О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний

А. М. Рогожников *
axelr@mail.ru

Аннотация

В статье представлен регулярный подход, дающий решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с широким классом граничных условий. Попутно даются описания алгоритмов для вычисления точного решения уравненийи эффективных алгоритмов приближенного решения указанных смешанных задач.

1 Введение

Настоящая работа связана с публикацией [9], где автором было получено решение смешанной задачи, описывающей возбуждение продольных колебаний в составном стержне для трех классических типов граничных условий. Было показано [10], что решение может быть модифицировано для исследования продольных колебаний нагруженных составных стержней, т.е. стержней с присоединенными точечными массами.

Актуальной в приложениях задачей является граничное управление колебаниями. Последнее подразумевает нахождение функций граничного управления, переводящих стержень из заданного начального состояния в заданное конечное за фиксированный промежуток времени T. При достаточно большом времени T решение задачи не единственно и естественным становится вопрос о нахождении в каком-то смысле оптимального управления. Оптимальность часто понимается в смысле минимизации энергии граничного управления, как это было сделано в работе [11], где на основании решения из работы [9] для частного случая представлен аналитический вид оптимального граничного управления. Последнее удается сделать крайне редко, обычно результат в оптимальном управлении — это численный метод, строящий приближенное решение.

Формулы, описывающие решение смешанной задачи для волнового уравнения, представляют собой весьма универсальный «конструктор», отдельные компоненты которого меняются в соответствии с конкретной задачей: её граничными условиями, количеством отрезков, наличием точечных масс. Настоящая статья призвана внести ясность в часть, связанную с граничными условиями, а также послужить доступным введением в работу с этим «конструктором». Попутно будет продемонстрирована применимость метода к широкому классу граничных условий.

2 Классические граничные условия

Начнем исследование с простейшего случая, обычно излагаемого в курсах математической физики, а именно, рассмотрим продольные колебания однородного стержня, расположенного на отрезке $[x_0, x_1]$, с линейной плотностью ρ и модулем Юнга k. Последние описываются уравнением

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \quad \text{при } (x,t) \in Q = (x_0, x_1) \times (0, T) \tag{1}$$

*МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК

где $a = \sqrt{k/\rho}$ — скорость распространения сигнала в стержне. Волновое уравнение (1) было исследовано ещё в XVIII-м веке, тогда же было установлено, что его произвольное решение представимо в виде бегущих волн [12, стр. 55]:

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at).$$

В большинстве современных работ ищутся обобщенные решения, принадлежащие таким классам, где уравнение (1) бессмысленно, поскольку производные, входящие в него, не определены. Вместо этого вводится определение *слабого решения,* но в данном очерке для простоты мы эти детали опустим, хотя заметим, что решения смешанных задач, которые будут представлены, являются также и слабыми решениями и будут принадлежать соответствующим классам. Будем далее заниматься поиском классических решений, например, принадлежащих классу $C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$.

Чтобы сконцентрировать наше внимание на граничных условиях, будем считать стержень изначально покоящимся, что соответствует случаю однородных начальных условий.

$$u(x,0) = 0 \qquad u_t(x,0) = 0 \qquad \forall x \in [x_0, x_1] \tag{2}$$

Классическими являются граничные условия следующих трех родов:

1. Управление смещением. На левом и правом концах условие будет иметь вид:

   $$u(x_0,t) = \mu(t) \qquad u(x_1,t) = \nu(t).$$

   В классическом случае функции граничного управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ должны быть согласованы с однородными начальными условиями: $\mu(0) = \nu(0) = \mu'(0) = \nu'(0) = 0$, однако для слабых решений эти условия необязательны, поэтому на условиях согласования мы тоже не станем заострять внимание, просто полагая их выполненными

2. Управление упругой силой, условие записывается следующим образом:

   $$u_x(x_0,t) = \mu(t) \qquad u_x(x_1,t) = \nu(t)$$

3. Условия упругого закрепления следующего вида ($h > 0$)

   $$u_x(x_0,t) - hu(x_0,t) = \mu(t) \qquad u_x(x_1,t) + hu(x_1,t) = \nu(t)$$

Разумеется, граничные условия на разных концах могут быть различных типов, более того, никаких ограничений на выбор пар граничных условий нет — конкретные граничные условия должны диктоваться моделью прикладной задачи. Остановим свое внимание на примере конкретной пары граничных условий, например, первого и второго рода:

$$u(x_0,t) = \mu(t) \qquad u_x(x_1,t) = \nu(t) \tag{3}$$

Как уже говорилось, решение смешанной задачи (1), (2), (3) раскладывается в сумму бегущих волн, которую мы на сей раз запишем в следующем виде:

$$u(x,t) = U(t - \frac{x - x_0}{a}) + \widetilde{U}(t + \frac{x - x_1}{a}) \tag{4}$$

Для простоты мы можем считать, что функции $U(t)$ и $\widetilde{U}(t)$ определены на всей прямой и равны нулю при $t \leqslant 0$, что сразу гарантирует выполнение однородных начальных условий. Запишем, какие условия на функции $U(t)$ и $\widetilde{U}(t)$ накладывают граничные условия (3):

$$u(x_0,t) = U(t) + \widetilde{U}(t + \frac{x_0 - x_1}{a}) = \mu(t)$$

$$u_x(x_1,t) = \frac{1}{a}\left(-U'(t - \frac{x_1 - x_0}{a}) + \widetilde{U}'(t)\right) = \nu(t)$$

