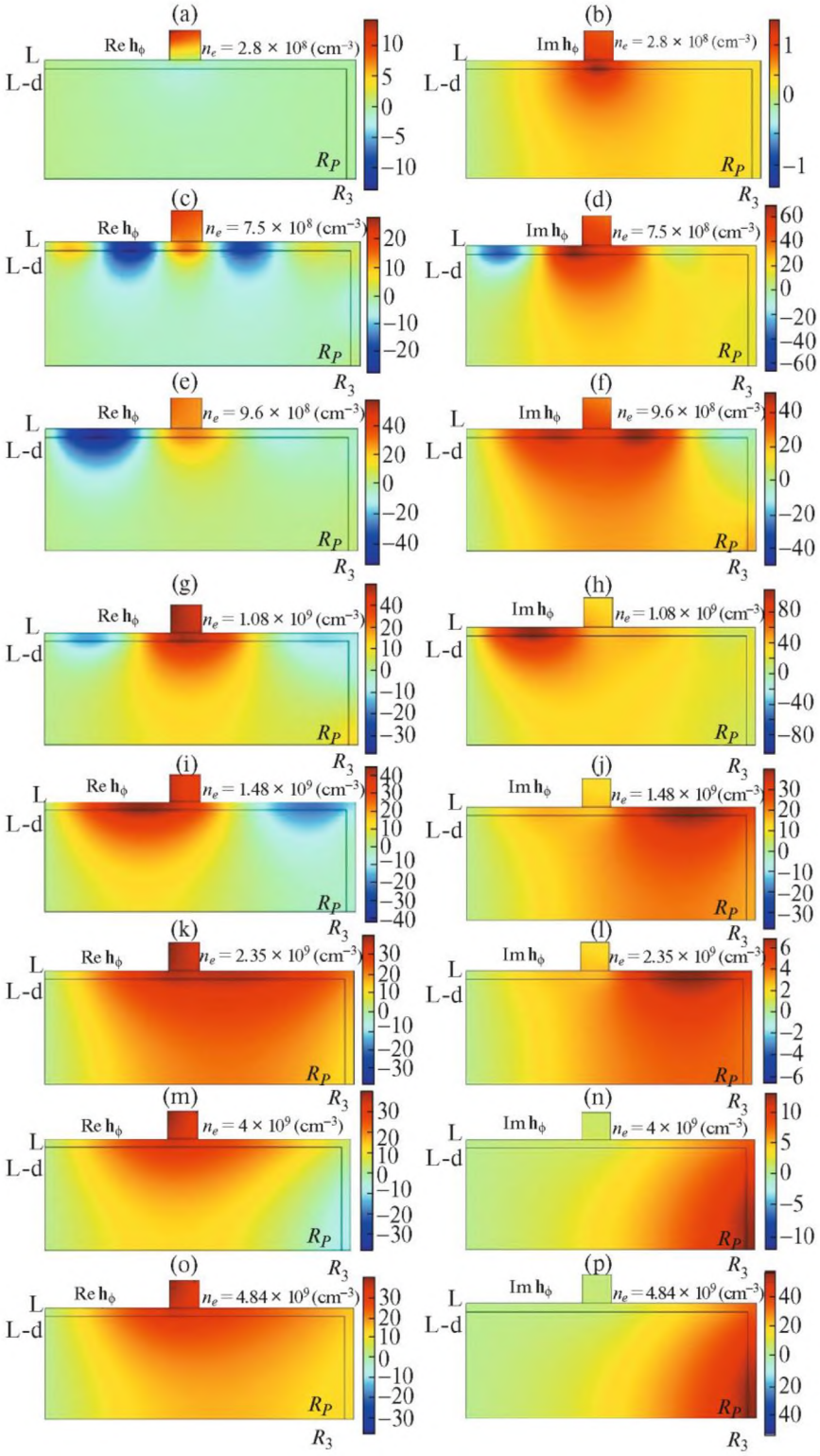

Рис. 3.6. Изменение пространственной структуры магнитого поля с ростом плотности эленктронов для полностью заполненной плазмой камеры (слева – ReH, справа – ImH, А/м) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Поле возбуждается током I=1A частотой 135.6 Мгц. Радиус разрядной камеры 10 см. Симметричное возбуждение. Плотность электронов приведена на рисунке. Отношение ν/ω равно 0.1

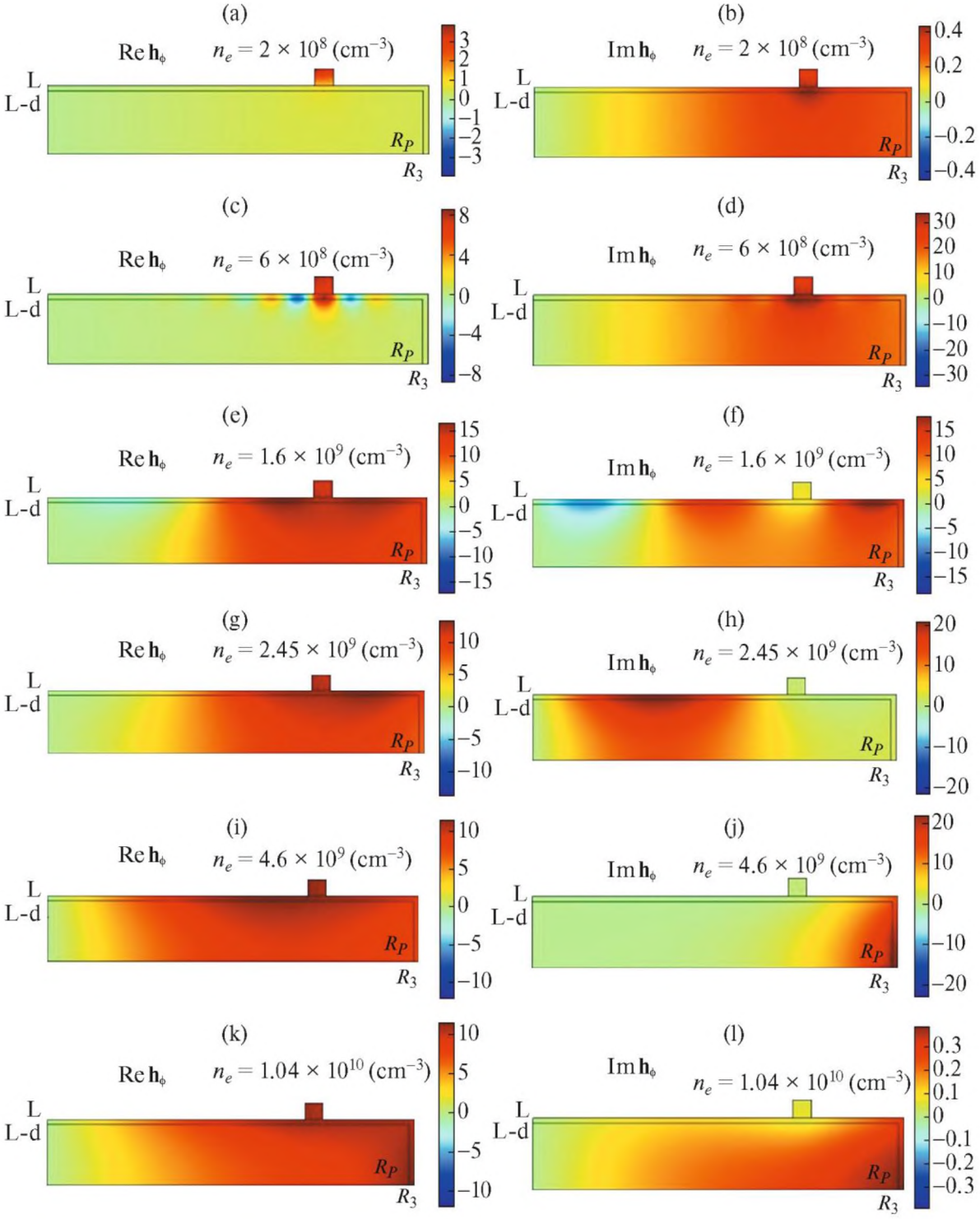

Рис. 3.7. Изменение пространственной структуры магнитого поля с ростом плотности эленктронов для полностью заполненной плазмой камеры (слева – ReH, справа – ImH, А/м) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Поле возбуждается током I=1A частотой 135.6 Мгц. Радиус разрядной камеры 20 см. Симметричное возбуждение. Плотность электронов приведена на рисунке. Отношение ν/ω равно 0.1

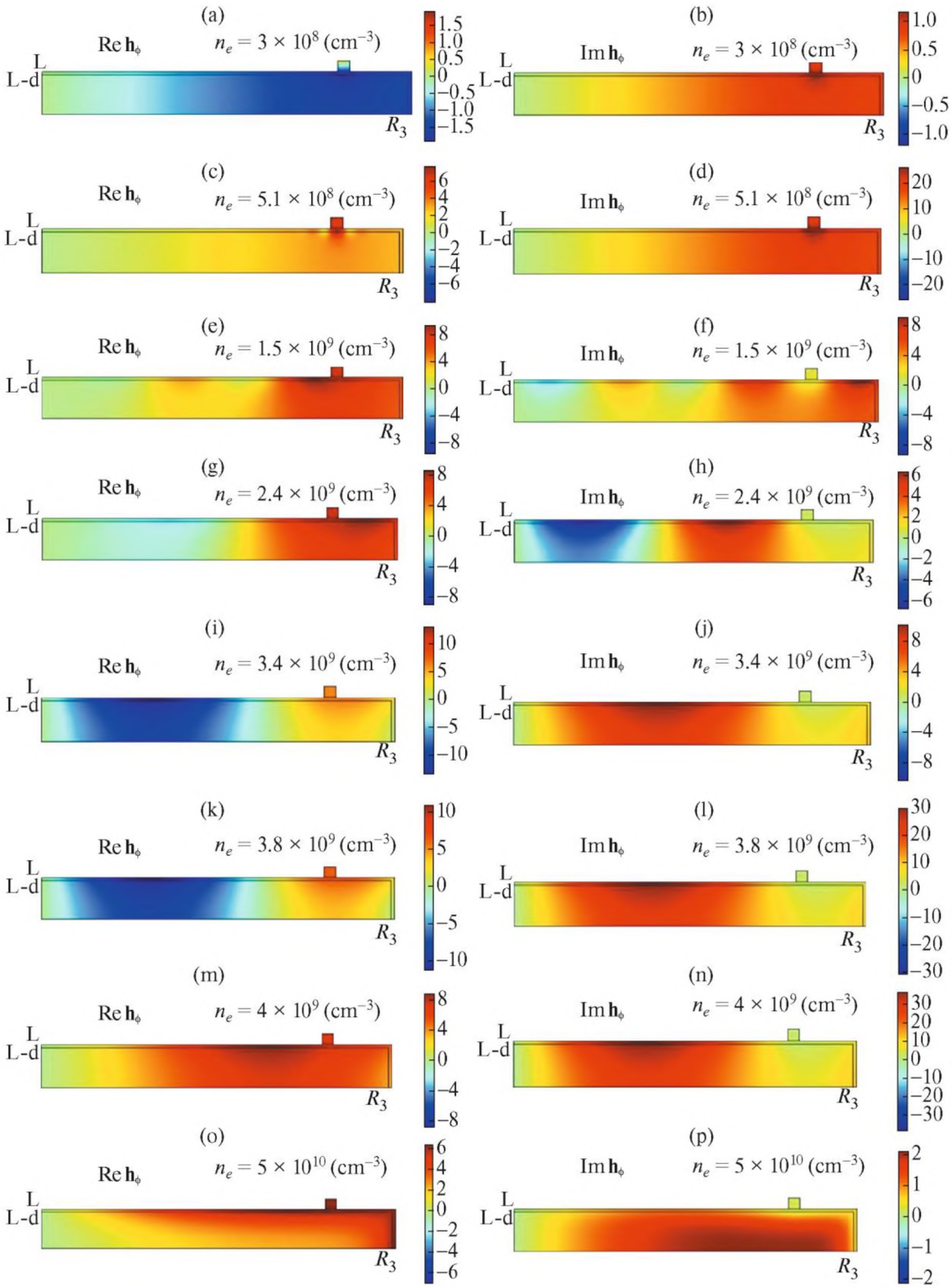

Рис. 3.8. Изменение пространственной структуры магнитого поля с ростом плотности эленктронов для полностью заполненной плазмой камеры (слева – ReH, справа – ImH, А/м) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Поле возбуждается током I=1A частотой 135.6 Мгц. Радиус разрядной камеры 30 см. Симметричное возбуждение. Плотность электронов приведена на рисунке. Отношение ν/ω равно 0.1

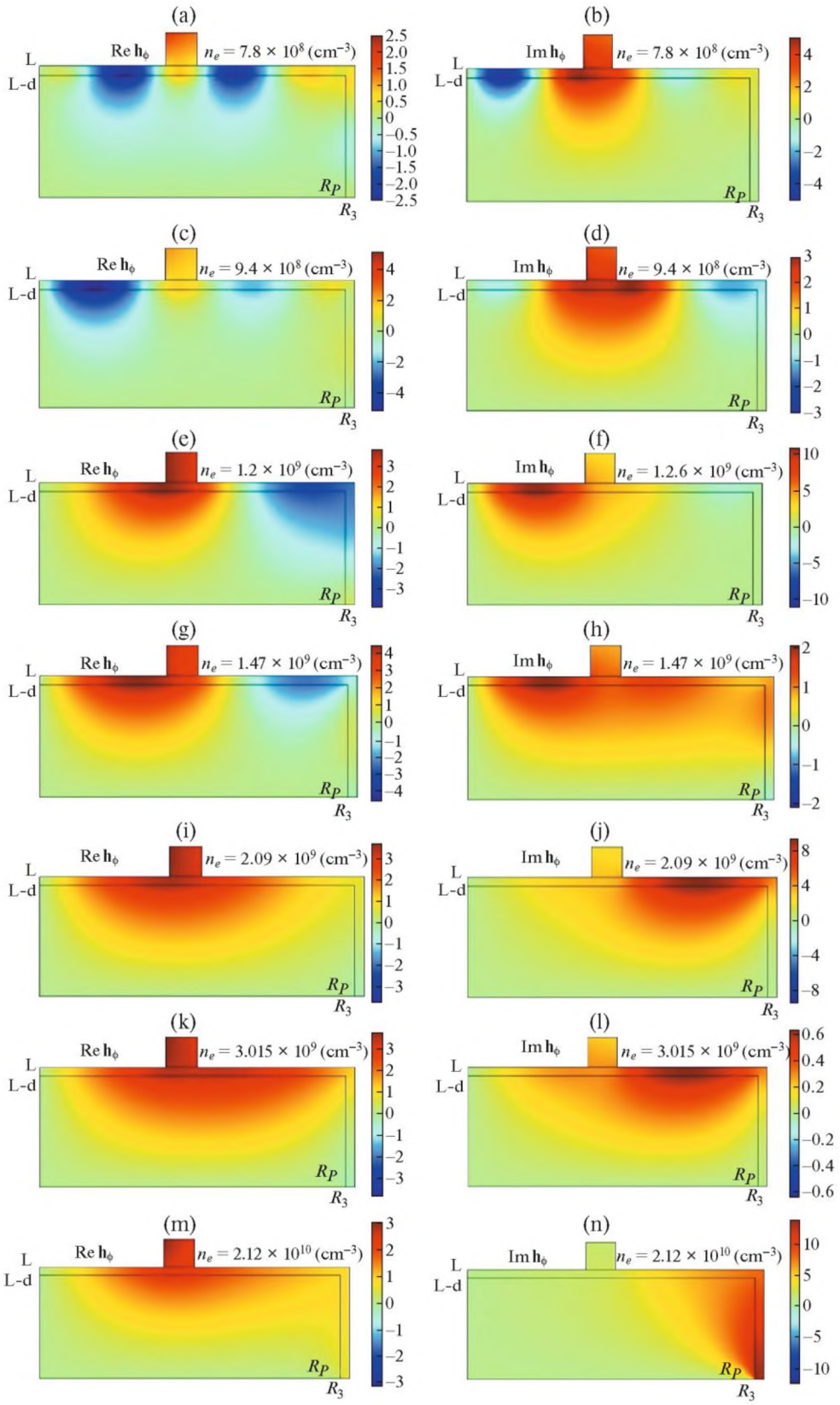

Рис. 3.9. Изменение пространственной структуры магнитого поля с ростом плотности эленктронов для полностью заполненной плазмой камеры (слева – ReH, справа – ImH, А/м) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Поле возбуждается током I=1А частотой 135.6 Мгц. Радиус разрядной камеры 10 см. Антисимметричное возбуждение. Плотность электронов приведена на рисунке. Отношение ν/ω равно 0.1

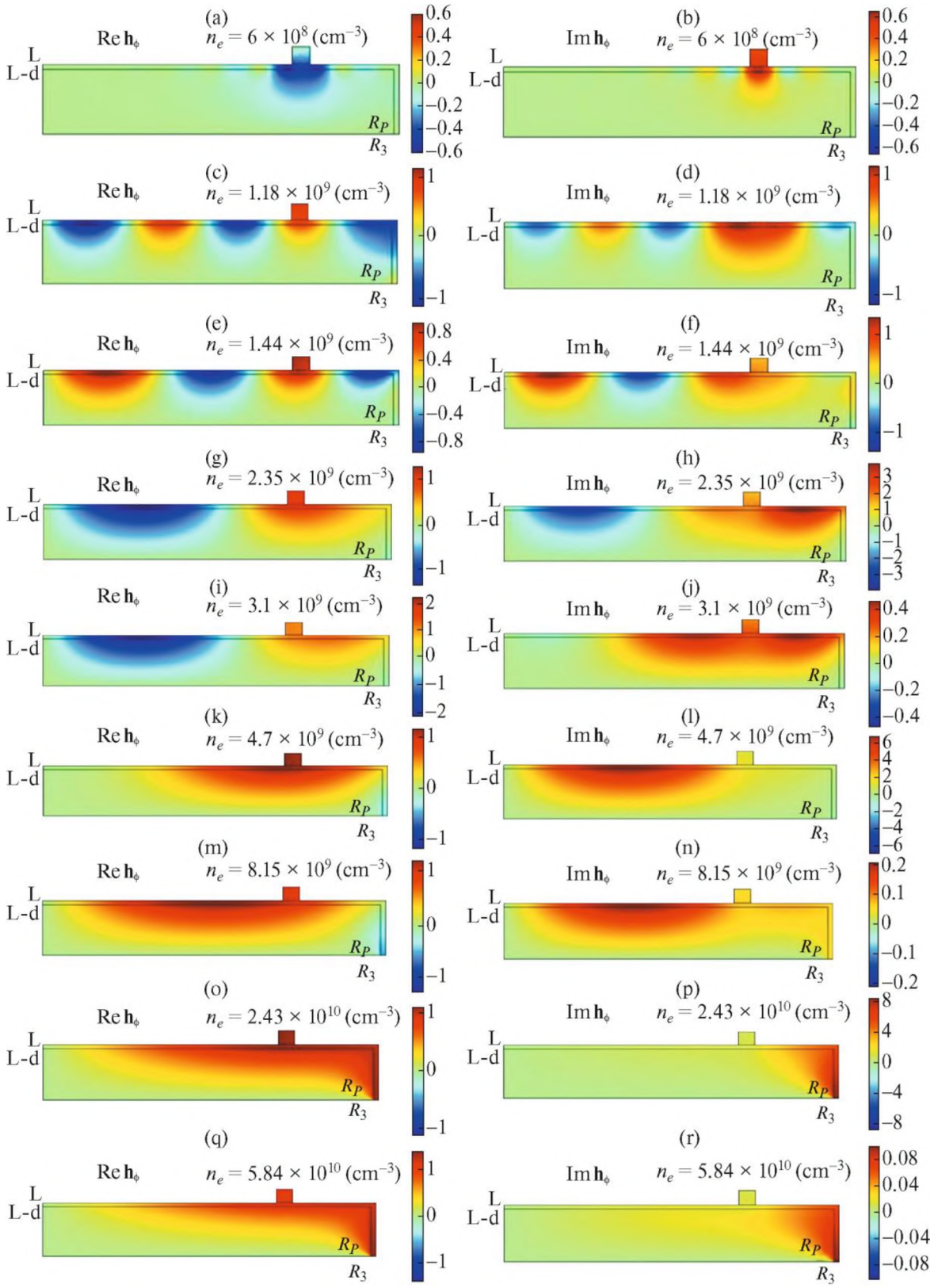

Рис. 3.10. Изменение пространственной структуры магнитого поля с ростом плотности эленктронов для полностью заполненной плазмой камеры (слева – ReH, справа – ImH, А/м) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Поле возбуждается током I=1А частотой 135.6 Мгц. Радиус разрядной камеры 20 см. Антисимметричное возбуждение. Плотность электронов приведена на рисунке. Отношение ν/ω равно 0.1

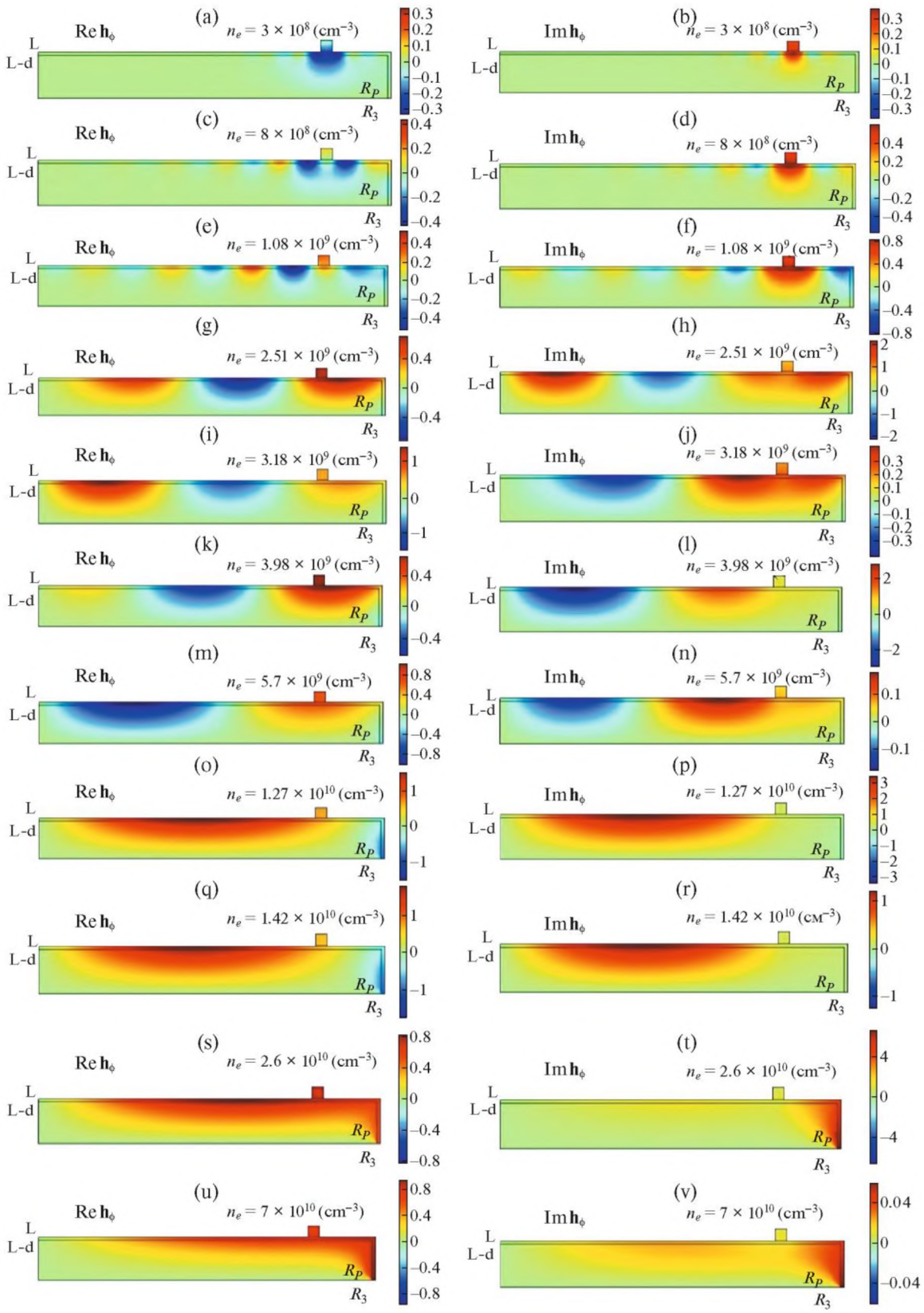

Рис. 3.11. Изменение пространственной структуры магнитого поля с ростом плотности эленктронов для полностью заполненной плазмой камеры (слева – ReH, справа – ImH, А/м) толщина слоев d_1=d_2=d_3=3 мм. Поле возбуждается током I=1A частотой 135.6 Мгц. Радиус разрядной камеры 30 см. Антисимметричное возбуждение. Плотность электронов приведена на рисунке. Отношение ν/ω равно 0.1

импеданса. Однако максимум распределения поля при высоких плотностях электронов также наблюдается в периферийной области (рис. 3.9m,n). Данные, представленные на рисунках, показывают, что амплитуда этого поля может существенно меняться от значения, превышающего амплитуду поля радиальной волны (рис. 3.9m,n, рис. 3.10o,p, рис. 3.11s,t), до пренебрежимо малой, по сравнению с ней, величины (рис. 3.10q,r, рис. 3.11u,v).

Сложный характер изменения импеданса в области плотностей электронов $4\cdot10^8$– $4\cdot10^9$ см$^{-3}$ также демонстрирует возможность возбуждения поверхностных волн у торца плазмы, которая не рассматривалась в аналитических исследованиях в данной работе. Суммируем более кратко основные физические выводы из приведенных выше аналитических и численных расчетов.

1. Импеданс разряда, который важен для согласования технологических процессов, определяется как высшими нераспространяющимися модами поля, возбуждаемыми в окрестности области возбуждения, так и поверхностными волнами, распространяющимися вдоль интерфейса плазма-слой пространственного заряда-металл. В рассматриваемом приближении (R_2–R_1<<L различные моды волн возбуждаются независимо друг от друга (параллельное включение импедансов), что отражено появлением соответствующих слагаемых только в фигурных скобках в знаменателе (3.8). При этом линии передачи, соответствующие возбуждению волн в центральной и периферийной области, оказываются соединенными последовательно (слагаемые в круглых скобках скобках). Таким образом, изменяя точку подвода энергии можно изменять соотношение между амплитудами полей в центральной и периферийной областях. Соотношение амплитуд поверхностных волн и высших мод определяется близостью слагаемого для поверхностных волн $\left(J_0\left(h_{0\pm}R\right)/J_1\left(h_{0\pm}R\right)-Q_0\left(h_{0\pm}R\right)/Q_1\left(h_{0\pm}R\right)\right)$ к резонансу. Коэффициент связи соответствующей линии передачи с источником поля зависит от множителей $k\,\mathbf{h}_{n\pm\varphi}\left(L\right)\mathbf{h}^{+}_{n\pm\varphi}\left(L\right)L\Big/\left(\tilde{h}_{n\pm}N^{H2}_{n\pm}\right)$, то есть от осевого распределения поля для возбуждаемой волны.

