

Оптимальное управление продольными колебаниями составных стержней с равным временем прохождения волны по каждому из участков.

Рогожников А. М.

Посвящается моему научному руководителю
выдающемуся математику
Владимиру Александровичу Ильину

Аннотация

В работе рассматриваются продольные упругие колебания составного стержня и находятся аналитические формулы, описывающие оптимальные граничные управления, переводящие стержень за промежуток времени T из состояния покоя в состояние с заданными функцией смещения $\varphi(t)$ и функцией скорости $\psi(t)$. При этом полагается, что время прохождения волны по каждому из участков стержня одинаково и T кратно этой величине.

Рассматриваемой в настоящей работе задаче граничного управления упругими колебаниями посвящена серия работ акад. В. А. Ильина и акад. Е. И. Моисеева, где были представлены оптимальные граничные управления однородным стержнем при помощи граничных управлений первого и второго рода при определённых значениях времени управления T . Полученные результаты вкратце изложены в статье [1]. В работе [2] были найдены управления за минимальный промежуток времени стержнем, состоящим из двух участков с равным временем прохождения сигнала по каждому из них, а в работе [3] удалось получить аналогичный результат без ограничения на время прохождения сигнала. Задача управления также решалась и для произвольных достаточно больших промежутков времени для однородных стержней (см. например [4, 5]).

Рассмотрим стержень, состоящий из n участков. Пронумеруем последовательно участки от 1 до n и обозначим их концы через x_i ($i \in \overline{0, n}$) таким образом, чтобы i -тый участок находился на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Множество точек x_i состоит из граничных точек x_0, x_n и точек стыка $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Будем считать, что на i -том участке линейная плотность стержня ρ_i , модуль Юнга k_i , а скорость распространения сигнала $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$.

Существенное ограничение, накладываемое на стержень, состоит в равенстве времени прохождения сигнала по каждому из участков. Время прохождения по одному участку обозначим за s :

$$s = \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i} \quad \forall i \in \overline{1, n}$$

Формулировки смешанных задач и задач граничного управления

Рассмотрим следующую смешанную задачу, классическая формулировка которой подразумевает нахождение функции $u(x, t)$, заданной в прямоугольнике $Q = [x_0, x_n] \times [0, T]$ и удовлетворяющей разрывному волновому уравнению

$$u_{tt} = \begin{cases} a_i^2 u_{xx} & \text{в прямоугольнике } Q_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

однородным начальным условиям

$$u(x, 0) \equiv 0 \quad u_t(x, 0) \equiv 0, \quad (2)$$

следующим условиям сопряжения в каждой точке стыка x_i

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \quad (3)$$

$$k_i u_x(x_i - 0, t) = k_{i+1} u_x(x_i + 0, t) \quad (4)$$

и управляется с обоих концов смещениями

$$u(x_0, t) = \mu(t) \quad u(x_n, t) = \nu(t) \quad (5)$$

Обобщенное решение будем искать в классе $\widehat{W}_2^1(Q)$, введенном в работе [6]:

Определение 1. Функция $u(x, t)$ принадлежит в прямоугольнике $Q = [x_0, x_n] \times [0, T]$ классу $\widehat{W}_2^1(Q)$, если она непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}$ и имеет в нем обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, которые принадлежат не только классу $L_2(Q)$, но и классу $L_2(x_0 < x < x_n)$ при всех $t \in [0, T]$ и классу $L_2(0 < t < T)$ при всех $x \in [x_0, x_n]$.

От граничных управлений $\mu(t)$, $\nu(t)$ потребуем принадлежности классу $W_2^1[0, T]$, а также выполнения условия согласования $\mu(0) = \nu(0) = 0$. В работе [7] было дано определение обобщенного решения смешанной задачи (1)–(5) из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$, там же были представлены следующие три теоремы.

Теорема 1. В классе $\widehat{W}_2^1(Q)$ может существовать только одно решение смешанной задачи (1)–(5).