Утверждается, что эти условия могут быть удовлетворены, и притом единственной парой функций $U(t)$ и $\widetilde{U}(t)$. Введем обозначение $t_1 = (x_1 - x_0)/a$ для времени прохождения волны от одного конца стержня до другого и перепишем полученные условия, проинтегрировав второе и приняв во внимание, что $U(t) = \widetilde{U}(t) = 0$ при $t \leqslant 0$:

$$U(t) + \widetilde{U}(t - t_1) = \mu(t)$$

$$-U(t - t_1) + \widetilde{U}(t) = a\int\limits_0^t \nu(\tau)d\tau$$

и запишем систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(t) &= -\widetilde{U}(t - t_1) + \underline{\mu}(t) \\ \widetilde{U}(t) &= U(t - t_1) + \underline{\nu}(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где введены обозначения для известных функций в правой части:

$$\underline{\mu}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mu(t) & t \geqslant 0 \end{cases} \qquad \underline{\nu}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a\int\limits_0^t \nu(\tau)d\tau & t \geqslant 0 \end{cases}$$

Примечательно, что выражения $\underline{\mu}(t)$ и $\underline{\nu}(t)$ представляют собой волны, порождаемые граничными условиями. Рассмотрим, например, волновое уравнение на полуоси $(-\infty, x_1]$, и избавимся от левого граничного условия, оставив только правое:

$$u_x(x_1, t) = \nu(t),$$

полубесконечный стержень будем снова считать изначально покоящимся. Тогда возбужденные единственным граничным условием колебания будут иметь вид

$$u(x,t) = \underline{\nu}(t + \frac{x - x_1}{a}),$$

и подобная ситуация является общей: в правой части системы (5) (или аналогичной ей) будут находиться функции, описывающие волны, порожденные отдельными локальными граничными условиями. Решение системы с задержками (5), как и многих других схожих систем неявно было получено академиком В.А. Ильиным, академиком Е.И. Моисеевым и их учениками при рассмотрении различных пар граничных условий (см. например обзорную работу [2]), однако до настоящего времени регулярной процедуры решения предложено не было. Излагаемый далее метод решения претендует на регулярность и опирается на следующие определения:

Определение 1. Введем V — линейное пространство непрерывных вещественнозначных функций, заданных на $\mathbb{R}$, и обращающихся в нуль при $t < t_0$, где величина t_0 может быть различна у разных функций.

Определение 2. Линейное пространство, состоящее из векторов с элементами из V, обозначим через V^n.

Определение 3. Введем оператор задержки P_τ ($\tau \in \mathbb{R}$ — время задержки), действующий в пространстве V следующим образом:

$$(P_\tau\, f)(t) = f(t - \tau) \quad \forall f \in V$$

Пример 1. Следующие функции принадлежат V: $f_1(t) = \theta(t)\sin(t)$, $f_2(t) = \theta(t)\,t\cos(t)$, $f_3(t) = 0$ (здесь $\theta(t)$ — функция Хевисайда), также справедливо

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 + f_2 \\ 0 \\ f_3 - 2f_2 \end{bmatrix} \in V^3.$$

Обратим внимание, что аргумент функции не пишется, если она рассматривается как элемент пространства V. Запишем систему (5) в новых терминах:

$$\begin{aligned} U &= -P_{t_1}\widetilde{U} + \underline{\mu} \\ \widetilde{U} &= P_{t_1}U + \underline{\nu}. \end{aligned}$$

Введя оператор C, действующий в пространстве V^2 :

$$C\begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{t_1}\widetilde{U} \\ P_{t_1}U \end{bmatrix},$$

снова упростим систему (E — тождественный оператор):

$$(E - C)\begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Если бы, например, оператор C был сжимающим, и пространство V^2 было бы полным, решение можно было бы записать в виде ряда Неймана

$$\begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} C^m \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что после введения следующей метрики на V^n, оба эти условия будут выполнены:

$$\rho_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i) \quad \forall x, y \in V^n,$$

где $\rho(x, y)$ — метрика на пространстве V, заданная следующим образом:

$$\rho(f, g) = \begin{cases} 0 & \text{при } f = g \\ e^{-t_{min}} & \text{иначе, здесь } t_{min} = \inf\{t \,|\, t \in \mathbb{R},\ f(t) \neq g(t)\}, \end{cases}$$

более того, ряд, стоящий в правой части (7) будет сходиться в этой метрике. Смысл такой сходимости в следующем: если $\rho_n(x_m, x) \to 0$ при $m \to +\infty$, то для любой заданной полуоси $(-\infty, t_0]$ начиная с некоторого номера $M(t_0)$ векторы x_m и x начнут совпадать на этой полуоси. Это свойство позволяет заключить, что на промежутке $[0, T]$ функции U и $\widetilde{U}$ задаются конечным числом слагаемых ряда, стоящего в правой части (7). Зная конкретный вид оператора C, можно заключить, что слагаемые с $m \geqslant \lceil T/t_1 \rceil$ уже не дают вклад.

Полученное решение можно привести к более привычному виду, однако мы этого делать не будем. Формула (7) дает один из способов **точного** вычисления решения (правда при известной функции $\underline{\nu}(t)$, но последняя может быть получена весьма точно при помощи численного интегрирования). Ряд, фигурирующий в правой части, надо ограничить до первых $\lceil T/t_1 \rceil$ членов, и в них раскрыть степени оператора C, которые в данном случае будут иметь довольно простой вид. Другой способ, тоже дающий точный ответ, значительно проще реализуется на ЭВМ, и состоит в использовании формулы (5), которая позволяет свести вычисление $U(t)$ к вычислению $\widetilde{U}(t - t_1)$, а вычисление $\widetilde{U}(t)$ к $U(t - t_1)$. В результате мы получаем цепочку рекурсивных вызовов, которая обрывается при $t < 0$: как мы договорились, функции $U(t)$ и $\widetilde{U}(t)$ обращаются в нуль при $t < t_0$. К вопросу вычислений мы ещё вернемся.

