



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 539.3

СОЛОДОВНИКОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО КОМПОЗИТА С
КОРОТКИМИ ВОЛОКНАМИ**

Специальность 01.02.04 —

«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

д-р. физ.-мат. наук, проф.,

Победря Б.Е.

д-р. физ.-мат. наук, проф.,

Шешенин С.В.

Москва 2017 г.

Содержание

Введение	4
1 Эффективные упругие свойства композиционного материала с короткими армирующими волокнами	29
1.1 Эффективные характеристики среды с параллельными волокнами	29
1.2 Выражения для эффективных характеристик среды с равномерным распределением в пространстве и произвольной ориентацией армирующих волокон	33
1.3 Численное определение эффективных характеристик с помощью метода конечных элементов	35
1.4 Сравнение с экспериментом	36
2 Модель деформирования физически нелинейного композиционного материала с короткими армирующими волокнами	42
2.1 Определяющие соотношения при деформировании физически нелинейного материала матрицы	42
2.1.1 Условия упругой разгрузки, нейтрального нагружения и активного нагружения	45
2.1.2 Изменение поверхности в случае активного нагружения	46
2.1.3 Связь тензоров скоростей напряжений и полных деформаций	47
2.2 Дифференциальная постановка задачи	48
2.3 Вариационная постановка задачи	49
2.3.1 Дискретизация вариационного уравнения по пространству	50

2.3.2	Конечные элементы	52
2.3.3	Дискретизация вариационного уравнения по параметру нагружения	53
2.4	Глобальная и локальная задачи	53
2.5	Поверхности нагружения	55
2.5.1	Поверхность Менетри-Уильямса	57
2.5.2	Поверхность Ранкина-Друкера-Прагера	60
2.6	Аппроксимация одноосных диаграмм напряжение-деформация . .	62
2.7	Устойчивость решения глобальной и локальной задач	66
2.8	Моделирование армирующих волокон в случае идеальной связи . .	67
2.8.1	Встроенный стержневой элемент в случае идеальной связи .	70
2.9	Моделирование связи между материалом матрицы и армирующими волокнами	72
2.9.1	Встроенный стержневой элемент в случае неидеальной связи	73
2.10	Моделирование структуры композита с короткими армирующими волокнами	75
2.11	Моделирование процесса нагружения	77
3	Численное исследование деформирования бетона с короткими армирующими волокнами	79
3.1	Численное моделирование эксперимента на одноосное сжатие . . .	79
3.2	Численное моделирование изгиба балки	90
3.3	Численное моделирование изгиба плиты на упругом основании . .	100
	Заключение	108
	Литература	109

Введение

В последние годы вместе с ростом выпуска промышленной продукции неизменно растет потребность в создании новых эффективных и экономичных композиционных материалов во всех отраслях производства. Этому в значительной степени способствуют многочисленные научные исследования, появление новых материалов и развитие технологии производства.

Исключением не является и строительная отрасль. Одним из наиболее широко используемых материалов в строительстве является бетон. Активное развитие технологии бетона и большое многообразие видов дает толчок к появлению новых композиционных материалов именно на его основе.

Одним из таких современных и перспективных композиционных материалов, применяемых в строительстве, является бетон с короткими армирующими волокнами (фибробетон).

Использование произвольно распределенных в объеме бетонной матрицы фибр позволяет повысить сопротивление материала растягивающим усилиям, минимизировать ширину раскрытия трещин и сократить риск их расползания. При этом становится возможным сократить расход материала и повысить универсальность строительства бетонных конструкций.

Для уточнения норм проектирования конструкций из фибробетона и расширения его применения в сооружениях с высокими прочностными и эксплуатационными требованиями необходимо развитие и усовершенствование подходов к моделированию процесса деформирования композитов с короткими волокнами.

Механические свойства бетонной матрицы

Основным компонентом фибробетона, определяющим его процесс деформирования, является бетонная матрица.

Существует большое многообразие различных типов бетона. Основными видами классификации являются - по средней плотности, прочности, типу вяжу-

щего и назначению. По плотности бетоны подразделяют на особо тяжелые, тяжелые, легкие и особо легкие. Наиболее применяемым в строительстве является тяжелый бетон с плотным заполнителем из горных пород.

Бетон является искусственным каменным композиционным материалом и обладает неоднородной структурой строения, формирующейся в результате затвердевания смеси из мелкого или крупного заполнителя, вяжущего вещества, воды и специальных добавок.

Основными компонентами внутренней структуры бетона являются матрица в виде окаменевшего цементно-песчаного раствора, включения зерен крупного заполнителя и контактная зона между ними. Заполнители могут занимать в бетоне до 80% объема и оказывают значительное влияние на механические свойства бетона. В качестве крупного заполнителя используется гравий и щебень размером более 5 мм, в качестве мелкого заполнителя - естественный или искусственный песок. В качестве вяжущего вещества наиболее часто используются цементы, способные затвердевать после затворения их водой.

В процессе твердения бетонной смеси, материал приобретает различные врожденные дефекты, такие как нарушения сплошности в виде микропор различных размеров и трещин, образовавшихся в результате неравномерности усадочных деформаций компонент материала.

Особое влияние на механические свойства бетона оказывает контактная зона вблизи зерен заполнителя, обеспечивающая совместную работу заполнителя и цементной матрицы. Данная область содержит множество дефектов и повышает неоднородность материала. Прочность сцепления в этой зоне меньше прочности каждого из компонент бетона. Именно в этой зоне происходит наибольшая концентрация напряжений в процессе деформирования.

Результаты исследований показывают, что структура бетона обладает преимущественно изотропными свойствами.

Сложная внутренняя структура и различие физико-механических свойств компонент бетона определяет процесс его деформирования и разрушения при

различных видах нагружения. Сопротивление бетона растяжению намного слабее, чем сжатию, различие может составлять от 5 до 50 раз.

Для бетона характерно квазихрупкое постепенное разрушение. В процессе нагружения, задолго до разрушения, в бетоне образуются микротрещины разрыва, затем трещинообразованию подвергается все больший объем материала, происходит объединение микротрещин в сплошные разрывы. В последний момент процесс разрушения становится неустойчивым.

При растяжении процесс активного трещинообразования начинается, когда растягивающие напряжения достигают предела прочности на растяжение. Под пределом прочности подразумевается максимальное значение напряжения на диаграмме напряжение-деформация при соответствующем виде нагружения.

При сжатии поведение материала близко к линейно-упругому на первых стадиях нагружения. После преодоления предела упругости наблюдается возникновение неупругих деформаций, происходит заполнение порового пространства в цементном камне, система уплотняется, наблюдается повышение упругой части деформации. После преодоления предела прочности на сжатие наблюдается падение напряжений в материале при увеличивающихся деформациях.

Экспериментальные исследования показывают, что чем выше прочность бетона при сжатии, тем более хрупким становится материал при сжимающих нагрузках, см. рисунок 1 А. При двусосном сжатии прочность бетона увеличивается примерно на 15%. При трехосном сжатии возможно развитие больших неупругих деформаций, предел прочности возрастает в несколько раз или не достигается, см. рисунок 1 Б.

Механические свойства армирующих волокон

Для армирования используются различные типы металлических и неметаллических фибр. Наиболее популярными являются металлические, стеклянные и синтетические фибры.

Наличие в бетоне крупного заполнителя ограничивает концентрацию фибр, в большинстве случаев она не превышает 1.5 – 2.0%.

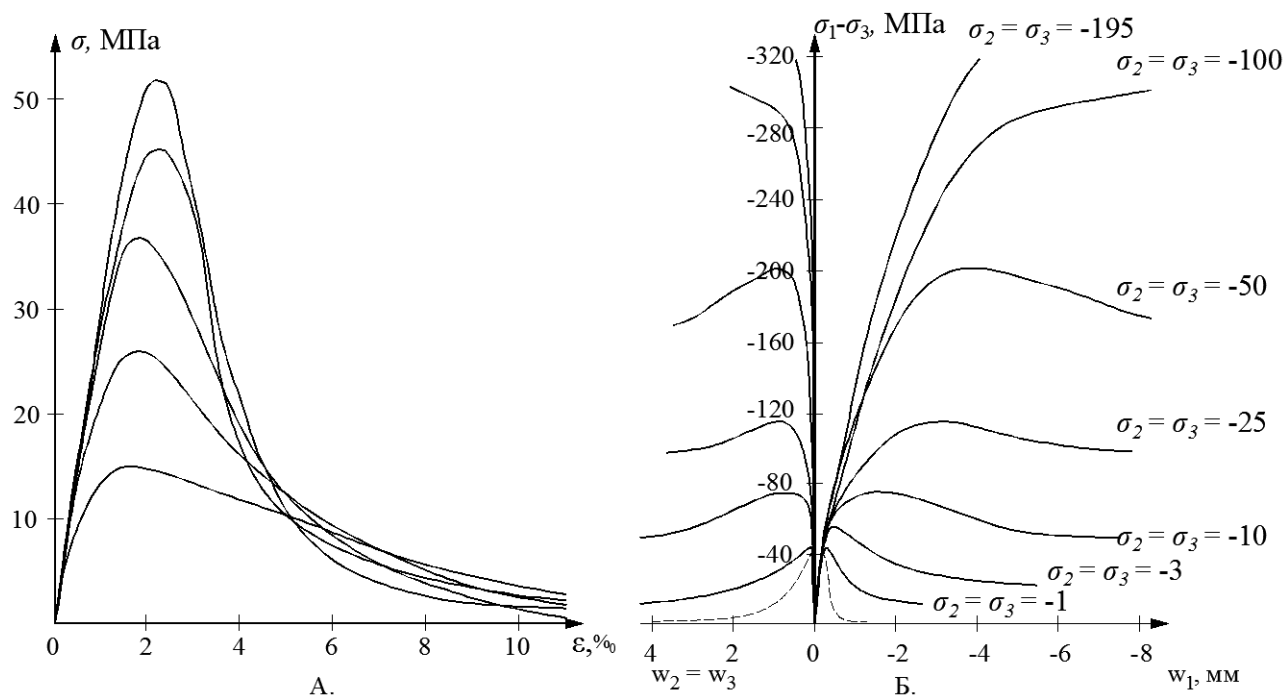


Рисунок 1: А. Диаграмма одноосного сжатия бетонов различных классов прочности [1]. Б. Диаграммы трехосного сжатия бетона [2].

Геометрические характеристики основных видов армирующих волокон представлены в таблице 1. Важным параметром, характеризующим связь фибр и бетонной матрицы, является отношение их длины к диаметру, наиболее приемлемым является отношение 100. Данный параметр также оказывает большое влияние и на однородность распределения волокон в бетонной смеси при изготовлении композита.

Механические свойства основных видов армирующих волокон представлены в таблице 2. Фибры можно классифицировать по их модулю упругости. Первые три вида фибр относятся к типу низкокомодульных, последующие к высококомодульных.

Фибры с низким модулем упругости наиболее часто применяют в случае, когда необходимо повысить ударную прочность материала и его износостойкость. Высокомодульные служат в основном для увеличения статической и динамической прочности материала.