Теорема 2. Единственное решение задачи (1)–(5) из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ при **четном** n имеет вид ¹

$$u(x, t) = \begin{cases} U_i(t - \frac{x-x_{i-1}}{a_i}) + \widetilde{U}_i(t + \frac{x-x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i \text{ при } i - \text{нечетных} \\ \widetilde{U}_i(t - \frac{x-x_{i-1}}{a_i}) + U_i(t + \frac{x-x_i}{a_i}) & \text{в } Q_i \text{ при } i - \text{четных} \end{cases} \quad (6)$$

с функциями $U_1, \dots, U_n, \widetilde{U}_1, \dots, \widetilde{U}_n$, определяемыми соотношениями

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ \dots \\ U_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BA)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}(t - 2ms) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu}(t - 2ms) \end{pmatrix} \quad (7)$$

¹Аргументы в записи приведены в соответствие со статьей [8] и несколько отличаются от таковых в [7]

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1(t) \\ \tilde{U}_2(t) \\ \tilde{U}_3(t) \\ \dots \\ \tilde{U}_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} A(BA)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}(t - (2m+1)s) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu}(t - (2m+1)s) \end{pmatrix} \quad (8)$$

В этой записи $\underline{\mu}$ и $\underline{\nu}$ — это функции μ и ν , продолженные нулем при $t < 0$ и продолженные произвольным непрерывным образом при $t > T$. В этих выражениях матрицы A и B размера $n \times n$ имеют следующий блочно-диагональный вид:

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

где J_{ij} — матрица размера 2×2 , составленная из коэффициентов преломления $T_{ij} = \frac{2z_i}{z_i + z_j}$ и отражения $R_{ij} = \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}$, $z_i = a_i \rho_i$ — импеданс i -того участка.

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & T_{ji} \\ T_{ij} & R_{ji} \end{bmatrix}$$

Теорема 3. Для задачи (1)–(5) при **нечетном** n решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ определяется формулой (6), в которой функции $U_1, \dots, U_n, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ определяются соотношениями

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \dots \\ U_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} (BA)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}(t - 2ms) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} B(AB)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu}(t - (2m+1)s) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_1(t) \\ \tilde{U}_2(t) \\ \dots \\ \tilde{U}_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} A(BA)^m \begin{pmatrix} \underline{\mu}(t - (2m+1)s) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{+\infty} (AB)^m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \underline{\nu}(t - 2ms) \end{pmatrix} \quad (10)$$

В этих выражениях A и B — блочно-диагональные матрицы размера $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} J_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

В прикладных задачах помимо вопроса о решении смешанной задачи также встает вопрос о нахождении граничных управлений, переводящих систему из некоторого заданного начального состояния в заданное конечное состояние в момент времени T . В настоящей работе полагаем, что время управления кратно времени прохождения сигнала по одному участку: $T = ks$.

Рассмотрим следующие две задачи граничного управления:

Задача граничного управления I. Требуется найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые переводят изначально покоящийся стержень в конечное состояние

$$u(x, T) = \varphi(x), \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad (11)$$

Задача граничного управления II. Будем полагать граничное управление на правом конце равным нулю: $u(x_n, t) = \nu(t) \equiv 0$. Требуется найти управление $\mu(t)$, переводящее изначально покоящийся стержень в конечное состояние (11), подчиненное условию согласования $\varphi(x_n) = 0$.

Поскольку при достаточно большом времени T решение этих задач не единственно, то становится актуальным вопрос об отыскании оптимальных граничных управлений, на которых достигаются минимумы соответствующих функционалов граничной энергии:

$$\int_0^T (\mu'(\tau))^2 + (\nu'(\tau))^2 d\tau \rightarrow \min \quad \text{для задачи граничного управления I}$$

$$\int_0^T (\mu'(\tau))^2 d\tau \rightarrow \min \quad \text{для задачи граничного управления II}$$

Первым шагом приведем решения смешанных задач к единому виду. Введем матрицу $C \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ вида

$$C = \begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Также введем e^i — базовые вектора в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$e_j^i = \delta_{ij},$$

из которых мы будем использовать $p = e^1$ и вектор q :

$$q = \begin{cases} e^n & \text{при } n - \text{четном} \\ e^{2n} & \text{при } n - \text{нечетном} \end{cases}$$