3 Граничные условия третьего рода

В качестве второго примера рассмотрим систему с двумя граничными условиями третьего рода (при $h_1, h_2 > 0$)

$$u_x(x_0,t) - h_1 u(x_0,t) = \mu(t) \qquad u_x(x_1,t) + h_2 u(x_1,t) = \nu(t).$$

Решение снова представляется в виде бегущих волн (4). Накладываемые граничными условиями ограничения на функции $U(t)$ и $\widetilde{U}(t)$ выглядят следующим образом:

$$u_x(x_0,t) - h_1 u(x_0,t) = \frac{1}{a}\left(-U'(t) + \widetilde{U}'(t-t_1)\right) - h_1\left(U(t) + \widetilde{U}(t-t_1)\right) = \mu(t)$$

$$u_x(x_1,t) + h_2 u(x_1,t) = \frac{1}{a}\left(-U'(t-t_1) + \widetilde{U}'(t)\right) + h_2\left(U(t-t_1) + \widetilde{U}(t)\right) = \nu(t)$$

Проинтегрировав получившиеся дифференциальные уравнения первого порядка, получим:

$$U(t) = \widetilde{U}(t-t_1) + \int\limits_0^t \left(-2h_1 a\widetilde{U}(t-t_1-\tau) - a\mu(t-\tau)\right) e^{-h_1 a\tau} d\tau$$

$$\widetilde{U}(t) = U(t-t_1) + \int\limits_0^t \left(-2h_2 aU(t-t_1-\tau) + a\nu(t-\tau)\right) e^{-h_2 a\tau} d\tau$$

Продолжим функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ нулем при $t < 0$, тогда эти выражения можно значительно упростить, используя операцию свертки:

$$\begin{aligned} U &= P_{t_1}\left(\widetilde{U} - 2h_1 a\,\widetilde{U} * \theta(t)e^{-h_1 at}\right) - a\mu * \theta(t)e^{-h_1 at} \\ \widetilde{U} &= P_{t_1}\left(U - 2h_2 a\,U * \theta(t)e^{-h_2 at}\right) + a\nu * \theta(t)e^{-h_2 at} \end{aligned}$$

Снова обозначим фигурирующие в правых частях известные функции через $\underline{\mu}$ и $\underline{\nu}$:

$$\underline{\mu} = -a\mu * \theta(t)e^{-h_1 at} \qquad \underline{\nu} = a\nu * \theta(t)e^{-h_2 at}$$

Также введем оператор эха E_β, который строит по приходящей волне отраженную при граничном условии третьего рода:

$$E_\beta f = f - 2\beta\, f * \theta(t)e^{-\beta t} \qquad f \in V,\ \beta > 0,$$

тогда уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} U &= P_{t_1} E_{h_1 a}\widetilde{U} + \underline{\mu} \\ \widetilde{U} &= P_{t_1} E_{h_2 a} U + \underline{\nu} \end{aligned}$$

Снова можно ввести оператор C и, убедившись, что он сжимающий, записать с его помощью решение:

$$C\begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{t_1}E_{h_1 a}\widetilde{U} \\ P_{t_1}E_{h_2 a}U \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} C^m \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ \underline{\nu} \end{bmatrix}.$$

Подобная техника позволяет, например, получить решения смешанных задач, рассмотренных в [4, 7, 6].

4 Граничные условия с участием скорости на конце

Часто также в приложениях используются локальные граничные условия, в которых фигурирует значение скорости. Например, граничное условие

$$u_t(x_0, t) - a u_x(x_0, t) = 0 \tag{8}$$

называется поглощающим, поскольку полностью поглощает волну, пришедшую в левый конец. В вычислительных приложениях подобные условия нужны для возможности ограничить моделируемую часть пространства — при этом волны, которые должны покинуть регион, будут просто поглощены. Иные граничные условия при этом породили бы нежелательную отраженную волну. В модельных задачах (см., например, [13]) также используется условие

$$u_t(x_0, t) + c u_x(x_0, t) = 0 \qquad 0 < c < a,$$

которое отражает волну, увеличивая её амплитуду в $\dfrac{a+c}{a-c}$ раз. Рассмотрим линейные условия с участием функции и её первых производных:

$$\begin{aligned} u_t(x_0, t) + c_1 u_x(x_0, t) + h_1 u(x_0, t) &= \mu(t) \\ u_t(x_1, t) - c_2 u_x(x_1, t) + h_2 u(x_1, t) &= \nu(t). \end{aligned}$$

Проводя дальнейшие рассуждения как в случае граничных условий третьего рода, получим:

$$\begin{aligned} U'(t)\left(1 - \frac{c_1}{a}\right) + h_1 U(t) + \widetilde{U}'(t - t_1)\left(1 + \frac{c_1}{a}\right) + h_1 \widetilde{U}(t - t_1) &= \mu(t) \\ \widetilde{U}'(t)\left(1 - \frac{c_2}{a}\right) + h_2 \widetilde{U}(t) + U'(t - t_1)\left(1 + \frac{c_2}{a}\right) + h_2 U(t - t_1) &= \nu(t) \end{aligned}$$

Чтобы уравнения имели ограниченные решения, потребуем выполнения $c_1 < a$, $c_2 < a$. Обозначим $\alpha_1 = \dfrac{a}{a - c_1}$, $\alpha_2 = \dfrac{a}{a - c_2}$, перепишем систему

$$U'(t) + \alpha_1 h_1 U(t) = \alpha_1 \mu(t) - \alpha_1 \left(1 + \frac{c_1}{a}\right) \widetilde{U}'(t - t_1) - \alpha_1 h_1 \widetilde{U}(t - t_1)$$

$$\widetilde{U}'(t) + \alpha_2 h_2 \widetilde{U}(t) = \alpha_2 \mu(t) - \alpha_2 \left(1 + \frac{c_2}{a}\right) U'(t - t_1) - \alpha_2 h_2 U(t - t_2)$$