Таблица 1: Плотность материала и геометрические характеристики армирующих волокон

Волокно	Плотность, кг/м ³	Диаметр, мм	Длина, мм
Полиэтиленовое	950	0.02-1.0	5-55
Нейлоновое	1100	0.025	2-30
Стеклянное	2600	0.01-0.1	20-40
Стальное	7800	0.2-1.6	30-160
Углеродное	2000	0.007-0.02	2-5

Таблица 2: Механические свойства армирующих волокон

Волокно	Модуль упругости, МПа*10 ³	Прочность на растяжение, МПа*10 ³	Темп. плавления, °С	Удлинение при разрыве, %
Полиэтиленовое	1.4-4.2	0.7	135	10
Нейлоновое	4.2	0.77-0.84	200-220	16-20
Стеклянное	70-80	1.05-3.85	840-1100	1.5-3.5
Стальное	200	0.8-3.15	1500	3-4
Углеродное	245	2	400-500	1

Стальные фибры имеют модуль упругости в среднем в 6 раз больший по сравнению с модулем упругости бетона. Для их изготовления преимущественно используется стальная низкоуглеродистая проволока.

Стекло в 3.5 раза легче стали и обладает достаточно высокими прочностными свойствами, модуль упругости стеклянных фибр превосходит модуль упругости бетона в среднем в 3 раза [3].

Синтетические фибры обладают высокой деформативностью. Их модуль упругости в среднем в 4 раза ниже модуля упругости бетона. Наиболее часто их применяют в качестве дополнительного армирования для предотвращения повреждений, сколов при транспортировке и монтаже и повышения термоустойчивости. Наличие в бетонной матрице равномерно распределенных волокон с низкой температурой плавления позволяет уменьшить или совсем исключить взрывное разрушение бетона при пожаре. При нагреве, в местах расположения фибр образуются поры и давление пара высвобождается через них, тем самым повышая сопротивление бетона взрывному разрушению. Также одним из преимуществ применения синтетических волокон является исключение влияния коррозии.

Большой интерес представляют углеродные фибры. Они обладают достаточно высоким модулем упругости и не подвержены коррозии при твердении цемента. Их использование ограничивается высокой стоимостью.

Пересекающие трещины короткие армирующие волокна обеспечивают передачу напряжений между поверхностями трещин и позволяют повысить несущую способность материала, особенно на стадиях закритического деформирования.

Эффективность работы фибр оценивается с помощью экспериментов на выдергивание одной фибры из бетонной матрицы. Результатом таких опытов является зависимость проскальзывания фибры от величины приложенного усилия, характеризующая связь между бетоном и армирующими волокнами.

Силы связи во многом зависят от реальной площади контакта между армирующими волокнами и матрицей. Результаты исследования показывают, что для

классического армирования. Защитным слоем бетона называется слой бетона от края конструкции до поверхности армирования.

История развития и применения фибробетона

Первые эксперименты и патенты с использованием коротких армирующих волокон, таких как куски проволоки или металлические стружки, для улучшения механических свойств бетона начались в начале 20-го века.

Первые комплексные исследования бетона, армированного стальными фибрами, были выполнены в США в начале 1960-х. Большие исследования стеклянных фибры проводились в СССР с 1950-х годов. Объемные фибры из полипропилена для армирования бетонов были впервые использованы в Англии.

К 1990 году уже насчитывается около 1.9 млн. кв. м. полов промышленных зданий в Европе, армированных стальными фибрами. В США к 1983 из фибробетона было выполнено покрытие рулежных дорожек в 22-х аэропортах.

В настоящее время фибробетон все более активно используется в различных областях строительства. Среди успешных областей его применения можно выделить: полы промышленных зданий, дорожные и аэродромные покрытия, днища резервуаров и плиты покрытий и перекрытий. Стеклянные фибры часто применяют в облицовочных архитектурных панелях.

Фибробетон также используется и для сооружений специального назначения, таких как гидротехнические сооружения, хранилища радиоактивных отходов и банковские и музейные хранилища ценностей.

Для применения фибробетона при строительстве хранилищ Центрального банка России были проведены исследования поведения бетонных конструкций с различными типами армирования при экстремальных нагрузках, такие как взрывы и взлом. Результаты исследований показали, что применение в качестве армирования равномерно распределенных коротких волокон увеличивает не только сопротивление материала статическим и динамическим нагрузкам, но и значительно повышает вязкость бетона и работу, которую необходимо затратить на разрушение конструкции при различных операциях взлома [4].

Математическое моделирование

В зависимости от того, какие свойства фибробетона представляют наибольший интерес для исследования, моделирование может быть выполнено на различных масштабных уровнях. В большинстве случаев выделяют три основных уровня: микро, мезо и макро [5].

На микроуровне (10^{-6} м) в структуре бетонной матрицы различимы цементные зерна и поровая структура. Возможно исследование механизмов связи армирующих волокон и бетонной матрицы. Данный уровень в работе рассматриваться не будет.

На мезоуровне (10^{-3} м) различимы частицы песка и заполнителя, поры большего размера. Возможно исследование взаимодействия между заполнителем и цементным камнем, процесса выдергивания фибр из матрицы при деформировании и определение структуры распределения армирующих волокон в бетонной матрице.

На макроуровне (10^{+1} м) внутренняя структура композита становится неразличимой, при моделировании материал представляется сплошной средой с однородными свойствами. На данном уровне проводятся лабораторные эксперименты для оценки таких основных механических свойств материала, как жесткость, прочность и пластичность.

Для связи механических свойств фибробетона на различных масштабных уровнях используется несколько подходов. Одним из них является многоуровневый подход, основанный на представлении материала в виде некоторого числа представительных элементов объема. Каждый элемент определяет минимальный объем материала, отражающий его механические характеристики на своем уровне. Построение представительного элемента на более низком масштабном уровне позволяет вычислить эффективные определяющие соотношения композита более высокого уровня вплоть до макроуровня.

Данный подход аналогичен теории осреднения. Согласно данной теории, композит на макроуровне представляется в виде набора представительных эле-

ментов, расположенных на низшем уровне. Исследуя свойства в представительном объеме и выполняя процедуру осреднения можно получить эффективные свойства материала на макроуровне. Хотя метод осреднения в основном известен в задачах с линейными определяющими соотношениями [6], но может быть применен и в нелинейном случае [7–9].

В данной работе используется следующий вариант двухуровневого подхода:

1. Бетонная матрица рассматривается как однородный материал на мезоуровне.
2. На мезоуровне рассматривается структура материала, состоящая из матрицы и волокон.
3. Представительный объем совмещен с конечным элементом. Осреднение осуществляется неявно на этапе формирования матрицы жесткости.

Важным процессом, определяющим поведение бетонной матрицы композита при действии нагрузки, является трещинообразование. Для его численного моделирования с помощью метода конечных элементов используется два подхода: явный и неявный.

Использование явного подхода предполагает расщепления узлов конечно-элементной сетки в момент, когда усилия в узле нарушают критерий прочности [10]. Данный вид анализа подходит для исследования отдельных трещин. Недостатками данного подхода являются постоянно меняющаяся топология элементов и граничные условия.

Второй подход предполагает моделирование материала с трещинами как непрерывную сплошную среду на всех стадиях деформирования [11–13]. Деформации и перемещения в этом случае являются непрерывными функциями координат. Процесс трещинообразования начинается в соответствующей точке интегрирования при превышении критерия прочности. Повреждаемость материала моделируется за счет изменения его механических свойств в процессе разрушения. Данный метод не позволяет отслеживать положение отдельных трещин.

В данной части представлены наиболее используемые модели, применяемые для описания процесса деформирования бетона и фибробетона. В первую очередь рассмотрены подходы к моделированию бетона.

Моделирование бетона

Для моделирования деформирования бетона ключевым моментом является учет развития имеющихся микродефектов. В большинстве случаев для этого используются модели:

1. на основе теории пластичности;
2. на основе теории повреждаемости;
3. микроплоскости;
4. размазанного трещинообразования;
5. механики разрушения.

Также возможно применение комбинации теории пластичности и повреждаемости и дискретных моделей.

Модели на основе теории пластичности

Один из возможных подходов к моделированию бетона заключается в использовании континуальной теории, схожей с теорией пластического течения. Ключевыми понятиями для данной теории являются поверхность нагружения, закон развития неупругих деформаций и эволюция поверхности нагружения в процессе деформирования.

Поверхность нагружения определяет область упругого деформирования материала. Предполагается, что поверхность нагружения является инвариантной функцией напряженного состояния. После превышения напряжениями предельных значений, начинается процесс трещинообразования и в материале возникают неупругие деформации.

Существует два вида законов, определяющих развитие неупругих деформаций: ассоциированный и неассоциированный [1, 14]. В первом случае развитие неупругих деформаций всегда направлено перпендикулярно поверхности нагру-

жения. Во втором случае развитие неупругих деформаций направлено перпендикулярно к поверхности, отличной от поверхности нагружения.

Описание эволюции поверхности нагружения в процессе деформирования происходит с использованием внутреннего параметра, возрастающего при увеличении неупругих деформаций. Наиболее распространены случаи изотропной, кинематической или смешанной эволюции поверхности разрушения. В изотропном случае поверхность может расширяться и сжиматься без смещения. Кинематический случай подразумевает смещение поверхности в процессе деформирования как жесткого целого.

Классификация поверхностей нагружения для бетона может быть основана на числе констант, необходимых для задания уравнения поверхности. Для бетона в основном используются модели с числом параметров от 1 до 5. К моделям с двумя параметрами относятся классические критерии Кулона-Мора и Друкера-Прагера [1], с тремя параметрами - критерии Bresler-Pister [1], Chen and Chen [15], Lade [16], с четырьмя параметрами - Ottosen [17], Hsieh-Ting-Chen [18], с пятью параметрами - Willam and Warnke [1], Hammoud [19].

Большое количество исследований в области моделирования бетона было произведено и отечественными авторами. В работах [20–23] отмечена неприменимость к бетону таких классических теорий прочности и соответствующих им поверхностей нагружения, как критерий наибольшего нормального напряжения, наибольшей упругой деформации, наибольшего касательного напряжения и энергетические теории полной удельной потенциальной энергии деформаций Бельтрами-Хейга и изменения формы Губера-Миза-Генки.

В работе [20] также отмечено, что поверхности нагружения, построенные на основе теории Мора, не применимы к бетону, так как согласно проведенным исследованиям при разрушении бетона большое влияние оказывают отрывные механизмы разрушения. Сделан вывод о необходимости учета среднего главного напряжения в уравнении поверхности.

В работе [24] представлена модифицированная поверхность нагружения, построенная на основе теории Мора. В области растягивающих напряжений используется критерий максимальных растягивающих напряжений. Графически данная поверхность может быть представлена в виде усеченной шестигранной пирамиды в системе координат главных напряжений.

Большое распространение получили двухинвариантные поверхности нагружения, построенные на основе энергетических подходов. Уравнения данных поверхностей содержат первый инвариант тензора напряжений и второй инвариант девиатора напряжений и позволяют учесть влияние среднего напряжения [25–28].

В работе Шлейхера [29] уравнение поверхности нагружения основано на величине полной потенциальной энергии, предельное значение которой зависит от величины среднего давления. Поверхность имеет вид эллипсоида вращения со смещенным в сторону сжимающих напряжений центром.

Аналогичный критерий возникновения неупругих деформаций представлен в работе Бужинского [30]. Уравнение поверхности нагружения определяет эллипсоид вращения, вырождающийся в пределе в цилиндр или шар.

Баландин в работе [31] предложил критерий развития повреждаемости, являющийся обобщением теории Мизеса-Генки на хрупкие материалы. Уравнение поверхности нагружения представляет собой линейную комбинацию среднего напряжения и выражает предельное значение энергии формоизменения. В системе координат главных напряжений поверхность определяет параболоид вращения.

В работах [26,32,33] отмечено, что уравнения поверхностей нагружения, содержащие третий инвариант девиатора напряжений, более точно удовлетворяют экспериментальным данным.