2. Для синфазного возбуждения разряда в рабочем диапазоне плотностей электронов вследствие отсутствия тока на боковую стенку можно пренебречь влиянием СПЗ у боковой стенки, за исключением, возможно, области очень близкой к удвоенной критической плотности, будет наблюдаться резонанс поверхностной волны у боковой стенки. При достаточно большом расстоянии между областью возбуждения и боковой стенкой эта волна не должна возбуждаться вследствие затухания поверхностной волны на отрезке ($R_3 - R_2$).

3. При противофазном возбуждении разряда возможно появление дополнительного резонанса плазма-слой пространственного заряда у боковой стенки. В рамках используемой в данной задаче модели этот резонанс может быть включен в рассмотрение изменением функций $Q_0(h_{0\pm}R)$ и $Q_1(h_{0\pm}R)$, учитывающим тот факт, что «периферийная» длинная линия не будет замкнутой, а будет соединена с землей через некоторую «эффективную» емкость СПЗ. Автор не проводил детальные расчеты по такой усложненной модели, чтобы не увеличивать объем данной работы.

Обсудим теперь кратко влияние изменения частоты поля, поддерживающего плазму, на вид рассматриваемых кривых, при неизменности остальных параметров плазмы. Согласно расчетам, качественно картина зависимости импеданса от плотности электронов не меняется. Однако импеданс разрядной камеры в целом при малых и высоких (когда глубина скин-слоя много меньше характерных размеров плазмы) увеличивается обратно пропорционально частоте, поскольку импеданс камеры определяется ее полной емкостью ($n_e \to 0$), либо емкостью слоев пространственного заряда ($n_e \to \infty$). Положение резонанса токов, либо области, где существенным становится возбуждение поверхностных волн, а также резонанса плазма-слой пространственного заряда на оси плотностей электронов изменяется пропорционально изменению критической плотности $n_C = \varepsilon_0 m\omega^2 / e^2$ Изменение положения резонансов, связанных с возбуждением поверхностных волн, также примерно пропорционально изменению критической концентрации, однако для них возможен сдвиг по плотности, связанной с тем, что указанные законы подобия не работают для дисперсионной кривой поверхностной волны, хотя качественно ее поведение и асимптотики при $n_e \to 2n_C$ и $n_e \to \infty$ не изменяются.

Уменьшение частоты поля в два раза (до 67.8 МГц) приведет к уменьшению области плотностей электронов, где существенны резонансы. Верхняя граница области плотностей электронов, где лежат рассматриваемые резонансы уменьшится с 10^{10} см$^{-3}$ до $2\cdot10^{9}$ см$^{-3}$, для симметричных волн и с $8\cdot10^{10}$ см$^{-3}$ до $2\cdot10^{10}$ см$^{-3}$ для несимметричных. Уменьшение частоты поля до 27.12 МГц приводит к дальнейшему снижению этих плотностей до $2\cdot10^{8}$ см$^{-3}$ и $2\cdot10^{9}$ см$^{-3}$.

Приведенные оценки касаются проявления резонансов, связанных пространственным распределением поля поверхностных волн. Ограничение глубины проникновения поля в плазму, которое обычно не принимается во внимание в кинетических моделях плазмы, в соответствии с результатами [8] должно учитываться при плотностях электронов выше 10^{10} см$^{-3}$.

ГЛАВА IV.
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СИММЕТРИЧНОГО РАЗРЯДА. ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕГО РАЗРЯДНУЮ КАМЕРУ[1]

§4.1. Представление поля в виде собственных функций внутри и вне плазмы

Как было отмечено в главах I–III в плазме малого размера возможны два типа резонанса – уже упоминавшийся ранее резонанс напряжений – геометрический плазма-слой пространственного заряда [68, 69] и резонанс токов, наблюдающийся, если действительная часть диэлектрической проницаемости обращается в ноль. В аналитических расчетах разрядов большой площади обычно предполагается, что основная доля энергии передается поверхностной волне, а высшие моды не оказывают существенного влияния на импеданс разряда в целом, поэтому их нужно возбуждать с помощью специальных конструкций в установках. Тем не менее, в феноменологической модели, предложенной в [13, 14] (глава II), показано, что для корректного расчета импеданса существенны как поверхностные волны, так и высшие моды.

В данной главе на примере разряда, сосредоточенного в конечной области пространства $r<R$, мы проведем расчет пространственного распределения поля и импеданса разряда. Геометрия разрядной камеры, для которой проводится расчет приведена на рис. 4.1. В главе показано, что импеданс разряда определяется взаимодействием токов, вызванных тремя типами полей – полем поверхностной волны, полем нераспространяющихся мод в плазме и полем нераспространяющихся мод, сосредоточенных вне плазмы. В общем случае резонанс обусловливается компенсацией напряжений и токов, вносимых всеми типами полей. Однако отдельные типы полей могут не оказывать никакого влияния при определенных параметрах плазмы. Например, геометрический резонанс и резонанс токов, аналогичные наблюдаемым в разряде малого размера вызваны взаимодействием поля поверхностной волны и поля высших мод плазменного столба (в первую очередь полем первой высшей моды). Компенсация импедансов высших мод плазменного столба и высших волноводных мод реально представляют собой резонанс поля поверхностной волны, распространяющейся вдоль внешней границы плазмы, легко наблюдаемый в СВЧ плазме в волноводе [45, 47], хотя резонансные частоты будут сдвинуты за счет наличия слоев пространственного заряда у электродов. Разумеется, на наблюдаемые резонансы будут оказывать

[1] Содержание этой главы основано на работах [17, 18, 19].

влияние и параметры внешней цепи [169]. В данной главе будет рассмотрен разряд с одинаковыми слоями пространственного заряда. В §4.1–4.6 рассмотрен разряд с размером плазмы меньше размера электродов. В этом случае возбуждение высших типов волн обусловлено осевой неоднородностью плазмы, но не связано с граничными эффектами у ребер электрода.

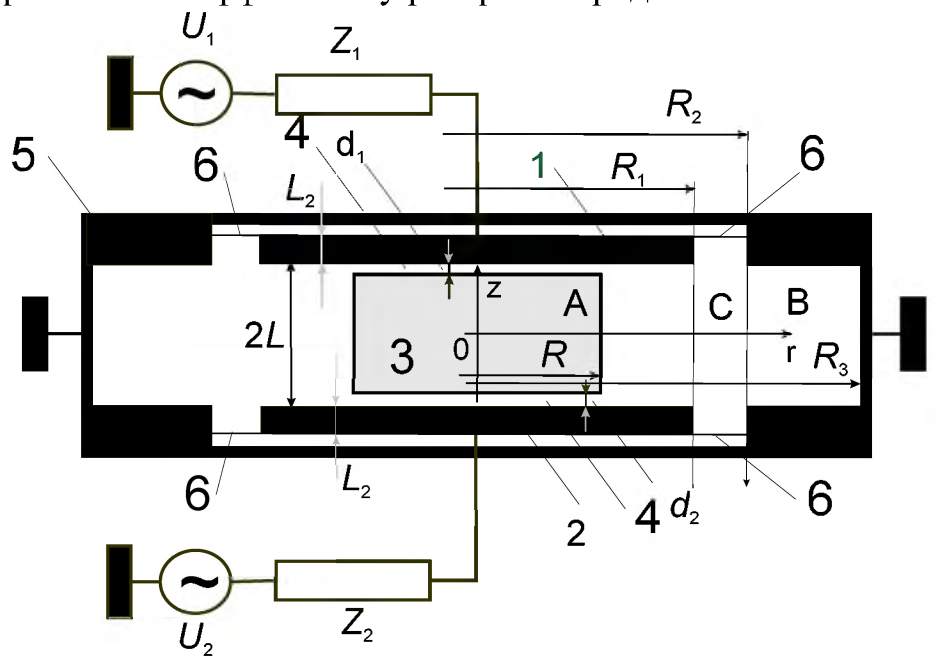

Рис. 4.1. Схема экспериментальной установки, рассматриваемой в этой главе, 1, 2 – электроды, 3 – плазма, 4 – слои пространственного заряда между плазмой и стенкой (электродами), 5 – разрядная камера, 6 – граница расчетной области, через которую идет возбуждение электромагнитного поля. $2L$ – межэлектродное расстояние, d_1, d_2 – толщины слоев пространственного заряда.

Поле внутри плазмы, как и ранее (главы 2, 3), представим в виде суммы собственных волн трехслойной структуры (ТС) металл – слой пространственного заряда – плазма – слой пространственного заряда – металл $\{\mathbf{e}_{n+}(z),\mathbf{h}_{n+}(z)\}$ [11, 190, 217 – 219]. При записи (4.1), (4.2) и ниже под обозначениями $\mathbf{h}_{0\varphi+}(z)=\boldsymbol{\varphi}_0 h_{0\varphi+}(z)$ и $\mathbf{e}_{0z+}(z)=\mathbf{z}_0\rho_0 h_{0\varphi+}(z)h_{0+}/k/\varepsilon(z)$, $\mathbf{e}_{nz+}(z)=\mathbf{z}_0\rho_0 h_{n\varphi+}(z)\tilde{h}_{n+}/k/\varepsilon(z)$ мы понимаем зависящие только от z сомножители в представлении поля, приведенном в Приложениях 1–3, $\rho=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – волновое сопротивление вакуума, $\mathbf{r}_0$, φ_0, $\mathbf{z}_0$ – единичные орты в направлениях r, φ, z. В плазме ($|z|<L$ и $r<R$) $\varepsilon(z)=\varepsilon_P=1-n_e/\left(n_C\left(1+i\nu/\omega\right)\right)$, вне плазмы $\varepsilon(z)=\varepsilon_1=1$. Используя эти выражения, при $r<R$ получим для z компоненты электрического поля E_z и азимутальной компоненты магнитного поля H_φ

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E_z}\\ \mathbf{H_\varphi}\end{pmatrix}=A_{0+}\begin{pmatrix}i\mathbf{e}_{\mathbf{0}+z}(z)J_0(h_{0+}r)\\ \mathbf{h}_{\mathbf{0}+\varphi}(z)J_1(h_{0+}r)\end{pmatrix}\exp(-i\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}\begin{pmatrix}i\mathbf{e}_{\mathbf{n}+z}(z)I_0(\tilde{h}_{n+}r)\\ \mathbf{h}_{\mathbf{n}+\varphi}(z)I_1(\tilde{h}_{n+}r)\end{pmatrix}\exp(-i\omega t), \qquad (4.1)$$

где первое слагаемое соответствует возбуждению симметричной поверхностной волны с радиальной постоянной распространения h_{0+}, а сумма содержит затухающие моды (постоянная затухания $\tilde{h}_{n+}=ih_{n+}$). При малых плотностях электронов ($n_e<2n_C$), как и в главах 2, 3 ([13 – 16]), в (4.1) и формулах ниже поле поверхностной волны заменяется полем квази-ТЕМ волны, и она исключается из суммы по n. Вне плазмы используются стандартные собственные функции (с.ф.) для волновода, ограниченного двумя плоскостями $\{\hat{\mathbf{e}}_{n+}(z),\hat{\mathbf{h}}_{n+}(z)\}$. Тогда при $R<r<R_1$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E_z}\\ \mathbf{H_\varphi}\end{pmatrix}=\exp(-i\omega t)\left[A^{ext}\begin{pmatrix}i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{0z}+}H_0^{(2)}(kr)\\ \hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{0\varphi}+}H_1^{(2)}(kr)\end{pmatrix}+\hat{A}_0\begin{pmatrix}i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{0z}+}H_0^{(1)}(kr)\\ \hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{0\varphi}+}H_1^{(1)}(kr)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\hat{A}_{n+}\begin{pmatrix}-i\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{n}+}(\mathbf{z})K_0(\hat{h}_{n+}r)\\ \hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{\varphi n}+}(\mathbf{z})K_1(\hat{h}_{n+}r)\end{pmatrix}\right]. \qquad (4.2)$$

Первое слагаемое в (4.2) описывает волну ТЕМ, приходящую из периферийной области ($R_1<r<R_3$) благодаря полю, генерируемому источником в области возбуждения ($R_1<r<R_2$), второе – рассеянную трехслойной структурой ТЕМ волну, распространяющуюся в сторону периферийной области. Для этих волн $\hat{\mathbf{e}}_{0+z}(z)=\rho\hat{\mathbf{h}}_{0+\varphi}(z)$. Сумма в уравнении (4.2) содержит возбуждаемые высшие моды поля, для которых $\mathbf{e}_{nz+}(z)=\mathbf{z_0}\rho_0\hat{h}_{n\varphi+}(z)\hat{h}_{n+}/k$, $\hat{h}_{n+}=\sqrt{(n\pi/L)^2-k^2}$. Предполагается, что эти волны затухают в радиальном направлении достаточно быстро, поэтому их отражение от границ электродов и боковой стенки разрядной камеры пренебрежимо мало. В расчетах не учитываются высшие моды поля в области без плазмы, возбуждаемые на границе электрода. В соответствии с формулами для токов и напряжений, приведенными в предыдущих главах, получим на внешней границе электродов $r=R_1$

$$\begin{aligned}U(R_1)&=-\int_0^L dz\hat{\mathbf{e}}_{z+}\left(i\hat{A}_0H_0^{(1)}(kR_1)+iA^{ext}H_0^{(2)}(kR_1)\right)=-L\rho\left(i\hat{A}_0H_0^{(1)}(kR_1)+iA^{ext}H_0^{(2)}(kR_1)\right),\\ I(R_1)&=\frac{2\pi R}{L}\int_0^L dz\hat{\mathbf{e}}_{z+}\left(\hat{A}_0H_0^{(1)}(kR_1)+A^{ext}H_0^{(2)}(kR_1)\right)=2\pi R\left(\hat{A}_0H_0^{(1)}(kR_1)+A^{ext}H_0^{(2)}(kR_1)\right).\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Импеданс разряда при $r=R_1$ определяется соотношением

$$Z(R_1)=\frac{U(R_1)}{I(R_1)}. \qquad (4.4)$$

Здесь и далее под напряжением электрода U понимается напряжение между электродом и вакуумной камерой, поэтому разность потенциалов между электродами равна $2U$. Соотношения (4.3) позволяют рассчитать электрическое и

магнитное поле ТЕМ волн на границе плазмы (в точке $r=R$)

$$H^{ext}(R)=\left(\widehat{A}_0 H_1^{(1)}(kR)+A^{ext}H_1^{(2)}(kR)\right),\ E^{ext}(R)=\rho\left(i\widehat{A}_0 H_0^{(1)}(kR)+iA^{ext}H_0^{(2)}(kR)\right). \qquad (4.5)$$

В дальнейшем удобнее использовать в расчетах именно параметры $H^{ext}(R)$ и $E^{ext}(R)$, вместо амплитуд цилиндрических волн $\widehat{A}_0$ и A^{ext}. Равенство тангенциальных компонент электромагнитного поля на боковой поверхности плазмы означает

$$A_{0+}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{z0+}(z)J_0(h_{0+}R) \\ \mathbf{h}_{\varphi 0+}(z)J_1(h_{0+}R)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}\begin{pmatrix} i\mathbf{e}_{zn+}(z)I_0(\tilde{h}_{n+}R) \\ \mathbf{h}_{\varphi n+}(z)I_1(\tilde{h}_{n+}R)\end{pmatrix}-\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A}_{n+}\begin{pmatrix} -i\widehat{\mathbf{e}}_{zn+}(z)K_0(\widehat{h}_{n+}R) \\ \widehat{\mathbf{h}}_{\varphi n+}(z)K_1(\widehat{h}_{n+}R)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E^{ext}(kR) \\ H^{ext}(kR)\end{pmatrix}. \qquad (4.6)$$

Считаем заданной амплитуду магнитного поля ТЕМ волн $H^{ext}(kR)$, тогда амплитуда электрического поля $E^{ext}(kR)$ должна быть определена из (4.6). Затем соотношения (4.5) дают возможность рассчитать коэффициенты A_{TEM} и A^{ext}, а соотношения (4.3), (4.4) – рассчитать импеданс разряда. Ограничиваясь четными волнами, получим при $r<R$

$$U(r)=A_{0+}U_{0+}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}U_{n+}(r),\ I(r)=A_{0+}i_{0+}(r,L)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n i_{n+}(r,L),\ Z(r)=\frac{A_{0+}U_{0+}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}U_{n+}(r)}{A_{0+}i_{0+}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{n+}i_{n+}(r)},$$

а при $r>R$

$$U(r)=A^{ext}U^{ext}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A}_{n+}\widehat{U}_{n+}(r),\ I(r)=A^{ext}i_+^{ext}(r,L)+\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A}_n\widehat{i}_n(r),\ Z(r)=\frac{A^{ext}U^{ext}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A}_n\widehat{U}_n(r)}{A^{ext}I^{ext}(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A}_n\widehat{i}_n(r)},$$

где

$$\tilde{h}_{n+}=ih_{n+},\ I_+(r)=2\pi RH_{\varphi+}(L)J_1(h_+r),\ i_{n+}(r)=2\pi rh_{\varphi n+}(L)I_1(\tilde{h}_{n+}r),\ \widehat{i}_{n+}(r)=2\pi r\widehat{h}_{\varphi n+}(L)K_1(\widehat{h}_{n+}r),$$

$$U_+(r)=-i\int_0^L e_{z0+}(z)dzJ_0(h_{0+}r),\ U_{n+}(r)=-i\int_0^L e_{n+z}(z)dzI_0(h_{n+}r),\ \widehat{U}_{n+}(r)=-i\int_0^L \widehat{e}_{zn+}(z)dzK_0(\widehat{h}_{n+}r)=0.$$

На боковой границе плазмы ($r=R$) в силу (4.6) полученные значения совпадают. На большом расстоянии от границы поля высших волн затухают, поэтому в последнем выражении можно оставить только первое слагаемое. Резонанс токов соответствует обращению в нуль знаменателя данного выражения, а резонанс напряжений – числителя.

Учет полей высших мод диктуется их участием в развитии локальных возмущений плотности электронов в областях резкого изменения формы металлических элементов установки – границ электродов, углов вакуумной камеры и т.

п. Амплитуда этих возмущений плотности может быть сравнима и даже превышать среднюю плотность электронов в разряде. Поэтому мы должны по возможности точно описывать поля в этой области разряда, не ограничиваясь одной пространственной модой (например, поверхностной волной). Поэтому важно найти коэффициенты разложения поля в плазме по собственным функциям трехслойного волновода. С.ф. $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$ в области заполненной плазмой, так же, как и $\{\hat{\mathbf{e}}_n, \hat{\mathbf{h}}_n\}$ области свободной от плазмы представляют полную систему функций. Обе системы могут быть использованы для представления поля границе. Для общности и удобства записи введем в рассмотрение также системы с.ф. сопряженного к оператору Максвелла уравнения $\{\mathbf{e}_n^+, \mathbf{h}_n^+\}$ и $\{\hat{\mathbf{e}}_n^+, \hat{\mathbf{h}}_n^+\}$ [183].

Систему уравнений для A_{n+}, $\hat{A}_{n+}$ можно получить двояким образом – используя биортогональность систем $\{\hat{\mathbf{e}}_n, \hat{\mathbf{h}}_n\}$ и $\{\hat{\mathbf{e}}_n^+, \hat{\mathbf{h}}_n^+\}$, либо $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_n^+, \mathbf{h}_n^+\}$. Таким образом, уравнение (6) приводится к бесконечной системе матричных уравнений. Решение может быть проведено после оставления конечного числа слагаемых в разложениях поля (число оставленных собственных функций внутри и вне плазмы должно быть равным). Число уравнений в результате будет в два раза превышать число собственных функций и равно числу неизвестных коэффициентов.

При выборе большого числа собственных мод оба метода должны дать одинаковые результаты. Однако при этом могут сыграть свою роль ошибки округления при вычислении отдельных членов ряда, плохая обусловленность получаемой матрицы, а также громоздкость получаемой задачи.

§4.2. Разложение поля на поверхности раздела по собственным волнам пустого волновода

Выберем функции из семейства $\{\hat{\mathbf{e}}_n, \hat{\mathbf{h}}_n\}$. Отметим, что осевые зависимости для этих функций полностью совпадают. Умножим каждое из уравнений для электрического поля на $\{\hat{\mathbf{e}}_{j+z}^+\}$ и каждое из уравнений для магнитного поля на $\{\hat{\mathbf{h}}_{j+\varphi}^+\}$ и проинтегрируем от 0 до L. Полученная система уравнений будет иметь вид:

$$
\begin{gathered}
A_{0+}J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E00+}+\sum_{n=1}^{K}A_{n+}\frac{\tilde{h}_{n+}}{k}I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)C_{En0+}=\frac{E^{ext}\left(kR\right)}{i\rho}\hat{N}_{0+}^2,\\
A_{0+}J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B00+}+\sum_{n=1}^{K}A_{n+}I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)C_{Bn0+}=H^{ext}\left(kR\right)\hat{N}_{0+}^2,\\
\dots\\
A_{0+}J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0j+}+\sum_{n=1}^{K}A_{n+}\frac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k}I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)C_{Enj+}+\hat{A}_{j+}\frac{\hat{h}_{j+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)\hat{N}_{j+}^2=0,\\
A_{0+}J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B0j+}+\sum_{n=1}^{K}A_{n+}I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)C_{Bnj+}-\hat{A}_{j+}K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)\hat{N}_{j+}^2=0,\\
\dots\\
A_{0+}J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0K+}+\sum_{n=1}^{K}A_{n+}\frac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k}I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)C_{EnK+}+\hat{A}_{K+}\frac{\hat{h}_{K+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{K+}R\right)\hat{N}_{K+}^2=0,\\
A_{0+}J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B0K+}+\sum_{n=1}^{K}A_{n+}I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)C_{BnK+}-\hat{A}_{K+}K_1\left(\hat{h}_{K+}R\right)\hat{N}_{K+}^2=0.
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

В данном случае ε_P – диэлектрическая проницаемость в центре плазменного столба (z=0). Уравнения (4.7) записаны таким образом, чтобы при $d\to 0$ уравнения во второй и последующей строках переходили в уравнения для поверхностной волны, распространяющейся вдоль боковой поверхности. Выражения для C_{Bnj+}, C_{Enj+} с учетом аналитических формул для полей ввиду их громоздкости приведены в Приложении 4; квадраты норм волн в пустом волноводе рассчитываются по стандартным выражениям $\hat{N}_{0+}^2=L$, $\hat{N}_{j+}^2=L/2$. Иногда нам также понадобится норма для с.ф. электрического поля $\hat{N}_{0+}^E=\rho\sqrt{L}$, $\hat{N}_{j+}^E=\rho\tilde{h}_{n+}/k\sqrt{L/2}$. В системе (7) можно выделить первых два уравнения, которые дают возможность рассчитать амплитуду A_{0+} поверхностной волны и электрическое поле ТЕМ волн на границе разряда, как функцию магнитного поля. Остальные уравнения определяют амплитуды высших волн как функции A_{0+}. Из них следует:

$$
A_{j+}=-A_{0+}\left(\sum_{i=1}^{K}S_{ji}\left(K_1\left(\hat{h}_{i+}R\right)J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0i+}+\frac{\hat{h}_{i+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{i+}R\right)J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B0i+}\right)\right),
$$

$$
\hat{A}_{j+}=-\frac{1}{\hat{N}_{j+}^2}\frac{\sum_{n=1}^{K}A_{n+}\left(J_1\left(\hat{h}_{+}R\right)C_{B0j+}I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)\frac{\tilde{h}_{n+}}{k\varepsilon_P}C_{Enj+}+J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0j+}I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)C_{Bnj+}\right)}{\left(K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k\varepsilon_P}C_{E0j+}-K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)\frac{\hat{h}_{j+}}{k}J_1\left(\hat{h}_{0+}R\right)C_{B0j+}\right)},
$$

где матрица $\mathbf{S}$ определяется выражением $\mathbf{S}=\hat{\mathbf{S}}^{-1}$,

$\hat{S}_{ji}=\left(\frac{\tilde{h}_{i+}}{k\varepsilon_P}I_0\left(\tilde{h}_{i+}R\right)K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)C_{Eij+}+\frac{\hat{h}_{j+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)I_1\left(\tilde{h}_{i+}R\right)C_{Bij+}\right)$. Подставляя значения коэффициентов в два первых уравнения (7), получим:

$$A_{0+}=\frac{H^{ext}\left(kR\right)\hat{N}_{0+}^2}{J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B00+}-\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{K}S_{ji}\left(K_1\left(\tilde{h}_{i+}R\right)J_0\left(h_{0+}R\right)C_{E0i+}+K_0\left(\tilde{h}_{i+}R\right)J_1\left(\hat{h}_{0+}R\right)C_{B0i+}\right)\right)I_1\left(h_{j+}R\right)C_{Bj0+}}.$$

Последнее выражение свидетельствует от том, что наличие высших мод может существенно повлиять на положение резонансов. Усредненное по высоте электрическое поле на границе плазмы в пустой части разрядной камеры приводит к выражению для импеданса:

$$Z\left(kR\right)=i\rho\frac{L}{2\pi R}\times$$

$$\times\frac{J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E00+}-\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{K}S_{ji}\left(K_1\left(\hat{h}_{i+}R\right)J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0i+}+\frac{\hat{h}_{i+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{i+}R\right)J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B0i+}\right)\right)I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}C_{Ej0+}}{J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B00+}-\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{K}S_{ji}\left(K_1\left(\hat{h}_{i+}R\right)J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0i+}+\frac{\hat{h}_{i+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{i+}R\right)J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B0i+}\right)\right)I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)C_{Bj0+}}.$$

(4.8)

Таким образом, возбуждение высших мод поля приводит к изменению положения как резонансов тока (нули знаменателя), так и резонансов напряжения (нули числителя). В соответствии с (4.2) мы видим, что амплитуды высших волн зависят как от напряжения основной моды (слагаемое, содержащее $J_0\left(h_{0+}R\right)$) так и от ее тока ($J_1\left(h_{0+}R\right)$). На первый взгляд, из (4.8) следует, что при изменении характеристик линии в среднем ее импеданс будет равен нулю, то есть участки с емкостным и с индуктивным импедансом на оси плотностей электронов будут занимать примерно одинаковые области, так как все слагаемые тем или иным образом зависят от функций Бесселя. Поэтому запишем (4.8) таким образом, чтобы выделить отдельно составляющие, относительно слабо и сильно зависящие от соотношения между длиной радиальной поверхностной волны и радиусом плазмы (т. е. в конечном счете от плотности электронов):

$$Z\left(kR\right)=i\rho\frac{L}{2\pi R}\left\{\frac{\left(A-B\left(1-D/\left(C-D\right)\right)\right)J_0\left(h_{0+}R\right)}{\left(C-D\right)J_1\left(h_{0+}R\right)-EJ_0\left(h_{0+}R\right)}-\frac{D}{\left(C-D\right)}\right\},\qquad(4.9)$$

где

$$A=\frac{h_{0+}}{k}C_{E00+},\ B=\frac{h_{0+}}{k}\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{K}S_{ji}K_1\left(\hat{h}_{i+}R\right)C_{E0i+}\right)I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}C_{Ej0+},\ C=C_{B00+},$$

$$D=\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{K}S_{ji}\frac{\hat{h}_{i+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{i+}R\right)C_{B0i+}\right)I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)C_{Bj0+},\ E=\frac{h_{0+}}{k}\sum_{j=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{K}S_{ji}\left(K_1\left(\hat{h}_{i+}R\right)C_{E0i+}\right)\right)I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)C_{Bj0+}.$$

Можно получить аналогичное выражение для проводимости разряда

$$Y(kR)=Z^{-1}(kR)=-i\frac{\pi R}{\rho L}\left\{\frac{\left(C-D\left(1-B/(A-B)\right)\right)J_1\left(h_{0+}R\right)}{(A-B)J_0\left(h_{0+}R\right)-CJ_1\left(h_{0+}R\right)}-\frac{B}{(A-B)}\right\}. \qquad (4.10)$$

Из (4.9) следует, что в выражении для импеданса можно выделить два слагаемых. При зафиксированной фазе тока первое слагаемое описывает импеданс, вносимый радиальными поверхностными волнами и высшими модами поля, возбуждение которых связано с напряжением на линии, т. е. фаза которых изменяется в соответствии с фазой напряжения. Второе слагаемое описывает возбуждение высших волн током, протекающим по линии, их фаза связана с фазой тока и это слагаемое вносит индуктивный импеданс. Аналогичный анализ может быть проведен для проводимости (4.10) с той разницей, что привязку по фазе лучше привести к напряжению.