и запишем решение (для второго уравнения аналогично):

$$U \;=\; P_{t_1}\left(\alpha_1^2 h_1 \left(1 + \frac{c_1}{a}\right) - \alpha_1 h_1\right) \widetilde{U} \;*\; \theta(t) e^{-\alpha_1 h_1 t} \;-\; -\alpha_1 \left(1 + \frac{c_1}{a}\right) P_{t_1} \widetilde{U} \;+\; \alpha_1 \mu \;*\; \theta(t) e^{-\alpha_1 h_1 t}$$

Таким образом, решение снова может быть выписано в виде ряда Неймана (7) с оператором (здесь c_i — легко восстанавливаемые константы)

$$C \begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 P_{t_1} \widetilde{U} * \theta(t) e^{-\alpha_1 h_1 t} + c_2 P_{t_1} \widetilde{U} \\ c_3 P_{t_1} U * \theta(t) e^{-\alpha_2 h_2 t} + c_4 P_{t_1} U \end{bmatrix},$$

и порожденными граничными управлениями волнами

$$\underline{\mu} = \alpha_1 \mu * \theta(t) e^{-\alpha_1 h_1 t} \qquad \underline{\nu} = \alpha_2 \nu * \theta(t) e^{-\alpha_2 h_2 t}.$$

5 Нагруженные концы

Концы с прикрепленными точечными грузиками представляют ещё один распространенный класс граничных условий. Представим, что на концах стержня находятся точечные грузики с массами m_1 и m_2, при этом с левого конца управление происходит при помощи силы, а на правом конце имеется упругое закрепление:

$$ku_x(x_0,t) - m_1 u_{tt}(x_0,t) = \mu(t)$$
$$ku_x(x_1,t) + hu(x_1,t) + m_2 u_{tt}(x_1,t) = \nu(t).$$

Получаемые уравнения на функции волн уже второго порядка:

$$\frac{k}{a}(-U'(t) + \widetilde{U}'(t-t_1)) - m_1(U''(t) + \widetilde{U}''(t-t_1)) = \mu(t)$$

$$\frac{k}{a}(\widetilde{U}'(t) - U'(t-t_1)) + h(\widetilde{U}(t) + U(t-t_1)) + m_2(\widetilde{U}''(t) + U''(t-t_1)) = \nu(t)$$

Проинтегрируем, например, первое уравнение:

$$U'(t) + \frac{k}{am_1}U(t) = -\frac{1}{m_1}\int\limits_0^t \mu(\tau)d\tau - \widetilde{U}'(t-t_1) + \frac{k}{am_1}\widetilde{U}(t-t_1)$$

$$U = -\frac{1}{m_1}\theta(t)e^{-\frac{k}{am_1}t} * \int\limits_0^t \mu(\tau)d\tau + P_{t_1}\left[-\widetilde{U}' + \frac{k}{am_1}\widetilde{U}\right] * \theta(t)e^{-\frac{k}{am_1}t}$$

Здесь мы воспользовались следующим свойством свертки: $P_\tau(f*g) = (P_\tau f)*g = f*(P_\tau g)$. Возможность перебрасывать производные в свертке, а также представление $\int\limits_0^t \mu(\tau)d\tau = \theta(t)*\mu(t)$ позволяют упростить выражение:

$$U = \frac{a}{k}\left[e^{-\frac{kt}{am_1}} - 1\right]\theta(t)*\mu + P_{t_1}\left[-\widetilde{U} + 2\frac{k}{am_1}\widetilde{U}*\theta(t)e^{-\frac{k}{am_1}t}\right] =$$
$$= -P_{t_1}E_{\frac{k}{am_1}}\widetilde{U} + \frac{a}{k}\left[e^{-\frac{kt}{am_1}} - 1\right]\theta(t)*\mu$$

Решение второго уравнения несколько более громоздко, однако получающийся в результате оператор C будет сжимающим.

6 Нелокальные граничные условия

Рассмотрим нелокальные граничные условия, наиболее простой пример которых — граничные условия Бицадзе–Самарского (см. [1]). Эти условия, связывающие значение функции на конце и в фиксированной внутренней точке стержня y_0, могут принимать на левом конце следующий вид:

$$u(x_0,t) = u(y_0,t) \qquad\qquad u(x_0,t) = -u(y_0,t)$$
$$u_x(x_0,t) = u_x(y_0,t) \qquad\qquad u_x(x_0,t) = -u_x(y_0,t).$$

Рассмотрим обобщения этого условия, т.н. многоточечные нелокальные граничные условия (здесь $y_i \in (x_0,x_1)$ — внутренние точки):

$$u(x_0,t) = \sum_{i=1}^{I} c_i\, u(y_i,t) + \mu(t)$$
$$u_x(x_0,t) = \sum_{i=1}^{I} c_i\, u_x(y_i,t) + \mu(t)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим следующую пару условий:

$$u(x_0,t)=\sum_{i=1}^{I} c_i\, u(y_i,t)+\mu(t) \qquad u_x(x_1,t)=\sum_{j=1}^{J} d_j\, u_x(z_j,t)+\nu(t),$$

которая приводит к системе

$$\begin{aligned} U(t)+\widetilde{U}(t-t_1) &= \sum_{i=1}^{I} c_i \left(U(t-\frac{y_i-x_0}{a})+\widetilde{U}(t+\frac{y_i-x_1}{a})\right)+\mu(t) \\ \widetilde{U}(t)-U(t-t_1) &= \sum_{j=1}^{J} d_j \left(\widetilde{U}(t+\frac{z_j-x_1}{a})-U(t-\frac{z_j-x_0}{a})\right)+\int\limits_0^t a\nu(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

Последнюю можно переписать в короткой форме (6), введя обозначения:

$$\underline{\mu}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \mu(t), & t\geqslant 0\end{cases} \qquad \underline{\nu}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ a\int\limits_0^t \nu(\tau)d\tau, & t\geqslant 0\end{cases} \tag{10}$$

$$C\begin{bmatrix}U\\ \widetilde{U}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{I} c_i \left(P_{y_i^-}U+P_{y_i^+}\widetilde{U}\right)-P_{t_1}\widetilde{U}\\ \sum\limits_{j=1}^{J} d_j \left(-P_{z_j^-}U+P_{z_j^+}\widetilde{U}\right)+P_{t_1}U\end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $y^-=\dfrac{y-x_0}{a}$, $y^+=\dfrac{x_1-y}{a}$ — время прохождения сигнала от некоторой точки y до левого и правого концов стержня соответственно. Нетрудно убедиться, что оператор C снова сжимающий, и снова ответ может быть выписан в форме ряда (7).