Представим также время управления в виде $T = ks$, $k \in \mathbb{N}$. В новых терминах мы можем кратко записать решение смешанной задачи на промежутке $[0, T]$ для **произвольного** n :

$$\begin{pmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \\ \tilde{U}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{U}_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} C^m [\underline{\mu}(t - ms)p + \underline{\nu}(t - ms)q] \quad (12)$$

Вспомогательные утверждения

Утверждение 1. В представлении (6) для решения смешанной задачи (1)–(5), удовлетворяющего финальным условиям (11) справедливо (равенства понимаются как равенства элементов пространства L_2):

$$U'_i(T - \tau) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при } i - \text{нечетных} \\ \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при } i - \text{четных} \end{cases} \quad \tau \in [0, s] \quad (13)$$

$$\tilde{U}'_i(T - \tau) = \frac{1}{2} \times \begin{cases} \psi(x_i - \tau a_i) + a_i \varphi'(x_i - \tau a_i) & \text{при } i - \text{нечетных} \\ \psi(x_{i-1} + \tau a_i) - a_i \varphi'(x_{i-1} + \tau a_i) & \text{при } i - \text{четных} \end{cases} \quad \tau \in [0, s] \quad (14)$$

Утверждение проверяется непосредственным дифференцированием.

Утверждение 2. Чтобы функция $\mu(t)$ была решением задачи граничного управления II, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (13)–(14) на функции $U_i, \tilde{U}_i$, получаемые из (12) при $\nu(t) \equiv 0$.

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 1, достаточность доказывается проверкой следующих равенств

$$u_t(x, T) = \psi(x) \quad u_x(x, T) = \varphi'(x).$$

Из формул, определяющих решение $u(x, t)$, следует, что $u(x_n, t) = \nu(t) \equiv 0$. Таким образом функции $u(x, T)$ и $\varphi(x)$ имеют совпадающие обобщенные производные, а также совпадают в точке x_n : $u(x_n, T) = \varphi(x_n) = 0$, следовательно и сами функции совпадают. Утверждение доказано.

Обозначим выражения в правых частях (13)–(14) через $\alpha_i(\tau)$

$$U'_i(T - \tau) = \alpha_i(\tau) \quad \tilde{U}'_i(T - \tau) = \alpha_{n+i}(\tau) \quad \tau \in [0, s] \quad (15)$$

В силу равенства (12) условия (13)–(14) эквивалентны следующим равенствам при $\tau \in [0, s]$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(\tau) \\ \dots \\ \alpha_n(\tau) \\ \alpha_{n+1}(\tau) \\ \vdots \\ \alpha_{2n}(\tau) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{+\infty} C^m [\underline{\mu}'(t - ms)p + \underline{\nu}'(t - ms)q] = \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu'(T - \tau - ms)p + \nu'(T - \tau - ms)q] \quad (16)$$

Вектор в левой части равенства (16) будем обозначать как $\bar{\alpha}(\tau)$. В дальнейшем функции граничного управления удобно задать в виде системы функций, каждая из которых принадлежит классу L_2 и определяет производную управления на определенном промежутке времени (в силу того, что $\mu(0) = \nu(0) = 0$, они задают исходные управления однозначно). Временной интервал разбивается на промежутки $[T - (m+1)s, T - ms]$, $m \in \overline{0, k-1}$:

$$\begin{aligned} \mu'(T - t - ms) &= \mu_m(t) & 0 \leq m \leq k-1, t \in [0, s] \\ \nu'(T - t - ms) &= \nu_m(t) & 0 \leq m \leq k-1, t \in [0, s] \end{aligned}$$

В новых обозначениях запишем выражение для энергии граничного управления:

$$\sum_{m=0}^{k-1} \left[\|\mu_m\|_{L_2[0,s]}^2 + \|\nu_m\|_{L_2[0,s]}^2 \right] \quad \text{для задачи I}$$

$$\sum_{m=0}^{k-1} \|\mu_m\|_{L_2[0,s]}^2 \quad \text{для задачи II}$$

Перепишем равенство (16) с использованием функций $\mu_m(t)$, $\nu_m(t)$ и вектора $\bar{\alpha}(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\tau) &= \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu'(T - \tau - ms)p + \nu'(T - \tau - ms)q] = \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu_m(\tau)p + \nu_m(\tau)q] = \\ &= E_k [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau), \nu_0(\tau), \nu_1(\tau), \dots, \nu_{k-1}(\tau)]^T, \end{aligned} \quad (17)$$