§4.3. Разложение поля на поверхности раздела по собственным функциям трехслойной плазменной структуры

Теперь выберем функции из семейства $\{\mathbf{e}_n,\mathbf{h}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_n^+,\mathbf{h}_n^+\}$. Условия ортогональности для них рассмотрены в Приложении 3. Там же рассчитаны квадраты нормы N_{j+}^2 для всех волн. Аналог системы уравнений (7) имеет вид

$$\begin{gathered}
A_{0+}\frac{h_{0+}}{k}J_0\left(h_{0+}R\right)N_{0+}^{H2}+\sum_{n=1}^{K}\hat{A}_{n+}\frac{\hat{h}_{n+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)D_{0n+}^{E}=\frac{E^{ext}(kR)}{i\rho}D_{00+}^{E},\\
A_{0+}J_1\left(h_{0+}R\right)N_{0+}^{H2}-\sum_{n=1}^{K}\hat{A}_{n+}K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)D_{0n+}^{B}=H^{ext}(kR)D_{00+}^{B},\\
\dots\\
A_{j+}\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)N_{j+}^{H2}+\sum_{n=1}^{K}\hat{A}_{n+}\frac{\hat{h}_{n+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)D_{jn+}^{E}=\frac{E^{ext}(kR)}{i\rho}D_{j0+}^{E},\\
A_{j+}I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)N_{j+}^{H2}-\sum_{n=1}^{K}\hat{A}_{n+}K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)\frac{1}{\varepsilon_P}D_{jn+}^{B}=H^{ext}(kR)D_{j0+}^{B},\\
\dots\\
A_{K+}\frac{\tilde{h}_{K+}}{k}I_0\left(\tilde{h}_{K+}R\right)N_{K+}^{H2}+\sum_{n=1}^{K}\hat{A}_{n+}\frac{\hat{h}_{n+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)D_{Kn+}^{E}=\frac{E^{ext}(kR)}{i\rho}D_{K0+}^{E},\\
A_{K+}I_1\left(\tilde{h}_{K+}R\right)N_{K+}^{H2}-\sum_{n=1}^{K}\hat{A}_{n+}K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)\frac{1}{\varepsilon_P}D_{Kn+}^{B}=H^{ext}(kR)D_{K0+}^{B}.
\end{gathered} \qquad (4.11)$$

Выражения для коэффициентов D^B_{jn}, D^E_{jn} также приведены в Приложении 4. При сравнении матриц уравнений (4.7) и (4.11) мы увидим, что их элементы для электрического и магнитного полей меняются местами. Можно получить общие формулы амплитуд соответствующих мод и импедансов повторяя действия предыдущего раздела статьи. Тогда

$$Z(R)=\frac{L}{2\pi R}i\rho\times$$

$$\times\frac{D^B_{00+}J_0(h_{0+}R)-\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{K}P_{ji}D^B_{i0+}\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}I_0(\tilde{h}_{i+}R)\left(\frac{\hat{h}_{j+}}{k}K_0(\hat{h}_{j+}R)D^E_{0j+}J_1(h_{0+}R)+K_1(\hat{h}_{j+}R)D^B_{0j+}\frac{h_{0+}}{k}J_0(h_{0+}R)\right)}{D^E_{00+}J_1(h_{+}R)-\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{K}P_{ji}D^E_{i0+}I_1(h_{i+}R)\left(\frac{\hat{h}_{j+}}{k}K_0(\hat{h}_{j+}R)D^E_{0j+}J_1(h_{0+}R)+K_1(\hat{h}_{j+}R)D^B_{0j+}\frac{h_{0+}}{k}J_0(h_{0+}R)\right)},$$

(4.12)

где $P_{ji}=\left(\frac{\tilde{h}_{j+}}{k\varepsilon_P}I_0(\tilde{h}_{j+}R)K_1(\hat{h}_{i+}R)D^B_{jn+}+I_1(\tilde{h}_{j+}R)\frac{\hat{h}_{i+}}{k}K_0(\hat{h}_{i+}R)D^E_{ji+}\right)^{-1}$. Амплитуды высших мод поля вне плазмы рассчитываются по формуле

$$\tilde{A}_{j+}=\frac{1}{N_{j+}}\sum_{i=1}^{K}P_{ji}\left(H^{ext}(kR)D^B_{i0+}\frac{\tilde{h}_{i+}}{k}I_0(\tilde{h}_{i+}R)+E^{ext}(kR)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}D^E_{i0+}I_1(\tilde{h}_{i+}R)\right),$$

Для амплитуды поверхностной волны, возбуждаемой в плазме, получим

$$A_{0+}J_1(h_{+}R)N^2_{0+}=H^{ext}(kR)D^B_{00+}-\sum_{n=1}^{K}\hat{A}_{n+}K_1(\hat{h}_{n+}R)D^B_{0n+}.$$

При учете только одной моды обе формулы дают одинаковый результат для импеданса. В общем случае система уравнений содержит бесконечное число уравнений. С учетом возможных ошибок при вычислении коэффициентов, численное решение этой системы уравнений, может оказаться более трудоемким, чем непосредственное решение уравнений Максвелла с помощью метода конечных элементов или разностных методов. Тем не менее, эта система очень удобна для классификации резонансных состояний, поскольку вблизи резонанса при качественном анализе число рассматриваемых мод можно существенно сократить\ Рассмотрим классификацию возможных резонансов.

§4.4. Упрощенное уравнение для импеданса разряда

Формула (4.8) (или (4.12)) дает общее выражение для импеданса разряда. Предположим теперь, что влияние слоев пространственного заряда в уравне-

ниях для высших мод в уравнениях (4.7) мало, поэтому осевые постоянные распространения для высших волн в плазме и вне плазмы близки. Тогда в (4.8) и (4.12) можно оставить только одно диагональное слагаемое и матрицы S_{ij} и P_{ij} будут диагональными. В этом случае из (4.7) для элементов матрицы следует

$$S_{ij} = \delta_{ij}\left(\frac{\tilde{h}_{j+}}{k\varepsilon_P} I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right) K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right) C_{Ejj+} + \frac{\hat{h}_{j+}}{k} K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right) I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right) C_{Bjj+}\right)^{-1}.$$

Проверка справедливость данного приближения требует дополнительного исследования, которое оказывается очень громоздким и может быть темой отдельного исследования. В пользу этого приближения может сыграть тот факт, что вклады возмущений с меньшим и большим волновыми числами будут иметь разные знаки и частично компенсировать друг друга. Тем не менее, переход от общих формул Приложения 4 к формулам данного раздела означает переход от количественного исследования к качественному. Используя выражения для различных компонент поля [11, 14], получим

$$Z = i\rho \frac{L}{2\pi R} \frac{J_0\left(h_{0+}R\right)}{J_1\left(h_{0+}R\right)} \frac{\left(\frac{h_{0+}}{k} C_{E00+} - \sum_{n=1}^{K} \frac{\left(\frac{h_{0+}}{k} C_{E0n+} + \frac{J_1\left(h_{0+}R\right)}{J_0\left(h_{0+}R\right)} C_{B0n+} \frac{\hat{h}_{n+}}{k} \frac{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}\right)}{\left(\frac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k} C_{Enn+} \frac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)} + C_{Bnn+} \frac{\hat{h}_{n+}}{k} \frac{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}\right)} \frac{\tilde{h}_{n+}}{k} C_{En0+} \frac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}\right)}{\left(C_{B00+} - \sum_{n=1}^{K} \frac{\left(\frac{J_0\left(h_{0+}R\right)}{J_1\left(h_{0+}R\right)} \frac{h_{0+}}{k} C_{E0n+} + C_{B0n+} \frac{\hat{h}_{n+}}{k} \frac{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}\right)}{\left(\frac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k} C_{Enn+} \frac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)} + C_{Bnn+} \frac{\hat{h}_{n+}}{k} \frac{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}\right)} C_{Bn0+}\right)}$$

(4.13)

Коэффициенты уравнения рассчитываются по тем же формулам Приложения 4, что и в области распространения поверхностных волн. Аналогичные выражения можно получить с помощью системы уравнений (4.12). Считая, что

$$P_{ij} = \delta_{ij}\left(\frac{\tilde{h}_{j+}}{k\varepsilon_P} I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right) K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right) D^B_{jj+} + I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right) \frac{\hat{h}_{j+}}{k} K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right) D^E_{jj+}\right)^{-1},$$

получим следующий результат:

$$Z = i\rho \frac{L}{2\pi R} \frac{J_0\left(h_{0+}R\right)}{J_1\left(h_{0+}R\right)} \frac{D^B_{00+}\dfrac{h_{0+}}{k} - \sum\limits_{j=1}^{K} \dfrac{D^B_{0j+}\dfrac{h_{0+}}{k} + D^E_{0j+}\dfrac{\widehat{h}_{j+}}{k}\dfrac{J_1\left(h_{0+}R\right)}{J_0\left(h_{0+}R\right)}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}}{\dfrac{\tilde{h}_{j+}}{k\varepsilon_P}\dfrac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}D^B_{jj+} + \dfrac{\widehat{h}_{j+}}{k}D^E_{jj+}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}}\dfrac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}\dfrac{\tilde{h}_{j+}}{k}D^B_{j0+}}{D^E_{00+} - \sum\limits_{j=1}^{K} \dfrac{D^B_{0j+}\dfrac{h_{0+}}{k}\dfrac{J_0\left(h_{0+}R\right)}{J_1\left(h_{0+}R\right)} + \dfrac{\widehat{h}_{j+}}{k}D^E_{0j+}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}}{\dfrac{\tilde{h}_{j+}}{k\varepsilon_P}\dfrac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}D^B_{jj+} + \dfrac{\widehat{h}_{j+}}{k}D^E_{jj+}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{j+}R\right)}}D^E_{j0+}}. \tag{4.14}$$

В заключение запишем аналог (4.13) для малых плотностей, когда поверхностная волна отсутствует

$$Z = i\rho \frac{L}{2\pi R} \frac{I_0\left(\tilde{h}_{0+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{0+}R\right)} \frac{\left(\dfrac{\tilde{h}_{0+}}{k}C_{E00+} - \sum\limits_{n=1}^{K} \dfrac{\left(\dfrac{\tilde{h}_{0+}}{k}C_{E0n+} + C_{B0n+}\dfrac{\widehat{h}_{n+}}{k}\dfrac{I_1\left(\tilde{h}_{0+}R\right)}{I_0\left(\tilde{h}_{0+}R\right)}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}\right)}{\left(\dfrac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k}C_{Enn+}\dfrac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)} + C_{Bnn+}\dfrac{\widehat{h}_{n+}}{k}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}\right)}\dfrac{\tilde{h}_{n+}}{k}\dfrac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}C_{En0+}\right)}{\left(C_{B00+} - \sum\limits_{n=1}^{K} \dfrac{\left(\dfrac{I_0\left(\tilde{h}_{0+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{0+}R\right)}\dfrac{\tilde{h}_{0+}}{k}C_{E0n+} + C_{B0n+}\dfrac{\widehat{h}_{n+}}{k}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}\right)}{\left(\dfrac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k}C_{Enn+}\dfrac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)} + C_{Bnn+}\dfrac{\widehat{h}_{n+}}{k}\dfrac{K_0\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\widehat{h}_{n+}R\right)}\right)}C_{Bn0+}\right)}.$$

Здесь индексом $_0$ отмечена уже не поверхностная волна, а квази-ТЕМ мода, переходящая при Reε<0 в первую нераспространяющуюся моду. Проанализируем теперь различные типы резонансов, которые могут наблюдаться в разряде.

§4.4.1. Резонанс поверхностных волн у боковой поверхности

Рассмотрим сначала резонансы, связанные с возбуждением стоячих поверхностных волн вдоль боковой поверхности. В формуле (4.13) (также, как в (4.14)) выделен импеданс, вносимый поверхностными волнами, распространяющимися вдоль слоя пространственного заряда у электродов (первое слагаемое), и импеданс вносимый высшими нераспространяющимися модами. При этом амплитуды высших мод могут резонансно возрастать и при выполнении условия резонанса (нули в знаменателях сумм), которое соответствует возбуждению поверхностных волн, распространяющихся вдоль боковой поверхности (с учетом

цилиндричности системы и влияния слоев пространственного заряда, используем коэффициенты C^E_{jj}, C^B_{jj}, в (4.13) или D^E_{jj}, D^B_{jj} в (4.14)):

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k} C_{Enn+} \frac{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)} + \frac{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)} C_{Bnn+} \frac{\hat{h}_{n+}}{k}\right) = 0 .$$

Это выражение – упрощенное дисперсионное уравнение для боковых поверхностных волн. Влияние этих мод существенно как в числителе (влияние на резонанс напряжений), так и в знаменателе (влияние на резонанс токов). Данный резонанс проявляется на кривой зависимости импеданса от плотности электронов, если амплитуда этого слагаемого в соответствующей сумме справа будет сравнима с амплитудой основной волны (первое слагаемое). В этом случае резонансы токов сдвигаются относительно резонансов напряжения и на вольтамперной характеристике мы видим всплески на зависимости импеданса разряда от плотности электронов. Если амплитуда тока или напряжения боковой поверхностной волны достаточно велика и сравнима с амплитудой основной моды, то на. зависимости импеданса разряда от плотности электронов могут не только всплеск на плавной кривой, но и дополнительные резонансы тока и напряжения.

В альтернативном случае, если обе амплитуды (и напряжения и тока) превышают амплитуду приэлектродной поверхностной волны – происходит временный переход от импеданса, рассчитываемого по формуле (4.13) к импедансу, определяемому данной модой, очень близкому к импедансу в одномодовом режиме (глава 2 [13])

$$Z_{j+} = \frac{\tilde{h}_{j+}}{k} \frac{2L}{2\pi R} i\rho \frac{C_{Ej0+}}{C_{Bj0+}} \frac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}$$

4.4.2. Резонансы радиальных поверхностных волн и геометрический резонанс плазма–слой пространственного заряда.

Кроме резонансов связанных с возбуждением боковых поверхностных волн в разряде могут быть еще два типа резонансов. Все эти резонансы описываются нулями числителя (резонанс напряжений) или знаменателя (резонанс токов) в выражениях (4.8), (4.12), (4.13) или (4.14).

Во-первых, это резонансы, связанные с возбуждением радиальных поверхностных волн, математически описываются функциями Бесселя и связаны с их нулями.

Во-вторых, физически также это резонансы, связанные с глобальным рас-

пределением токов и напряжения в разряде, среди которых можно выделить резонанс токов, наблюдающийся при выполнении условия

$$\operatorname{Re}\varepsilon_P = 0$$

и резонанс напряжений, получивший в квазистатическом разряде название «геометрический резонанс плазмы и слоя» [68, 69]. В этом случае индуктивный импеданс, вносимый высшими модами, компенсируется импедансом короткой разомкнутой линии, который имеет емкостной характер. Этот резонанс наблюдается при высоких плотностях плазмы, когда ее радиус меньше длины поверхностной волны. При этом индуктивный импеданс, вносимый высшими типами мод (при плотностях электронов выше резонансной для боковой поверхностной волны) компенсирует указанный емкостной импеданс. Условие резонанса имеет

$$\operatorname{Re}\frac{J_0\left(h_{0+}R\right)}{RJ_1\left(h_{0+}R\right)}\left(\frac{h_{0+}}{k}C_{E00+} - \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{K}S_{ji}K_1\left(\hat{h}_{i+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0i+}I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}C_{Ej0+}\right) - \\ -\frac{1}{R}\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{K}S_{ji}\frac{\hat{h}_{i+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{i+}R\right)C_{B0i+}I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}C_{Ej0+} = 0 .$$

Используя приближенное выражение (13), получим

$$\operatorname{Re}\left(\frac{h_{0+}}{k}C_{E00+} - \sum_{n=1}^{K}C_{Bnn+}^{-1}\left(\frac{h_{0+}}{k}C_{E0n+}\frac{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)} + \frac{J_1\left(h_{0+}R\right)}{J_0\left(h_{0+}R\right)}C_{B0n+}\frac{\hat{h}_{n+}}{k}\right)\frac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}\right) = 0 .$$

Для разряда малого размера $J_0\left(h_{0+}R\right)/J_1\left(h_{0+}R\right) = \left(h_{0+}R/2\right)^{-1}$.

При уменьшении плотности электронов в точке геометрического резонанса происходит смена емкостного импеданса разряда на индуктивный. Если плотность электронов уменьшать еще сильнее, растет глубина проникновения высших волн в плазму и индуктивный импеданс, вносимый вторым слагаемым, увеличивается. Осцилляции первого слагаемого в последнем выражении приводят к всплескам амплитуды поглощения, связанным с возбуждением поверхностных волн, либо к появлению новых резонансов тока и напряжения, если поглощение поверхностных волн невелико и амплитуда отраженной от центра разряда волны мала. В противном случае, если реактивная часть импеданса, вносимая поверхностными волнами, будет превышать индуктивный импеданс основной моды, возможно не только появление дополнительных всплесков, но и новых резонансов тока и напряжения.

Результаты расчета импеданса по формуле (4.13) приведена на рис. 4.2 для различных радиусов плазмы 2, 5 10, 15 и 20 см при длине плазменного столба 8 см. Отношение эффективной частоты столкновений к частоте поля равно 0.1. Толщина слоев – 3 мм. Учитывалось возбуждение поверхностной волны и двух

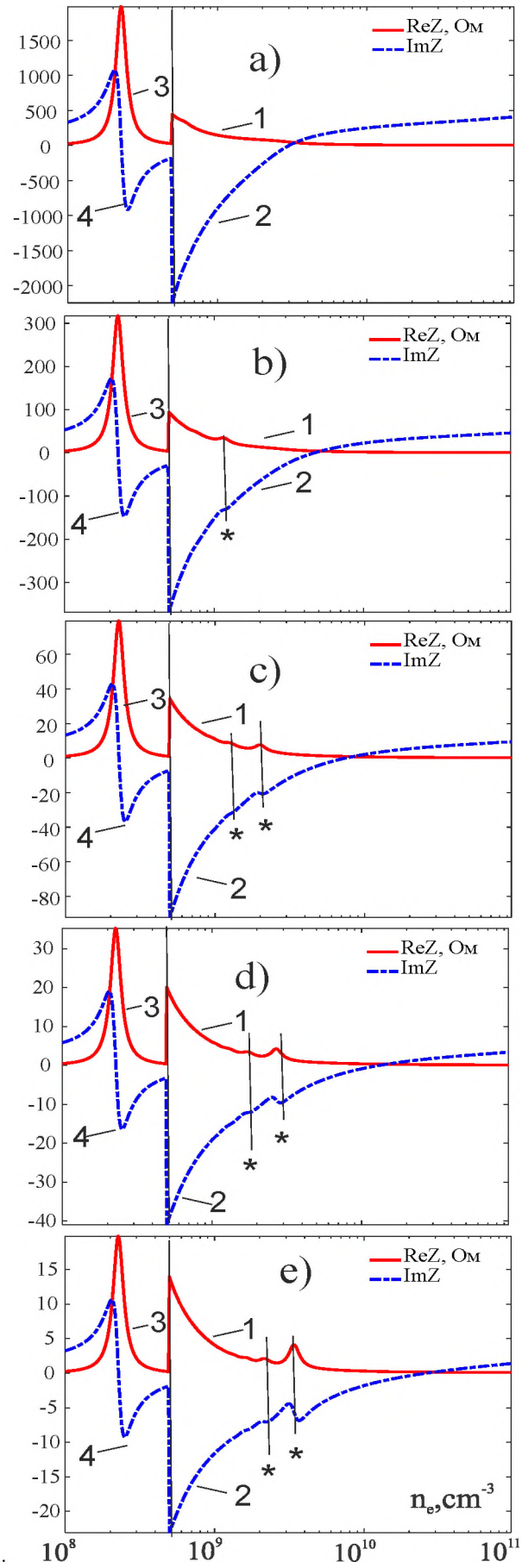

Рис. 4.2. Импеданс разряда как функция плотности электронам (1 – ReZ, 2 – ImZ, Ом) (результаты аналитического расчета) для симметричного разряда при синфазном возбуждении радиус плазмы R = 2 (a), 5 (b), 10 (c), 15 (d) и 20 (e) см. Частота поля 135.6 МГц. Толщина слоев d_1=d_2=3 мм. Частота столкновений – 0.1 от частоты поля. В области, где отсутствует распространение поверхностных волн масштаб уменьшен в 20 раз. (3 – ReZ/20, 4 – ImZ/20, Ом). Звездочкой и вертикальной линией обозначено положение резонансов, связанных с возбуждением поверхностных волн. Импеданс рассчитан при радиусе, равном радиусу плазмы, без учета влияния внешних элементов.

высших мод. Согласно расчетам, в области возбуждения поверхностных волн разряд в целом имеет индуктивный импеданс, поскольку в силу большого поглощения радиальных (приэлектродных) поверхностных волн, вносимый ими импеданс почти везде чисто активный. При высоких плотностях электронов сказывается отражение поверхностной волны от центра разряда, приводящее к всплескам поглощения на кривой импеданса. На рис. 4.2 эти всплески заметны при радиусах разряда 5 см и выше и отмечены тонкими вертикальными линиями и звездочкой. Величина этих всплесков увеличивается с ростом плотности электронов, поскольку уменьшается затухание поверхностной волны и уменьшается индуктивный импеданс высших мод, на фоне которого он наблюдается. На всех графиках наблюдаются резонансы тока при плотности, равной критической, и геометрический резонанс, смещающийся при увеличении радиуса в область больших плотностей электронов, в силу уменьшения отношения $J_0(h_{0+}R)/J_1(h_{0+}R)$.

§4.5. Влияние внешней части разрядной камеры на импеданс разряда

Прежде чем перейти к сравнению результатов аналитических расчетов с численным решением уравнений Максвелла, исследуем влияние цепи подвода энергии на импеданс разряда в целом. В рассматриваемой геометрии разряда следует учесть роль внешней части электродов, области возбуждения, периферийной части рабочей камеры и линии, соединяющей камеру с источником поля. Рассмотрим эти процессы последовательно.

4.5.1. Влияние емкости внешней части электродов

В предыдущих разделах рассчитывался импеданс разряда Z_0 на цилиндрической поверхности $r=R$, ограничивающей область, занятую разрядом. Тем не менее, предполагалось, что размер электродов не совпадал с размером плазмы (рис. 4.1). Если разность радиусов много меньше длины ТЕМ волны, импеданс в точке $R=R_1$ равен (см. Приложение 7, где приведены и более общие формулы)

$$Z^{(\mathrm{int})} = Z(R_1) = \left(Z_0 - \frac{ik}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tilde{L}\Delta r \right) \Bigg/ \left(1 - \frac{ik}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tilde{C}\Delta r \cdot Z_+ \right) \qquad (4.15)$$

Здесь $\tilde{C}\Delta r$ и $\tilde{L}\Delta r$ – вносимые периферийной областью емкость (2 –10 пФ) и индуктивность (менее 0.01 мкГн), $\Delta r = R_1 - R$.

4.5.2. Влияние импеданса внешней части рабочей камеры и высших мод поля, возбуждаемых вблизи точки подвода мощности

Исследуем влияние внешней части камеры (Рис. 4.1). Расчет может быть проведен точно также, как разрядной камеры, полностью заполненной плазмой, с точностью до замены собственных волн трехслойной структуры собственными волнами внешнего волновода (Приложение 8)

$$Z_{D2} = \frac{1}{\left[\left(Z_{D1} - i\frac{L}{2\pi R_1}\rho\frac{Q_0(kR_1)}{Q_1(kR_1)}\right)^{-1} - \frac{2i}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{\tilde{h}_{n+}}\left(\frac{I_0(\tilde{h}_{n+}R_1)}{I_1(\tilde{h}_{n+}R_1)} + \frac{K_0(\tilde{h}_{n+}R_1)}{K_1(\tilde{h}_{n+}R_1)}\right)^{-1}\right]}. \qquad (4.16)$$

Здесь Z_{D1} определяется формулами п. 5.1 или Приложения 7, $z = \rho L/(2\pi R)$.

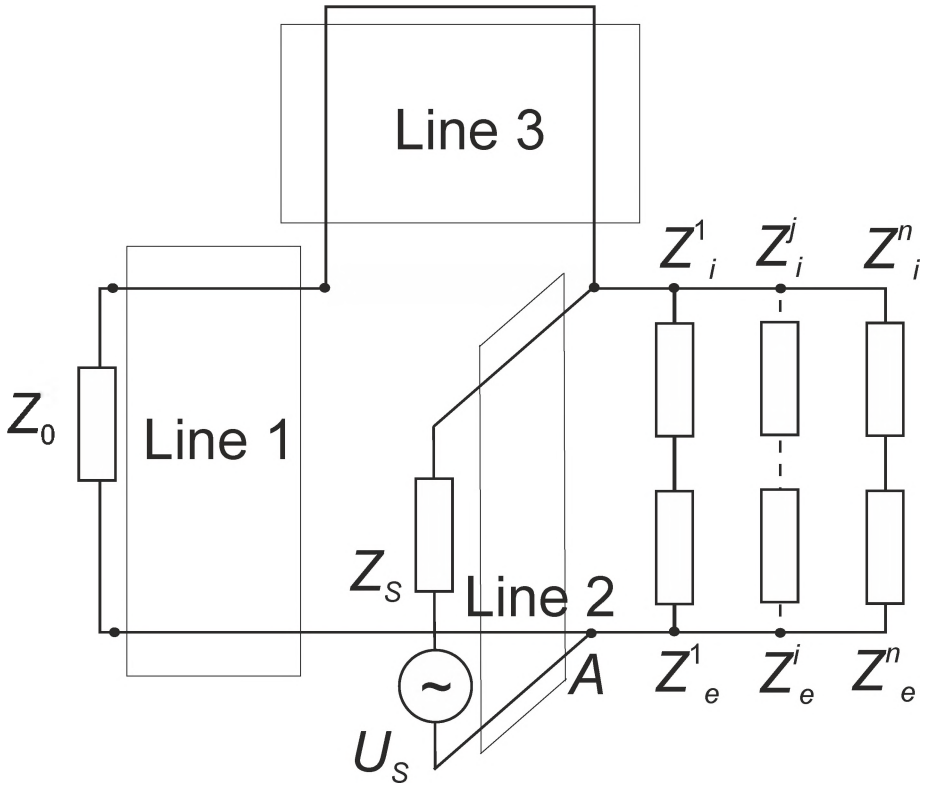

Рис. 4.3. Эквивалентная схема разряда. Line1 – разомкнутая длинная линия, описывающая поверхностную волну в области $r<R_1$, Line3 – замкнутая линия в периферийной области, описывающая распространение волны ТЕМ в области $r>R_2$, Z_{ji}, Z_{je} – сосредоточенные последовательно включенные импедансы, описывающие возбуждение высших мод поля в внутренней $r<R$ и внешней $r>R$ областях. Line 2 – линия, подводящая энергию от генератора, Z_S – внутреннее сопротивление генератора.