Обобщая современные подходы к построению поверхностей нагружения для бетона, можно заметить, что все они сводятся к нахождению тех или иных зависимостей между тремя указанными выше инвариантами [34].

Большое развитие получили теории деформирования бетона, основанные на модификации теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [35]. Применительно к бетону данная теория была усовершенствована Гениевым и его учениками [27,35]. Была предложена нелинейная зависимость между средними напряжениями и деформациями и учтен дилатационный эффект посредством введения в определяющие соотношения модуля дилатации и интенсивности касательных напряжений. Данная теория позволила качественно описать характерные процессы деформирования материала под действием различных напряженных состояний и получила дальнейшее развитие в исследованиях [36–38].

Применение модели для анализа бетонных конструкций, построенной на основе теории течения, рассматривается в работе [34].

Модели на основе теории повреждаемости

Отличная от пластичности континуальная теория, способная отразить процесс разрушения бетона, является механика повреждений. Данная теория предназначена для описания прогрессирующей потери сплошности материала, вызванной развитием врожденных дефектов и возникновением новых трещин в материале под действием нагрузки. Все это приводит к постепенному уменьшению жесткости материала. Данная теория была впервые представлена Качановым в 1958 году для исследования процесса разрушения материалов при ползучести [39] и затем развита Работновым [40] и другими авторами [41].

Наиболее простой версией данной теории является линейно изотропная теория повреждения. В отличие от теории пластичности, декомпозиция полных деформаций на упругие и неупругие не предполагается. Поврежденность в каждой точке материала описывается с помощью одного скалярного множителя, равного нулю в начальном состоянии. При выполнении определенного критерия, определяющего возникновение повреждения, значение множителя увеличивается и упругие свойства материала падают. Одной из наиболее популярных моделей для бетона такого типа является модель повреждения Мазара [42].

Другие подходы учитывают анизотропию при накоплении материалом повреждений. В таком случае повреждение может быть представлено в виде набора векторов [43], тензором второго порядка [44] или тензором четвертого порядка. Применение данной теории для бетона предложено в работах [45, 46].

Модели на основе комбинации теории пластичности и теории повреждаемости

Экспериментальные исследования показывают, что в процессе разрушения бетона возникают неупругие деформации и наблюдается деградация упругих свойств материала. Для того, чтобы одновременно учесть оба данных фактора используется комбинация теорий пластичности и теории повреждаемости. В большинстве случаев используется теория пластичности с изотропным упрочнением и изотропной или анизотропной повреждаемостью.

На практике используется два варианта построения такой теории: первый вариант основывается на использовании теории пластичности в пространстве эффективных напряжений [47–49], второй - в пространстве номинальных напряжений [50, 51].

Модель микроплоскости

Отличный от теорий пластичности и повреждаемости подход к определению соотношений между тензорами напряжений и деформаций для моделирования неупругого поведения бетона предоставляет континуальная модель микроплоскости, впервые представленная Базантом в 1984 году [52].

Данная теория основана на идеях Тейлора, занимавшегося теорией пластичности поликристаллических металлов, и теории скольжения Бэтфорда и Будянского. Определяющие соотношения материала задаются соотношениями между векторами деформаций и напряжений, действующими на плоскостях с произвольной ориентацией. Данные плоскости называются плоскостями скольжения или микроплоскостями.

Тензоры деформаций и напряжений на макроуровне определяются путем суммирования соответствующих векторов на всех микроплоскостях с учетом предположения о статической или кинематической связи.

Статическая связь подразумевает, что вектор напряжения на каждой наклонной микроплоскости в материале равен проекции тензора напряжений на макроуровне.

Для описания деформирования бетона на стадии разупрочнения в работе [52] была использована модель микроплоскости на основе кинематической связи. В данном случае предполагалось, что вектор деформаций на каждой микроплоскости является проекцией тензора деформаций на макроуровне. При этом напряжения вычислялись исходя из величины осредненной работы напряжений на микроплоскостях, когда микроплоскости принимали всевозможные ориентации в пространстве.

Неупругое поведение материала на микроплоскостях характеризуется специальными пределами прочности, зависящими от деформаций. Внутри данных границ поведение материала упругое.

Основным недостатком данных моделей является то, что определяющие соотношения не могут быть записаны в явном виде и для их задания необходимо большое количество констант. Данному подходу посвящено большое количество работ, например [52–55].

Модели размазанного трещинообразования

В случаях, когда деформирование бетонной матрицы определяется хрупким поведением возможно использование модели размазанных трещин. При сжимающих нагрузках поведение материала предполагается линейно-упругим.

По аналогии с моделью на основе теории пластичности предполагается декомпозиция тензора полных деформаций на упругую и неупругую части. Процесс трещинообразования в точке тела начинается в момент достижения максимальных главных растягивающих напряжений предела прочности материала на

растяжение. Соотношения между тензором напряжений и неупругих деформаций устанавливается в локальной системе координат, связанной с трещиной [56].

Наиболее популярными являются следующие виды моделей размазанных трещин: модель стационарной трещины и модель поворачивающейся трещины [56,57]. В первом случае вектор ориентации трещины фиксирован с момента ее образования во время всего процесса нагружения, во втором случае вектор ориентации трещины поворачивается вместе с осями главных напряжений.

Модели на основе механики разрушения

Описанные выше модели больше подходят в случаях, когда деформирование материала сопровождается образованием обширных областей, содержащих микротрещины. Для анализа отдельных трещин наиболее часто используются модели на основе механики разрушения. Основными разделами механики разрушения являются линейно-упругая механика разрушения и нелинейная механика разрушения.

В линейной механике разрушения условия начала распространения трещины могут быть выведены с помощью энергетического или силового подхода. Согласно энергетическому подходу [58], для того, чтобы имеющийся разрез в идеально упругом теле начал распространяться должно выполняться равенство работы разрушения, необходимой для образования новой поверхности разрыва площадью dS , и произведения интенсивности освобождающийся упругой энергии на площадь данного разрыва dS . Согласно силовому критерию [59], разрушение наступает, когда коэффициент интенсивности напряжений K достигает критической величины K_c . Всего различают три вида разрушения: трещины отрыва K_I , трещина поперечного сдвига K_{II} и трещина продольного или антиплоского сдвига K_{III} .

Впервые линейная механика разрушения была применена для анализа разрушения бетонных конструкций Капланом в 1961 году [60]. Рассматривались случаи нагружения балки с надрезом в середине и в третях пролета. Результаты показали, что величина освобождающейся упругой энергии бетона при разруше-

нии зависит от состава бетонной смеси, типа нагружения и размера начального надреза и образца для эксперимента. Сделан вывод, что теория Гриффита может быть применена к бетону только после подходящей модификации.

Многочисленные исследования также подтверждают, что данная теория недостаточно точно описывает поведение квазихрупких материалов [61–65]. Было показано, что величина коэффициента интенсивности напряжения сильно зависит от геометрии и размеров образца, методики измерения результатов и величины надреза. Конец трещины окружен достаточно большой зоной, в которой происходят процессы образования микротрещин. Сделан вывод, что одного параметра недостаточно для полного описания процесса разрушения бетона.

Подходы линейной механики разрушения справедливы для материалов, при разрушении которых неупругие деформации появляются только в небольшой зоне у конца трещины. Если эта зона достаточно велика по сравнению с длиной трещины, то необходимо использовать подходы нелинейной механики разрушения. Первый критерий разрушения основан на величине раскрытия конца трещины [66]. Предполагается, что трещина находится в устойчивом состоянии до тех пор, пока величина раскрытия конца трещины не превысит критического значения.

Второй критерий основан на использовании Γ -интеграла [67, 68] или J -интеграла [69]. Данные величины являются независимыми от контура интегрирования интегралами. Согласно подходу Черепанова, поступающая через контур области, окружающей вершину трещины, механическая работа внешних сил и тепловая энергия затрачиваются на увеличение кинетической и внутренней энергии и на разрушение материала в вершине трещины. J -интеграл Райса получается из Γ -интеграла Черепанова, если пренебречь в нем кинетической энергией.

Одним из популярных дискретных методов моделирования развития трещин в бетоне является метод фиктивной трещины [70–73]. Каждая точка тела может находиться в трех состояниях - упругом, зоне разрушения, в которой происходит процесс образования микротрещин и наблюдается падение напряжений

при увеличении ширины раскрытия трещины и зоне разрушения, свободной от напряжений. Данный подход дает хорошую оценку моделирования разрушения бетона, однако разделение узлов сетки требует больших вычислительных затрат.

Другой подход представляет континуальная модель области трещины, основанная на неявном подходе к моделированию трещинообразования [74]. Согласно данной модели зона образования трещин моделируется как система параллельных трещин, которые непрерывно распределены по конечному элементу. Бетон с трещинами моделируется за счет корректировки матрицы упругих модулей от изотропной к ортотропной с меньшей жесткостью в направлении, нормальном к поверхности трещины.

Большое количество моделей для анализа бетонных конструкций построено на основе модификаций линейно-упругой теории разрушения: модель разрушения с двумя параметрами [75, 76], модель эффективной трещины [77], модель разрушения с двумя коэффициентами интенсивности напряжений [78] и модель разрушения с двумя значениями энергии разрушения [79].

Проблемы, связанные с образованием и развитием отдельных макротрещин в данной работе не исследуются.

Дискретные модели

Для моделирования бетона как трехфазного материала, состоящего из цементной матрицы, заполнителя и межфазной зоны возможно использование следующих дискретных моделей: классический метод дискретных элементов [80–82], модель межфазных элементов с определяющими соотношениями на основе нелинейной механики разрушения [83, 84] и решеточные методы [85–90].

С точки зрения вычислительного процесса, наиболее простыми подходами к моделированию трещинообразования в бетоне являются решеточные модели. Данные подходы предполагают проецирование неоднородной структуры материала на решетку, каждый элемент которой обладает свойствами соответствующей области материала. Решетка конструируется из одномерных стержневых

элементов. Распределение узлов в пространстве задается с помощью определенного алгоритма, моделирующего неоднородную структура бетона.

Моделирование бетона с короткими армирующими волокнами

В данной части рассматриваются подходы к моделирование бетона с короткими армирующими волокнами.

Моделирование бетона с короткими армирующими волокнами как однородного материала

Большое количество работ посвящено построению феноменологических моделей на основе экспериментальных данных для аппроксимации определяющих соотношений и прочностных свойств фибробетона при различных нагрузках. Данные модели учитывают основные характеристики бетонной матрицы, объемное содержание волокон и их геометрические параметры. Такой подход к моделированию фибробетона отражен в работах [91–93].

Среди численных подходов к анализу бетона с короткими армирующими волокнами, стоит выделить модели, предполагающие использование определяющих соотношений для бетона с модифицированными поверхностями нагружения и законами их эволюции, учитывающими влияние армирования. К такому типу подходов с неявным осреднением армирования относятся представленные ниже работы.

В работе [94] представлен анализ механического поведения фибробетона для различных трехмерных путей нагружения на основе теории пластического течения и поверхности нагружения для бетона из работы [18], определяемой 4-мя параметрами. Данная поверхность была модифицирована для учета влияния армирующих волокон за счет введения дополнительных констант, определяемых на основании экспериментальных данных.

В работе [95] представлено численное моделирование высокопрочного фибробетона. Была использована континуальная модель размазанных трещин в момент упрочнения и дискретная модель трещин на основе механики разрушения и расширенного метода конечных элементов в момент разрушения. Влияние ар-

мирующих волокон учитывалось за счет модифицирования законов упрочнения и разрушения.

Так же стоит отметить работы [96–98].