Численное решение может быть получено раскрытием степеней оператора C (последнее приведет к алгоритму, аналогичному представленному в работе [3]), но более простой в плане реализации метод состоит в использовании соотношений (9), которые позволяют свести вычисление U и $\widetilde{U}$ к ним же, но с меньшими аргументами. Краевым условием, не позволяющим впасть в бесконечную рекурсию, опять выступает $U(t)=\widetilde{U}(t)=0$ при $t<0$. Наивная реализация этого алгоритма имеет экспоненциальную по T сложность, небольшой модификацией можно добиться, чтобы его сложность стала $O(t^{I+J+1})$, однако последнее также неприемлемо для приложений.

Поэтому приходится отказаться от точного нахождения решения и проводить вычисление функций U и $\widetilde{U}$ на решетке используя все те же соотношения (9) и интерполируя выражения в правых частях.

Перечисленными примерами, разумеется, нелокальные условия не исчерпываются. Например, может быть рассмотрено следующее условие на левом конце:

$$c_0u_t(x_0,t)+d_0u_x(x_0,t)+h_0u(x_0,t)+\sum_{i=1}^{I}\left(c_i\, u_t(y_i,t)+d_i\, u_x(y_i,t)+h_i\, u(y_i,t)\right)=\mu(t) \tag{12}$$

смешанная задача с таким условием решается ровно так же (просто), как и предыдущие примеры. Отметим, что коэффициенты, участвующие в (12), не совсем произвольны: физические соображения требуют наличия ограниченных решений (это ограничение может быть записано как $(ac_0-d_0)h_0\geqslant 0$). Второе ограничение: при $ac_0=d_0$, т.е. когда коэффициент при $U'(t)$ в получающемся уравнении обнулится, необходимо потребовать, чтобы никакие другие производные также не входили в уравнение, что с неизбежностью влечет $c_i=d_i=0$ при $i=0,1,\dots I$, в противном случае решение потеряет гладкость и мы не сможем включить его в какой-нибудь разумный класс.

Поскольку вместо двумерной сетки вычисления во всех приведенных случаях проводятся на одномерной, то производительность таких алгоритмов будет неизмеримо выше, чем у распространенного метода конечных разностей. Можно показать, что точность при одинаковом шаге по времени τ также при этом будет выше.

7 Нелокальные по времени условия

В выражении для граничного условия можно включить также слагаемые со значениями функции $u(x,t)$ или её производных в разные моменты времени, к примеру, условие

$$u(x_0,t) = c\,u(y_1, t-\tau_1) \qquad y_1 \in (x_0, x_1),\ \tau_1 > 0$$

связывает значение функции на левом конце и значение во внутренней точке в предшествующий момент времени. Аппроксимация поглощающего граничного условия (8)

$$u(x_0 + a\varepsilon, t-\varepsilon) - u(x_0,t) = 0 \qquad \varepsilon > 0 \text{ — малое}$$

может рассматриваться как простейшее управление при граничном условии первого рода, когда в качестве управления выбирается функция $\mu(t) = u(x_0 + a\varepsilon, t-\varepsilon)$, значения которой получаются из непосредственного наблюдения за стержнем в точке $x_0{+}a\varepsilon$, близкой к концу стержня. Рассмотрим, например, следующую пару условий:

$$\begin{aligned} u(x_0,t) &= \sum_{i=1}^{I} c_i u(y_i, t-\tau_i) + \mu(t) \qquad (13)\\ u_x(x_1,t) &= \sum_{i=1}^{I} d_i u_x(y_i, t-\tau_i) + \nu(t). \end{aligned}$$

Представив, как и ранее, решение в виде бегущих волн, придем к системе

$$U(t) + \widetilde{U}(t-t_1) = \sum_{i=1}^{I} c_i \left(U(t-y_i^- - \tau_i) + \widetilde{U}(t-y_i^+ - \tau_i) \right) + \mu(t)$$

$$\widetilde{U}(t) - U(t-t_1) = \sum_{i=1}^{I} d_i \left(\widetilde{U}(t-y_i^+ - \tau_i) - U(t-y_i^- - \tau_i) \right) + \int_0^t a\nu(\tau)d\tau,$$

решение которой, разумеется, снова можно представить в виде ряда Неймана с порожденными граничными волнами (10) и оператором C, который выписывается по формуле, аналогичной (11):

$$C\begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{I} c_i \left(P_{y_i^- + \tau_i} U + P_{y_i^+ + \tau_i} \widetilde{U} \right) - P_{t_1} \widetilde{U} \\ \sum\limits_{i=1}^{I} d_i \left(-P_{y_i^- + \tau_i} U + P_{y_i^+ + \tau_i} \widetilde{U} \right) + P_{t_1} U \end{bmatrix}.$$