Эквивалентная схема для разряда в этих условиях геометрии приведена на рис. 4.3. Здесь Z_0 – импеданс плазмы (рассчитываемый по формулам §4.2 с учетом

высших мод), Line 1 – линия передачи энергии от плоскости возбуждения до границы разряда, образуемая внешней частью электродов (обычно размер этой области мал по сравнению с длиной ВЧ волны в вакууме, она может быть учтена, подсоединенная параллельно разряду. Последовательно с этой линией включена замкнутая линия Line 3, образованная внешней пустой частью вакуумной камеры. Параллельно этой линии подключены сосредоточенные элементы, представляющие собой вклад полей высших волн пустого волновода, порождаемых в области возбуждения. В отличие от случая камеры, полностью заполненной плазмой, возбуждение высших мод в пустом волноводе вносит дополнительный емкостной импеданс, причем импедансы, вносимые высшими модами при r<R и r>R также в согласии с предыдущей формулой соединены последовательно. На схеме так же обозначены: Z_S – внутреннее сопротивление источника питания, U_S – его э.д.с., Z_e^j, Z_i^j – импедансы, вносимые высшими модами, возбуждаемыми внутри и вне плазмы.

Из полученных формул следуют два очевидных вывода:

1. Возбуждение высших мод поля приводит к появлению дополнительных токов, сдвигающих положение резонансов тока.

2. Импедансы, соответствующие разным модам соединены параллельно.

3. Поле волны ТЕМ во внешней часть камеры тоже может сильно повлиять на возбуждение поля в разряде. При этом импеданс внешней части камеры оказывается соединенным с импедансом внутренней части последовательно (для каждой моды). Это означает, что он не будет влиять на положение резонансов токов, но может существенно изменить значение плотностей электронов, на которых наблюдается резонанс напряжений. При малых размерах вносимый этой частью камеры импеданс будет индуктивным. При его большой величине геометрический резонанс плазма слой может исчезнуть. С другой стороны, компенсация реактивной части импеданса центральной части может обеспечить резкое увеличение поля в центре разряда. А если в точке подвода энергии импеданс внешней части оказывается очень большим $H_0^{ext}(R_3) \to 0$ (четвертьволновый поршень), то амплитуда поля в области плазмы оказывается очень малой, и поддержание разряда в этих условиях может стать невозможным.

Результаты расчета импеданса с помощью аналитических формул приведены на рис. 4.4. Отношение емкости, подключенной параллельно разряду, к емкости разряда при малых токах уменьшается при увеличении радиуса разряда, поэтому смещение положения резонанса токов в сторону больших

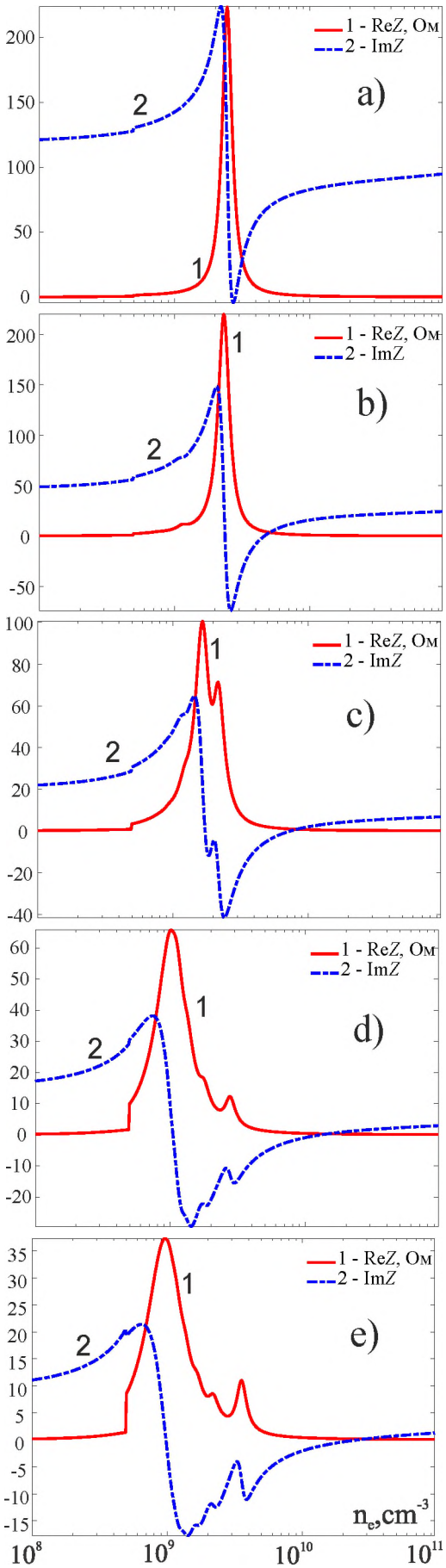

Рис. 4.4. Влияние импеданса, вносимого периферийной частью рабочей камеры на импеданс разряда (1 – ReZ, 2 – ImZ, Ом) (результаты аналитического расчета) для симметричного разряда при синфазном возбуждении. Радиус плазмы R = 2 (a), 5 (b), 10 (c), 15 (d) и 20 (e) см. Частота поля 135.6 МГц. Толщина слоев d_1=d_2=3 мм. Частота столкновений – 0.1 от частоты поля.

концентраций электронов максимально для разряда диаметром 2 см и монотонно уменьшается с увеличением его радиуса. В силу малости вносимой внешними частями индуктивности положение геометрического резонанса практически не меняется (см. рис. 4.2 и 4.4). Поэтому для разряда малого размера, плотности электронов, при которых наблюдается резонанс токов и при которых наблюдается резонанс напряжений достаточно близки. В остальных случаях эти плотности различаются в 3–10 раз.

Резонанс токов, как и в случае разрядной камеры, полностью заполненной плазмой, наблюдается при компенсации индуктивного тока через плазму и емкостного тока, протекающего через область, не заполненную плазмой. При плотностях ниже, чем плотность геометрического резонанса плазма-слой и выше резонанса токов, в среднем разряд имеет индуктивный импеданс. На фоне относительно медленно изменяющегося индуктивного импеданса заметны слабо выраженные резонансы, связанные с отражением поверхностной волны от центра разряда. Малое влияние этих резонансов обусловлено сильным поглощением поверхностной волны. При учете дополнительной емкости эти резонансы проявляются более ярко, чем на рис. 4.2, так как часть индуктивного импеданса, вносимого высшими модами, компенсируется емкостью внешней части камеры.

§4.6. Численное моделирование разряда с симметричным возбуждением.

Аналитические результаты, полученные в предыдущих параграфах, сопоставлялись с численными расчетами, проводимыми с помощью математического пакета COMSOL Multiphysics®. Как и в главе 3 уравнения Максвелла решались в области пространства, включающей центральную часть камеры ($0<r<R_3$, $-L<z<L$) и межэлектродное пространство, ($R_1<r<R_2$, $-L<|z|<L+L_2$), рис. 4.1. На электродах и стенке вакуумной камеры ставились нулевые граничные условия для тангенциальной компоненты электрического поля. Рассматривался разряд с симметричным возбуждением, для которого ток I, втекающий через нижний электрод равен току, вытекающему через верхний. На внешней границе 6 ($R_1<r<R_2$, $-|z|=L+L_2$) азимутальное магнитное поле считалось заданным $H_\varphi\left(r,\pm\left(L+L_2\right)\right)=I/2\pi r$.

Импеданс рассчитывался в нескольких точках. Во-первых, на границе разряда (1, $r=R$, рис. 4.5), в этом случае в соответствии с общими формулами статьи [13]

$$I(R)=\frac{2\pi R}{L}\int_0^L H_\varphi(R,z)dz\,,\ U=-\int_0^L E_z(R,z)dz\,,\ Z=U/I\,.$$

При этом предполагалось, что ток определяется усредненным по высоте значением магнитного поля (обсуждение различных вариантов связи тока электродов, с помощью которого рассчитывается импеданс и пространственного распределения поля приведено в главе 2).

Во-вторых, на границе 6 (см. рис. 4.1) расчетной области, формулы для импеданса в данном случае совпадают с приведенными в [45]:

$$I = 2\pi R_1 H_\varphi\left(R_1, \pm L + L_2\right) = 2\pi R_2 H_\varphi\left(R_2, \pm L + L_2\right),\ U = \int_{R_1}^{R_2} E_r\left(r, \pm(L + L_2)\right) dr,\ Z = U/I$$

В третьих, в подводящей к разрядной камере линии на расстоянии L_2=1 см (2, рис. 4.6) и L_2=10 см от разрядной камеры. Распределение плотности электронов в плазме при расчетах было однородно, а диэлектрическая проницаемость была задана в модели холодной плазмы. Со стороны внешней стенки разряд ограничен диэлектриком с ε=1.

Расчеты импеданса на границе разряда приведены на рис. 4.5. Поскольку значения импеданса существенно падают при изменении плотности электронов на три порядка, кривые построены в двух масштабах (рисунки слева и справа), позволяющих показать поведение импеданса и при низких и при высоких плотностях плазмы. Сравнение с аналитическими расчетами (рис. 4.2) показывает их качественное согласие. При малых плотностях (менее 5–6 критических) результаты согласуются и количественно, однако, с ростом плотности электронов рассогласование численной и аналитической кривых нарастает. Геометрический резонанс плазма-слой пространственного заряда в численных расчетах лежит при более низких значениях плотности электронов. Это рассогласование может быть связано с теми приближениями, которые делались при аналитическом расчете – использованием диагонального приближения в получаемой матрице и учетом только двух высших мод. Однако наличие всплесков импеданса (причем как в аналитических, так и в численных расчетах) свидетельствует о существенном изменении соотношения между амплитудами поля поверхностной воны и нераспространяющихся мод.

Влияние периферийной части рабочей камеры при разности радиусов R_3-R_2 менее 5 см и частоте 135.6 МГц, как показали оценки и численные расчеты в COMSOL Multiphysics® несущественно, так как индуктивность, вносимая внешней частью камеры, менее 0.01 мкГн. Емкости периферийной части электродов и внешней подводящей линии, напротив, существенно изменяют положение резонанса токов в сторону больших плотностей, положение геометрических резонансов плазма-слой практически не меняется (рис. 4.6). Резонансы, связанные с

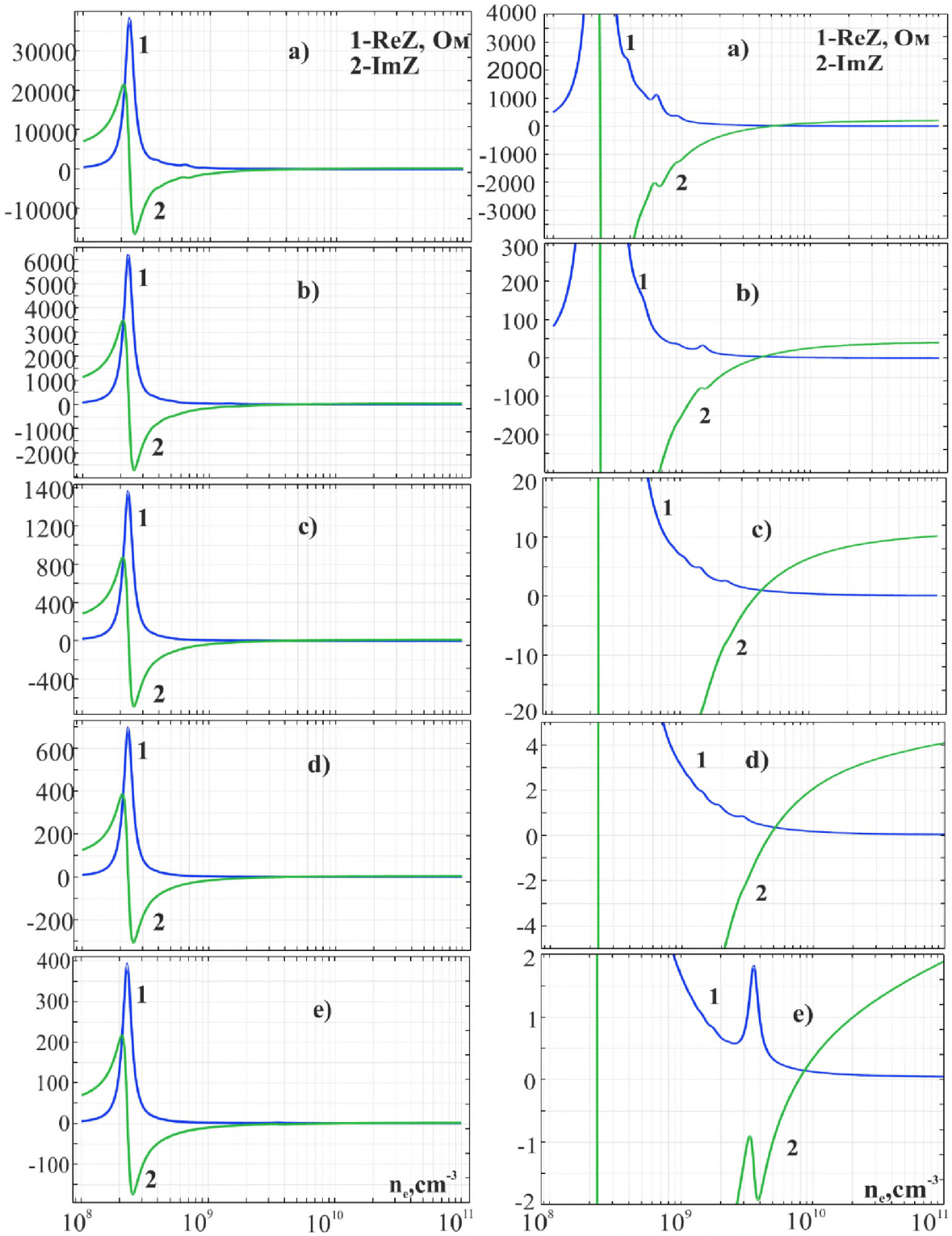

Рис. 4.5. Импеданс разряда (1 – ReZ, 2 – ImZ, Ом) (результаты численного моделирования) для симметричного разряда при синфазном возбуждении. Рисунок справа представляет собой те же кривые, но в большем масштабе. Радиус плазмы R = 2 (a), 5 (b), 10 (c), 15 (d) и 20 (e) см. Частота поля 135.6 МГц. Толщина слоев d_1=d_2=3 мм. Частота столкновений – 0.1 от частоты поля. Импеданс рассчитывался на внешней границе плазмы.

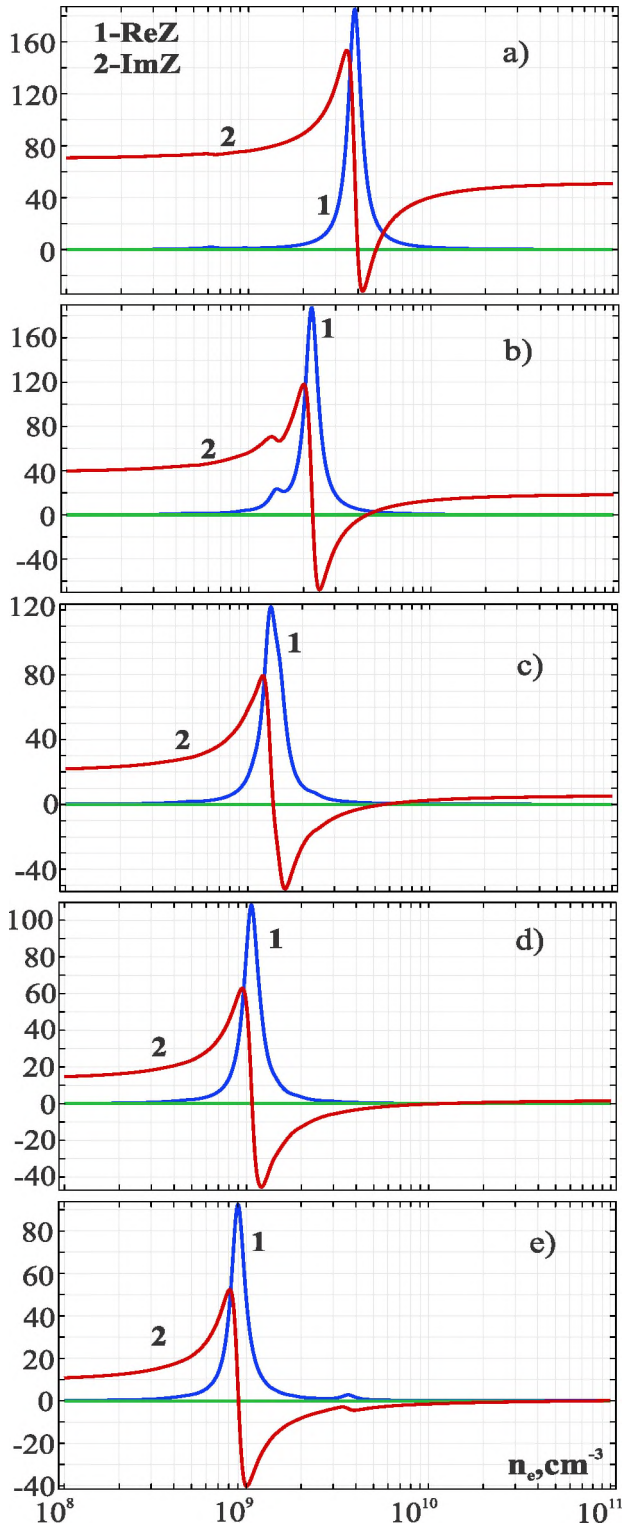

Рис. 4.6. Импеданс разряда (1 – ReZ, 2 – ImZ, Ом) (результаты численного моделирования) для симметричного разряда при синфазном возбуждении. Радиус плазмы R = 2 (a), 5 (b), 10 (c), 15 (d) и 20 (e) см. Частота поля 135.6 МГц. Толщина слоев d_1=d_2=3 мм. Частота столкновений – 0.1 от частоты поля. Исключено влияние внешней части камеры, так как R_3=R_2, однако учитывается емкость подводящей линии

возбуждением поверхностных волн, при компенсации части индуктивного импеданса высших мод емкостью подводящей линии проявляются более ярко.

Поскольку в численном счете влияние резонансов, связанные с возбуждением стоячих поверхностных волн, на расчетных вольтамперных кривых при отношении частоты столкновений электронов к частоте поля $\nu/\omega=0.1$ проявлены слабо, были также проведены расчеты при $\nu/\omega=0.01$ (рис. 4.7), хотя для типичных ВЧ разрядов данное значение частоты столкновений слишком мало. На рис. 4.7 явно выделен скачок импеданса (A), связанных с появлением бегущих радиальных поверхностных волн. Этот скачок наблюдается при плотности электронов немного меньше удвоенной критической, что может быть обусловлено влиянием слоя пространственного заряда. Однако для точного определения причины этого сдвига необходимо проведение дополнительных расчетов, в том числе прямого расчета дисперсии собственных волн трехслойной структуры с учетом столкновений, но без использования теории возмущений. Дальнейший рост плотности электронов приводит к появлению всплесков поглощения и осцилляций на кривой мнимой части импеданса, соответствующих возбуждению стоячих поверхностных волн. Значения плотностей электронов, при которых возбуждаются стоячие поверхностные волны у боковой поверхности, не изменяются при изменении радиуса разряда (B). В то же время резонансы, связанные с возбуждением радиальных стоячих поверхностных волн, при увеличении радиуса плазмы перемещаются в область более высоких плотностей электронов (C). Отдельно обозначен геометрический резонанс плазма-слой (D).

Изменение параметров внешней цепи очень сильно влияет на положение на оси концентраций электронов резонансов тока, названных ранее глобальными, так как компенсация напряжений и токов происходит в разряде в целом, и изменение этих токов и напряжений с изменением параметров плазмы происходит плавно. В то же время положение (но не амплитуда) внутренних резонансов (возбуждение поверхностных волн) определяется внутренними свойствами системы и слабо зависит от параметров внешней цепи. Амплитуда их может резко возрастать, если положение этого резонанса близко к положению глобального резонанса. При расчете характеристик разряда в данной работе предполагалось, что радиус электродов превышает радиус плазмы, поэтому поверхностные волны и высшие типы мод возбуждались не полем источника непосредственно, а только после преобразования последнего в волну TEM. Второй случай кратко рассмотрен в §4.7.

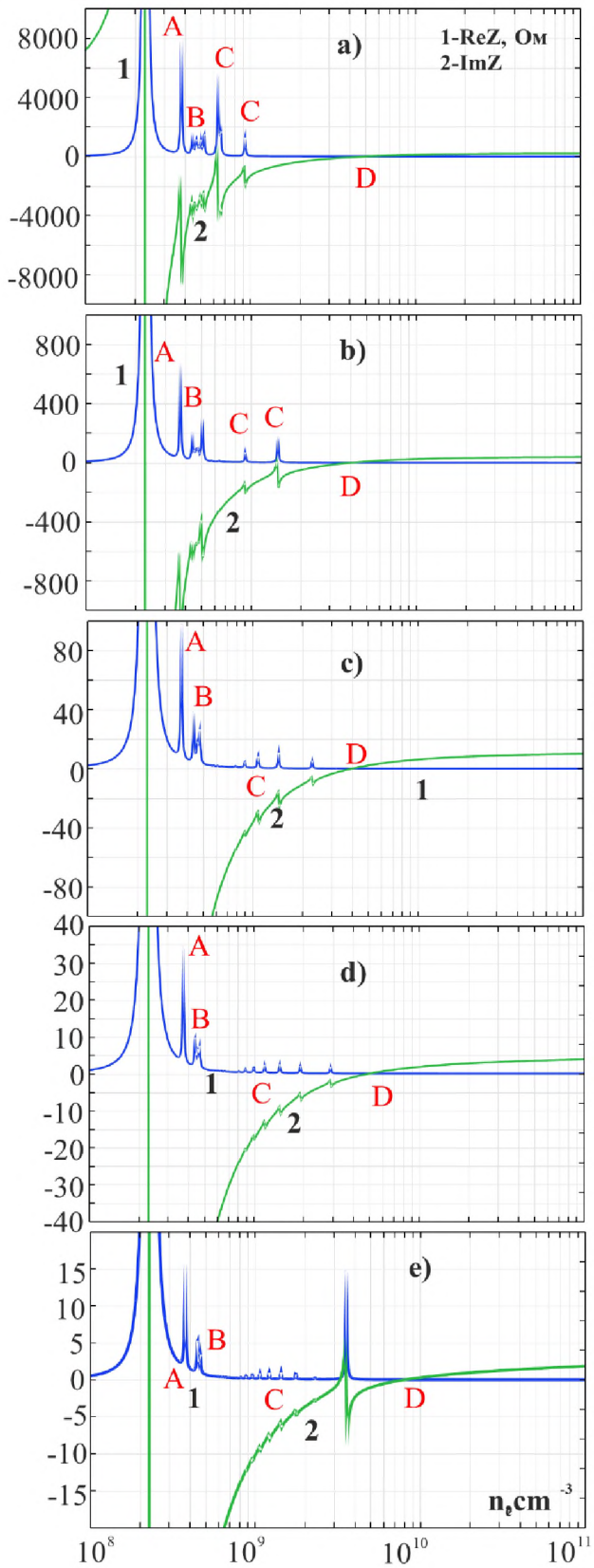

Рис. 4.7. Импеданс разряда (1 – ReZ, 2 – ImZ, Ом) (результаты численного моделирования) для симметричного разряда при синфазном возбуждении. Все расчеты как на рис. 4.5, только частота столкновений – 0.01 от частоты поля

На рис. 4.8–4.10 приведены рассчитанные пространственные распределения напряженности магнитного поля в плазме. Поскольку в отличие от случая полностью заполненной разрядной камеры зависимости импеданса от плотности электронов при всех радиусах плазмы (2, 5, 10, 15 и 20 см) качественно меняются слабо, проведем сравнение распределений азимутального магнитного поля в разрядах разного радиуса с плотностями плазмы, соответствующими одинаковым характерным точкам на зависимости импеданса от плотности электронов. Поскольку во всех случаях внешняя часть разрядной кафедры имеет одинаковую конфигурацию, сравнение пространственного распределения полей даст возможность оценить влияние изменения размера плазмы на пространственное распределение поля. На рисунках 4.8a,b, 4.9a,b, 4.10a,b, показаны распределения поля для разряда радиусом 2 см, 4.8c,d, 4.9c,d 4.10c,d – 5 см, 4.8e,f, 4.9e,f 4.10e,f – 10 см, 4.8g,h, 4.9g,h 4.10g,h – 15 см, 8i,j, 9i,j 10i,j – 20 см. При повышении плотности электронов свыше двух критических в разряде малого радиуса наблюдаются резонансы, связанные с возбуждением стоячей поверхностной волны на боковой диэлектрической стенке разряда. При увеличении радиуса большую роль начинает играть возбуждение поверхностной волны, распространяющейся вдоль электрода. В силу того, что коэффициент поглощения этой волны существенно выше, чем у волны, распространяющейся вдоль боковой поверхности, ее наличие приводит к перераспределению протекающего тока в эту волну и поверхностная волна у боковой поверхности становится менее заметной.

Рис. 4.9 соответствует основному резонансу токов. Ток по области вне плазмы компенсируется током по плазменному столбу. С увеличением радиуса плазмы плотность тока, протекающая через плазму, должна уменьшаться. В силу этого плотность электронов, соответствующая резонансу, падает. В основном в силу малой плотности плазмы и большой глубине проникновения поля высшей моды ток переносится высшими модами поля. Поскольку одновременно растет радиус разряда, то улучшаются условия возбуждения радиальной поверхностной волны, которую можно обнаружить на рис. 9e-f, однако амплитуда этой волны существенно меньше амплитуды поля высшей моды.