Моделирование бетона с короткими армирующими волокнами на различных масштабных уровнях

Для моделирования бетона с короткими армирующими волокнами на различных масштабных уровнях применяются как аналитические, так и численные подходы.

В работе [99] моделирование механического поведения фибробетона выполнено с помощью метода осреднения в плоском случае. Произвольное распределение волокон преобразовывалось в периодическое распределение. Граничные условия для единичной ячейки определялись исходя из предположения о периодичности. Вычисление осредненной матрицы жесткости для упругой и пластической областей выполнялось с помощью метода конечных элементов. Между бетоном и волокнами предполагалась идеальная связь.

В работе [100] для оценки эффективных упругих свойств фибробетона использовалась схема Мори-Танака. Волокна моделировались как плоские вытянутые сфероиды. Между волокнами и матрицей предполагалась идеальная связь.

В работе [101] представлен аналитический подход к анализу фибробетона на стадии разрушения на основе теории осреднения. Предложенная модель учитывает механические характеристики связи между армирующими волокнами и бетоном, распределение и ориентацию волокон и их геометрические параметры. Определяющие соотношения композита вычислялись путем интегрирования связующих усилий от всех активных волокон в зоне трещинообразования.

Ниже представлены работы, основанные на прямом моделировании основных компонент структуры бетона с короткими армирующими волокнами.

В работе [102] выполнен анализ фибробетона на различных масштабных уровнях в трехмерном случае. Моделирование процесса трещинообразования выполнялось с помощью модели фиктивной трещины на основе механики раз-

рушения и расширенного метода конечных элементов. Стальные фибры были произвольно распределены в объеме матрицы и моделировались стержневыми конечными элементами, встроенными в трехмерные элементы бетонной матрицы. Матрица композита рассматривалась как однородный материал. Учет неидеальной связи был выполнен за счет включения в нелинейные определяющие соотношения для армирующих волокон стадии с падающей диаграммой. Влияние ориентации волокон на определяющие соотношения не учитывалось. На основе численного эксперимента в результате осреднения поля напряжений и деформаций были получены эффективные определяющие соотношения и закон повреждаемости композита.

В работе [103] между армирующими волокнами и бетонной матрицей предполагается идеальная связь. Однако, неидеальная связь учтена неявным образом за счет преобразования для каждого из волокон диаграммы напряжения-проскальзывания в диаграмму напряжение-деформация. Таким образом появляется возможность учесть ориентацию волокон. Для моделирования бетонной матрицы использовалась модель стационарных неортогональных размазанных трещин.

В работе [104] был использован аналогичный [103] подход. Разница заключается в использовании для моделирования бетонной матрицы модели размазанных поворачивающихся трещин.

В работе [105] предложен отличный подход к моделированию армирующих волокон в плоском случае. Волокна моделировались за счет приложения точечных усилий в узлах конечно-элементной сетки бетонной матрицы. Данные усилия представляют взаимодействие между волокнами и матрицей. Для моделирования бетонной матрицы использовалась теория повреждаемости.

Цели работы:

1. Разработка модели композиционного материала, учитывающей неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон. Численная реализация модели.

2. Исследование влияния различных механических свойств матрицы, армирующих волокон и их связи на деформирование композиционного материала.
3. Решение практических задач с целью верификации разработанного набора программ.

Научная новизна:

1. На основе анализа существующих моделей и экспериментальных данных обоснована механическая модель материала, учитывающая неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон.
2. Разработана численная реализация предложенной модели и создан набор программ для анализа элементов конструкций. Результаты моделирования дают совпадение с экспериментальными измерениями.
3. Показано, что аналитические и численные подходы дают совпадение не хуже 3% для упругих эффективных характеристик композиционного материала для малых концентраций армирующих волокон.
4. Исследовано влияние выбора поверхности нагружения неупругой матрицы на деформирование композиционного материала. Отмечена сильная зависимость результатов от формы поверхности.
5. Показано, что наличие коротких армирующих волокон и учет нелинейности связи между материалом матрицы и армирующими волокнами оказывает значительное влияние на деформирование композиционного материала.

Научная и практическая значимость.

Результаты имеют теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы для решения ряда практических задач, связанных с моделированием деформирования физически нелинейных композиционных материалов с короткими армирующими волокнами. В строительной отрасли данные результаты могут быть применены к исследованию упругих и прочностных свойств элементов конструкций из фибробетона.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из содержания, введения, трех глав, заключения и списка литературы.

В настоящей диссертационной работе рассматриваются аналитический и численный подходы к определению эффективных упругих характеристик композиционного материала с короткими армирующими волокнами. Аналитический подход основывается на ряде предположений относительно геометрической структуры представительного элемента объема композита и решении Эшелби. Выражения получены для двух случаев, когда волокна предполагались бесконечно длинными и имеющими конечный размер. Численный подход основывается на моделировании структуры композита с помощью метода конечных элементов. Проведено сравнение изложенных подходов с экспериментальными данными.

Представлена механическая модель для описания процесса физически-нелинейного деформирования композиционного материала с короткими армирующими волокнами под действием статических нагрузок. Модель учитывает неупругие свойства материала матрицы, наличие армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон. Исследовано влияние волокон, нелинейных соотношений связи между материалом матрицы и волокнами и вида критерия возникновения необратимых деформаций в матрице на деформирование композиционного материала.

В работе представлена численная реализация предложенной модели и создан набор компьютерных программ для анализа элементов инженерных конструкций. С его помощью было выполнено численное моделирование основных типов экспериментов для исследования механических свойств фибробетона.

Глава 1 состоит из 4-х параграфов и посвящена вычислению упругих свойств композиционного материала с короткими армирующими волокнами. В главе 1 представлен способ определения эффективных упругих модулей среды с равномерным распределением в пространстве и произвольной ориентацией волокон,

основанный на процедуре пространственного осреднения эффективных характеристик среды с параллельными волокнами; рассмотрены модели композита для получения эффективных характеристик среды с параллельными волокнами; выполнено численное определение эффективных характеристик среды с равномерным распределением волокон; проведен сравнительный анализ аналитического и численного подходов на основе экспериментальных данных.

Глава 2 состоит из 11-и параграфов и посвящена модели физически нелинейного деформирования композиционного материала с короткими армирующими волокнами и ее численной реализации; выведено вариационное уравнение и дана вариационная постановка; проведена процедура дискретизации вариационного уравнения и получена система алгебраических уравнений; представлено решение задачи об интегрировании определяющих соотношений; рассмотрены вопросы устойчивости решения; рассмотрены различные виды критериев возникновения неупругих деформаций в материале матрицы композита; представлена методика учета произвольно распределенных армирующих волокон и их связи с материалом матрицы; описан алгоритм построения структуры композиционного материала с короткими армирующими волокнами для численного анализа.

Глава 3 состоит из 3-х параграфов и посвящена численному исследованию деформирования бетона с короткими армирующими волокнами; в главе выполнено численное моделирование экспериментов на одноосное сжатие, изгиб призматических балок и изгиб плит на упругом основании; исследовано влияние концентрации армирующих волокон, типа связи между волокнами и материалом матрицы и поверхностей нагружения материала матрицы на процесс деформирования фибробетона.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Глава 1. Эффективные упругие свойства композиционного материала с короткими армирующими волокнами

Данная глава посвящена вычислению упругих эффективных модулей. Для этого был выполнен сравнительный анализ двух различных подходов – аналитического [6, 106, 107] и численного на основе метода конечных элементов [108, 109].

В обоих подходах предполагалось, что материал матрицы и армирующие волокна являются упругими. Волокна равномерно распределены и имеют произвольную пространственную ориентацию в объеме матрицы. Число волокон в матрице задавалось через их объемное содержание, определяемое как отношение объема, занимаемого волокнами, к объему матрицы. На поверхности между волокнами и матрицей рассматривался случай идеального контакта без возможности проскальзывания волокон.

Эффективные упругие модули вычислялись из закона Гука, связывающего средние напряжения $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и деформации $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{kl} \rangle$$
$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x_i) dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x_i) dV$$

где V - представительный элемент неоднородной среды ($V = V_{RVE}$, RVE - representative volume element).

1.1 Эффективные характеристики среды с параллельными волокнами

Эффективные упругие модули среды с равномерным распределением в пространстве и произвольной ориентацией армирующих волокон можно определить с помощью пространственного осреднения эффективных характеристик среды, содержащей параллельные волокна [106].

Рассматриваются два вида конечных выражений для эффективных характеристик среды с параллельными волокнами. Первый получен с помощью комби-

нации полидисперсной и трехфазной моделей композита [106, 107] и предполагает достаточно большую длину волокон. Второй – с помощью решения Эшелби для задачи об эллипсоидальном включении в бесконечной упругой среде учитывает реальную длину волокон [110, 111].

Согласно полидисперсной модели композит представляется в виде совокупности составных цилиндров [107], см. рисунок 1.1. Каждый составной цилиндр состоит из внутреннего цилиндра радиуса a , представляющего волокно, и окружающего его кольца внутреннего радиуса a и внешнего радиуса b , представляющего материал матрицы. Величины a и b для составных цилиндров принимают различные значения, но их отношение является константой. Эффективная однородная среда является трансверсально изотропной.

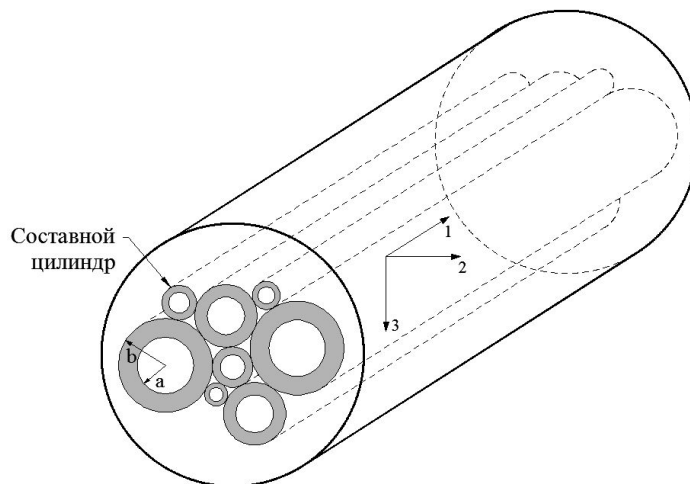


Рисунок 1.1: Представительный элемент объема в случае полидисперсной модели композита.

Представленная модель композита позволяет определить четыре из пяти упругих характеристик эффективной среды – модуль Юнга E_{11} и коэффициент Пуассона ν_{12} при одноосном нагружении, модуль упругости K_{23} при плоском деформированном состоянии и модули сдвига μ_{12} [106, 107]. Для получения характеристик необходимо рассмотреть соответствующее деформированное состояние составного цилиндра и использовать уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для двух фаз и граничные условия между ними и на поверхности цилиндра.

Для определения модуля сдвига в плоскости изотропии трансверсально изотропной среды μ_{23} необходимо воспользоваться трехфазной моделью композита [106, 107], см. рисунок 1.2. Она получается из полидисперсной модели, если в ней заменить все составные цилиндры, кроме одного, эквивалентной однородной средой. Внешний цилиндр имеет бесконечно большой радиус.