Здесь стоит отметить, что совершенно необязательно требовать, чтобы величины τ_i были неотрицательными. Чтобы оператор C был сжимающим, достаточно выполнения неравенств $y_i^- + \tau_i > 0$ и $y_i^+ + \tau_i > 0$, т.е. чтобы пары величин (y_i, τ_i) лежали в области, изображенной на рисунке 1. Случай $\tau_i < 0$ является нефизичным, поскольку в граничном условии фигурируют «данные из будущего». Тем не менее, если считать, что решение определено при $t > 0$, оно дает корректную постановку. Объяснить это можно следующим образом: для решений волнового уравнения справедливо равенство

$$u(y_1,t_1) + u(y_3,t_3) = u(y_2,t_2) + u(y_4,t_4), \qquad (14)$$

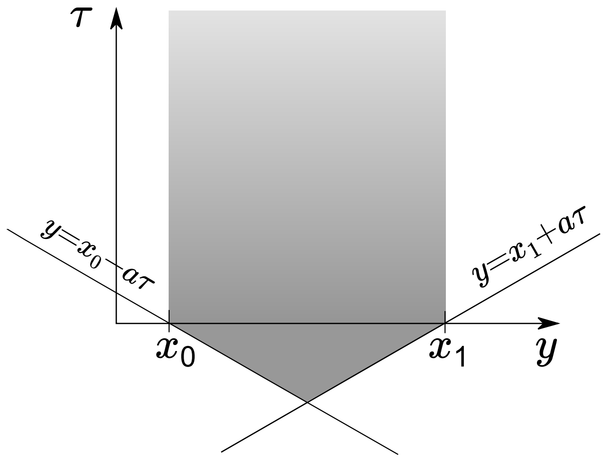

Рис. 1: Допустимые значения (y, τ)

если точки (y_1, t_1), (y_2, t_2), (y_3, t_3) и (y_4, t_4) образуют параллелограмм со сторонами, параллельными характеристикам волнового уравнения. Тогда слагаемое с $\tau_i < 0$ в граничном условии можно заменить на три, но с $\tau_i \geqslant 0$ у каждого. На самом деле почти любые комбинации

$$\sum_{i=1}^{I} c_i u(y_i, t - \tau_i) = 0$$

могут играть роль граничного условия, хотя, казалось бы, значение функции на конце не входит в выражение. Однако используя (14), можно преобразовать условие к выражению вида (13).

8 Интегральные условия

Не последнюю роль играют условия, в которые входят интегралы. Простейший пример — интегральное условие с памятью, например:

$$u(x_0, t) + \int\limits_0^t u_x(x_0, \tau) s(t - \tau) d\tau = \mu(t),$$

где $s(t)$ — заданная функция, определенная и непрерывно-дифференцируемая при $t \geqslant 0$. Доопределим её нулем при $t < 0$, тогда

$$U + P_{t_1}\widetilde{U} + \frac{1}{a}\left(-U' + P_{t_1}\widetilde{U}'\right) * s = \mu.$$

Воспользовавшись свойством дифференцирования свертки, можем записать как

$$\left(1 - \frac{s(0)}{a}\right) U - U * \frac{s'}{a} = \mu - \left(1 + \frac{s(0)}{a}\right) P_{t_1}\widetilde{U} - \frac{1}{a} P_{t_1}\widetilde{U} * s', \tag{15}$$

где под s' подразумевается классическая производная. При $s(0) < a$ последняя формула является интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции U с разностным ядром. Последнее решается, например, через преобразование Лапласа, его запаздывающее фундаментальное решение[1] G для уравнения (15) удовлетворяет равенству

$$\left[\left(1 - \frac{s(0)}{a}\right)\delta - \frac{s'}{a}\right] * G = \delta,$$

[1] G, вообще говоря, является обобщенной функцией, однако представима в виде линейной комбинации дельта-функции и регулярной функции

в котором два раза участвует дельта-функция Дирака. Решение же записывается с его помощью:

$$U = \mu * G - \left(1 + \frac{s(0)}{a}\right) P_{t_1}\widetilde{U} * G - \frac{1}{a} P_{t_1}\widetilde{U} * s' * G.$$

Имея второе граничное условие, мы получим ещё одно соотношение на функции U и $\widetilde{U}$, после чего решение представим в виде (7) со сжимающим оператором C.

Также интерес представляют **нелокальные интегральные условия**, например условие Самарского (см. [5, стр. 140]) вида $\int\limits_{x_0}^{x_1} u(x,t)dx = 0$, более общий вид которого (например, встречается в [8]):

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} K(x)u(x,t)dx = \mu(t) \tag{16}$$

также несложно исследовать. Подставив решение в виде бегущих волн, получим

$$\mu(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} K(x)\left[U(t - \frac{x - x_0}{a}) + \widetilde{U}(t + \frac{x - x_1}{a})\right] dx =$$

$$= a\int\limits_{0}^{t_1} K(x_0 + a\tau)U(t-\tau)d\tau + a\int\limits_{0}^{t_1} K(x_1 - a\tau)\widetilde{U}(t-\tau)dx = U * K_1 + \widetilde{U} * K_2,$$

введя дополнительно обозначения

$$K_1(t) = \begin{cases} aK(x_0 + at) & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \notin [0, t_1] \end{cases} \quad K_2(t) = \begin{cases} aK(x_1 - at) & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \notin [0, t_1] \end{cases}$$

и продолжив $\mu(t)$ нулем при $t < 0$, можем записать кратко

$$U * K_1 + \widetilde{U} * K_2 = \mu,$$

что является[2] уравнением Вольтерра первого рода с разностным ядром относительно U:

$$U * K_1 = \mu - \widetilde{U} * K_2.$$

Предположим, что мы знаем его запаздывающее фундаментальное решение G, удовлетворяющее соотношению $K_1 * G = \delta$. В таком случае

$$U = \mu * G - \widetilde{U} * K_2 * G.$$

Обратим внимание, что оператор $f(\widetilde{U}) = \mu * G - \widetilde{U} * K_2 * G$ не является сжимающим во введенной метрике ρ, поэтому при наличии двух подобных условий сходимость ряда Неймана надо будет отдельно обосновывать. Если же, например, на правом конце поставлено условие Дирихле $u(x_1, t) = \nu(t)$, то также имеется соотношение $\widetilde{U} + P_{t_1}U = \nu$ (функцию ν также продолжим нулем при $t < 0$). Запишем их вместе:

$$\begin{aligned} U &= -K_2 * G * \widetilde{U} + \mu * G \\ \widetilde{U} &= -P_{t_1}U + \nu \end{aligned} \tag{17}$$

[2]Если бы в граничном условии (16) было слагаемое $u(x_0, t)$, мы бы снова получили уравнение Вольтерра второго рода.