где матрица E_k размера $n \times 2k$ имеет следующий вид в записи по столбцам:

$$E_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p, q, Cq, \dots, C^{k-1}q]$$

При рассмотрении задачи граничного управления II равенства (13)–(14) примут вид

$$\bar{\alpha}(\tau) = \sum_{m=0}^{k-1} C^m [\mu'(T - \tau - ms)p] = F_k [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau)]^T \quad (18)$$

с матрицей $F_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ следующего вида

$$F_k = [p, Cp, \dots, C^{k-1}p]$$

Утверждение 3. При $k \geq 2n$ матрица F_k имеет ранг $2n$.

Доказательство. Докажем это для матрицы F_{2n} , поскольку она является подматрицей F_k , составленной из первых $2n$ столбцов. Нетрудно убедиться, что в скалярном произведении в пространстве $\mathbb{R}^n$, заданном как $(x, y)_z = \sum_{i=1}^n z_i x_i y_i$ (z_i — импеданс i -того участка), матрицы A и B являются унитарными (а значит, и их произведения AB и BA тоже). Пользуясь унитарностью A и B , легко доказать, что матрица C унитарна относительно скалярного произведения в $\mathbb{R}^{2n}$, заданного формулой $(x, y)_{zz} = \sum_{i=1}^n z_i (x_i y_i + x_{n+i} y_{n+i})$. Это означает, что все собственные числа матрицы C по модулю равны 1. Рассмотрим полную ортонормированную систему из $2n$ собственных (возможно, комплексных) векторов этой матрицы:

$$\begin{aligned} C f_i &= \lambda_i f_i \\ (f_i, f_j)_{zz} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Разложение любого вектора (в частности, p) происходит по известным формулам:

$$p = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i f_i \quad \alpha_i = (p, f_i)_{zz}$$

Докажем, что $\alpha_i \neq 0$ $i \in \overline{1, 2n}$, т.е. что любой собственный вектор f_i обладает ненулевой первой компонентой. Предположим противное. Пусть $Ch = \lambda h$ и у h первая компонента нулевая. Обозначим через g и $\tilde{g}$ соответственно вектора, составленные из первых n компонент h и из n последних, тогда

$$B\tilde{g} = \lambda g, \quad Ag = \lambda \tilde{g},$$

из чего следует, что $BAg = \lambda^2 g$, т.е. g — собственный вектор матрицы BA (очевидно, $g \neq 0$, т.к. $h \neq 0$), $|\lambda^2| = 1$.

Первые $k \geq 1$ компонент g нулевые: $g_1 = g_2 = \dots = g_k = 0$, $g_{k+1} \neq 0$. А значит, у вектора $BAg = \lambda^2 g$ также ровно первые k компонент нулевые. Можно непосредственно проверить, что если $k = 1$, то у BAg первая компонента ненулевая: $(BAg)_1 \neq 0$. Рассмотрение остальных случаев сводится к k – четным, тогда из равенства нулю $(BAg)_k$ следует и равенство нулю $(BAg)_{k+1}$, и k – нечетным, когда $(BAg)_{k-1} \neq 0$. Пришли к противоречию. Таким образом все собственные вектора C имеют ненулевую первую компоненту.

Если бы у матрицы C было два собственных вектора, отвечающих одному собственному значению, то существовала бы их линейная комбинация, также являющаяся собственным вектором, у которой первая компонента нулевая. Поскольку это невозможно, у матрицы C все собственные значения попарно различны.

F_{2n} является матрицей Крылова, для которых справедливо, что если C — матрица простой структуры с попарно различными собственными значениями и разложение p по её собственным векторам не содержит нулевых компонент, то сама матрица F_{2n} является невырожденной. Утверждение доказано.