Наконец, рис. 4.10 содержит распределение поля, соответствующее геометрическому резонансу плазма-слой пространственного заряда. В резонансной точке энергия, перекачиваемая в поверхностною волну и высшие моды поля примерно равны. Длина поверхностной волны при высоких плотностях

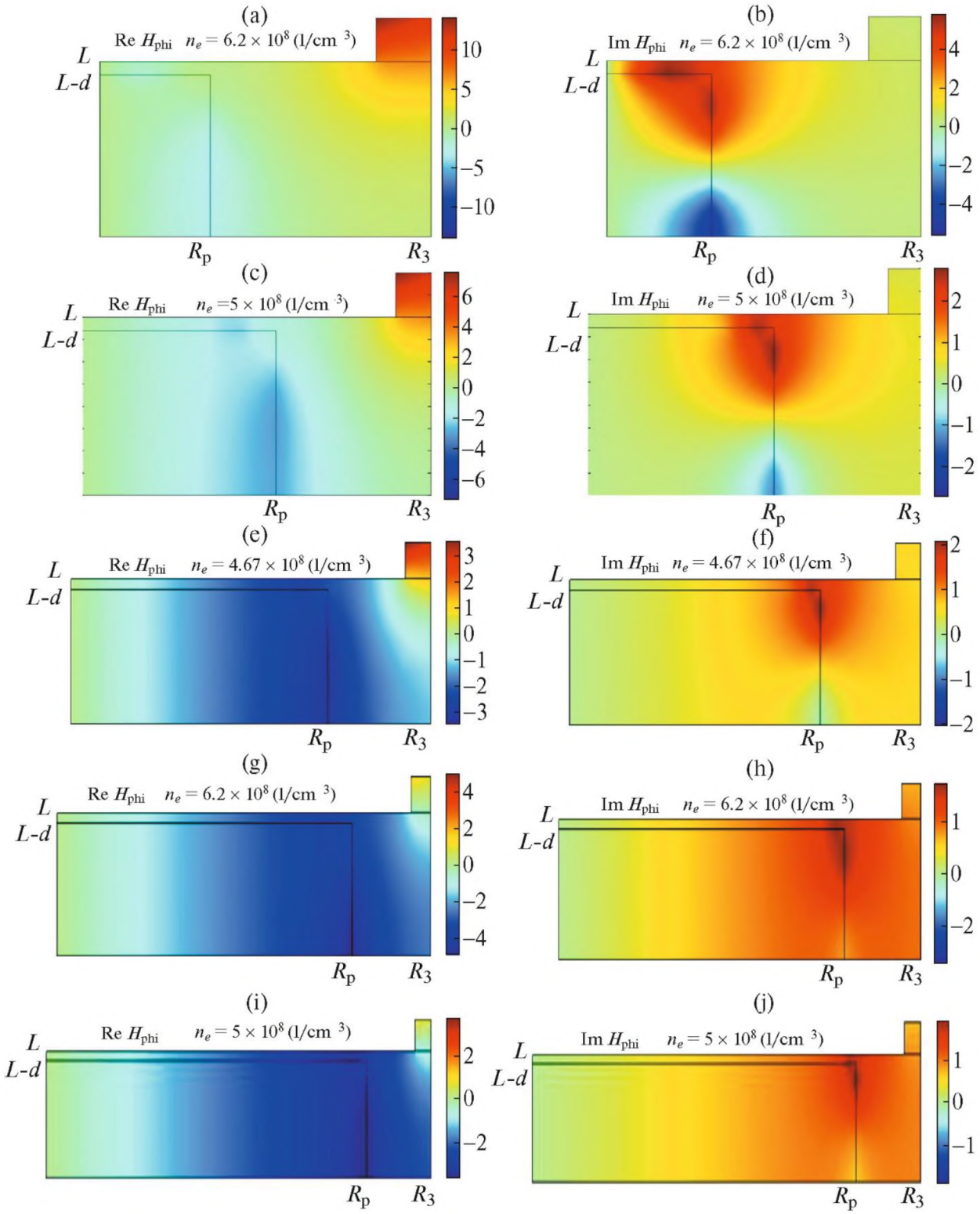

Рис. 4.8. Пространственное распределение магнитного поля при возбуждении поверхностной волны у боковой поверхности разряда при различных радиусах плазмы и рабочей камеры. Условия, соответствующие рис. 4.4. Слева – действительная составляющая магнитного поля, справа – мнимая, А/м. Радиус плазмы a), b) – 2 см, c), d) – 5 см, e), f) – 10 см, g), h) – 15 см, i), j) – 20 см

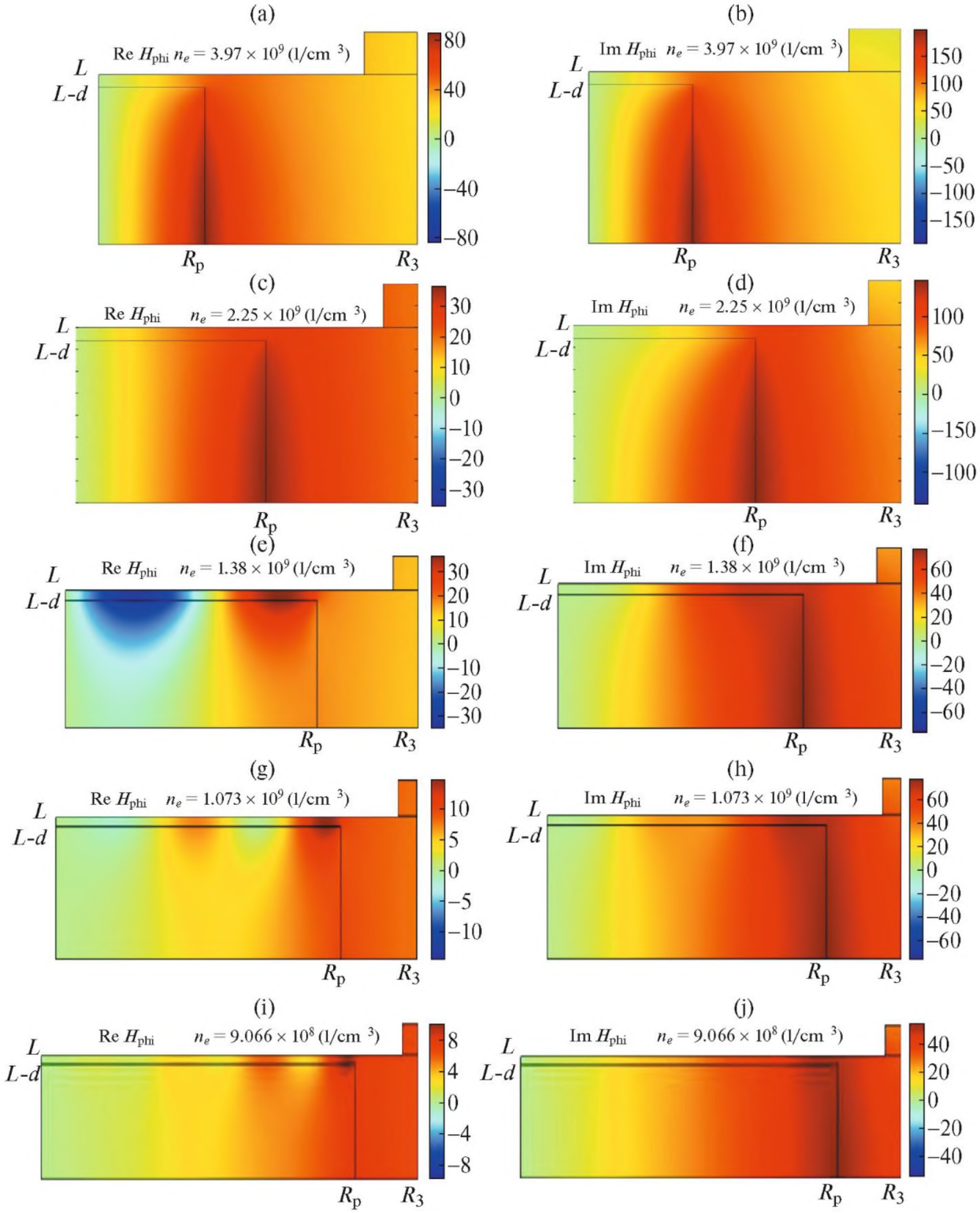

Рис. 4.9. Распределение магнитного поля в плазме при плотности электронов, соответствующей резонансу токов разряда при различных радиусах плазмы и рабочей камеры. Условия, соответствующие рис. 4.4. Слева – действительная составляющая магнитного поля, справа – мнимая, А/м. Радиус плазмы a), b) – 2 см, c), d) – 5 см, e), f) – 10 см, g), h) – 15 см, i), j) – 20 см

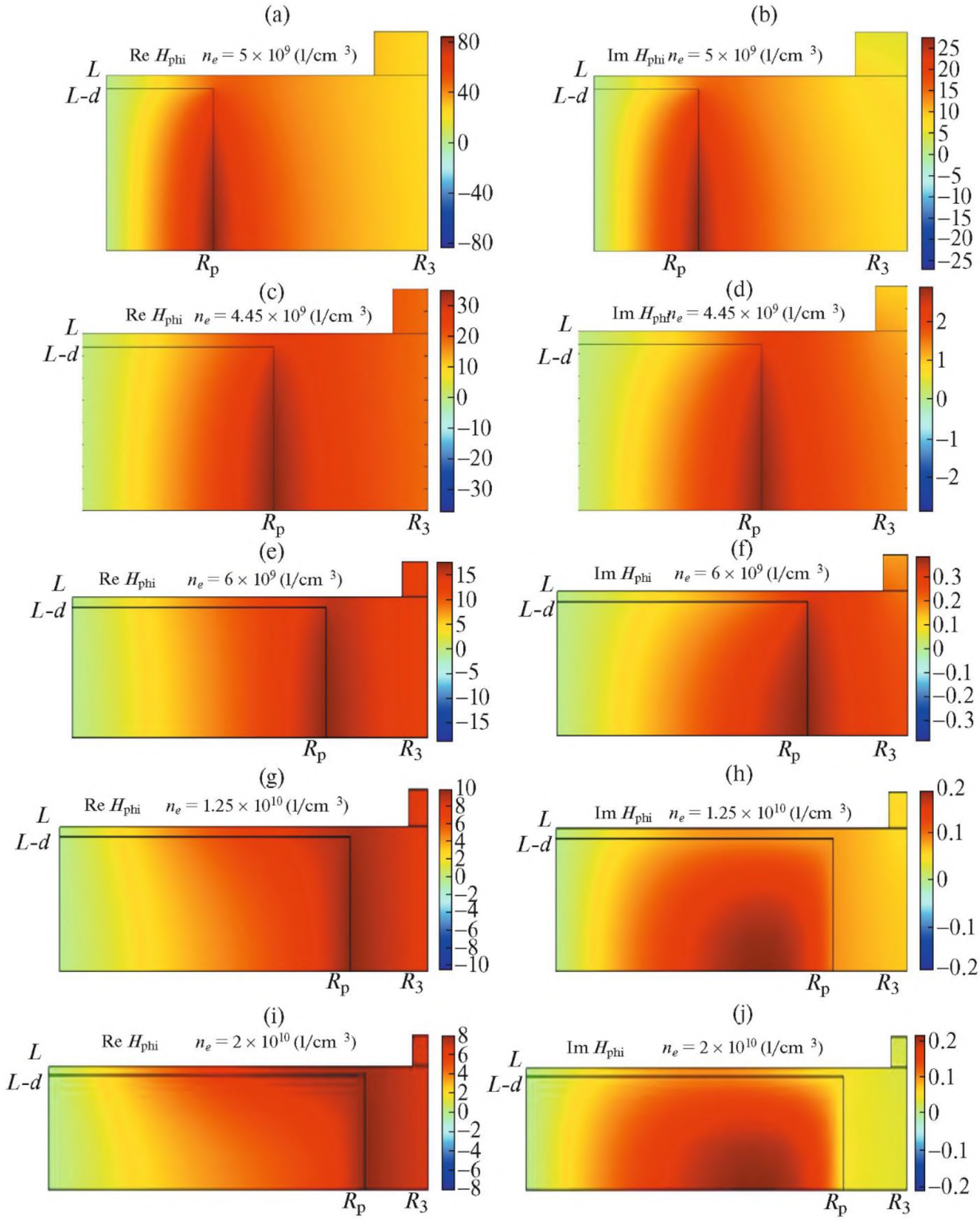

Рис. 4.10. Распределение магнитного поля в плазме при плотности электронов, соответствующей резонансу напряжений при различных радиусах плазмы и рабочей камеры. Условия, соответствующие рис. 4.4. Слева – действительная составляющая магнитного поля, справа – мнимая, А/м. Радиус плазмы a), b) – 2 см, c), d) – 5 см, e), f) – 10 см, g), h) – 15 см, i), j) – 20 см

электронов оказывается больше размеров системы, поэтому ее ток распределен по площади электрода равномерно. В то же время ток высших мод сосредоточен вблизи границы плазмы, т. е. протекает по меньшей площади. Поэтому амплитуда магнитного поля высших мод оказывается незначительно выше амплитуды поля поверхностной волны. Таким образом, анализ пространственной структуры высокочастотного поля с помощью численных расчетов подтверждает качественную картину, полученную в аналитических расчетах.

Сравним полученные кривые импеданса с теми, которые были получены главе 3 (рис. 3.2) для расчетов, выполненных при одинаковых радиусах плазмы. Во-первых, глобальный резонанс токов, вызванный резонансом тока через плазму и тока через дополнительную емкость внешней области камеры и емкость подводящей линии, в рассматриваемой в данной главе линии сдвинут в область больших плотностей электронов. Это отличие вполне согласуется с формулой (4.15) и связано с дополнительной емкостью, которую вносит не закрытая плазмой часть электродов.

Во-вторых, резонансы, связанные с возбуждением радиальных поверхностных волн, выражены слабее, чем для камеры, полностью заполненной плазмой. По-видимому, это отличие обусловлено конфигурацией поля источника, возбуждающего плазму. В работе [15] это поле сосредоточено в области вблизи электрода (в модели используется δ-образный источник). В ней поле поверхностной волны максимально, а поле высших мод, наоборот имеет минимум. В рассматриваемом случае и поверхностные волны и высшие типы волн возбуждаются волной TEM, распределение поля которой по оси равномерно, что должно дать преимущество возбуждению высших мод поля, имеющих максимум в центре (z=0).

В-третьих, в рассматриваемой геометрии возможен резонанс, связанный с компенсацией токов высших мод полей вне и внутри плазмы – резонансное возбуждение поверхностных волн у боковой поверхности.

В целом в данной геометрии есть возможность влиять на поле двух компонент – поле поверхностной волны и поле высших мод. В то же время в полностью заполненной камере есть три компоненты – поверхностная волна в центральной области, поверхностная волна в периферийной области и высшие моды в окрестности области возбуждения, что может дать преимущества в возможностях управления пространственным распределением плотности электронов, но может привести и к дополнительным сложностям.

При противофазном возбуждении разряда в области без плазмы в рассматриваемой конструкции разрядной камеры распространяющихся волн нет – по крайней мере, если расстояние между пластинами меньше длины волны в вакууме. Поэтому ток на боковую стенку при противофазном возбуждении должен протекать через очень малую емкость между плазмой и стенкой. Как итог, в симметричном разряде в рассматриваемой геометрии возбуждение антисимметричных волн затруднено. Однако возбуждение этих волн возможно при нарушении симметрии (размера слоев, плотности электронов), в особенности если учесть, что такое нарушение может происходить спонтанно [45, 47, 218]. Как следует из расчета дисперсионных кривых (глава 2) длина антисимметричных волн в широкой области плотностей электронов существенно меньше, чем симметричных. Поэтому резонансы, связанные с возбуждением этих волн, имеют место при более высоких плотностях электронов, что подтверждается расчетами, выполненными для разрядной камеры, полностью заполненной плазмой (глава 2). Несимметрия разряда в неполностью разрядной вакуумной камере может привести к возбуждению антисимметричных волн и появлению дополнительных резонансов. Этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании в будущих работах.

§4.7. Об импедансе высокочастотного емкостного разряда при различных способах возбуждения [19]

Рассмотрим теперь более общий случай данной задачи, когда боковая граница плазмы может быть расположена на торце электрода и высшие типы мод возбуждаются также и непосредственно на щели между электродами и вакуумной камерой. Геометрия установки и обозначения приведены на рис. 4.1, только выполнено условие $R=R_1$. Система уравнений и расчет импеданса, аналогичен использованным в §4.2 и 4.3. В общем виде она состоит из двух уравнений для амплитуды S_0 поверхностной волны в плазме

$$\alpha_{00}S_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{0n}A_n-\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{0n}B_n=U_0,\ \tilde{\alpha}_{00}S_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}_{0n}A_n-\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\beta}_{0n}B_n=I_0, \qquad (4.17)$$

и бесконечного числа уравнений (j=1...∞) для амплитуд высших мод в плазме A_n и вне ее B_n

$$\alpha_{j0}S_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{jn}A_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_{jn}B_n=U_j,\ \tilde{\alpha}_{j0}S_0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{jn}A_n-\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_{jn}B_n=I_j, \qquad (4.18)$$

Можно использовать как уравнения в форме разложения по собственным модам пустого волновода, так и разложения по волнам трехслойной структуры [13, 15, 17]. Уравнения отражают условия непрерывности тангенциальных компонент

электрического (левые уравнения) и магнитного (правые уравнения) полей на внешней границе плазмы. Выражения для коэффициентов матриц $\|\alpha\|$, $\|\beta\|$, $\|\tilde{\alpha}\|$, $\|\tilde{\beta}\|$, $\|a\|$, $\|b\|$, $\|\tilde{a}\|$, $\|\tilde{b}\|$, а также амплитуд напряжения на плазме и тока электрода при $r=R_p$ приведены в Приложениях. Поскольку ранее (§4.1–4.4) предполагалось, что граница плазмы удалена от ребра электрода на большое расстояние, то генерация высших мод поля в ее окрестности непосредственно в области возбуждения ($R_1<r<R_2$) поля внешним источником отсутствует и $U_n \equiv 0$, а также $I_n \equiv 0$ ($n\neq 0$). Если область возбуждения поля близка к плазме ($|h_n|(R_1-R_P)<<0$, h_n – постоянная распространения моды n), то для малого расстояния между электродом и вакуумной камерой, получим $U_n \neq 0$, но $I_n \equiv 0$. В общем случае обе величины не должны быть равны нулю. Для малой толщины щели можно по аналогии с (5) считать, что внешнее напряжение приложено вблизи границы разрядной камеры $z=\pm L$, $U=U_0\delta(z\pm L)$.

В силу линейности электродинамической задачи возбуждения поля ТЕМ волной (источники U_n, I_n) и источниками U_n, I_n независимы (за исключением связи разных типов источников между собой, так как они создаются одним и тем же генератором). В общем случае

$$U_j = u_j U_0 + z_j I_0,\ I_j = y_j U_0 + i_j I_0$$

Фактически вторая задача была решена в главе 2 [13, 14]. При надлежащем выборе функций для разложения поля одна пара из матриц $\|a_{jn}\|, \|\tilde{a}_{jn}\|$, либо $\|b_{jn}\|, \|\tilde{b}_{jn}\|$ будет диагональной (и соответственно все коэффициенты $\alpha_{0n}, \tilde{\alpha}_{0n}$, либо $\beta_{0n}, \tilde{\beta}_{0n}$ будут равны нулю). Далее будем считать диагональной вторую пару матриц и система (1), (2) примет вид

$$\alpha_{00}S_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{0n}A_n = U_0,\ \tilde{\alpha}_{00}S_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}_{0n}A_n = I_0, \qquad (4.19)$$

$$b_{jj}B_j = \sum_{n=1}^{\infty}a_{jn}A_n + \alpha_{j0}S_0 - U_j,\ \tilde{b}_{jj}B_j = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{jn}A_n + \tilde{\alpha}_{j0}S_0 - I_j, \qquad (4.20)$$

Исключая из нее амплитуду B_j получим

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_{jj}^{-1}a_{jn}A_n - \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_{jj}^{-1}\tilde{a}_{jn}A_n\right) = \left(\tilde{b}_{jj}^{-1}\tilde{\alpha}_{j0} - \alpha_{j0}b_{jj}^{-1}\right)S_0 + b_{jj}^{-1}U_j - \tilde{b}_{jj}^{-1}I_j$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$P_{nj} = b_{jj}^{-1}a_{jn} - \tilde{b}_{jj}^{-1}\tilde{a}_{jn}/$$

Получим для амплитуд высших мод

$$A_n = \sum_{j=1}^{\infty} \left\| P_{nj} \right\|^{-1} \left(\left(\tilde{b}_{jj}^{-1} \tilde{\alpha}_{j0} - \alpha_{j0} b_{jj}^{-1} \right) S_0 + b_{jj}^{-1} U_j - \tilde{b}_{jj}^{-1} I_j \right), \; B_j = \tilde{b}_{jj}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{jn} A_n + \tilde{b}_{jj}^{-1} \tilde{a}_{j0} S_0 - \tilde{b}_{jj}^{-1} I_j . \qquad (4.21)$$

Нули функции $\left\| P_{nj} \right\|$, как показано в этой главе ранее, представляют собой поверхностные волны, распространяющиеся вдоль боковой поверхности плазмы, положение резонансов которых слегка модифицировано наличием слоев поверхностного заряда, изменяющих граничные условия для этих волн при $z=\pm L$. Положение этих резонансов не зависит от амплитуд источников U_j, I_j. Можно сконструировать такую систему возбуждения поля, что U_j, I_j. будут связаны не только с U_0, I_0, но и между собой. Пока такая задача не рассматривается. Подставляя полученные выражения (4.21) в (4.19), разрешим (4.19), найдя амплитуду поверхностной волны S_0 и напряжение на разряде U_0 как функцию тока возбуждения I_0. Разделив полученное выражение на I_0, получим выражение для импеданса. Фактически в главе 3 и выше в данной главе рассмотрены частные случаи задачи (4.17)–(4.18). В полученных здесь результатах важно, что при небольшом шевелении параметров положение резонансов разряда (в отличие от амплитуд волн) не должно изменяться.

§4.8.2. Математическое моделирование распределения поля и импеданса плазмы

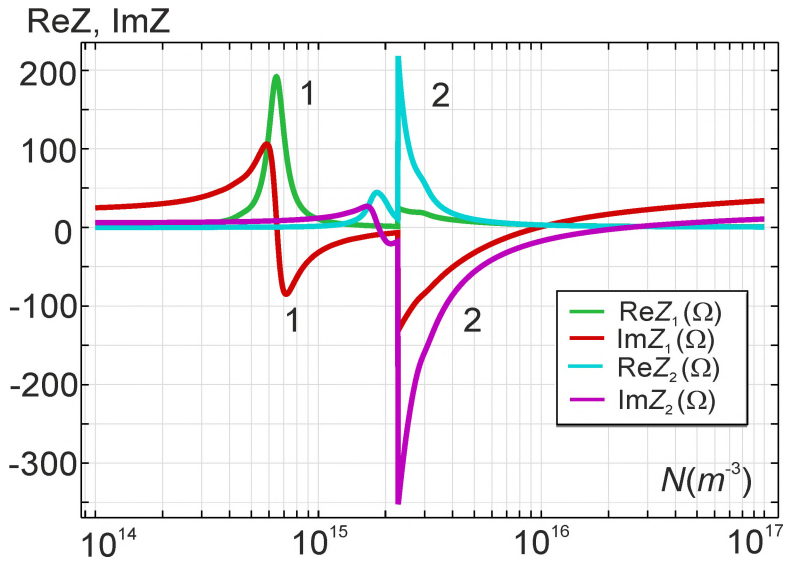

Рис. 4.11. Зависимость импеданса разряда от плотности электронов в плазме. R_1=18 см, R_2=19 см, R_3=19 см.

Расчеты пространственного распределения поля в плазме и импеданса разряда проводились с помощью пакета Comsol Multiphysics® (лицензия принадлежит физическому факультету МГУ). Типичные зависимости действительной и мнимой частей импеданса разряда от плотности электронов приведены на рис. 4.11,

4.12 и 4.13. Частота электромагнитного поля была равна 135.6 МГц, межэлектродное расстояние 2L – 8 см, толщина слоев пространственного заряда – 3 мм. Размер плазмы предполагался равным 15 см. Импеданс рассчитывался на границе вакуумной камеры (область 6 на рис. 4.1, кривые Z_1) и на входе длинной линии, подводящей напряжения этим точкам (кривые Z_2). Размеры линии подбирались таким образом, чтобы ее емкость составляла 80 пФ. Значения радиусов R_1, R_2, R_3 приведены в подписях к рисункам. Радиус плазмы R равен 15 см.

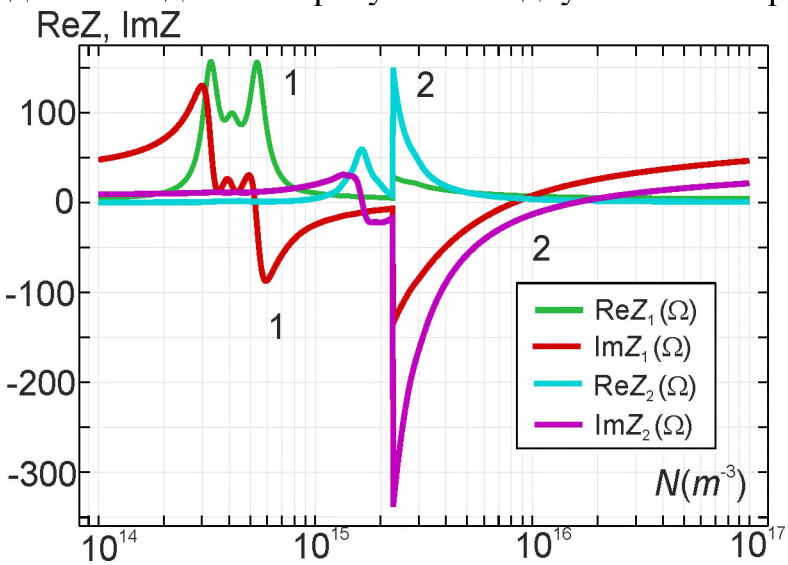

Рис. 4.12. То же, что на рис. 4.11, но R_1=15 см, R_2=16 см, R_3=19 см.

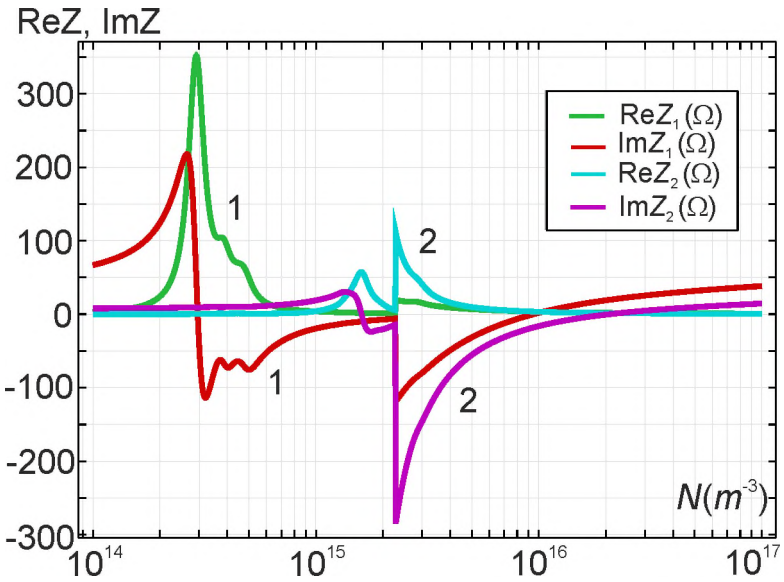

Рис. 4.13. То же, что на рис. 4.11, но R_1=15 см, R_2=18 см, R_3=19 см.