Попытка непосредственно повторить уже привычные рассуждения и ввести оператор

$$C\begin{bmatrix}U\\ \widetilde{U}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-K_2*G*\widetilde{U}\\ -P_{t_1}U\end{bmatrix}$$

пока ничего нам не даст, потому что оператор C не является сжимающим[3] в метрике ρ_2. Рассмотрим квадрат оператора C:

$$C^2\begin{bmatrix}U\\ \widetilde{U}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{t_1}K_2*G*U\\ P_{t_1}K_2*G*\widetilde{U}\end{bmatrix}.$$

Поскольку он является сжимающим, то ряд Неймана сходится и дает решение уравнений.

Рассмотрим пример ещё одного вида интегральных условий, нелокальных как по времени, так и по пространству, задаваемый формулой

$$u(x_0,t)+\int\limits_0^t\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x,t-\tau)u(x,\tau)dxd\tau=\mu(t)$$

с некоторой фиксированной функцией $f(x,t)$, которую доопределим нулем при $t<0$. Подставляя вновь решение в виде (4), получим:

$$\mu(t)=U(t)+\widetilde{U}(t-t_1)+\int\limits_{x_0}^{x_1}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-\tau)U(\tau-x^-)d\tau+\int\limits_{x_0}^{x_1}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-\tau)\widetilde{U}(\tau-x^+)d\tau=$$
$$=U(t)+\widetilde{U}(t-t_1)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,U(\tau)\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x,t-\tau-x^-)dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,\widetilde{U}(\tau)\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x,t-\tau-x^+)dx,$$

что можно кратко записать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$U+P_{t_1}\widetilde{U}+U*f_1+\widetilde{U}*f_2=\mu,$$

приняв обозначения для функций f_1 и f_2 (заметим, что обе равны нулю при отрицательных аргументах):

$$f_1(t)=\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x,t-x^-)dx\qquad f_2(t)=\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x,t-x^+)dx$$

Решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода нами уже было разобрано.

9 Нелинейные граничные условия

Представленные примеры граничных условий ни в коем случае не претендуют на полноту: читатель может сложить несколько левых частей из приведенных граничных условий и получить новое, а затем исследовать его теми же (или схожими) средствами. Однако во всех примерах фигурируют линейные условия, которыми приложения, увы, не ограничиваются. Например, в статье [14] рассматривается следующее условие с памятью

$$u(x_1,t)+\int\limits_0^t\sigma(u_x(x_1,t))s(t-\tau)d\tau=\nu(t)$$

[3]Тем не менее, в эквивалентной метрике $\rho_2^*(x,y)=\rho(x_1,y_1)+e^{t_1/2}\rho(x_2,y_2)$ оператор C сжимающий, и для решения конкретной задачи этим замечанием можно было ограничиться.

с нелинейной функцией σ, а в статье [15] рассматривается локальное нелинейное условие

$$u_x(x_1,t) = |u(x_1,t)|^\alpha u(x_1,t) \tag{18}$$

с положительным коэффициентом α. Рассмотрев произвольное граничное условие и подставив в него представление решения в виде бегущих волн, мы получим некоторое уравнение (линейное, дифференциальное, интегро-дифференциальное и т. п.). Не вдаваясь в природу этого уравнения, потребуем, чтобы оно было разрешимо для левого граничного условия относительно U при известном $\widetilde{U}$, а для правого — относительно $\widetilde{U}$ при известном U, при этом решения задаются (вообще говоря нелинейными) операторами C_1 и C_2.

$$U = C_1(\widetilde{U},\mu) \qquad \widetilde{U} = C_2(U,\nu)$$

Второе требование состоит в том, чтобы операторы C_1 и C_2 не выводили функции из допустимого для них класса (например, для классического решения бегущие волны дважды непрерывно дифференцируемы). Для физически осмысленных граничных условий операторы C_1 и C_2 не увеличивают расстояние ρ, т.е.

$$\rho\left(C_1(f,\mu), C_1(g,\mu)\right) \leqslant \rho(f,g) \qquad \rho\left(C_2(f,\nu), C_2(g,\nu)\right) \leqslant \rho(f,g),$$

поскольку при f,g, совпадающих на полуоси $(-\infty,t]$, функции $C_1(f,\mu)$, $C_1(g,\mu)$ также должны совпадать на этой полуоси (аналогично для C_2). Противное означало бы использование «данных из будущего». Поскольку операторы не являются линейными, вместо (во многих отношениях более удобного) ряда Неймана ответ будет записываться как предел итерационной последовательности с нововведенным оператором C:

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ \widetilde{U}_{n+1} \end{bmatrix} = C\left(\begin{bmatrix} U_n \\ \widetilde{U}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} C_1(\widetilde{U}_n,\mu) \\ C_2(U_n,\nu) \end{bmatrix}$$

и с произвольными начальными данными U_1, $\widetilde{U}_1$.

Если же хотя бы один из операторов является сжимающим (это довольно частая ситуация, как мы видели), то, рассуждая как в предыдущей части, можно показать, что итерационная последовательность будет сходиться к решению. При этом, если нас интересует решение на отрезке $[0,T]$, мы сможем ограничиться конечным числом итераций, которое несложно оценить.