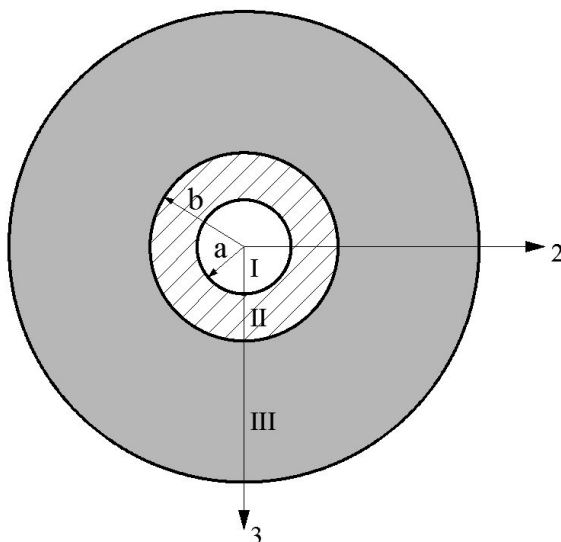


Рисунок 1.2: Представительный элемент объема в случае трехфазной модели композита. I – волокно, II – матрица, III – эквивалентная однородная среда.

Приложим к среде на большом расстоянии от волокна и матрицы сдвиговые деформации так, чтобы эквивалентная однородная среда находилась в состоянии чистого сдвига. С помощью уравнений равновесия и граничных условий определяются перемещения в каждой из фаз представительного элемента. Условие равенства энергий деформирования неоднородной среды и эквивалентной однородной среды и использование формулы Эшелби для выражения количества энергии, запасаемой в неоднородной среде, позволяет получить окончательное выражения для модуля сдвига μ_{23} .

Модели, рассмотренные выше, для определения пяти независимых констант трансверсально изотропной среды предполагают, что волокна имеют достаточно большую длину. Для того чтобы определить эффективные характеристики композита с учетом реальной длины волокон, необходимо рассмотреть решение Эшелби для задачи об эллипсоидальном включении в бесконечной упругой сре-

де под действием однородной нагрузки на большом расстоянии от него [110,111]. Окончательные выражения для эффективных характеристик в случае малой объемной доли включений, когда между волокнами нет взаимодействия, имеют вид

$$\begin{aligned}
E_{11} &= E_M \left(1 + c \left(\frac{\frac{\Delta\mu}{2(1-\nu_M)}(3\Delta\lambda + 2\Delta\mu) + \frac{E_M(1-2\nu_M)}{2(1+\nu_M)}\Delta\lambda + A_1}{A_2 + \frac{E_M}{2(1-\nu_M)}(\Delta\lambda + \Delta\mu) + \mu_M(3\lambda_M + 2\mu_M)} \right) \right) \\
\nu_{12} &= \nu + \frac{1}{2}c(1+\nu_M)(1-2\nu_M) \left(\frac{A_3 + \frac{E_M E_F(\nu_F - \nu_M)}{(1+\nu_M)(1+\nu_F)(1-2\nu_M)(1-2\nu_F)}}{A_2 + \frac{E_M}{2(1-\nu_M)}(\Delta\lambda + \Delta\mu) + \mu_M(3\lambda_M + 2\mu_M)} \right) \\
K_{23} &= \frac{E_M}{2(1+\nu_M)(1-2\nu_M)} + c \left(\frac{A_4 + \frac{E_M^2}{2(1+\nu_M)(1-2\nu_M)}(\Delta\lambda + \Delta\mu)}{A_2 + \frac{E_M}{2(1-\nu_M)}(\Delta\lambda + \Delta\mu) + \mu_M(3\lambda_M + 2\mu_M)} \right) \\
\mu_{12} &= \mu_M \left(\frac{\mu_F(1+c) + \mu_M(1-c)}{\mu_F(1-c) + \mu_M(1+c)} \right) \\
\mu_{23} &= \mu_M \left(1 + \frac{c}{\frac{\mu_M}{\mu_F - \mu_M} + \frac{K_M + \frac{7}{3}\mu_M}{2K_M + \frac{8}{3}\mu_M}} \right) \\
A_1 &= \frac{E_M(1+2\nu_M^2)}{(1+\nu_M)(1-2\nu_M)}\Delta\mu \\
A_2 &= \Delta\mu(3\Delta\lambda + 2\Delta\mu) \left(\frac{1+\nu_M}{1-\nu_M} \right) \kappa^2 \left(\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{5-4\nu_M}{4(1-\nu_M)} \right) \\
A_3 &= \Delta\mu(3\Delta\lambda + 2\Delta\mu) \left(\frac{1-2\nu_M}{1-\nu_M} \right) \kappa^2 \left(\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{3-4\nu_M}{2(1-2\nu_M)} \right) \\
A_4 &= \Delta\mu(3\Delta\lambda + 2\Delta\mu) \left(\frac{E_M}{1-2\nu_M} \right) \kappa^2 \left(\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{5-4\nu_M}{4(1-2\nu_M)} \right)
\end{aligned}$$

где $\Delta\lambda = \lambda_F - \lambda_M$, $\Delta\mu = \mu_F - \mu_M$, $k = b/a$, b - диаметр волокна, a - длина волокна, c - объемная концентрация волокон. Индекс M означает данные матрицы композита, F - волокон, λ и μ - постоянные Ламе.

1.2 Выражения для эффективных характеристик среды с равномерным распределением в пространстве и произвольной ориентацией армирующих волокон

Предположим, что уже вычислены эффективные модули трансверсально изотропной среды, соответствующие среде с параллельными волокнами. Рассмотрим две системы координат: нештрихованную глобальную систему координат и штрихованную. Свяжем штрихованную систему координат с осью трансверсальной изотропии среды с параллельными волокнами. Пусть данная система задается двумя углами Эйлера ϕ, θ относительно нештрихованной системы координат. В таком случае тензорный закон преобразования эффективных модулей трансверсально изотропной среды между двумя системами координат имеет вид

$$C_{i'j'k'l'}(\phi, \theta) = A_{i'i}A_{j'j}A_{k'k}A_{l'l}C_{ijkl}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \cos\theta, & A_{12} &= \sin\theta\sin\phi, & A_{13} &= -\cos\phi\sin\theta \\ A_{21} &= 0, & A_{22} &= \cos\phi, & A_{23} &= \sin\phi \\ A_{31} &= \sin\theta, & A_{32} &= -\sin\phi\cos\theta, & A_{33} &= \cos\phi\cos\theta \end{aligned}$$

Тогда способ вычисления эффективных модулей состоит в следующем [106]. Значения упругих характеристик эффективной изотропной среды равны соответствующим средним значениям отношений $\sigma_{i'j'}/\varepsilon_{k'l'}$, когда волокна принимают всевозможные ориентации в пространстве. Переходя к сферическим координатам и учитывая, что углы Эйлера изменяются в пределах $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, получим

$$C_{i'j'k'l'}^{eff} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi C_{i'j'k'l'}(\phi, \theta) \sin\theta d\theta d\phi$$

В результате осреднения получаются следующие значения эффективных модулей изотропной среды [106]

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{9}(E_{11} + 4(1 + \nu_{12})^2 K_{23}) \\ \mu &= \frac{1}{15}(E_{11} + (1 - 2\nu_{12})^2 K_{23} + 6(mu_{12} + \mu_{23})) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где K есть эффективный объемный модуль, μ - эффективный модуль сдвига. Выражения для модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν имеют вид

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \quad (1.2)$$

Таким образом, зная эффективные характеристики среды с параллельными волокнами, можно с помощью формул (1.1) и (1.2) получить эффективные характеристики среды с произвольной ориентацией волокон.

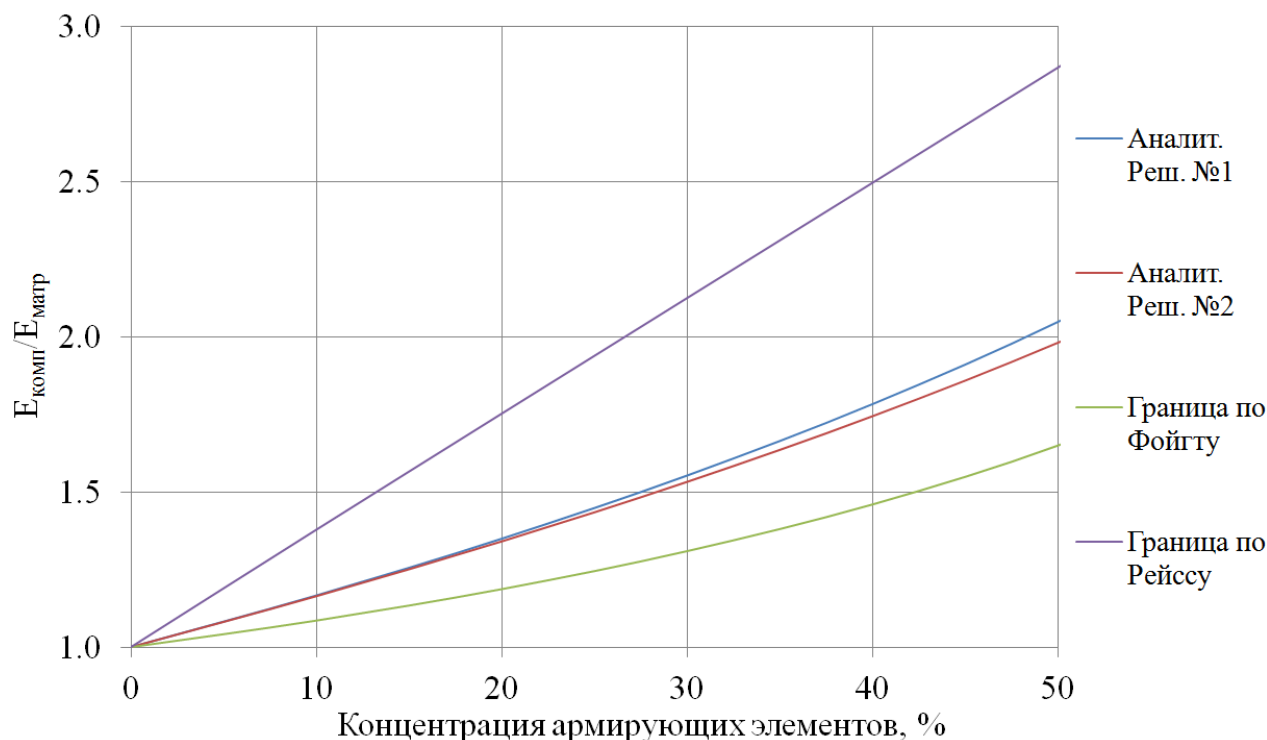


Рисунок 1.3: График зависимости модуля Юнга композита с произвольной ориентацией коротких армирующих волокон для двух подходов на основании данных из работы [112]. $E_{арм}/E_{матр} = 4.7$, $\nu_{арм} = 0.28$, $\nu_{матр} = 0.2$.

На графике (1.3) представлена зависимость эффективного модуля Юнга бетона с произвольной ориентацией коротких армирующих волокон от их концентрации, построенная на основании данных из работы [112]. Кривая №1 соответствует аналитическому подходу с предположением о достаточно большой длине волокон, кривая №2 - подходу с учетом реальной длины волокон. На графике также представлены нижняя и верхняя оценки эффективного модуля Юнга композита согласно Фойгту и Рейссу, соответственно. Отношение модулей армиру-

ющих волокон и бетонной матрицы $E_{\text{арм}}/E_{\text{матр}} = 4.7$, коэффициенты Пуассона $\nu_{\text{арм}} = 0.28$ и $\nu_{\text{матр}} = 0.2$. Длина и диаметр армирующих волокон $l_{\text{арм}} = 60$ мм, $d_{\text{арм}} = 1.2$ мм.