Отношение частоты столкновений электронов к частоте поля, используемое при расчетах 0.1. При плотности электронов $2.2 \cdot 10^9$ см$^{-3}$ масштаб всех кривых увеличивается в 20 раз. Рис. 4.11 (поскольку $R<R_1$) соответствует возбуждению разряда только волной ТЕМ, аналогично тому, как это было в §4.1 – 4.5. Можно

отметить резкое увеличение поглощения в момент перехода плотности электронов через удвоенную критическую при возбуждении разряда в области 6 (кривые 1). Подключение разряда с помощью длинной линии с большой емкостью маскирует эти резонансы, однако резко подчеркивает резонанс поверхностной волны, распространяющейся вдоль слоя пространственного заряда при плотности около $1.8 \cdot 10^9$ см$^{-3}$. Если размер плазмы совпадает с размером электрода (рис. 4.12) при малой толщине возбуждающей щели происходит возбуждение большого числа высших мод, что приводит к сильной изрезанности графика зависимости импеданса от плотности электронов. Увеличение толщины щели (рис. 4.13) приводит к уменьшению коэффициента связи возбуждающей цепи с высшими модами, поэтому амплитуда высших мод и их влияние на зависимость импеданса от плотности электронов уменьшается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

<u>В диссертации получены следующие основные результаты</u>

1. Проведены аналитические и численные (с помощью пакета Comsol Multiphysics®) расчеты электромагнитного поля и импеданса в емкостном высокочастотном разряде низкого давления. Получено, что одновременный учет как основных (поверхностной либо ТЕМ), так и высших нераспространяющихся мод в трехслойной структуре: слой пространственного заряда – плазма – слой пространственного заряда, окруженной металлическими электродами, позволяет корректно аналитически описать электродинамические свойства разряда. При изменении плотности электронов в разряде наблюдаются один или несколько резонансов тока и напряжения.

2. Два резонанса (один для тока и один для напряжения) проявляются практически всегда и их можно назвать глобальными. Основной резонанс напряжений – геометрический резонанс плазма-слой пространственного заряда. Положение основного (глобального) резонанса тока связано с компенсацией тока плазмы через внутреннюю область разряда и емкостного тока подводящей линии передачи. При малых размерах плазмы в емкостной импеданс вносят вклад поверхностные волны, а в индуктивный - высшие моды. При пренебрежении поверхностными волнами или высшими типами мод этот резонанс не проявляется в расчетах, хотя наблюдается в эксперименте.

3. При больших размерах электродов и малых частотах столкновений ($\nu/\omega < \lambda/L$) появляются дополнительные всплески на зависимости импеданса разряда от плотности электронов. При их больших амплитудах возможно появление дополнительных резонансов тока и резонансов напряжения, связанных с кратностью размеров разряда определенному числу полуволн поверхностной волны. Положение этих всплесков или резонансов на оси плотностей электронов зависит от амплитуды высших мод и импеданса внешней цепи питания разряда. Амплитуды различных мод поля и пространственное распределение ВЧ поля в разряде существенно изменяются с изменением плотности электронов независимо от способа поддержания разряда.

4. Стоячие поверхностные волны, возбуждение которых возможно у боковой поверхности плазмы, существенны в области плотностей электронов, в несколько раз превышающих критическую. Эти волны в разряде малого радиуса оказывают существенное влияние на импеданс разряда в целом в области плотностей электронов, незначительно

превышающих удвоенную критическую при условии, что радиус сравним с высотой разряда.

5. При противофазном возбуждении разряда резонансы поверхностных волн наблюдаются при более высоких плотностях плазмы, так как антисимметричные поверхностные волны короче симметричных. При высоких плотностях электронов существенную роль играет слой пространственного заряда у боковой стенки плазмы. Для разряда высокой плотности его наличие приводит к появлению нового резонанса, который можно также рассматривать как геометрический резонанс плазма-слой пространственного заряда, где индуктивный импеданс периферийной плазмы компенсируется емкостным импедансом периферийного слоя пространственного заряда. Электромагнитное поле при этом сосредотачивается в периферийной области.

6. Численный расчет собственных волн трехслойной структуры для плазмы с поглощением показал, что структура собственных волн качественно изменяется при изменении отношения частоты столкновений к частоте поля, что важно при расчете характеристик плазменных волноводов и разряда при плотностях электронов вблизи удвоенной критической.

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность моим научным руководителям докторам физико-математических наук С.А. Двинину и Д.К. Солихову за руководство работой, поддержку и постоянную помощь при ее выполнении.

Благодарю докторов физико-математических наук, профессоров В.С. Черныша, А.Ф. Александрова, М.В. Кузелева и доцента И.Н. Карташова за полезные замечания при решение конкретных задач, а также руководство и сотрудников кафедры физической электроники физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и физического факультета Таджикского национального университета, чьи вопросы и обсуждения на семинарах помогли автору.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. РАСЧЕТ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ[1]

Расчет постоянных распространения волн, входящих в выписанные выше уравнения, можно упростить, рассматривая плоскую задачу вместо цилиндрической. Рассмотрим бесконечную в плоскости $X0Z$ структуру, состоящую из трех диэлектрических слоев с диэлектрическими проницаемостями ε_1, ε_P, ε_2, и толщинами d_1, $2L–d_1–d_2$, d_2. Ось $0X$ направлена в направлении распространения волны, ось $0Z$ – перпендикулярно к ней, ось $0Y$ – перпендикулярно поверхности структуры. На границах структуры толщиной 2L расположены металлические электроды. Систему координат удобно выбрать так, чтобы ноль оси 0Z находился в средней точке положительного столба, т. е. границы плазмы и слоев пространственного заряда имели координаты $–L_2$ и L_2 (d_1 – толщина верхнего слоя, d_2 – нижнего, $2L=2L_2+d_1+d_2$). Для Е-волны уравнения (1, 3, 4) с учетом нулевых граничных условий (2) на стенках разрядной камеры для радиального электрического поля приводят к следующим выражениям для электромагнитного поля в верхнем слое пространственного заряда

$$\begin{Bmatrix} e_z(z) \\ e_x(z) \\ b_y(z) \end{Bmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} -\dfrac{ih}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}} ch\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h^2}\,(L_2+d_1-z)\right) \\ -sh\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}\,(L_2+d_1-z)\right) \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{ik\varepsilon_1}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}} ch\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1}\,(L_2+d_1-z)\right) \end{pmatrix} \frac{\exp(-i\omega t+ihx)}{ch\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h^2}\,d_1\right)}, \qquad (П1.1)$$

в плазме

$$\begin{Bmatrix} e_z(z) \\ e_x(z) \\ b_y(z) \end{Bmatrix} = \frac{\exp(-i\omega t+ihx)}{ch\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}L_P\right)} \left\{ A_2 \begin{pmatrix} -\dfrac{ih}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} ch\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h^2}\,z\right) \\ sh\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}\,z\right) \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{ik\varepsilon_P}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} ch\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}\,z\right) \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} -\dfrac{ih}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} sh\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h^2}\,z\right) \\ ch\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}\,z\right) \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{ik\varepsilon_P}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}} sh\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}\,z\right) \end{pmatrix} \right\} \qquad (П1.2)$$

и в нижнем слое пространственного заряда

$$\begin{Bmatrix} e_z(z) \\ e_x(z) \\ b_y(z) \end{Bmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} -\dfrac{ih}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}} ch\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}\,(z+L_2+d_2)\right) \\ sh\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}\,(z+L_2+d_2)\right) \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\dfrac{ik\varepsilon_2}{\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}} ch\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}\,(z+L_2+d_2)\right) \end{pmatrix} \frac{\exp(-i\omega t+ihx)}{ch\left(\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}\,d_2\right)}. \qquad (П1.3)$$

---

[1] Материалы Приложений 1–8 опубликованы в работах [13 – 18].

Соотношение амплитуд симметричной и антисимметричной мод в поверхностной волне и дисперсионное соотношение вытекают из условий равенства тангенциальных составляющих электромагнитного поля:

$$\frac{B_{2\pm}}{A_{2\pm}}=-\frac{\left(\frac{\varepsilon_P\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_1}}{\varepsilon_1\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_P}}th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)+th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)\right)}{\left(1+\frac{\varepsilon_P\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_1}}{\varepsilon_1\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_P}}th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)\right)}=\frac{\left(\frac{\varepsilon_P\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_2}}{\varepsilon_2\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_P}}th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_2}d_2\right)+th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)\right)}{\left(1+\frac{\varepsilon_P\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_2}}{\varepsilon_2\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_P}}th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)th\left(\sqrt{h_\pm^2-k^2\varepsilon_2}d_2\right)\right)}$$

(П1.4)

Знаком минус отмечена более короткая поверхностная волна, а знаком плюс более длинная. После введения переменных $\tilde{p}^2=h_\pm^2-k^2\varepsilon_P$, $p^2=k^2\varepsilon_P-h_\pm^2$, $a_{1,2}^2=h_\pm^2-k^2\varepsilon_{1,2}$, $\tilde{a}_{1,2}^2=k^2\varepsilon_{1,2}-h_\pm^2$ получим:

$$\frac{B_{2\pm}}{A_{2\pm}}=-\frac{\left(\frac{\varepsilon_P a_1}{\varepsilon_1 p}th\left(a_1d_1\right)+th\left(pL_2\right)\right)}{\left(1+\frac{\varepsilon_P a_1}{\varepsilon_1 p}th\left(pL_2\right)th\left(a_1d_1\right)\right)}=\frac{\left(\frac{\varepsilon_P a_2}{\varepsilon_2 p}th\left(a_2d_2\right)+th\left(pL_2\right)\right)}{\left(1+\frac{\varepsilon_P a_2}{\varepsilon_2 p}th\left(a_2L_2\right)th\left(pd_2\right)\right)}. \quad (П1.5)$$

Из (П1.4) и (П1.5) следует дисперсионное уравнение (10).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. СТРУКТУРА ПОЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ, ВЫСШИХ МОД И ВОЛНОВОДНЫХ МОД

В приведенных ниже формулах используются обозначения для цилиндрических функций $P_0(x)=J_0(x),H_0^{(1)}(x),H_0^{(2)}(x)$, $Q_0(x)=I_0(x),K_0(x)$, $P_1(x)=J_1(x),H_1^{(1)}(x),H_1^{(2)}(x)$, $Q_1(x)=I_1(x),-K_1(x)$, а также обозначения для постоянных распространения $\tilde{h}_{n\pm}=ih_{n\pm}$, $\hat{a}_{n+}=\pi\left(1/2+n\right)/L$, $\hat{a}_{n-}=\left(\pi n\right)/L$, $\hat{h}_{n\pm}=\sqrt{\hat{a}_{n\pm}^2-k^2}$.

Таблица 1. Распределение электромагнитных полей в плазме и слоях пространственного заряда для поверхностных Е-волн.

Симметричная Волна	Антисимметричная волна
В слое $\begin{Bmatrix} e_{z+} \\ e_{r+} \\ h_{\varphi+} \end{Bmatrix}=A\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{h_+}{ik}\frac{ch\left(\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_1}\left(L+d-z\right)\right)}{ch\left(\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)}P_0\left(h_+r\right) \\ -th\left(\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_P}}{ik\varepsilon_P}\frac{sh\left(\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_1}\left(L_2+d_1-z\right)\right)}{sh\left(\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)}P_1\left(h_+r\right) \\ \frac{ch\left(\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_1}\left(L_2+d_1-z\right)\right)}{ch\left(\sqrt{h_+^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)}P_1\left(h_+r\right) \end{pmatrix}$	$\begin{Bmatrix} e_{z-} \\ e_{r-} \\ h_{\varphi-} \end{Bmatrix}=B\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{h_-}{ik}th\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)\frac{ch\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_1}\left(L_2+d_1-z\right)\right)}{ch\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)}P_0\left(h_-r\right) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_P}}{ik\varepsilon_P}\frac{sh\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_1}\left(L_2+d_1-z\right)\right)}{sh\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)}P_1\left(h_-r\right) \\ th\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_P}L_2\right)\frac{ch\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_1}\left(L_2+d_1-z\right)\right)}{ch\left(\sqrt{h_-^2-k^2\varepsilon_1}d_1\right)}P_0\left(h_-r\right) \end{pmatrix}$
В плазме	

$$\begin{Bmatrix} e_{z+} \\ e_{r+} \\ h_{\varphi+} \end{Bmatrix} = A \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{h_+}{ik\varepsilon_P} \frac{ch\left(\sqrt{h_+^2 - k^2\varepsilon_P} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_+^2 - k^2\varepsilon_P} L_P\right)} P_0(h_+ r) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{h_+^2 - k^2\varepsilon_P}}{ik\varepsilon_P} \frac{sh\left(\sqrt{h_+^2 - k^2\varepsilon_P} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_+^2 - k^2\varepsilon_P} L_P\right)} P_1(h_+ r) \\ \frac{ch\left(\sqrt{h_+^2 - k^2\varepsilon_2} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_+^2 - k^2\varepsilon_P} L_P\right)} P_0(h_+ r) \end{pmatrix}$$	$$\begin{Bmatrix} e_{z-} \\ e_{r-} \\ h_{\varphi-} \end{Bmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{h_-}{ik\varepsilon_P} \frac{sh\left(\sqrt{h_-^2 - k^2\varepsilon_P} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_-^2 - k^2\varepsilon_P} L_P\right)} P_0(h_- r) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{h_-^2 - k^2\varepsilon_P}}{ik\varepsilon_P} \frac{ch\left(\sqrt{h_-^2 - k^2\varepsilon_P} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_-^2 - k^2\varepsilon_P} L_P\right)} P_1(h_- r) \\ \frac{sh\left(\sqrt{h_-^2 - k^2\varepsilon_P} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_-^2 - k^2\varepsilon_P} L_P\right)} P_1(h_- r) \end{pmatrix}$$

Таблица 2. Распределение электромагнитных полей в плазме и слоях пространственного заряда для затухающих Е-волн.

Симметричная Волна	Антисимметричная волна
В слое	В слое
$$\begin{Bmatrix} e_{zn-} \\ e_{rn-} \\ h_{\varphi n-} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\tilde{h}_{n-}}{ik} \frac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2}(L+d-z)\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n+}^2} d_1\right)} Q_0(\tilde{h}_{n+} r) \\ -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2}}{ik\varepsilon_P} tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2} L_2\right) \frac{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2}(L_2 + d_1 - z)\right)}{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n+}^2} d_1\right)} Q_1(\tilde{h}_{n+} r) \\ \frac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n+}^2}(L_2 + d_1 - z)\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n+}^2} d_1\right)} Q_0(\tilde{h}_{n-} r) \end{pmatrix}$$	$$\begin{Bmatrix} e_{zn-} \\ e_{rn-} \\ h_{\varphi n-} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i\tilde{h}_{n-}}{ik} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} L_2\right) \frac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2}(L_2 + d_1 - z)\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2} d_1\right)} Q_0(\tilde{h}_{n-} r) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2}}{ik\varepsilon_P} \frac{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2}(L_2 + d_1 - z)\right)}{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2} d_1\right)} Q_1(\tilde{h}_{n-} r) \\ tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} L_2\right) \frac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2}(L_2 + d_1 - z)\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 + \tilde{h}_{n-}^2} d_1\right)} Q_0(\tilde{h}_{n-} r) \end{pmatrix}$$
В плазме	
$$\begin{Bmatrix} e_{zn+} \\ e_{rn+} \\ h_{\varphi n+} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\tilde{h}_{n+}}{ik\varepsilon_P} \frac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2} L_P\right)} Q_1(\tilde{h}_{n+} r) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2}}{ik\varepsilon_P} \frac{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2} L_P\right)} Q_1(\tilde{h}_{n+} r) \\ \frac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n+}^2} L_P\right)} Q_0(\tilde{h}_{n+} r) \end{pmatrix}$$	$$\begin{Bmatrix} e_{zn-} \\ e_{rn-} \\ h_{\varphi n-} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\tilde{h}_{n-}}{ik\varepsilon_P} \frac{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} L_P\right)} Q_0(\tilde{h}_{n-} r) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2}}{ik\varepsilon_P} \frac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} L_P\right)} Q_1(\tilde{h}_{n-} r) \\ \frac{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P + \tilde{h}_{n-}^2} L_P\right)} Q_0(\tilde{h}_{n-} r) \end{pmatrix}$$

Таблица 3. Распределение поля для ТЕМ волны и затухающих волн вне плазмы

ТЕМ волна	
$$\begin{Bmatrix} \tilde{e}_{z0+} \\ \tilde{e}_{r0+} \\ \tilde{h}_{\varphi 0+} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} P_0(kr) \\ 0 \\ P_0(kr) \end{pmatrix}$$	
Симметричная Волна	Антисимметричная волна

$\begin{Bmatrix} \hat{e}_{zn+} \\ \hat{e}_{rn+} \\ \hat{h}_{n0+} \end{Bmatrix} = A_{n+} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\hat{h}_{n+}}{ik\varepsilon_P} \cos(\hat{a}_{n+}z) Q_0(\hat{h}_{n+}r) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\hat{a}_{n+}}{ik} \sin(\hat{a}_{n+}z) Q_1(\hat{h}_{n+}r) \\ \cos(\hat{a}_{n+}z) Q_0(\hat{h}_{n+}r) \end{pmatrix},$	$\begin{Bmatrix} \tilde{e}_{zn-}(z) \\ \tilde{e}_{xn-}(z) \\ \tilde{b}_{yn-}(z) \end{Bmatrix} = A_{n-} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\hat{h}_{n-}}{ik\varepsilon_P} \sin(\hat{a}_{n-}z) Q_0(\hat{h}_{n-}r) \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\hat{a}_{n-}}{ik} \cos(\hat{a}_{n-}z) Q_1(\hat{h}_{n-}r) \\ \sin(\hat{a}_{n-}z) Q_0(\hat{h}_{n-}r) \end{pmatrix}.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. УСЛОВИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ, ОКРУЖЕННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ

Приведем выражения для собственных функций для магнитного поля: четных волн $\tilde{L} = L - d$ $\mathbf{h}_{\varphi 0+} = \dfrac{ch\left(\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_P} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_P} \tilde{L}\right)}$ в плазме ($|z|<l-d$), $\mathbf{h}_{\varphi 0+} = \dfrac{ch\left(\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_1} \left(L - |z|\right)\right)}{ch\left(\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_1} d\right)}$ в слое ($l-d<|z|<l$), и для нечетных волн $\mathbf{h}_{\varphi 0-} = \dfrac{sh\left(\sqrt{h_{0-}^2 - k^2\varepsilon_P} z\right)}{ch\left(\sqrt{h_{0-}^2 - k^2\varepsilon_P} \tilde{L}\right)}$ в плазме ($|z|<l-d$), $\mathbf{h}_{\varphi 0-} = \dfrac{z}{|z|} th\left(\sqrt{h_{0-}^2 - k^2\varepsilon_P} \tilde{L}\right) \dfrac{ch\left(\sqrt{h_{0-}^2 - k^2\varepsilon_1} \left(L - |z|\right)\right)}{ch\left(\sqrt{h_{0-}^2 - k^2\varepsilon_1} d\right)}$ в слое ($l-d<|z|<l$). соответствующие выражения для высших мод имеют вид $\mathbf{h}_{\varphi 0+} = \dfrac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{0+}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{0+}^2} \tilde{L}\right)}$ в плазме ($|z|<l-d$), $\mathbf{h}_{\varphi 0+} = \dfrac{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{0+}^2} \left(L - |z|\right)\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{0+}^2} d\right)}$ в слое ($l-d<|z|<l$), $\mathbf{h}_{\varphi 0+} = \dfrac{\sin\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{0-}^2} z\right)}{\cos\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{0-}^2} \tilde{L}\right)}$ в плазме ($|z|<l-d$), $\mathbf{h}_{\varphi 0-} = \dfrac{z}{|z|} th\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{0-}^2} \tilde{L}\right) \dfrac{ch\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{0-}^2} \left(L - |z|\right)\right)}{ch\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{0-}^2} d\right)}$ в слое. Условия ортогональности этих функций, входящих в уравнения (1 – 3), сводятся к выражениям (индекс 0 соответствует поверхностным волнам, $\varepsilon = \varepsilon_P$ в плазме и $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$ в слое)

$$\int_0^L \frac{dz}{\varepsilon(z)} \mathbf{h}_{\varphi 0+}(z) \mathbf{h}_{\varphi n+}^{+}(z) = \frac{1}{h_{0+}^2 - h_{n+}^2} \left[\left(\frac{\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_P}}{\varepsilon_P} th\left(\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_P} \tilde{L}\right) + \frac{\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_1}}{\varepsilon_1} th\left(\sqrt{h_{0+}^2 - k^2\varepsilon_1} d\right) \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{n+}^2}}{\varepsilon_P} tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{n+}^2} \tilde{L}\right) + \frac{\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{n+}^2}}{\varepsilon_1} tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{n+}^2} d\right) \right) \right],$$

Аналогичный расчет для двух затухающих волн приводит к соотношению

$$\int_0^L \frac{dz}{\varepsilon(z)} \mathbf{h}_{\varphi \mathbf{m}+}(z) \mathbf{h}_{\varphi n+}^{+}(z) = \frac{1}{h_{m+}^2 - h_{n+}^2} \left[\left(\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{m+}^2}}{\varepsilon_P} tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{m+}^2} \tilde{L}\right) + \frac{\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{m+}^2}}{\varepsilon_1} tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{m+}^2} d\right) \right) + \right. .$$

$$+\left(\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n+}^2}}{\varepsilon_P}tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n+}^2}\tilde{L}\right)+\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n+}^2}}{\varepsilon_1}tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n+}^2}d\right)\right)\Bigg]$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой сумму дисперсионных выражения для собственных волн, поэтому оно равен нулю. Поэтому если m≠n, то знаменатель отличен от нуля, и собственные функции ортогональны. При m=n рассматриваемые интегралы представляют собой квадрат нормы собственной функции и будут рассчитаны ниже (эти интегралы не являются квадратом нормы в том смысле, в котором мы к нему привыкли, поскольку для затухающих волн интеграл при отрицательных ε_P будет отрицательным). Для антисимметричных волн соответствующие интегралы имеют вид

$$\int_0^L\frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi 0-}(z)\mathbf{h}_{\varphi n-}^{+}(z)=\frac{th\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_P}\tilde{L}\right)tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}\tilde{L}\right)}{h_{0-}^2-h_{n-}^2}\Bigg[\left(\frac{\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_P}}{\varepsilon_P}cth\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_P}\tilde{L}\right)+\frac{\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_1}}{\varepsilon_1}th\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)\right)+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}}{\varepsilon_P}ctg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}\tilde{L}\right)+\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n-}^2}}{\varepsilon_1}tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n-}^2}d\right)\right)\Bigg],$$

$$\int_0^L\frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi \mathbf{m}-}(z)\mathbf{h}_{\varphi n-}^{+}(z)=\frac{\left(\sqrt{h_{m-}^2-k^2\varepsilon_P}L\right)tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}\tilde{L}\right)}{h_{m-}^2-h_{n-}^2}\Bigg[\left(-\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{m-}^2}}{\varepsilon_P}ctg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{m-}^2}\tilde{L}\right)+\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{m-}^2}}{\varepsilon_1}tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{m-}^2}d\right)\right)+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n+}^2}}{\varepsilon_P}ctg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}\tilde{L}\right)+\frac{\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n-}^2}}{\varepsilon_1}tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n-}^2}d\right)\right)\Bigg].$$

Расчет для совпадающих собственных функций приводит к соотношениям.

$$N_{0+}^{H2}=\int_0^L\frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi 0+}(z)\mathbf{h}_{\varphi n+}^{+}(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon_P}\left(\frac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}\tilde{L}\right)}{\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}}+\frac{\tilde{L}}{ch^2\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_P}\tilde{L}\right)}\right)+\left(\frac{th\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}{\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}}+\frac{d}{ch^2\left(\sqrt{h_{0+}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}\right)\right],$$

$$N_{n+}^{H2}=\int_0^L\frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi \mathbf{n}+}(z)\mathbf{h}_{\varphi n-}^{+}(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon_P}\left(\frac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n+}^2}\right)\tilde{L}}{\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n+}^2}}+\frac{\tilde{L}}{\cos^2\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n+}^2}\tilde{L}\right)}\right)+\left(\frac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n+}^2}d\right)}{\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n+}^2}}+\frac{d}{\cos^2\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1-h_{n+}^2}d\right)}\right)\right].$$

Для антисимметричных волн интегралы отличается знаком в скобках

$$N_{0-}^{H2}=\int_0^L\frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi 0-}(z)\mathbf{h}_{\varphi n-}^{+}(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon_P}\left(\frac{th\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_P}\tilde{L}\right)}{\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_P}}-\frac{\tilde{L}}{ch^2\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_P}\tilde{L}\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+th^2\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_P}\tilde{L}\right)\left(\frac{th\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}{\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_1}}+\frac{d}{ch^2\left(\sqrt{h_{0-}^2-k^2\varepsilon_1}d\right)}\right)\right],$$

$$N_{n-}^{H2}=\int_0^L\frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi \mathbf{n}-}(z)\mathbf{h}_{\varphi n-}^{+}(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon_P}\left(\frac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}\tilde{L}\right)}{\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}}-\frac{\tilde{L}}{\cos^2\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P-h_{n-}^2}L\right)}\right)+\right..$$

$$+tg^2\left(\sqrt{k^2\varepsilon_P - h_{n-}^2}\tilde{L}\right)\left(\frac{tg\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{n-}^2}d\right)}{\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{n-}^2}} + \frac{d}{\cos^2\left(\sqrt{k^2\varepsilon_1 - h_{n-}^2}d\right)}\right)\Bigg]$$

Собственные функции для z-компоненты электрического поля $\mathbf{e}_{z\mathbf{n}\pm}$ связаны с $\mathbf{h}_{\varphi\mathbf{n}\pm}$ соотношением

$$\mathbf{e}_{z0\pm} = \frac{h_{0\pm}}{k\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\mathbf{r}_0 \times \mathbf{h}_{\varphi 0\pm}\right],\ \mathbf{e}_{z\mathbf{n}\pm} = \frac{h_{n\pm}}{k\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\mathbf{r}_0 \times \mathbf{h}_{\varphi n\pm}\right],$$

где $\mathbf{r}_0$ – единичный вектор в радиальном направлении. Таким образом, квадрат нормы для этих функций связан с квадратом нормы $N_{n\pm}^2$ соотношением

$$N_{m\pm}^{E2} = \int_0^L \mathbf{e}_{zm\pm}(z)\mathbf{e}_{zn\pm}^+(z)\varepsilon(z)dz = \frac{h_{m\pm}h_{n\pm}}{k^2}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)\int_0^L \frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi m\pm}(z)\mathbf{h}_{\varphi n\pm}^+(z) = \frac{h_{m\pm}^2}{k^2}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)N_{m\pm}^2\delta_{nm}.$$

и эти функции также ортогональны. Наконец

$$N_{m\pm}^2 = \int_0^L e_{zm\pm}(z)h_{zn\pm}^+(z)dz = \frac{h_{m\pm}}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\int_0^L \frac{dz}{\varepsilon(z)}\mathbf{h}_{\varphi m\pm}(z)\mathbf{h}_{\varphi n\pm}^+(z) = \frac{h_{m\pm}}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}N_{m\pm}^2\delta_{nm}.$$

Вычисление интеграла для δ-функции (см пункт 3) приводит к выражению

$$\int_0^L \varepsilon(z')dz'\delta(z'-L)\left(\mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{e}_{zn\pm}^+(z')\right) = \frac{h_{n\pm}}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\boldsymbol{\varphi}_0 \cdot \mathbf{h}_{\varphi n\pm}^+(L)\right).$$