10 Вычислительные аспекты

Уже упоминалось, что в частных случаях полученные формулы дают алгоритм, который может вычислить точно $u(x,t)$, или, что то же самое, вычислить $U(t-x^-)$ и $\widetilde{U}(t-x^+)$. В более общем случае линейных условий решение, как мы помним, записывается в виде ряда Неймана, из которого нас интересуют только первые M членов.

$$\begin{bmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{M} C^m \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}$$

Фигурирующий оператор C хоть и линеен, но нетривиален. Разумеется, можно последовательно вычислять слагаемые ряда в правой части, однако, скажем, многократное вычисление свертки вряд ли можно назвать эффективным решением, тем более для такой простой задачи. Как демонстрировалось в частных случаях, более простой способ состоит в численном решении промежуточных соотношений на U и $\widetilde{U}$.

Например, для граничных условий первого и второго рода наиболее просто использовать уравнения (5), и одновременно вычислять функции U и $\widetilde{U}$ с шагом τ, при этом величины в правых частях, например $\widetilde{U}(t-t_1)$, могут быть получены при помощи аппроксимации по нескольким ближайшим узлам на основе многочленов Лагранжа, точно так же проводятся вычисления для приведенных нами примеров нелокальных точечных граничных условий. В более сложных случаях, когда промежуточные соотношения на функции U и $\widetilde{U}$ являются дифференциальными уравнениями, ответ находится при помощи их численного решения, при этом правые части восстанавливаются при помощи интерполяции. Этот подход работает при граничном условии с точечной массой, с граничными условиями третьего рода, но самое ценное — он не завязан на конкретный вид дифференциальных уравнений и потому также может быть применен при нелинейных граничных условиях, как например (18). Справедливости ради надо заметить, что решали линейные дифференциальные уравнения мы не зря: вычисление свертки с экспонентой можно провести эффективно и при этом с меньшей погрешностью.

Ситуация с интегральными уравнениями несколько сложнее, в отличие от сверток с экспонентой, произвольные свертки вычисляются, например, при помощи преобразования Фурье, что и медленнее, и менее точно. Усугубляет ситуацию необходимость считать свертку для каждого слагаемого. На самом деле эти проблемы решаются единовременно при помощи перехода к преобразованию Фурье или Лапласа, когда в качестве промежуточной задачи мы ставим вычисление функций–образов $L[U](p)$, $L[\widetilde{U}](p)$. Как это часто случается в физике, уравнения с запаздыванием, дифференциальные уравнения, уравнения с разностным ядром в терминах образов превращаются в простые алгебраические уравнения.

11 Заключение

Отметим, что все результаты, изложенные в статье, опираются на замечательное свойство (4) решений волнового уравнения.

Мощности современной вычислительной техники таковы, что одномерное волновое уравнение вряд ли может представлять для неё какую-то сложность. Тем не менее, последнее часто выступает в статьях в роли «пробного камня» для демонстрации различных идей: убывания решения, свойств какого-то граничного условия и т.п. В терминах бегущих волн подобные рассуждения обычно проводятся значительно проще, часто при этом возможно даже решить задачу аналитически. Автор надеется, что прием, описанный в статье, войдет в арсенал читателя наравне с часто применяемым рядом Фурье.

Эффективные алгоритмы приближенного решения являются приятным дополнением, и возможно пригодятся при численных экспериментах.

Список литературы

[1] *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР — 1969. — Т. 185, № 4 — С. 739–740.

[2] *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук — 2005. — Т. 60, № 6 — С. 89–114.

[3] *Кулешов А. А.* Смешанные задачи для уравнения колебаний струны с однородными граничными и неоднородными нелокальными условиями // Дифференциальные уравнения — 2010. — Т. 46, № 1 — С. 98–104.

[4] *Моисеев Е. И., Тихомиров В. В.* О волновом процессе с конечной энергией при заданном граничном режиме на одном конце и упругом закреплении на другом конце // Нелинейная динамика и управление, — 2007. — Т. 5 — С. 141–148.

[5] *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с. — ISBN 5-06-002670-1

[6] *Нестеренко Ю. Р.* О смешанной задаче для волнового уравнения с краевыми условиями третьего рода // Доклады Академии наук — 2009. — Т. 426, № 1 — С. 29–31.

[7] *Никитин А. А., Кулешов А. А.* Оптимизация граничного управления, производимого третьим краевым условием // Дифференциальные уравнения — 2008. — Т. 44, № 5 — С. 681–690.

[8] *Пулькина Л. С.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки — 2003. — Т. 74, № 3 — С. 435–445.

[9] *Рогожников А. М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Доклады Академии Наук — 2012. — Т. 444, № 5 — С. 488–491.

[10] *Рогожников А. М.* Смешанная задача о возбуждении колебаний в составном стержне с присоединенными точечными массами // Доклады Академии Наук — 2013. — Т. 450, № 4 — С. 389–392.

[11] *Рогожников А. М.* Оптимальное управление продольными колебаниями составных стержней с равным временем прохождения волны по каждому из участков // Дифференциальные уравнения — 2013. — Т. 49, № 5 — С. 633–642.

[12] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 799 с. — ISBN 5-211-04138-0.

[13] *Chen G., Hsu S., Zhou J.* Snapback repellers as a cause of chaotic vibration of the wave equation with a van der Pol boundary condition and energy injection at the middle of the span // Journal of Mathematical Physics — 1998. — vol. 39 — P. 6459–6489.

[14] *Rivera J., Andrade D.* Exponential decay of non-linear wave equation with a viscoelastic boundary condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences — 2000. — vol. 23, № 1 — P. 41–61.

[15] *Vitillaro E.* Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms // Journal of Differential Equations — 2002. — vol. 186, №1 — P. 259–298.