Исходя из представленной зависимости видно, что на всем диапазоне концентраций учет реальной длины волокон согласно второму аналитическому подходу дает более низкие значения эффективного модуля упругости по сравнению с первым подходом, однако различия в значениях не значительны, так для концентрации волокон в 10% различие составляет 0.2%, для концентрации в 50% - 3.4%.

1.3 Численное определение эффективных характеристик с помощью метода конечных элементов

В данном пункте рассматривается вычислительный подход для определения эффективных свойств композита с короткими армирующими волокнами. Был проведен численный эксперимент на одноосное сжатие представительного элемента объема фибробетона кубической формы со сторонами $0.15 \times 0.15 \times 0.15$ м. Равномерно распределенная нагрузка P действовала вдоль оси OZ на верхнюю грань куба. Противоположная к поверхности действия нагрузки грань куба предполагалась закрепленной по направлению действия нагрузки. Остальные грани куба считались свободными.

При численном решении поставленной задачи в трехмерной постановке для дискретизации по пространству использовался метод конечных элементов [108, 109]. Для моделирования волокон использовались одномерные стержневые конечные элементы, для бетонной матрицы – конечные элементы в виде параллелепипеда. Волокна равномерно распределены в объеме матрицы, имели произвольную ориентацию и не пересекались. Постановка и численный метод решения задачи будут подробно описаны позже во второй главе.

В результате численного эксперимента было определено осредненное сжимающее напряжение σ_z и деформация сжатия ε_z и деформация ε_x

$$\sigma_z = P/F, \quad \varepsilon_z = \Delta l_z/l_0, \quad \varepsilon_x = \Delta l_x/l_0 \quad (1.3)$$

где F – площадь поперечного сечения элемента, $\Delta l_z = (l_z - l_0)$ – сжатие элемента вдоль оси OZ , равное разности текущей l_z и начальной l_0 длин сторон образца; Δl_x определяется аналогично Δl_z .

Эффективный модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν определялись исходя из соотношений

$$E = \sigma_z/\varepsilon_z, \quad \nu = -\varepsilon_x/\varepsilon_z \quad (1.4)$$

1.4 Сравнение с экспериментом

Для того чтобы определить, насколько точные оценки эффективных свойств композита дают рассмотренные подходы был выполнен их сравнительный анализ на основе ряда экспериментальных данных [113].

В первой серии сравнений использовались результаты работы [112], где представлены экспериментально определенные значения прочности при одноосном сжатии бетонных образцов, содержащих произвольно распределенные стальные волокна в объеме от 0.5 до 4%. В качестве образцов использовались кубы размером 0.15x0.15x0.15 м.

В работе [112] указано, что прочность бетона при одноосном сжатии без армирования составила 76.3 МПа. Модуль Юнга бетона определялся в соответствии с [114] по формуле $E_{\text{бет}} = 2.15 \cdot 10^4 (f_c/10)^{1/3}$, где f_c – прочность бетона при одноосном сжатии (compressive strength). Модуль Юнга стали равнялся $E_{\text{арм}} = 200$ ГПа. Фибры использовались волнообразной формы, отношение их длины к диаметру $l/d = 50$. Длина волокон принималась равной 60 мм.

В ходе сравнительного анализа было проведено по пять численных тестов на различных конечно-элементных сетках для каждой комбинации физических свойств матрицы и волокон и их объемного содержания. Рассматривались три регулярные конечно-элементные сетки для кубической области со сторонами

длиной 0.15 м. Первая сетка имела 9 узлов с шагом 18.75 мм вдоль каждой из сторон области, вторая - 11 узлов с шагом 15 мм и третья - 13 узлов с шагом 12.5 мм. На графике 1.4 представлены осредненные значения модуля Юнга по трем конечно-элементным сеткам.

Значения эффективных модулей, полученные по аналитическим выражениям с учетом реальной длины волокон, практически не отличаются от результатов, полученных по аналитическим выражениям с предположением о бесконечной длине волокон. В среднем по рассматриваемому диапазону концентрации волокон значения в первом случае были на 0.02% меньше, чем значения во втором случае.

Согласно экспериментальным данным [112] модуль Юнга фибробетона в случае концентрации армирования 4% увеличился на 4.6%. Аналитический и численный подход также показали возрастание модуля Юнга композита при увеличении концентрации волокон.

Максимальное различие между экспериментальными и аналитическими с учетом реальной длины волокон значениями модуля Юнга фибробетона составило 1.7%, в среднем по диапазону концентраций волокон 0.5 – 4% – 0.8%. Аналогичное различие эксперимента с численным решением составило 1.0% и 0.6%.

Стоит отметить, что на всем диапазоне концентрации волокон 0.5 – 4% аналитическое решение дает более высокие значения модуля Юнга по сравнению с численным решением, максимальное различие составляет 2.7%, см. график 1.4.

Также были проведены серии численных экспериментов для каждой из указанных на рис. 1 концентраций волокон с целью определить, как влияет изменение длины волокон на модуль упругости композита, если отношение длины к диаметру фиксировано.

Длина волокон принималась равной 50 мм и 30 мм. Результаты показали совсем незначительное увеличение модуля упругости в среднем по указанному диапазону концентраций на 0.01% и 0.02% для соответствующих значений длин

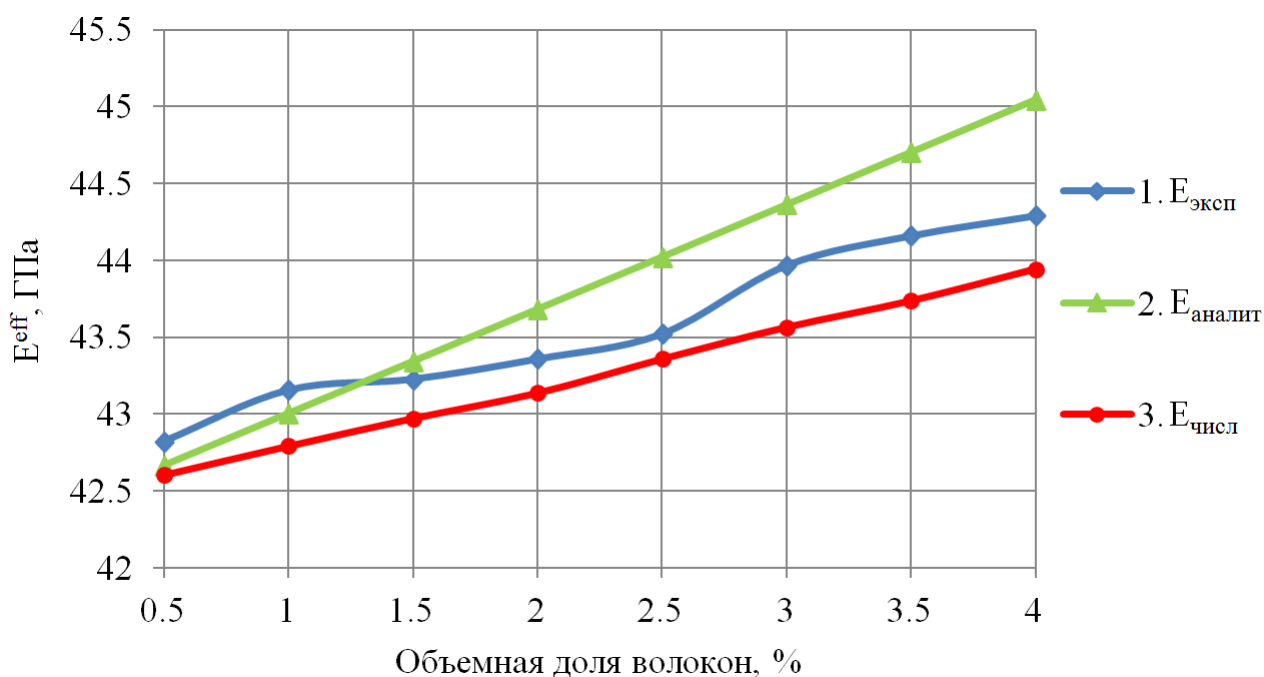


Рисунок 1.4: Кривая 1 - экспериментальные значения модуля упругости, 2 - аналитическое решение с учетом конечной длины волокон, 3 - численное решение с помощью МКЭ.

волокон по сравнению со случаем, когда длина волокон была равной 60 мм. Для максимальной 4% концентрации увеличение модуля упругости составило 0.2% и 0.5% соответственно. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что изменение длины волокон при фиксированном отношении длины к диаметру оказывает незначительное влияние на модуль упругости композита по сравнению с изменением объемной концентрации волокон.

В следующей серии сравнений использовались данные из работы [92], где представлены экспериментально определенные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для двух типов бетонных образцов, содержащих произвольно распределенные стальные волокна длиной 30 мм, диаметром 0.55 мм. В качестве образцов использовались цилиндры диаметром 150 мм и высотой 300 мм.

Результаты экспериментов [92] показали, что первый тип бетона при нулевой концентрации волокон имел прочность при одноосном сжатии $f_{c1} = 35$ МПа, модуль Юнга $E_{\text{бет1}} = 28.7$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_{\text{бет1}} = 0.182$, второй

тип бетона - $f_{c2} = 65$ МПа, $E_{бет2} = 37.5$ ГПа и $\nu_{бет2} = 0.201$, соответственно. Волокна имели небольшие отгибы по концам. Объемное содержание волокон принималось 0.5, 1 и 1.5%. Модуль упругости стали был равен $E_{арм} = 200$ ГПа.

Для численного определения эффективных модулей композита использовалась кубическая область со сторонами длиной 0.15 м. Конечно-элементные сетки были выбраны такими же, как и в предыдущей серии сравнений. На графике 1.5 представлены осредненные по конечно-элементным сеткам значения модуля Юнга.

Различия между двумя аналитическими подходами к определению эффективных модуля Юнга и коэффициента Пуассона композита имеют близкие значения к результатам предыдущего сравнения.

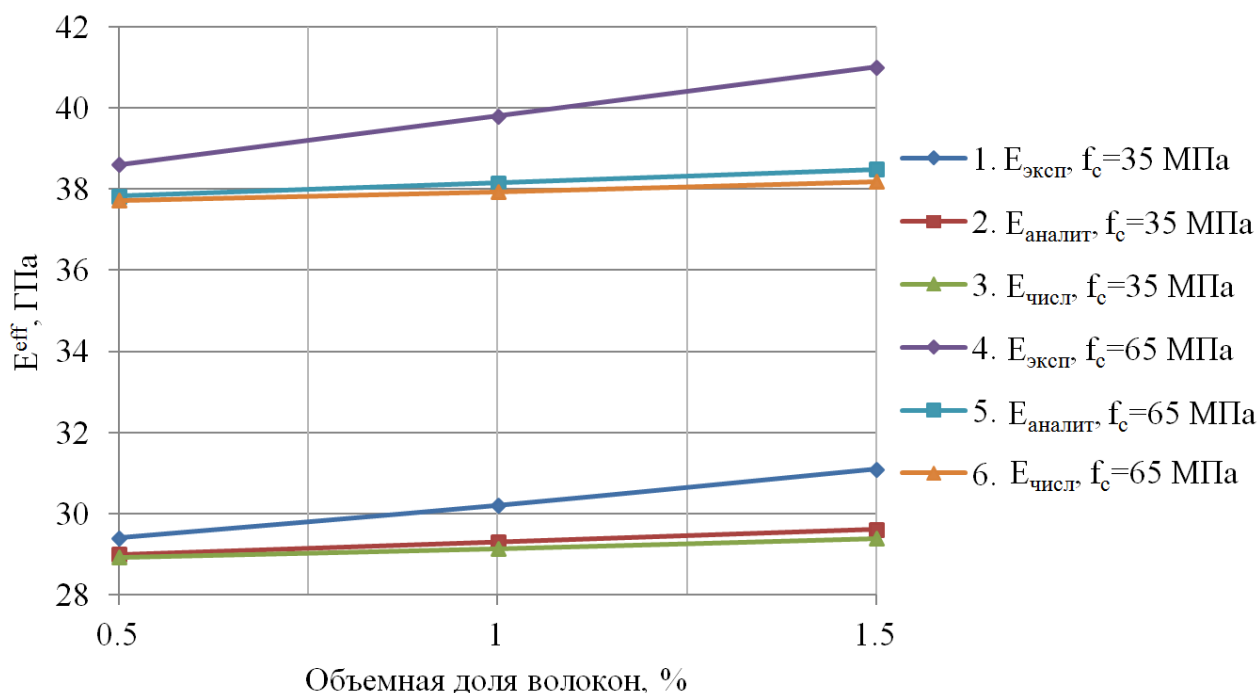


Рисунок 1.5: Кривая №1,4 - экспериментальные значения модуля упругости, №2,5 - аналитическое решение с учетом конечной длины волокон, №3,6 - численное решение с помощью МКЭ.