Для r-компонент электрического поля интегрирование в плоскости φ0Z показывает, что эти компоненты поля не ортогональны [236]. Этот факт известен и коррелирует с тем утверждением, что коэффициенты разложения волн в волноводе полностью определяются только поперечными компонентами поля. Затем продольные компоненты поля могут быть найдены с использованием найденных коэффициентов [182 – 185, 220, 221], с добавлением полей, локально связанных с протекающими сторонними токами [221]. Заметим также, что при расчете ортогональности собственных функций в резонаторе интегрирование в плоскости φ0Z будет дополнено интегрированием вдоль радиуса в цилиндрической задаче, которое приведет с учетом граничных условий к занулению интегралов для функций с различными постоянными распространения, что доказывает ортогональность собственных функций в резонаторе для любой из компонент поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ

Нормы собственных функций рассчитаны в работе [15]. Приведем выражения для коэффициентов в системах уравнений в (4.7) и (4.11) (первый индекс – номер волны в трехслойной структуре, второй – в пустом пространстве).

$$C_{B00+}=D^{E}_{00+}=\left(\frac{th\left(a_{0+}d_1\right)}{a_{0+}}+\frac{th\left(p_{0+}L_2\right)}{p_{0+}}\right),\ C_{Bj0+}=D^{E}_{0j+}=\left(\frac{tg\left(\tilde{a}_{j+}d_1\right)}{\tilde{a}_{j+}}+\frac{tg\left(\tilde{p}_{j+}L_2\right)}{\tilde{p}_{j+}}\right),$$

$$C_{B0n+}=D^{E}_{0n+}=\left(\frac{a_{0+}\,\mathrm{th}\left(a_{0+}d_1\right)-\hat{a}_{n+}tg\left(\hat{a}_{n+}d_1\right)}{a^2_{0+}+\hat{a}^2_{n+}}+\frac{p_{0+}\,\mathrm{th}\left(p_{0+}L_2\right)+\hat{a}_{n+}tg\left(\hat{a}_{n+}L_2\right)}{p^2_{0+}+\hat{a}^2_{n+}}\right),$$

$$C_{Bjn+}=D^{E}_{nj+}=\left(\frac{1}{\cos\left(\tilde{a}_{j+}d_1\right)}\left(\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{a}_{j+}\right)d_1\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{a}_{j+}\right)}+\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{a}_{j+}\right)d_1\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{a}_{j+}\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos\left(\tilde{p}_{j+}L_2\right)}\left(\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{p}_{j+}\right)L_2\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{p}_{j+}\right)}+\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{p}_{j+}\right)L_2\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{p}_{j+}\right)}\right)\right)\approx\quad,$$

$$\approx\left(d_1+\frac{1}{\cos\left(\tilde{p}_{j+}L_2\right)}\left(\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{p}_{j+}\right)L_2\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{p}_{j+}\right)}+\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{p}_{j+}\right)L_2\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{p}_{j+}\right)}\right)\right)$$

$$C_{E00+}=D^{B}_{00+}=\left(\frac{th\left(a_{0+}d_1\right)}{a_{0+}}+\frac{th\left(p_{0+}L_2\right)}{\varepsilon_P p_{0+}}\right),\ C_{Ej0+}=D^{B}_{0j+}=\left(\frac{tg\left(\tilde{a}_{j+}d_1\right)}{\tilde{a}_{j+}}+\frac{tg\left(\tilde{p}_{j+}L_2\right)}{\varepsilon_P\tilde{p}_{j+}}\right),$$

$$C_{E0n+}=D^{B}_{n0+}=\left(\frac{a_{0+}\,\mathrm{th}\left(a_{0+}d_1\right)-\hat{a}_{n+}tg\left(\hat{a}_{n+}L_2\right)}{a^2_{0+}+\hat{a}^2_{n+}}+\frac{1}{\varepsilon_p}\frac{p_{0+}\,\mathrm{th}\left(p_{0+}L_2\right)+\hat{a}_{n+}tg\left(\hat{a}_{n+}L_2\right)}{p^2_{0+}+\hat{a}^2_{n+}}\right),$$

$$C_{Ejn+}=D^{B}_{nj+}=\left(\frac{\varepsilon_p}{\cos\left(\tilde{a}_{j+}d_1\right)}\left(\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{a}_{j+}\right)d_1\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{a}_{j+}\right)}+\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{a}_{j+}\right)d_1\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{p}_{j+}\right)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos\left(\tilde{p}_{j+}L_2\right)}\left(\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{p}_{j+}\right)L_2\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}-\tilde{p}_{j+}\right)}+\frac{\sin\left(\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{p}_{j+}\right)L_2\right)}{2\left(\hat{a}_{n+}+\tilde{p}_{j+}\right)}\right)\right).$$

При записи формул использованы обозначения $a_{0+}=\sqrt{h^2_{0+}-k^2\varepsilon_1}$, $p_{0+}=\sqrt{h^2_{0+}-k^2\varepsilon_P}$, $\tilde{a}_{n+}=\sqrt{k^2\varepsilon_1-h^2_{n+}}$, $\tilde{p}_{n+}=\sqrt{k^2\varepsilon_P-h^2_{n+}}$, $\hat{a}_{n+}=n\pi/L$, ε_P, ε_1 – диэлектрические проницаемости плазмы и слоя. Все коэффициенты имеют размерность длины. Отметим также, что для удобства численных расчетов ε_p по-разному входит в выражения для разных коэффициентов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5. РАСЧЕТ АМПЛИТУД РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ВОЛН В ДИАГОНАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ВОЛНОВОДНЫМ МОДАМ

Используя предположение о преобладающей роли диагональных слагаемых, мы можем записать выражения для различных компонент электрического поля. Амплитуды полей высших типов волн будут иметь вид внутри плазмы ($r<R$)

$$A_{j+}=-\frac{A_{0+}}{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}\frac{\left(J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0j+}+J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B0j+}\frac{\hat{h}_{j+}}{k}\frac{K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)}\right)}{\left(\frac{\tilde{h}_{j+}}{\varepsilon_P k}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}C_{Ejj+}+C_{Bjj+}\frac{\hat{h}_{j+}}{k}\frac{K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)}\right)}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)} \qquad (П5.1)$$

и вне плазмы (r>R)

$$\hat{A}_{j+}=A_{0+}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)}\frac{\left(\frac{\tilde{h}_{j+}}{\varepsilon_P k}C_{Ejj+}J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B0j+}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}-C_{Bjj+}J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0j+}\right)}{\left(\frac{\tilde{h}_{j+}}{\varepsilon_P k}C_{Ejj+}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)}+C_{Bjj+}\frac{\hat{h}_{j+}}{k}\frac{K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)}\right)}\frac{K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)}$$

Слагаемое в знаменателе в двух предыдущих формулах одно и то же, то есть и вне, и внутри плазмы поля высших мод возрастают одновременно и плотности плазмы, при которых наблюдается резонанс – одни и те же. Этот резонанс может быть интерпретирован, как резонанс, связанный с возбуждением поверхностных волн на боковой поверхности плазменного столба. Амплитуда поверхностной волны, распространяющейся вдоль слоя пространственного заряда, может быть рассчитана по формуле

$$A_{0+}=\frac{H^{ext}\left(kR\right)\hat{N}_{0+}^2}{\left(J_1\left(h_{0+}R\right)C_{B00+}-\sum_{n=1}^{K}\frac{\left(J_0\left(h_{0+}R\right)\frac{h_{0+}}{k}C_{E0n+}+\frac{\hat{h}_{n+}}{k}C_{B0n+}\frac{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}J_1\left(h_{0+}R\right)\right)}{\left(\frac{\tilde{h}_{n+}}{\varepsilon_P k}C_{Enn+}\frac{I_0\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}{I_1\left(\tilde{h}_{n+}R\right)}+\frac{\hat{h}_{n+}}{k}C_{Bnn+}\frac{K_0\left(\hat{h}_{n+}R\right)}{K_1\left(\hat{h}_{n+}R\right)}\right)}C_{Bn0+}\right)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6. РАСЧЕТ АМПЛИТУД РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ВОЛН В ДИАГОНАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МОДАМ ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ

Используя общие формулы получим, что в диагональном приближении амплитуда высших мод поля вне плазмы рассчитывается по формуле

$$\hat{A}_{j+}=\frac{\left(\frac{E^{ext}\left(kR\right)}{i\rho}D_{j0}^{E}I_1\left(\tilde{h}_{j+}R\right)-H^{ext}\left(kR\right)D_{j0}^{B}\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)\right)}{\left(\frac{\hat{h}_{j+}}{k}K_0\left(\hat{h}_{j+}R\right)D_{jj}^{E}I_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)+K_1\left(\hat{h}_{j+}R\right)\frac{D_{jj}^{B}}{\varepsilon_P}\frac{\tilde{h}_{j+}}{k}I_0\left(\tilde{h}_{j+}R\right)\right)},$$

где $E^{ext}\left(kR\right)=\rho H^{ext}\left(kR\right)Z\pi R/L$. Амплитуда поверхностной полны, распространяющейся вдоль слоя пространственного заряда, удовлетворяет выражению

$$A_{0+}=\frac{H^{ext}(kR)D_{00}^{B}-\sum_{n=1}^{K}\widehat{A}_{n+}K_1\left(\widehat{h}_{n+}R\right)D_{0n}^{B}}{J_1\left(h_{0+}R\right)},$$

а поле высших мод внутри плазмы

$$A_{j+}=\frac{H^{ext}(kR)D_{j0}^{B}-\sum_{n=1}^{K}\widehat{A}_{n+}K_1\left(\widehat{h}_{n+}R\right)D_{jn}^{B}}{I_1\left(\tilde{h}_{jj+}R\right)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 7. РАСЧЕТ ИМПЕДАНСА, ВНОСИМОГО ВНЕШНЕЙ ЧАСТЬЮ ЭЛЕКТРОДОВ

Пусть импеданс разряда, рассчитанный в соответствии с любой из формул (10) – (12) равен Z_D. Распределение потенциала и тока в области $R<r<R_1$ удовлетворяет телеграфным уравнениям [182] – [184]:

$$U=\frac{1}{-i\omega\tilde{C}}\frac{R}{r}\frac{di}{dr},\ I=\frac{1}{-i\omega\tilde{L}}\frac{r}{R}\frac{dU}{dr} \qquad (П7.1)$$

где $\tilde{C}r/R$ и $\tilde{L}R/r$ – погонные емкость и индуктивность линии, $\tilde{C}=\varepsilon_0 2\pi R/L$, $\tilde{L}=\mu_0 L/(2\pi R)$. Вводя сопротивление линии $z=\rho L/(2\pi R)$ и представляя напряжение и ток в виде сумм функции Бесселя и Неймана,

$$\begin{pmatrix}U\\I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z_0\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}zJ_0(kr)\\J_1(kr)\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}zN_0(kr)\\N_1(kr)\end{pmatrix}$$

получим что импеданс в точке $r>R$ будет равен

$$Z_{D1}(r)=z\frac{\left(Z_D N_1(kR)-zN_0(kR)\right)J_0(kr)-\left(Z_D J_1(kR)-zJ_0(kR)\right)N_0(kr)}{\left(Z_D N_1(kR)-zN_0(kR)\right)J_1(kr)-\left(Z_D J_1(kR)-zJ_0(kR)\right)N_1(kr)}. \qquad (П7.2)$$

В случае малой разности радиусов $k(r-R)<<1$ поправку к импедансу проще получить непосредственно из формулы (П4.1)

$$Z_{D1}(r)=\frac{Z_0-i\omega\tilde{L}\Delta r}{1-i\omega\tilde{C}\Delta r Z_0}, \qquad (П7.3)$$

$\Delta r=r-R$. В условиях данной работы влиянием индуктивности линии в большинстве случаев можно пренебречь.

ПРИЛОЖЕНИЕ 8. РАСЧЕТ ИМПЕДАНСА, ВНОСИМОГО ПЕРИФЕРИЙНОЙ ЧАСТЬЮ РАБОЧЕЙ КАМЕРЫ

Условия равенства тангенциальных компонент электромагнитного поля на поверхности в которой происходит подвод внешней энергии приводит к соотношению (U_{D1} – напряжение основной моды, Z_{D1} – импеданс внутренней линии передачи на границе электрода, рассчитанный в предыдущем пункте)

$$\begin{pmatrix}\widehat{e}_{z0+}U_{D1}/L\\ \widehat{h}_{\varphi 0+}U_{D1}/(2\pi R_1 Z_{D1})\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}B_{n+}\begin{pmatrix}i\widehat{e}_{zn+}(z)\\ \widehat{h}_{\varphi n+}(z)I_1\left(\widehat{h}_{n+}R_1\right)/I_0\left(\widehat{h}_{n+}R_1\right)\end{pmatrix}- \qquad (П8.1)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\hat{B}_{n+}\begin{pmatrix}-i\hat{e}_{zn+}\\ \hat{h}_{\varphi n+}(z)K_1\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)/K_0\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)\end{pmatrix}-\hat{B}_{0+}\begin{pmatrix}i\hat{e}_{z0+}\\ \hat{h}_{\varphi 0+}Q_1(kR_1)/Q_0(kR_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E^S\\ H^S\end{pmatrix}.$$

Здесь в левой части первое слагаемое соответствует полю волны во внутренней области, , две суммы – поля высших мод во внутренней и внешней областях (B_{n+} и $\hat{B}_{n+}$ – амплитуды волн), последнее слагаемое – поле волны ТЕМ с амплитудой $\hat{B}_{0+}$ во внешней области, представляющей собой замкнутую линию передачи, слагаемое в правой части – внешний источник поля. Поскольку боковая поверхность камеры выполнена их металла, то $Q_0(kR_3)=0$. В рассматриваемой геометрии (рис. 1) мы можем записать

$$\begin{pmatrix}Q_0(r)\\ Q_1(r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H_0^{(1)}(kr)\\ H_1^{(1)}(kr)\end{pmatrix}-\frac{H_0^{(1)}(kR_3)}{H_0^{(2)}(kR_3)}\begin{pmatrix}H_0^{(2)}(kr)\\ H_1^{(2)}(kr)\end{pmatrix}$$

Точно также как в [36] будем считать область, в которой подводится мощность малой, предполагая $R_2–R_1<<R_1$. Условие равенства токов при $r=R_1$ и $r=R_2$ означает $H^S=0$. Напряжение, равное U прикладывается в граничных точках $z=\pm L$: $E^S=-U\delta(z-L)$. Расчет амплитуд полей может быть проведен так же, как и в [40], с точностью до замены собственных волн трехслойной структуры на собственные волны пустого волновода. В данном случае из (П8.1) следует

$$\hat{B}_{0+}=\frac{U_{D1}}{2\pi R_1 Z_{D1}}\frac{Q_0(kR_1)}{Q_1(kR_1)},\ \hat{B}_{n+}=B_{n+}\frac{I_1\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)K_0\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)}{I_0\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)K_1\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)},$$

$$\frac{U_{D1}}{L}=U_{D2}\frac{e_{z0+}(L)}{\hat{N}_{0+}^{E2}}\left(1-i\frac{L}{2\pi R_1 Z_{D1}}\frac{Q_0(kR_1)}{Q_1(kR_1)}\right)^{-1},$$

$$B_{n+}=-iU_{D2}\frac{e_{zn+}(L)}{\hat{N}_{n+}^{E2}}\left(1+\frac{I_1\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)K_0\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)}{I_0\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)K_1\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)}\right)^{-1}.$$

Знание амплитуд всех волн позволяет найти ток источника благодаря соотношению $i_n=2\pi r\hat{h}_{\varphi n+}(L)$:

$$I_{D2}=U_{D2}\times$$

$$\times\left[\frac{L\hat{e}_{z0+}(L)\hat{h}_{\varphi 0+}(L)}{\hat{N}_{0+}^{E2}}\left(\frac{Z_{D1}}{\rho}-\frac{iL}{2\pi R_1}\frac{Q_0(kR_1)}{Q_1(kR_1)}\right)^{-1}-2\pi iR_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{e}_{zm+}(L)\hat{h}_{\varphi n+}(L)}{\hat{N}_{n+}^{E2}}\left(\frac{I_0\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)}{I_1\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)}+\frac{K_0\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)}{K_1\left(\hat{h}_{n+}R_1\right)}\right)^{-1}\right]$$

и импеданс в точке возбуждения (4.16).

Список литературы

1. Ивановский Г.Ф., Петров В. И. «Ионно-плазменная обработка материалов» Радио и связь. 1986. 233 с.

2. *Lieberman M.A., Lichtenberg A.J.* Principles of Plasma Discharges and Material Processing. N.-Y.: Wiley, 2005.

3. *Samukawa S., Hori M., Raul S., Tachibana K., Bruggeman P., Kroesen G., Whitehead J.C., Murphy A.B., Gutsol A.F., Starikovskaia S., Kortshagen U., Boeuf J.-P., Sommerer T.J., Kushner M.J., Czarnetzki U., Mason N.* The 2012 Plasma Roadmap // J. Phys. D.: Appl. Phys. 2012. V. 45. P. 253001.

4. I Adamovich, S D Baalrud, A Bogaerts , P J Bruggeman ,M Cappelli, V Colombo, U Czarnetzki, U Ebert, J G Eden, P Favia , D B Graves, S Hamaguchi, G Hieftje, M Hori, I D Kaganovich, U Kortshagen, M J Kushner, N J Mason , S Mazouffre, S Mededovic Thagard, H-R Metelmann, A Mizuno, E Moreau, A B Murphy, B A Niemira, G S Oehrlein, Z Lj Petrovic , L C Pitchford, Y-K Pu , S Rauf, O Sakai, S Samukawa, S Starikovskaia, J Tennyson, K Terashima, M Turner, M C M van de Sanden and A Vardelle. The 2017 Plasma Roadmap: Low temperature plasma science and technology. J. Phys. D: Appl. Phys. 50 (2017) 323001.

5. Collins K.S., Roderick C.A., Yang S.-L., Wang D.N.K., Maydan D. United States Patent No 5210466A, May 1993.

6. Kawamura H, Sansonnens L, Howling A.A, Hollenstein Ch, Elyaakoubi M and Schmitt J.P.M. *Improving plasma uniformity using lens-shaped electrodes in a large area very high frequency reactor*. 2004 J. Appl. Phys. 95 4559

7. Kawamura E., Lieberman M.A., Graves D.B. // Plasma Sources Sci. Technol. 2014. V. 23. P. 064003.

8. Mussenbrock T., Hemke T., Ziegler D., Brinkman R.P., Klick M. // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V. 17. 025018.

9. Lieberman M A, Booth J P, Chabert P, Rax R.M. and Turner M.M. *Standing wave and skin effects in large-area, high frequency capacitive discharge*s. Plasma Sources Sci. Technol. 2002 11 283

10. Chabert P. // J. Phys. D.: Appl. Phys. 2007. V. 40. P. R63.

11. Sansonnens L., Howling A.A., Hollenstein Ch. // Plasma Sources Sci. Technol. 2006. V. 15. P. 302.

12. Chabert P., Ramimbault J-L., Rax J-M, Lieberman M.A. // Phys. Plasmas. 2004. V.11. P. 1175.

13. С.А. Двинин, О.А. Синкевич, З.А. Кодирзода, Д.К. Солихов. Особенности возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде I. Общие вопросы. Простая модель симметричного разряда. Физика плазмы, т. 46, 2020, №12, с. 1094–1118.

14. S.A. Dvinin, O.A. Sinkevich, Z.A. Kodirzoda, D.K. Solikhov. Features of electromagnetic field excitation in capacitive RF discharge I. General issues. Simple symmetric discharge model. Plasma Physics Reports. V. 46, 2020, №12, p. 1181–1204. (IF WOS: 0.977; SJR: 0.333).
15. С.А. Двинин, О.А. Синкевич, З.А. Кодирзода, Д.К. Солихов. Особенности возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде II. Симметричный разряд, полностью заполняющий вакуумную камеру при симметричном и несимметричном возбуждении. Физика плазмы, т. 47, 2021, №1, с. 40–60.
16. S.A. Dvinin, O.A. Sinkevich, Z.A. Kodirzoda, D.K. Solikhov. Features of electromagnetic field excitation in capacitive RF discharge. II. Symmetric discharge fully filling a vacuum chamber. Symmetric and asymmetric excitation. Plasma physics reports. V. 47, 2021, №1, p. 28 – 47 (IF WoS: 0.977; SJR: 0.333).
17. С.А. Двинин, О.А. Синкевич, З.А. Кодирзода, Д.К. Солихов. Особенности возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде Особенности возбуждения электромагнитного поля в емкостном ВЧ разряде. III. Симметричный разряд, частично заполненная разрядная камера. Физика плазмы, т. 47, 2021, №3, с. 195 – 219.
18. S.A. Dvinin, O.A. Sinkevich, Z.A. Kodirzoda, D.K. Solikhov. Specificities of Electromagnetic Field Excitation in a Capacitive HF Discharge. III. Symmetric Discharge Partially Filling the Discharge Chamber, Plasma Physics Reports, 2021, Vol. 47, No. 3, pp. 211–234 (IF WoS: 0.977; SJR: 0.333).
19. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Синкевич О.А., Солихов Д.К. Об импедансе высокочастотного емкостного разряда при различных способах возбуждения. Прикладная физика, 2021, №3, с. 33 – 38 (SJR: 0.205).
20. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Синкевич О.А., Солихов Д.К. О спектрах собственных волн в плазменном волноводе при наличии столкновений. Прикладная физика, 2021, №4, с. 25–31 (SJR: 0.205).
21. Двинин С.А., Солихов Д.К., Кодирзода З.А. Уравнение плазмы и слоя для немаксвелловской функции распределения электронов по энергиям XLIV Международная (Звенигородская) конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, ИОФ РАН Москва, 2017, тезисы, с. 283
22. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Солихов Д.К. Структура электромагнитного поля в высокочастотном емкостном разряде с электродами большой площади XLV Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу 2-6 апреля 2018 г. Звенигород Сборник тезисов докладов, ЗАО НТЦ Плазмаиофан Москва, тезисы, с. 293
23. Dvinin S., Kodirzoda Z., Solikhov D. Calculation of capacitive discharge

impedance at the account of surface wave excitation on plasma-metal interface Microwave discharges: Fundamental and applications. X International Workshop. September 3–7, 2018, Zvenigorod, Russia. Books of abstracts & Programme, Янус-К Москва, тезисы, с. 40.
24. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Сафармамадов С.М., Солихов Д.К. Расчет параметров индуктивного высокочастотного разряда в металлической вакуумной камере. VIII Международный Симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии. ISTAPC-2018. 10–15 сентября 2018 г., Иваново, Россия, Ивановский государственный химико-технологический университет Иваново, тезисы, с. 133.
25. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Сафармамадов С.М., Солихов Д.К. Собственные волны и импеданс высокочастотного емкостного разряда с электродами большой площади VIII Международный Симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии. ISTAPC-2018. 10–15 сентября 2018 г., Иваново, Россия, Ивановский государственный химико-технологический университет Иваново, тезисы, с. 131.
26. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Солихов Д.К. Численный расчет импеданса емкостного ВЧ разряда в металлической вакуумной камере при неоднородном заполнении. XLVI Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. 2019 г. Сборник тезисов докладов, Двинин С.А., Кодирзода З.А., Солихов Д.К., ООО Издательство МБА Москва, тезисы, с. 244.
27. Sergey Dvinin, Oleg Sinkevich, Davlat Solikhov, Zafari Kodirzoda Features of Electromagnetic Field Excitation in a Capacitive RF Discharge Bulletin of the American Physical Society, 2019, 72nd Gaseous Electronic Conference, p. FT1.00052
28. С.А. Двинин, З.А. Кодирзода, О.А. Синкевич, Д.К. Солихов Электродинамические характеристики емкостного высокочастотного разряда. Всероссийская (С международным участием) конференция «Физика Низкотемпературной Плазмы» (ФНТП-2020). Казань. 9 – 13 ноября 2020. Тезисы. С. 26-27.
29. Двинин С.А., Кодирзода З.А., Синкевич О.А., Солихов Д.К. Электродинамические характеристики и интегральные модели высокочастотного емкостного разряда с электродами большой площади. XLIII Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. Звенигород, 15-19 марта 2021 г. Сборник тезисов докладов, место издания ООО Издательство МБА Москва, тезисы, с. 174
30. С.А. Двинин, З.А. Кодирзода, О.А. Синкевич, Д.К. Солихов. О

пространственной структуре плазмы и высокочастотного поля в источниках плазмы при высоких плотностях электронов. IX Международный симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии 13 – 17 сентября 2021 г., Иваново, Россия. С. 76.
31. С.А. Двинин, З.А. Кодирзода, О.А. Синкевич, Д.К. Солихов. О спектрах собственных волн в плазменном волноводе с неоднородным заполнением при наличии столкновений. IX Международный симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии 13 – 17 сентября 2021 г., Иваново, Россия. С. 99.
32.. Двинин С.А., Солихов Д.К., Кодирзода З.А. К теории устойчивости однородного распределения плотности плазмы в технологических плазменных реакторах Материалы Международной конференции "Перспективы развития физической науки", 2017, Таджикский национальный университет, Душанбе, тезисы, с. 36-38
33. Двинин С.А., Кодирзода З.А. Шнурование емкостного высокочастотного разряда при низких давлениях в сборнике XLIII Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу 8-12 февраля 2016 г. Сборник тезисов докладов, место издания ООО Издательство МБА Москва, тезисы, с. 297
34. Filamentation of capacitive Radio-Frequency Discharge at low frequencies Dvinin S.A., Kodirzoda Z. 68nd Gaseous Electronic Conference, Honolulu, 2015, Bulletin of the American Physical Society, 2015, серия №9, том 60, тезисы.
35. Dvinin S.A., Kodirzoda Z. Filamentation of capacitive Radio-Frequency Discharge at low frequencies. ICRP-9/GEC-68/SPP-33 9th International Conference of Reactive Plasmas / 68 Gaseous Electronic Conference / 33rd Symposium of Plasma Processing, 2015. Published by the Japan Society of Applied Physics Tokyo, Japan, c. LW1.00016-2
36. Grove W R 1852 Phil. Trans. R. Soc. (Lond.) B 142 87
37. Schmellenmeier H 1953 Exp. Tech. Phys. 1 49
38. Chittick R C et al 1969 J. Electrochem. Soc. **116** 77
39. Spear W E and Le Comber P G 1975 Solid-State Commun. **17** 9 1193**.**
40. Chen Z, Rauf S and Collins K. *Self-consistent electrodynamics of large area high-frequency capacitive plasma discharge*. 2010 J. Appl. Phys. 108 073301
41. Yaoxi Wu, M. A. Lieberman. *A traveling wave-driven, inductively coupled large area plasma source.* Appl. Phys. Lett. 72, 777 (1998)
42. Jong Hyeuk Lim, Kyong Nam Kim, Gwang Ho Gweon and Geun Young Yeom. *Line-type inductively coupled plasma source with ferromagnetic module.* Journal of Physics D: Applied Physics. 2009 42 015204
43. Герасимов Н.Ц., Довженко В.А., Лебедева Т.П., Солнцев Г.С. Условия существования стационарного СВЧ разряда внутри волновода. // Вестник

Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия. 1972. Т. 13. С. 242 – 244.
44. Довженко В.А., Солнцев Г.С., Нещадименко В.И. Исследование параметров плазмы стационарного СВЧ-разряда в гелии внутри волновода. // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18. №9. С. 1875 – 1880.
45. Двинин С.А., Довженко В.А., Солнцев Г.С. Ионизационная неустойчивость плазмы, связанная с поверхностной волной и ее влияние на структуру стационарного СВЧ разряда. // Физика плазмы. 1982. Т. 8. Вып. 6. С. 1228 – 1235.
46. Двинин С.А., Довженко В.А., Солнцев Г.С. Об изменении энергетических характеристик СВЧ разряда при развитии ионизационной неустойчивости на поверхностной волне. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. Вып. 5. С. 1058 – 1067.
47. Двинин С.А., Постников С.А., Солнцев Г.С., Цветкова Л.И. О самовозбуждении стоячей поверхностной волны в стационарном СВЧ разряде в волноводе и ее влиянии на свойства разряда. // Физика плазмы. 1983. Т. 9. Вып. 6. С. 1297 – 1302.
48. Johnson E V, Verbeke T, Vanel J C and Booth J P 2010 Journal of Physics D: Applied Physics 43 412001
49. Wang M and Kushner M 2010 Journal of Applied Physics 107 023309
50. Kruger F, Wilczek S, Mussenbrock T and Schulze J 2019 Plasma Sources Sci. Technol. 28 075017.
51. Wilczek S, Schulze J, Brinkmann R P, Donk Z, Trieschmann J and Mussenbrock T 2020 Journal of Applied Physics 127 181101
52. Lee C, Graves D B, Lieberman M A and Hess D W 1994 *J. Electrochem. Soc.* **141** 1546
53. Lee C and Lieberman M A. *Global model of Ar, O_2, Cl_2, and Ar/O_2 high-density plasma discharges*. 1995 *J. Vac. Sci. Technol.* A **13** 368
54. Schottky W. Wondstrem und Theorie der positiven saule. // Physykalische Zeitschrift. 1924. V. 25. P. 342 – 348. Diffusionstheorie der positiven saule. // Ibid P. 635 – 640.
55. Langmuir I., Tonks L. A general theory of the plasma of an Arc. // Phys. Rev. 1929. V. 34. P. 876 – 922.
56. Ashida S, Lee C and Lieberman M A. *Spatially averaged (global) model of time modulated high density argon plasmas*. 1995 *J. Vac. Sci. Technol.* A **13** 2498
57. M A Lieberman and S Ashida. *Global models of pulse-power-modulated high-density, low-pressure discharges.* Plasma Sources Sci. Technol. 5 (1996) 145–158.
58. K. Ostrikov, *Reactive plasmas as a versatile nanofabrication tool*. Rev. Modern Physics **77**, 489 (2005).
59. K. H. Becker, U. Kogelschatz, K. H. Schoenbach, and R. J. Barker, *Non Equilibrium Air Plasmas at Atmospheric Pressure* (Institute of Physics Publishing,

Bristol, 2005).
60. E. Valderrama, M. Favre, H. Bhuyan, H. M. Ruiz, E. Wyndham, J. Valenzuela, and H. Chuaqui. *Sub-micron size carbon structures synthesized using plasma enhanced CVD, without external heating and no catalyzer action.* Surf. Coat. Technol. 204, 2940 (2010).
61. M. L. Hoey, J. B. Carlson, R. M. Osgood, B. Kimball, and W. Buchwald, *rf plasma oxidation of Ni thin films sputter deposited to generate thin nickel oxide layers*. Appl. Phys. Lett. 97, 153104 (2010).
62. M. Wojtaszek, N. Tombros, A. Caretta, P. H. Loosdrecht, and H. J. Wess,. *A road to hydrogenating graphene by a reactive ion etching plasma*. J. Appl. Phys. 110, 063715 (2011).
63. A. Mishra, M. H. Jeon, K. N. Kim, and G. Y. Yeom, *An investigation of the temporal evolution of plasma potential in a 60 MHz/2 MHz pulsed dual-frequency capacitively coupled discharge*. Plasma Sources Sci. Technol. 21, 055006 (2012).
64. P. Saikia, H. Bhuyan, M. Favre, E. Wyndham, and F. Veloso. *An analytical model of multi-component radio frequency capacitively coupled plasma and experimental validation* .Phys. Plasmas 24, 013503 (2017).
65. P. Saikia H. Bhuyan, M. Escalona, M. Favre, B. Bora, M. Kakati, E. Wyndham *and* J. Schulze. *The electrical asymmetry effect in a multi frequency geometrically asymmetric capacitively coupled plasma: A study by a nonlinear global model.* Journal of Applied Physics 123, 183303 (2018)
66. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука. 1971. С. 235 – 291.
67. Godyak, V. A. (1986), Soviet Radio Frequency Discharge Research, Delphic Associates, Falls Church, VA.
68. Taillet J. Resonance-Sustained Radio Frequency Discharges. // American Journal of Physics. 1969. V. 37. P. 423 – 441.
69. Годяк В.А. Стационарный высокочастотный разряд низкого давления. // Физика плазмы. 1976. Т. 2. С. 141 – 151.
70. Leprince P., Mattieussent G., Allis W.P. Resonantly sustained discharges by d.c. current and high frequency power. // Journal of Appl. Phys. 1971. V. 42. P. 4 – 12.
71. Kortshagen U, Gibson N D and Lawler J E. *On the E - H mode transition in RF inductive discharges*. 1996 *J. Phys. D: Appl Phys*. 29 1224
72. Chung C W and Chang H Y. *Heating-mode transition in the capacitive mode of inductively coupled plasmas*. 2002 *Appl. Phys. Lett.* 80 1725
73. Czerwiec T and Graves D B. *Mode transitions in low pressure rare gas cylindrical ICP discharge studied by optical emission spectroscopy*. 2004 *J. Phys. D: Appl. Phys. 37 2827*

74. Kempkes P and Soltwisch. *Plasma series resonance in the E mode of low-pressure inductively coupled noble gas discharges*. 2009 *J. Phys. D: Appl. Phys.* 42 085206
75. Lee Y W, Lee H L and Chung T H. *E-H mode transition in low-pressure inductively coupled nitrogen-argon and oxygen-argon plasmas*. 2011 *J. Appl. Phys.* 109 113302
76. Liu W, Gao F, Zhao S X, Li X C and Wang Y N. *Mode transition in CF_4 + Ar inductively coupled plasma*. 2013 *Phys. Plasmas* 20 123513
77. Singh S V and Pargmann C. *Electrical characterization of an inductively coupled gaseous electronics conference reference cell*. 2008 *J. Appl. Phys.* 104 083303
78. Cunge G, Crowley B, Vender D and Turner M M. *Characterization of the E to H transition in a pulsed inductively coupled plasma discharge with internal coil geometry: bi-stability and hysteresis*. 1999 8 576
79. Kang N and Gaboriau F. *Simple modelling of the E–H mode transition and hysteresis in low pressure argon ICP discharges for direct comparison with experiments*. 2011 J. Phys. D: Appl. Phys. 44 442001
80. Ostrikov K N and Xu S. *Power transfer and mode transitions in low-frequency inductively coupled plasmas*. 2000 J. Appl. Phys. 88 2268
81. El-Fayoumi I M, Jonesy I R and Turner M M. *Hysteresis in the E- to H-mode transition in a planar coil, inductively coupled rf argon discharge*. 1998 *J. Phys. D: Appl. Phys.* 31 3082
82. Lee M H, Lee K H, Hyun D S and Chung C W. *On the hysteresis in EE to HH and HH to EE transitions and the multistep ionization in inductively coupled plasma*. 2007 *Appl. Phys. Lett.* 90 191502
83. Turner M M and Lieberman M A. *Hysteresis and the E-to-H transition in radiofrequency inductive discharges*. 1999 *Plasma Sources Sci. Technol.* 8 313
84. Daltrini A M, Moshkalev S A, Morgan T J, Piejak R B and Graham W G. *Plasma power measurement and hysteresis in the E–HE–H transition of a rf inductively coupled plasma system*. 2008 *Appl. Phys. Lett.* 92 061504
85. Zhao S X and Wang Y N. *Investigation of the effect of metastable atoms on mode transition in argon inductive discharge via a hybrid model*. 2010 *J. Phys. D: Appl. Phys.* 43 275203
86. Gao F, Zhao S X, Li X S and Wang Y N. *Effects of matching network on the hysteresis during E and H mode transitions in argon inductively coupled plasma*. 2010 *Phys. Plasmas* 17 103507
87. Lee H C and Chung C W. *Comparisons of the electrical characteristics by impedance matching conditions on the E–H and H–E transition and the hysteresis of inductively coupled plasma*. 2012 *Thin Solid Films* 521 185

88. Lee H C, Kim D H and Chung C W. Discharge mode transition and hysteresis in inductively coupled plasma. 2013 *Appl. Phys. Lett.* 102 234104
89. Xu H J, Zhao S X, Zhang Y R, Gao F, Li X C and Wang Y N. *Equivalent circuit effects on mode transitions in H_2 inductively coupled plasmas*. 2015 *Phys Plasmas* 22 043508
90. Zhao S X, Xu X, Li X C and Wang Y N. Fluid simulation of the E-HE-H mode transition in inductively coupled plasma. 2009 *J. Appl. Phys.* 105 083306
91. Xu Hui-Jing, Shu-Xia Zhao, Gao Fei, Zhang Yu-Ru, Li Xue-Chun, Wang You-Nian. *Discontinuity of mode transition and hysteresis in hydrogen inductively coupled plasma via a fluid model*. 2015 *Chinese Physics B*, 24(11): 115201
92. De-Qi Wen, E Kawamura, M A Lieberman, A J Lichtenberg, You-Nian Wang. *Two-dimensional particle-in-cell simulations of standing waves and wave-induced hysteresis in asymmetric capacitive discharges*. 2017 *J. Phys. D: Appl. Phys.* 50 495201
93. Barnes M. S., Colter T. J., Elta M. E. /. AppL Phys. 61 81 A987)
94. Gogolides E., Nicolai J. P., Sawin H. H. /. Vac ScL TechnoL A 7 1001 (1989)
95. Boeuf J. P. Phys, Rev. A 36 2782 (1987)
96. Lu-Lu Zhao , Yue Liu and Tagra Samir. Numerical study on discharge characteristics influenced by secondary electron emission in capacitive RF argon glow discharges by fluid modeling,Chin. Phys. B Vol. 27, No. 2 (2018) 025201
97. Qian Liu (刘倩),Yue Liu (刘悦), Tagra Samir, and Zhaoshuai Ma (马照帅), Numerical study of effect of secondary electron emission on discharge characteristics in low pressure capacitive RF argon discharge, Phys. Plasmas 21, 083511 (2014);
98. Tagra Samir, Numerical study on discharge characteristics in low pressure capacitive RF argon discharge, 2018, Doctoral Dissertation-Dalian University of Technology.
99. Guangye Chen and Laxminarayan L. Fluid modeling of electron heating in low-pressure, high-frequency capacitively coupled plasma discharges J. Appl. Phys., Vol. 96, No. 11, 1 December 2004
100. Lister G. G. /. Phys. D 25 1649 A992)
101. Hammersley J. M., Handscomb D. C. Monte-Carlo Methods (N. Y.: Wiley, 1964)
102. Kushner M. J. IEEE Trans. Plasma Sci. 14 188 A986)
103. Bogaerts A, Gijbels R, Goedheer W. Hybrid Monte Carlo-fluid model of a direct current glow discharge. Journal of applied physics, 1995, 78(4): 2233-41.
104. Bogaerts A, Gijbels R. Hybrid modeling of a capacitively coupled radio frequency glow discharge in argon: Combined Monte Carlo and fluid model.

Japanese Journal of Applied Physics, 1999, 38(7S): 4404-4415.
105. Gozadinos G, Turner M, Vender D. Collisionless electron heating by capacitive rf sheaths [J]. Physical review letters, 2001, 87(13): 135004-4.
106. Gozadinos G, Vender D, Turner M, et al. Collisionless electron heating by capacitive radio-frequency plasma sheaths [J]. Plasma Sources Science and Technology, 2001, 10(2) : 117–124.
107. Samukawa S and Furuoya S. *Time-modulated electron cyclotron resonance plasma discharge for controlling generation of reactive species*. 1993 *Appl. Phys. Lett.* 63 2044
108. Gudmundsson J T, Huang S. A particle-in-cell/Monte Carlo simulation of a capacitively coupled chlorine discharge [J]. Plasma Sources Science and Technology, 2013, 22(5): 055020-16.
109. Gottscho R A, Gaebe C E, Negative ion kinetics in RF glow discharges, IEEE Transactions on Plasma Science, 1986, 14: 92–102.
110. McMillin B K, Zachariah M R. Two-dimensional laser-induced fluorescence imaging of metastable density in low-pressure radio frequency argon plasmas with added O2, Cl2, and CF4. Journal of applied physics, 1996, 79(1): 77-85.
111. Young F F, Wu C-H. Two-dimensional, self-consistent, three-moment simulation of RF glow discharge [J]. IEEE Transactions on Plasma Science, 1993, 21(3): 312-21.
112. Vahedi V, Birdsall C, Lieberman M, et al. Verification of frequency scaling laws for capacitive radio-frequency discharges using two-dimensional simulations. Physics of Fluids B: Plasma Physics, 1993, 5(7): 2719-29.
113. Chabert P., Braithwaite N. Physics of radio-frequency plasmas. N.Y. Cambridge university press, 2011. 383 p.
114. Bohm D. The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields. 1949. // Ed. A. Guthry and R.K. Wakerling. New-York: MacGraw-Hill. Ch. 3. P.
115. Langmuir I., Mott-Smith H.M. The Theory of Collectors in Gaseous Discharges. // Phys. Rev. 1926. V. 28. P. 727 – 763.
116. Riemann K.-U. The Bohm Criterion and Sheath Formation. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1991. V. 24. P. 493 – 518.
117. Alshakami K.A., Daniels S., // AIP Advances. 2019. V. 9. P. 035047.
118. Perret A, Chabert P, Booth J-P, Jolly J, Guillon J and Auvray Ph 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83** 243
119. Чан П., Тэлбот Л., Турян К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме. М.: Мир. 1978. 201 с.
120. Laframboise J.G., Rubinstein J. Theory of a cylindrical probe in a collisionless magnetoplasma. // The Physics of Fluids. 1976. V. 19. P. 1900 – 1909.
121. Laframboise J.G. The theory of spherical and cylindrical probes in a

collisionless, Maxwellian plasma at rest. University of Toronto Institute for Aerospace Studies (UTIAS) Report 100. 1966.
122. Langmuir I., Mott-Smith H.M. // Phys. Rev. 1926. V. 28. P. 727.
123. Lieberman M.A. // IEEE Trans. On Plasma Science. 1998. V. 16. P. 638.
124. Lieberman M.A. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1989. V. 17. P. 338.
125. Czarnetzki U. // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. P. 063101.
126. Persson K.B. Inertia controlled ambipolar diffusion. // Phys. Fluids, 1962, v. **5**, p. 1625 – 1632
127. Self S.A., Evald H.N. Static theory of a discharge column at intermediate pressures. // Phys Fluids. 1966. V. 5. N12. P. 2488 – 2492.
128. Двинин С.А., Довженко В.А., Кузовников А.А. К теории пристеночного слоя в плазме газового разряда. // Физика плазмы. 1999. Т. 25. Вып.11. С. 882 – 892.
129. Franklin R.N., Ockendon J.R. Asymptotic matching of plasma and sheath in active law pressure discharge. // J. Plasma Phys. 1970. V. 4. N2. P. 371 – 385.
130. Franklin R.N. Plasma Phenomena in Gas Discharges. // Oxford, U.K., N-Y., Clarendon. 1976. 258 p.
131. Godyak V. Modified Bohm criterion for a collisional plasma. // Phys. Lett. 1982. V. 89A. No. 2. P. 81 – 82.
132. Riemann K.-U. The Bohm Criterion and Sheath Formation. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1991. V. 24. P. 493 – 518.
133. Riemann K.-U. The theory of plasma–sheath transition. // J. Tech. Phys. 2000. Vol. 41. No. 1. P. 89 – 121.
134. Godyak V., Sternberg N. On the consistency of the collisionless sheath model. // Phys. Plasmas. 2002. V. 9. No. 11. P. 1 – 4.
135. Franklin R.N. You Cannot Patch Active Plasma and Collisionless Sheath. // IEEE transactions on plasma science. 2002. V. 30. N 1. P. 352 – 356.
136. Godyak V., Sternberg N. On asymptotic matching and the sheath edge. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2003. V. PS-31. N 4. P. 665 – 677.
137. Sternberg N. Patching collisionless plasma and sheath solutions to approximate the plasma-wall problem. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2003. V. PS-31. N 6. P. 1395 – 1401.
138. Keidar M., Beilis I. I. Transition from plasma to space-charge sheath near the electrode in electrical discharges. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2005. V. PS-33. N 5. P. 1481 – 1486.
139. Godyak V., Sternberg N. The Bohm Plasma-Sheath Model and the Bohm Criterion Revisited. // IEEE transactions on plasma science. 2007. V. PS-35. N 5. P. 1341 – 1349.
140. Двинин С.А., Довженко В.А., Кузовников А.А. Кинетическая теория

положительного столба газового разряда и пристеночного слоя. // Физика плазмы. 2000. Т. 26. Вып. 2. С. 179 – 189.
141. Vahedi V, Birdsall C K, Lieberman M A, DiPeso G and Rognlien T D 1993 *Phys. Fluids* B **5** 2719
142. Howling A A, Dorier J L, Hollenstein C and Kroll U 1992 *J. Vac. Sci. Technol.* A **10** 1080
143. Kalpakjian K K, Lieberman M A and Oldham W G 1994 *J. Vac. Sci. Technol.* B **12** 1351
144. Sansonnens L, Pletzer A, Magni D, Howling A A, Hollenstein C and Schmitt J P M 1997 *Plasma Sources Sci. Technol.* **6** 170
145. Nienhuis G J and Goedheer W 1999 *Plasma Sources Sci. Technol.* **8** 295
146. Colgan M J, Meyyappan M and Murnick D E 1994 *Plasma Sources Sci. Technol.* **3** 181
147. Godyak V A 1975 *Sov. J. Plasma Phys.* **2** 78
148. Godyak V A and Popov O A 1979 *Sov. J. Plasma Phys.*
149. Surendra M and Graves D B 1991 *Appl. Phys. Lett.* **59** 2091
150. Kitajima T, Takeo Y, Petrovic Z L and Makabe T 2000 *Appl. Phys. Lett.* **77** 489.
151. Kitajima T, Takeo Y and Makabe T 1999 *J. Vac. Sci. Technol.* A **17** 2510
152. Rauf S and Kushner M J 1999 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **27** 1329
153. U. Czarnetzki, T. Mussenbrock, and R. P. Brinkmann. *Self-excitation of the plasma series resonance in radio-frequency discharges: An analytical description. Phys. Plasmas. 13, 123503 (2006).*
154. T. Mussenbrock and R. P. Brinkmann, *Nonlinear electron resonance heating in capacitive radio frequency discharges.* Appl. Phys. Lett. 88, 151503 (2006).
155. M. J. Klick, *Nonlinearity of the radio-frequency sheath.* J. Appl. Phys. 79, 3445 (1996).
156. T. Mussenbrock, R. P. Brinkmann, M. A. Libermann, A. J. Lichtenberg, and E. Kawamura. *Enhancement of Ohmic and Stochastic Heating by Resonance Effects in Capacitive Radio Frequency Discharges: A Theoretical Approach.* Phys. Rev. Lett. 101, 085004 (2008).
157. A. Derzsi, E. Schungel, Z. Donk´o, and J. Schulze. *Electron heating modes and frequency coupling effects in dual-frequency capacitive CF_4 plasmas.* Open Chemistry 13, 346 (2015).
158. Z. Donko, J. Schulze, U. Czarnetzki, A. Derzsi, P. Hartmann, I. Korolov, and E. Sch¨ungel. *Fundamental investigations of capacitive radio frequency plasmas: simulations and experiments.* Plasma Phys. Contr. Fusion 54,124003 (2012).
159. B. Bora, H. Bhuyan, M. Favre, E. Wyndham, and H. Chuaqui. *Theoretical approach for plasma series resonance effect in geometrically symmetric dual radio*

frequency plasma. Appl. Phys. Lett. 100, 094103 (2012).
160. B. Bora, H. Bhuyan, M. Favre, E. Wyndham, and C. S. Wong. *Dual radio frequency plasma source: Understanding via electrical asymmetry effect*. J. Appl. Phys. 113, 153301 (2013).
161. B. Bora and L. Soto. *Influence of finite geometrical asymmetry of the electrodes in capacitively coupled radio frequency plasma.* Phys. Plasmas 21, 083509 (2014).
162. B. Bora. *Effect of driving voltages in dual capacitively coupled radio frequency plasma: A study by nonlinear global model*. Phys. Plasmas. 22, 103503 (2015).
163. E. Semmler, P. Awakowicz, and A. V. Keudell. *Heating of a dual frequency capacitively coupled plasma via the plasma series resonance*. Plasma Sources Sci. Technol. 16, 839 (2007).
164. D. Ziegler, T. Mussenbrock, and R. P. Brinkmann. *Nonlinear dynamics of dual frequency capacitive discharges: a global model matched to an experiment*. Plasma Sources Sci. Technol. 17, 045011 (2008).
165. Schmitt J P M, Elyaakoubi M and Sansonnens L 2002 *Plasma Sources Sci. Technol.* **11** A206
166. Schmitt J P M 1989 *Thin Solid Films* **174** 193
167. Schmitt J P M 1991 *Mater. Res. Soc. Symp. Proc* **219** 631
168. Sansonnens L and Schmitt J 2003 *Appl. Phys. Lett.* **82** 182
169. Schmidt H, Sansonnens L, Howling A A, Hollenstein Ch, Elyaakoubi M and Schmitt J P M 2004 *J. Appl. Phys.* **95** 4559
170. Chabert P, Raimbault J-L, Rax J M and Perret A 2004 *Phys. Plasmas* **11** 4081
171. Sansonnens L 2005 *J. Appl. Phys.* **97** 063304
172. Ballutaud J, Hollenstein Ch, Howling A A, Sansonnens L, Schmidt H and Schmitt J P M 2003 Consequences of non-uniform rf plasma potential in large-area capacitive reactors *Proc. 16th Int. Symp. Pl. Chem. ISPC16 (Taormina, Italy, 22–27 June 2003)* ed R D'Agostino, CD-ROM (Bari, Italy: Universita degli Studi di Bari) published by the Organizing Committee
173. Howling A A, Sansonnens L, Ballutaud J, Hollenstein Ch and Schmitt J P M 2004 *J. Appl. Phys.* **96** 5429
174. Howling A A, Derendinger L, Sansonnens L, Schmidt H, Hollenstein Ch, Sakanaka E and Schmitt J P M 2005 *J. Appl. Phys.* **97** 123308
175. Sansonnens L, Strahm B, Derendinger L, Howling A A, Hollenstein Ch, Ellert Ch and Schmitt J P M 2005 *J. Vac. Sci. Technol.* A **23** 922
176. Howling A A, Sansonnens L, Ballutaud J, Hollenstein Ch and Schmitt J P M 2004 *J. Appl. Phys.* **96** 5429
177. Howling A A, Sansonnens L, Schmidt H and Hollenstein Ch 2005 *Appl. Phys.*

Lett. **87** 076101
178. *Cooperberg D.J.* // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 862.
179. *Cooperberg D.J., Birdsall C.K.* // Plasma Sources Sci. Technol. 1998. V. 7. P. 41.
180. *Двинин С.А., Вологиров А.Г., Михеев В.В., Свиридкина В.С.* // Физика плазмы. 2008. Т. 34. С. 746.
181. *Lee I., Graves D.B., Lieberman M.A.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V. 17. P. 015018.
182. Никольский В.В., Никольская Т.А. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 543 с.
183. Фелсен Л., Маркувитц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.1. М.: Мир. 1978. 547 с.
184. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1990. 442 с.
185. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Атомиздат, 1961. 243 с
186. Годяк В.А. // ЖТФ. 1972. V. 16. С. 1073.
187. Kaganovich I.D., Polomarov O.V., Theodosiou C.E. // Phys. Plasmas. 2004. V. 11. P. 2399.
188. Kaganovich I.D., Polomarov O.V., Theodosiou C.E. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2006. V. 34. P. 696.
189. Polomarov O.V., Theodosiou C.E., Kaganovich I.D., Economou D.J., Ramamurthi B.N. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2006. V. 34. P. 767.
190. Godyak V.A., Kolobov V.I. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 4589.
191. Hagelaar G.J.M. // Plasma Sources Sci. Technol. 2008. V. 17. P. 025017.
192. Hagelaar G.J.M. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 025001.
193. Ding Z.F., Sun B., Huo W.G. // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. P. 063504.
194. Triesmachmann J., Mussenbrock T. // Plasma Sources Sci. Technol. 2017. V. 26. P. 024004.
195. Kaganovich I.D. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 2065006.
196. Turner M.M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2009. V. 42. P. 194008.
197. Lafleur T., Chabert P. // Plasma Sources Sci. Technol. 2015. V. 24. P. 044002.
198. Lafleur T., Chabert P., Turner M.M., Booth J.P. // Plasma. Sources Sci. Technol. 2014. V. 23. P. 015016.
199. Lafleur T. // Plasma Sources Sci. Technol. 2016. V. 25. P. 013001.
200. Kaganovich I.D., Tsendin L.D. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1992. V. 20. P. 86.
201. Kawamura E., Lieberman M.A. Lichtenberg A.J. // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. P. 123505.
202. *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы

электродинамики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1976.
203. Vahedi V., Lieberman M.A., Dipiezo G., Rognlien T.D., Hewett D. // J. Appl. Phys. 1995. V. 78. P. 1446.
204. Shaing K.C. and Aydemir A.Y. // Physics of Plasmas. 1997. V. 4. P. 3163.
205. Ahr P., Schungel E., Schulze J., Tsankov Ts.V., Czarnetszki U. // Plasma. Sources Sci. Technol. 2015. V. 24. P. 044006.
206. Wegner Th., Kullig C., Melchener J. // Plasma. Sources Sci. Technol. 2015. V. 24. P. 044001.
207. Schulze J., Donkó Z., Lafleur T., Wilczek S., Brinkmann R.P. // Plasma. Sources Sci. Technol. 2018. V. 27. P. 055010.
208. Vass M., Wilczek S., Lafleur T., Brinkmann R.P., Donkó Z., Schulze J. // Plasma. Sources Sci. Technol. 2020. V. 29. P. 026019.
209. Булкин П.С., Двинин С.А., Солнцев Г.С. // Вестник Московского университета. Сер. 3. 1982. Т. 23. С. 84.
210. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1961.
211. Гуревич А.В. Шварцбург А.Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. М.: Наука. ГРФМЛ. 1973. 272 с.
212. Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц в плазме. М.: Атомиздат, 1969. 396 с.
213. Cibin P. K. // Plasma Physics. 1980. V. 22. P. 609.
214. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука. 1967. С. 169.
215. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
216. Пономарев В.Н., Солнцев Г.С. // ЖТФ. 1966. Т. 36. С. 1376.
217. Liberman M.A., Booth J.P., Chabert P., Rax J.M., Turner M.M. // Plasma Sources Sci. Technol. 2002. V. 11. P. 283.
218. *Kawamura E., Lieberman M.A., Lichtenberg A.J.* // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 093517.
219. Howling A.A., Sansonnens L., Hollenstein C. // Thin Solid Films. 2007. V. 515. P. 5059.
220. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука, 2004. 742 с.
221. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.