Утверждение 4. При $k \geq n$ матрица E_k имеет ранг $2n$.

Доказательство. Рассмотрим подматрицу $2n \times 2n$, включающую первые n столбцов и столбцы с $k+1$ по $k+n$:

$$[p, Cp \dots C^{n-1}p, q, Cq, \dots, C^{n-1}q]$$

из предыдущего утверждения следует, что первые n столбцов этой матрицы линейно независимы (т.к. они являются столбцами невырожденной матрицы F_{2n}). Аналогичными рассуждениями показывается, что последние n столбцов также линейно независимы.

Докажем, что подпространства, натянутые на первые n векторов и на последние n векторов, ортогональны, из чего будет следовать линейная независимость всех $2n$ векторов. Достаточно показать, что

$$(C^i p, C^j q)_{zz} = 0 \quad \forall i, j \in \overline{0, n-1} \quad (19)$$

Докажем это равенство при $j = 0$. По индукции доказывается следующее утверждение: $\forall i \in \overline{0, n-1}$ у вектора $C^i p$ ненулевыми могут быть только компоненты под номерами $1, 2, \dots, i+1$ при четных i и под номерами $n+1, n+2, \dots, n+i+1$ при нечетных i . Из этого утверждения непосредственно следует, что $(C^i p, q)_{zz} = 0 \quad i \in \overline{0, n-1}$.

Можно также доказать аналогичное утверждение, если вместо C использовать матрицу

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

$\forall j \in \overline{0, n-1}$ у вектора $(C^{-1})^j p$ ненулевыми могут быть только компоненты под номерами $1, 2, \dots, j+1$ при четных j и под номерами $n+1, n+2, \dots, n+j+1$ при нечетных j . Получаем

$$(p, C^j q)_{zz} = (C^{-j} p, q)_{zz} = 0 \quad \forall j \in \overline{0, n-1}.$$

Первый переход следует из унитарности матрицы C :

$$(Cx, Cy)_{zz} = (x, y)_{zz} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Таким образом равенство (19) было доказано для случаев $i = 0$ и $j = 0$. Из этого следует равенство при всех i и j , поскольку (в этой формуле $m = \min(i, j)$)

$$(C^i p, C^j q)_{zz} = (C^{i-m} p, C^{j-m} q)_{zz} = 0 \quad \forall i, j \in \overline{0, n-1}$$

Таким образом матрица E_k имеет $2n$ линейно независимых столбцов и утверждение доказано.

Утверждение 5. *Выражение*

$$((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) - (e, e)$$

обращается в ноль при $k = n$ и отлично от нуля при $k > n$. Здесь $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{2k}$, скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ для $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. При $k = n$ матрица E_k становится квадратной невырожденной и утверждение проверяется тривиально.

Докажем, что выражение обращается в ноль, если и только если $e \perp \text{Ker } E_k$.² Как известно, $e = e_1 + e_2$, где $E_k e_1 = 0$, $e_2 = E_k^T e_3$

$$\begin{aligned} ((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) &= ((E_k E_k^T)^{-1} E_k (e_1 + e_2), E_k (e_1 + e_2)) = ((E_k E_k^T)^{-1} E_k e_2, E_k e_2) = \\ &= (e_3, E_k E_k^T e_3) = (E_k^T e_3, E_k^T e_3) = (e_2, e_2) \\ ((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) - (e, e) &= (e_2, e_2) - (e, e) = -(e_1, e_1) \end{aligned}$$

Задача свелась к доказательству того, что $e \not\perp \text{Ker } E_k$ при $k \geq n + 1$. Поскольку E_k содержит все столбцы E_{n+1} , достаточно доказать утверждение только для E_{n+1} . Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $x \in \text{Ker } E_{n+1}$, определяемый значениями $x_{n+1} = 1$, $x_{2n+2} = 0$. Остальные x_i определяются из уравнения $E_{n+1} x = 0$, которое является СЛАУ размерности $2n$ относительно оставшихся x_i с матрицей E_n , как мы знаем, невырожденной. Докажем, что $(x, e) \neq 0$. Случай $n = 1$ является тривиальным и дальнейшие выкладки будут относиться к $n \geq 2$.