Результаты экспериментального исследования [92] показали, что модуль Юнга фибробетона в случае концентрации армирования 1.5% для первого типа бетона вырос на 8.4%, для второго - на 9.3%.

Максимальное различие между экспериментальными значениями модуля Юнга композита и аналитическим решением с учетом конечной длины волокон составляет 4.8% для бетонов первого типа и 6.1% для второго. Аналогичные различия численного решения с экспериментом составляют 5.5% и 6.9%, соответственно.

Стоит отметить что, как и в предыдущем сравнении на основе работы [112], аналитическое решение на рассматриваемом диапазоне концентраций дает более высокие значения модуля Юнга композита по сравнению с численным решением. Максимальное различие составляет 0.7% и 0.8% для двух типов бетонов соответственно.

В отличие от модуля Юнга, коэффициент Пуассона, вычисленный с помощью численного решения, имеет более высокие значения по сравнению со значениями, полученными из аналитического решения. В среднем по рассматриваемому диапазону концентраций различия между аналитическим решением и экспериментальными данными составляет 3.8% для бетонов первого типа и 4.7% для второго, сравнение численного решения с экспериментом дает аналогичные различия в 3.7% и 4.6% соответственно.

Полученные результаты были проверены на различных размерах и видах представительного элемента объема композита. Было дополнительно рассмотрены два вида областей для конечно-элементной дискретизации: куб со сторонами 100 мм и цилиндр диаметром 150 мм и высотой 300 мм. Численные эксперименты показали, что вид представительного элемента объема не оказывает значительного влияния на оценку эффективных упругих свойств композита, максимальные различия не превышают 0.3%.

Рассмотренные подходы для определения эффективных констант предполагают, что волокна являются прямыми, в то время как в работах [92, 112] использовались волокна волнообразной формы и с отгибами по концам соответственно. Несмотря на это, результаты проведенного сравнительного анализа показывают, что численное решение и аналитический подход дают достаточно точные зна-

чения эффективных упругих свойств рассмотренных в диапазоне концентрации волокон 0.5 – 4% композитов.

Рассмотренные аналитические подходы хорошо себя зарекомендовали для определения эффективных упругих характеристик композита, однако в нелинейном случае более универсальным является численный подход. Его надежность была подтверждена проведенным в данной главе сравнительным анализом, результаты которого показали, что для малых концентраций армирующих волокон аналитические подходы дают такую же точность, как и численный подход, и в обоих случаях получено хорошее совпадение расчетов с экспериментом. Поэтому в дальнейшем разумно использовать именно такой подход для построения нелинейной модели механического поведения композиционного материала с короткими армирующими волокнами.

Глава 2. Модель деформирования физически нелинейного композиционного материала с короткими армирующими волокнами

Одним из основных параметров, определяющим способность материала сопротивляться внешним нагрузкам, является его прочность. Данная величина характеризуется значением максимального внутреннего напряжения, вызванного соответствующей внешней нагрузкой.

Важной задачей анализа элементов конструкций из композиционных материалов является определение полного множества таких максимальных напряженных состояний материала для различных нагружений и соответствующих этим нагружениям разрушающих нагрузок [27].

В данной главе представлена механическая модель деформирования физически нелинейного композиционного материала с короткими армирующими волокнами и ее численная реализация. Данная модель позволяет учесть физически нелинейные свойства матрицы композита и неидеальный контакт на границе матрицы и волокон.

2.1 Определяющие соотношения при деформировании физически нелинейного материала матрицы

Механическая модель деформирования физически нелинейного материала матрицы при малых деформациях основывается на соотношениях, аналогичных теории пластического течения [115–117] и записывается относительно скоростей деформаций и напряжений. Предполагается, что компоненты тензора скоростей полных деформаций равны сумме компонент тензоров скоростей упругой (elastic) и неупругой (inelastic) деформаций

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^i$$

Тензоры скоростей напряжений и упругих деформаций связаны законом Гука [118]

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\mathbf{C}} : \underline{\dot{\varepsilon}}^e$$

Предполагается, что в упругой области материал обладает линейными изотропными свойствами. В этом случае тензор четвертого ранга модулей упругости \mathbf{C}_{ijkl} имеет две независимые константы и закон упругости записывается в виде $\mathbf{C}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, λ и μ - постоянные Ламе. Выражения модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν через постоянные Ламе имеют вид

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

Будем считать, что момент возникновения неупругих деформаций в каждой точке тела определяется ее напряженным состоянием, т.е. существуют скалярные функции $f_k(\underline{\sigma})$, определяющие кусочно-гладкую поверхность нагружения в пространстве напряжений [119].

Неупругие деформации могут возникнуть в некоторой точке тела, если хотя бы для одной из функций $f_k(\underline{\sigma})$ выполняется условие

$$f_k(\underline{\sigma}) = \Phi_k(\underline{\sigma}) - \phi_{k0} = 0, \quad \phi_{k0} = const \quad (2.1)$$

где функция $\Phi_k(\underline{\sigma})$ зависит от тензора напряжений и определяет вид поверхности, а функция ϕ_{k0} задает начальный размер поверхности и имеет физический смысл предела упругости материала при одноосном нагружении; $k = 1, \dots, m$ и m - число поверхностей, определяющих кусочно-гладкую поверхность нагружения. Начальное положение поверхности нагружения задает множество начальных пределов упругости материала в данной точке для всевозможных путей нагружения.

Для описания эволюции поверхности нагружения в процессе деформирования введем в уравнение (2.1) для функций f_k скалярные параметры α_k следующим образом

$$f(\underline{\sigma}, \alpha_k) = \Phi_k(\underline{\sigma}) - \phi_k(\alpha_k) = 0, \quad \phi_k(\alpha_k) = \phi_{k0} \text{ при } \alpha_k = 0$$

где скалярная функция $\phi_k(\alpha_k)$ определяет размер поверхности и является монотонно возрастающей или убывающей функцией параметра α_k в процессе упрочнения или разупрочнения, соответственно. Положение поверхности нагружения, соответствующее переходу от стадии упрочнения к разупрочнению, определяет множество пределов прочности материала.

Область допустимых напряженных состояний и упругого деформирования определяются как

$$\Pi = \{(\underline{\sigma}, \alpha_k) | f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) \leq 0\} \quad \text{для всех } k = 1, \dots, m;$$

$$\text{int}(\Pi) = \{(\underline{\sigma}, \alpha_k) | f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) < 0\} \quad \text{для всех } k = 1, \dots, m.$$

Развитие неупругих деформаций может происходить только при условии, что напряженное состояние в точке тела принадлежит границе области Π .

Предполагается, что в процессе деформирования поверхность нагружения может изотропно расширяться при увеличении значений функций $\phi_k(\alpha_k)$ и сжиматься без смещения при их уменьшении, оставаясь при этом подобной самой себе. Эволюция поверхности происходит по мере накопления в материале неупругой деформации, что влечет увеличение значений параметров α_k . Размер поверхности нагружения в данный момент нагружения зависит от всей предшествующей истории деформирования тела [14].

Будем считать, что во время всего процесса нагружения выполняется постулат Ильюшина. Из этого следует, что вектор скоростей неупругих деформации направлен по внешней нормали к поверхности нагружения и для регулярной точки k -ой поверхности имеет вид

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^i = \dot{\gamma}_k \frac{\partial f_k}{\partial \underline{\sigma}}$$

Для особой точки кусочно-гладкой поверхности нагружения используется правило Койтера [120], из которого следует, что скорости неупругих деформаций в особой точке являются суммой скоростей на смежных поверхностях.

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^i = \sum_{k=1}^m \dot{\gamma}_k \frac{\partial f_k}{\partial \underline{\sigma}} \quad (2.2)$$

2.1.1 Условия упругой разгрузки, нейтрального нагружения и активного нагружения

Если напряженное состояние находится внутри области упругого деформирования, то неупругих деформаций не возникает и поверхность нагружения не изменяется. Данное состояние характеризуется выражениями

$$f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) < 0, \quad \dot{\gamma}_k = 0, \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^i = 0, \quad \dot{\alpha}_k = 0, \quad \text{где } k = 1, \dots, n$$

Пусть текущее напряженное состояние принадлежит нескольким функциям, характеризующимся индексом k , кусочно-гладкой поверхности нагружения. В этом случае имеет место упругая разгрузка, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) = 0, \quad \dot{f}_k < 0, \quad f_l(\underline{\sigma}, \alpha_l) < 0 \\ \dot{\gamma}_k = \dot{\gamma}_l = 0, \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^i = 0, \quad \dot{\alpha}_k = \dot{\alpha}_l = 0 \end{aligned}$$

где индексы k и l исчерпывают всю совокупность индексов n . Поверхность нагружения в этом случае не изменяется.

Нейтральное нагружение происходит при выполнении условий

$$\begin{aligned} f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) = 0, \quad \dot{f}_k = 0 \\ f_l(\underline{\sigma}, \alpha_l) = 0, \quad \dot{f}_l < 0, \quad f_p(\underline{\sigma}, \alpha_p) = 0 \\ \dot{\gamma}_k = \dot{\gamma}_l = \dot{\gamma}_p = 0, \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^i = 0, \quad \dot{\alpha}_k = \dot{\alpha}_l = \dot{\alpha}_p = 0 \end{aligned}$$

где для поверхностей с индексами l может иметь место упругая разгрузка, индексы k , l и p исчерпывают всю совокупность индексов n .

Условия активного нагружения записываются в виде

$$\begin{aligned} f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) = 0, \quad \dot{f}_k = 0, \quad \dot{\gamma}_k > 0, \quad \dot{\underline{\varepsilon}}^i \neq 0, \quad \dot{\alpha}_k \neq 0 \\ f_l(\underline{\sigma}, \alpha_l) = 0, \quad \dot{f}_l = 0 \\ f_p(\underline{\sigma}, \alpha_p) = 0, \quad \dot{f}_p < 0, \quad f_r(\underline{\sigma}, \alpha_r) < 0 \\ \dot{\gamma}_l = \dot{\gamma}_p = \dot{\gamma}_r = 0, \quad \dot{\alpha}_l = \dot{\alpha}_p = \dot{\alpha}_r = 0 \end{aligned}$$

где для поверхностей с индексами l может иметь место нейтральное нагружение, для поверхностей с индексами p - упругая разгрузка, индексы k , l , p и r исчерпывают всю совокупность индексов n .