Введем систему из векторов $y_0, y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{R}^{2n}$, где y_0 – нулевой, а последующие определяются рекуррентно: $y_{i+1} = C y_i + x_{n+1-i} p + x_{2n+2-i} q$, где $i \in \overline{1, n}$. Можно видеть, что условие $E_{n+1} x = 0$ полностью эквивалентно равенству $y_{n+1} = 0$.

Введем вектор $a \in \mathbb{R}^{2n}$

$$a_i = \begin{cases} (-1)^{i+1} & i \in \overline{1, n} \\ (-1)^{i+n} & i \in \overline{n+1, 2n} \end{cases}$$

Заметим, что $a^T C = a^T$ и рассмотрим следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} 0 = a^T y_{n+1} &= a^T (C y_n + x_{n+1} p + x_{2n+2} q) = a^T C y_n + x_{n+1} a^T p + x_{2n+2} a^T q = \\ &= a^T y_n + x_{n+1} - x_{2n+2} = a^T y_{n-1} + x_n - x_{2n+1} + x_{n+1} - x_{2n+2} = \\ &= \dots = a^T y_0 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} \quad (20) \end{aligned}$$

Введем обозначение $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Введем вектор $b \in \mathbb{R}^{2n}$, который определяется при нечетных k следующим образом

$$b_i = \begin{cases} (-1)^{i+1} & i \in \overline{1, k} \\ (-1)^{i+n} & i \in \overline{n+1, n+k+1} \end{cases}$$

и следующим образом при четных k

$$b_i = \begin{cases} (-1)^{i+1} & i \in \overline{1, k+1} \\ (-1)^{i+n} & i \in \overline{n+1, n+k} \end{cases}$$

²Здесь и далее ортогональность подразумевается относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$

В обоих случаях все остальные элементы b_i считаются нулевыми.

Заметим, что $b^T C = b^T + c^T$, где $c \in \mathbb{R}^{2n}$, при нечетных k определяемый как (снова считаем, что все неуказанные элементы нулевые)

$$c_{k+1} = -1, \quad c_{n+k+1} = 1$$

а при четных k :

$$c_{k+1} = 1, \quad c_{n+k+1} = -1.$$

Построим похожую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 0 &= b^T y_{n+1} = b^T (C y_n + x_{n+1} p + x_{2n+2} q) = b^T C y_n + x_{n+1} b^T p + x_{2n+2} b^T q = \\ &= b^T y_n + c^T y_n + x_{n+1} = b^T y_n + c^T y_n + x_{n+1} = \dots = \\ &= b^T y_0 + \sum_{i=0}^n c^T y_i + \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=0}^n c^T y_i + \sum_{i=1}^{n+1} x_i \end{aligned}$$

Несложно показать по индукции, что у y_i компоненты с индексами в диапазонах $\overline{i+1, n+1-i}$ и $\overline{n+i+1, 2n+1-i}$ нулевые. Также индукцией по i доказывается, что у y_{n+1-i} компоненты в диапазонах $\overline{i+1, n-i}$ и $\overline{n+i+1, 2n-i}$ нулевые. Из этого следует, что при $i \leq k$ и при $i \geq k+2$ справедливо $c^T y_i = 0$. Таким образом,

$$0 = \sum_{i=0}^n c^T y_i + \sum_{i=1}^{n+1} x_i = c^T y_{k+1} + \sum_{i=1}^{n+1} x_i \quad (21)$$

Поскольку (доказывается опять же по индукции) y_i при $i \in \overline{1, k+1}$ имеет ненулевую i -тую компоненту при нечетных i и ненулевую $n+i$ -тую компоненту при четных i (при этом i -тая нулевая при четных i , а $n+i$ -тая – при нечетных), то справедливо $c^T y_{k+1} \neq 0$. В силу (21), $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \neq 0$. Учитывая (20), получаем:

$$(x, e) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i + \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1+i} = 2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i \neq 0$$

что и требовалось.

Утверждение 6. Для того, чтобы функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$, определяемые при помощи системы их производных μ_i и ν_i , были решениями задачи граничного управления I , необходимо и достаточно выполнения условия связи (17) и условия согласования

$$\int_0^T (\mu'(\tau) + \nu'(\tau)) d\tau = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) \quad (22)$$

Доказательство. Необходимость очевидна, обоснуем достаточность. Из условия связи (17) следует, что

$$u_x(x, T) = \varphi'(x) \quad u_t(x, T) = \psi(x),$$

откуда получаем, что $u(x, T) = \varphi(x) + c$. Осталось показать, что $c = 0$. Легко проверяется, что

$$u(x_0, T) + u(x_n, T) = \mu(T) + \nu(T) = \int_0^T (\mu'(\tau) + \nu'(\tau)) d\tau = \varphi(x_0) + \varphi(x_n)$$

С другой стороны,

$$u(x_0, T) + u(x_n, T) = \varphi(x_0) + c + \varphi(x_n) + c$$

Заключаем, что $c = 0$. Утверждение доказано.

Условие (22) удобно записать в форме

$$\int_0^s (\bar{\mu}\bar{\nu}(\tau), e) d\tau = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) \quad (23)$$

где $\bar{\mu}\bar{\nu}(\tau), e \in \mathbb{R}^{2k}$

$$\bar{\mu}\bar{\nu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau), \nu_0(\tau), \nu_1(\tau), \dots, \nu_{k-1}(\tau)]^T,$$

а e — уже введенный нами вектор: $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{2k}$.

Решение задач оптимального управления

Следующая теорема дает вид оптимальных управлений для задачи II. Введем обозначение $\bar{\mu}(\tau) = [\mu_0(\tau), \mu_1(\tau), \dots, \mu_{k-1}(\tau)]^T$, энергию граничного управления запишем в виде

$$\int_0^s (\bar{\mu}(\tau), \bar{\mu}(\tau)) d\tau$$

Теорема 4. При $k \geq 2n$ среди функций μ_n , удовлетворяющих условию (18), оптимальными в смысле энергии граничного управления являются функции, задаваемые соотношением

$$\bar{\mu}(\tau) = F_k^T (F_k F_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau)$$

В силу утверждения 2, они определяют оптимальное решение задачи граничного управления II.

Доказательство. Функция Лагранжа для оптимизационной задачи имеет вид

$$F(\bar{\mu}(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot)) = \int_0^s [(\bar{\mu}(\tau), \bar{\mu}(\tau)) + (\bar{\lambda}(\tau), F_k \bar{\mu}(\tau) - \bar{\alpha}(\tau))] d\tau$$

Метод множителей Лагранжа дает:

$$\begin{aligned} 2\bar{\mu}(\tau) + F_k^T \bar{\lambda}(\tau) &= 0 \\ F_k \bar{\mu}(\tau) - \bar{\alpha}(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$F_k F_k^T \bar{\lambda}(\tau) = -2\bar{\alpha}(\tau)$$

Так как F_k имеет ранг $2n$, то матрица $F_k F_k^T$ — обратимая.

$$\bar{\lambda}(\tau) = -2(F_k F_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau)$$

$$\bar{\mu}(\tau) = -\frac{1}{2} F_k^T \bar{\lambda}(\tau) = F_k^T (F_k F_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau)$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 5. При $k > n$ среди функций μ_m и ν_m , удовлетворяющих равенствам (17) и условию согласования (23), оптимальные в смысле минимизации граничной энергии определяются соотношениями

$$\bar{\mu\nu}(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_1(E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}E_k e - e) + E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\bar{\alpha}(\tau)$$

где константа λ_1 определяется из уравнения

$$\frac{1}{2}\lambda_1 s [((E_k E_k^T)^{-1}E_k e, E_k e) - (e, e)] = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\bar{\alpha}(\tau), e) d\tau$$

Согласно утверждению 6, эти функции определяют оптимальное решение задачи I.

При $k = n$ решение задачи управления I единственно, существует тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\bar{\alpha}(\tau), e) d\tau = 0$$

и определяется формулой

$$\bar{\mu\nu}(\tau) = E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\bar{\alpha}(\tau)$$

Доказательство. Воспользуемся уже введенным вектором $\bar{\mu\nu}(\tau)$ для записи граничной энергии:

$$\int_0^s (\bar{\mu\nu}(\tau), \bar{\mu\nu}(\tau)) d\tau$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} F(\bar{\mu\nu}(\cdot), \bar{\lambda}(\cdot)) = & \int_0^s [(\bar{\mu\nu}(\tau), \bar{\mu\nu}(\tau)) + (\bar{\lambda}(\tau), E_k \bar{\mu\nu}(\tau) - \bar{\alpha}(\tau))] d\tau + \\ & + \lambda_1 \left[\int_0^s (\bar{\mu\nu}(\tau), e) d\tau - \varphi(x_0) - \varphi(x_n) \right] \end{aligned}$$

Из правила множителей Лагранжа следует:

$$\begin{aligned} 2\bar{\mu\nu}(\tau) + E_k^T \bar{\lambda}(\tau) + \lambda_1 e &= 0 \\ E_k \bar{\mu\nu}(\tau) - \bar{\alpha}(\tau) &= 0 \\ \int_0^s (\bar{\mu\nu}(\tau), e) d\tau - \varphi(x_0) - \varphi(x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

из чего получаем:

$$E_k (E_k^T \bar{\lambda}(\tau) + \lambda_1 e) = -2\bar{\alpha}(\tau)$$

В силу утверждения 4, матрица E_k имеет ранг $2n$, а значит $E_k E_k^T$ — обратима.

$$\bar{\lambda}(\tau) = (E_k E_k^T)^{-1}(-2\bar{\alpha}(\tau) - \lambda_1 E_k e)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu\nu}(\tau) = -\frac{1}{2}(E_k^T \bar{\lambda}(\tau) + \lambda_1 e) &= -\frac{1}{2}\lambda_1 e + E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}(\bar{\alpha}(\tau) + \frac{1}{2}\lambda_1 E_k e) = \\ &= \frac{1}{2}\lambda_1(E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}E_k e - e) + E_k^T(E_k E_k^T)^{-1}\bar{\alpha}(\tau) \end{aligned}$$

Оставшуюся неизвестную постоянную находим из условия (24):

$$\frac{1}{2}\lambda_1 \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} E_k e - e, e) d\tau + \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau), e) d\tau = \varphi(x_0) + \varphi(x_n)$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1 s [((E_k E_k^T)^{-1} E_k e, E_k e) - (e, e)] = \varphi(x_0) + \varphi(x_n) - \int_0^s (E_k^T (E_k E_k^T)^{-1} \bar{\alpha}(\tau), e) d\tau$$

Как мы знаем, выражение в квадратных скобках равно нулю при $k = n$ и отлично от нуля при $k > n$, из чего сразу вытекает утверждение теоремы.

Заключение

Таким образом были получены аналитические формулы, описывающие оптимальные управления смещением на одном или двух концах, переводящие стержень из состояния покоя в произвольное наперед заданное состояние за промежуток времени $T = ks$. Такие значения времени управления T были выбраны из соображений простоты, хотя техника, изложенная в статье, применима и для промежутков времени, не кратных s .

Список литературы

- [1] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // УМН, 60:6(366) (2005), 89–114.
- [2] В. А. Ильин, О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.
- [3] В. А. Ильин, О полном успокоении с помощью граничного управления на одном конце колебаний неоднородного стержня // Труды ИММ УрО РАН, 17, № 2, 2011, 88–96.
- [4] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Оптимизация граничных управлений смещением на двух концах струны за произвольный достаточно большой промежуток времени // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 417. № 2. С. 160–166.
- [5] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T управления упругими граничными силами на двух концах струны // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 417. № 4. С. 456–463.
- [6] В. А. Ильин, Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения, 2000. Т. 36, 11. с.1513–1528.
- [7] А. М. Рогожников, Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков. // Доклады Академии Наук, 2011, Т. 441, 4, с. 449–451.
- [8] А. М. Рогожников, Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами. // Доклады Академии Наук, 2012, Т. 444, с. 488–491