Перечисленные условия нагрузки-разгрузки [116] для k -ой поверхности могут быть кратко записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_k &\geq 0, & f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) &\leq 0, & \dot{\gamma}_k f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) &= 0 \\ & & \dot{\gamma}_k \dot{f}_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.1.2 Изменение поверхности в случае активного нагружения

Для того, чтобы задать эволюцию поверхности нагружения, необходимо связать функцию $\phi_k(\alpha_k)$, определяющую размер поверхности, с одноосными экспериментальными диаграммами напряжение-деформация. Исходя из этого перепишем уравнение (2.1), заменяя функцию $\phi_k(\alpha_k)$, следующим образом

$$\begin{aligned} f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) &= \Phi_k(\underline{\sigma}) - c_k (\sigma_k^{eqv}(\alpha_k))^n = 0, & c_k &= const \\ \sigma_k^{eqv}(\alpha_k) &= \left(\frac{\Phi_k(\underline{\sigma})}{c_k} \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где константа c_k и показатель степени n определяются из условия равенства в случае одноосного нагружения скалярной функции $\sigma_k^{eqv}(\alpha_k)$, называемой эквивалентным напряжением, величине осевого напряжения.

Теперь необходимо задать закон изменения параметра α_k в зависимости от величины накопленных неупругих деформаций. В большинстве случаев для этого используется два подхода. Первый подход заключается в использовании параметра Одквиста, характеризующего величину накапливаемых неупругих деформаций

$$\dot{\alpha}_k = b_k \sqrt{\underline{\dot{\varepsilon}}^i : \underline{\dot{\varepsilon}}^i}$$

где константа b_k определяется из условия равенства $\dot{\alpha}_k$ скорости осевой неупругой деформации в случае одноосного нагружения.

Отличный подход, применяемый в данной работе, заключается в использовании скорости изменения неупругой энергии деформаций

$$\dot{W}^i = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^i = \sigma_k^{eqv}(\alpha_k) \cdot \dot{\alpha}_k \quad (2.5)$$

Для того, чтобы в этом случае получить закон изменения параметров α_k перепишем выражение (2.5), используя ассоциированный закон для тензора скоро-

стей неупругих деформаций и свойство однородности функций $\Phi_k(\underline{\sigma})$ относительно тензора напряжений. В случае активного нагружения будем иметь

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^i &= \underline{\sigma} : \left(\sum_{j=1}^m \dot{\gamma}_j b_{kj} \frac{\partial f_j}{\partial \underline{\sigma}} \right) = \sum_{j=1}^m \dot{\gamma}_j b_{kj} \left(\underline{\sigma} : \frac{\partial \Phi_j}{\partial \underline{\sigma}} \right) = \sum_{j=1}^m \dot{\gamma}_j b_{kj} n \Phi_j(\underline{\sigma}) \\ &= \sum_{j=1}^m \dot{\gamma}_j b_{kj} n c_j (\sigma_j^{eqv})^n = \sigma_k^{eqv}(\alpha_k) \cdot \dot{\alpha}_k\end{aligned}$$

где n - степень однородности функций $\Phi_j(\underline{\sigma})$.

Случай взаимного влияния изменения поверхностей друг на друга в данной работе исключается, поэтому принимая $b_{kj} = \delta_{kj}$ - символы Кронекера, получим окончательный вид закона изменения параметров α_k

$$\dot{\alpha}_k = \dot{\gamma}_k n c_k (\sigma_k^{eqv})^{n-1} = \dot{\gamma}_k \cdot \left(-\frac{\partial f_k}{\partial \sigma_k^{eqv}} \right)$$

Если несколько функций f_k задаются одной величиной эквивалентных напряжений σ_p^{eqv} и параметром α_p , то для обеспечения изотропного изменения поверхности используется правило Койтера

$$\dot{\alpha}_p = \sum_{k=1}^m \dot{\gamma}_k \cdot \left(-\frac{\partial f_k}{\partial \sigma_p^{eqv}} \right) \quad (2.6)$$

2.1.3 Связь тензоров скоростей напряжений и полных деформаций

Для того, чтобы получить соотношения между тензорами скоростей напряжений и полных деформаций перепишем закон Гука. Заменим в нем тензор скоростей упругих деформаций разницей тензоров скоростей полных и неупругих деформаций

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\mathbf{C}} : (\underline{\dot{\varepsilon}} - \underline{\dot{\varepsilon}}^i) = \underline{\mathbf{C}} : \left(\underline{\dot{\varepsilon}} - \sum_{p=1}^m \dot{\gamma}_p \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \right) \quad (2.7)$$

Множитель $\dot{\gamma}_p$, определяющий величину скоростей неупругих деформаций и внутренних параметров α_p определим, как обычно, из условия непрерывного изменения функций поверхности нагружения в случае активного нагружения. Согласно этому условию точка, отражающая текущее напряженное состояние материала в случае активного нагружения, должна всегда оставаться на поверхности нагружения.

Пусть текущее напряженное состояния соответствует m функциям поверхности нагружения $J_{\text{акт}} = \{k \in \{1, \dots, m\} | f_k(\underline{\sigma}, \alpha_k) = 0\}$. Тогда условие непрерывного изменения p -ой функции записывается в виде уравнения

$$\begin{aligned} \dot{f}_p &= \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_k^{eqv}} \dot{\sigma}_k^{eqv} = \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \left(\underline{\mathbf{C}} : \left(\dot{\underline{\varepsilon}} - \sum_{r \in J_{\text{акт}}} \dot{\gamma}_r \frac{\partial f_r}{\partial \underline{\sigma}} \right) \right) - \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_k^{eqv}} \frac{\partial \sigma_k^{eqv}}{\partial \alpha} \left(\sum_{r \in J_{\text{акт}}} \dot{\gamma}_r \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_k^{eqv}} \right) \\ &= \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\mathbf{C}} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \sum_{r \in J_{\text{акт}}} \dot{\gamma}_r \left(\frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\mathbf{C}} : \frac{\partial f_r}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_k^{eqv}} \frac{\partial \sigma_k^{eqv}}{\partial \alpha} \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_k^{eqv}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Выражая значения $\dot{\gamma}_r$ и используя закон Гука в виде (2.7), получим связь тензоров скоростей напряжений и полных деформаций

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} &= \left(\underline{\mathbf{C}} - \sum_{p,r \in J_{\text{акт}}} \left(\underline{\mathbf{C}} : \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \right) \otimes \left(\underline{\mathbf{C}} : \frac{\partial f_r}{\partial \underline{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\mathbf{C}} : \frac{\partial f_r}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_k^{eqv}} \frac{\partial \sigma_k^{eqv}}{\partial \alpha} \frac{\partial f_r}{\partial \sigma_k^{eqv}} \right)^{-1} \right) : \dot{\underline{\varepsilon}} \\ \dot{\underline{\sigma}} &= \underline{\mathbf{C}}^T(\dot{\underline{\varepsilon}}, \underline{\varepsilon}) : \dot{\underline{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где введено обозначение $\underline{\mathbf{C}}^T(\dot{\underline{\varepsilon}}, \underline{\varepsilon})$ для симметричного тензора касательных модулей.

Представленные в пункте 2.1 определяющие соотношения дают полную модель деформирования физически неупругого материала матрицы.

2.2 Дифференциальная постановка задачи

Будем рассматривать тело, занимаемое в пространстве область V , и процесс нагружения, определяемый возрастающим параметром $t \in [0, T]$. Задача о квазистатическом равновесии тела в каждый момент нагружения t заключается в решении системы нелинейных уравнений [121]

$$\dot{\sigma}_{ij,j}(\vec{u}(t)) + \rho \dot{f}_i(t) = 0, \quad \vec{x} \in V \quad (2.9)$$

где $\dot{f}_i(t)$ - скорости массовых сил. Здесь обозначено $\dot{\underline{\sigma}}(\vec{u}) = \dot{\underline{\sigma}}(\underline{\varepsilon}(\vec{u}), \underline{\varepsilon})$ согласно (2.8).

Предполагается, что компоненты тензора скоростей полных деформаций связаны с вектором скоростей соотношениями Коши, т.е.

$$\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \forall \vec{v}$$

На границе области V должны выполняться условия

$$\dot{u}_i(t)|_{\Sigma_1} = \dot{u}_i^0(t), \quad \dot{\sigma}_{ij}(\vec{u})n_j|_{\Sigma_2} = \dot{S}_i^0(t) \quad (2.10)$$

где Σ_1 и Σ_2 - две непересекающиеся части границы Σ области V . Для простоты дальнейших вычислений будем считать $\dot{u}_i^0(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$ и $\vec{x} \in V$.

Начальные условия записываются в виде

$$\vec{u}(0, \vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in V \quad (2.11)$$

В каждой точке тела в момент нагружения t тензор скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}(\dot{\vec{u}}(t))$ должен удовлетворять определяющим соотношениям, представленным в пункте 2.1. Зависимость тензоров скоростей напряжений и полных деформаций имеет вид

$$\dot{\sigma}(\dot{\vec{u}}(t)) = \dot{\sigma}(\underline{\varepsilon}(\dot{\vec{u}}(t)), \underline{\varepsilon})$$

Для определения тензора скоростей напряжений по заданному тензору скоростей полных деформаций необходимо решить задачу об интегрировании определяющих соотношений [115].

2.3 Вариационная постановка задачи

Рассмотрим подпространство H_0 пространства Соболева W_2^1 [122], элементы которого интегрируемы с квадратом производной в области V и удовлетворяют однородным граничным условиям 1-го рода

$$H_0 = \{\vec{w} | \vec{w} \in W_2^1, \vec{w}|_{\Sigma_1} = 0\}$$

Сформулируем вариационное уравнение, соответствующее дифференциальному. Умножим обе части уравнения равновесия (2.9), записанного в скоростях, скалярно на пробную функцию $\vec{w}(\vec{x}) \in H_0$, интегрируя по частям и применяя формулу Гаусса-Остроградского [123] и граничные условия (2.10), получим ва-

риационное уравнение

$$\int_V \dot{\underline{\sigma}}(\underline{\varepsilon}(\dot{\vec{u}})) : \underline{\varepsilon}(\vec{w}) dV = \dot{A}^e(\vec{w})$$

$$\dot{A}^e(\vec{w}) = \int_V \rho \dot{f}(t) \vec{w} dV + \int_{\Sigma_2} \dot{S}^0(t) \vec{w} d\Sigma$$

где левая часть вариационного уравнения представляет собой изменение работы внутренних сил, а правая часть - работы внешних сил. Перепишем данное уравнение используя связь тензоров скоростей напряжений и деформаций (2.8)

в виде

$$\int_V \mathbf{C}_{ijkl}^T(\dot{\vec{u}}, \vec{u}) \dot{u}_{k,l} w_{i,j} dV = \dot{A}^e(w_i)$$

$$\dot{A}^e(w_i) = \int_V \rho \dot{f}_i(t) w_i dV + \int_{\Sigma_2} \dot{S}_i^0(t) w_i d\Sigma \quad (2.12)$$

Будем считать поле скоростей $\dot{\vec{u}}(\vec{x}, t) \in H_0$ обобщенным решением [109] исходной краевой задачи (2.9)-(2.11) в момент нагружения $t \in [0, T]$, если для любой функции $\vec{w}(\vec{x}) \in H_0$ выполняется уравнение (2.12) и вектор перемещений удовлетворяет условию (2.11).

2.3.1 Дискретизация вариационного уравнения по пространству

Дискретизация вариационного уравнения по пространственным координатам осуществляется с помощью метода конечных элементов на основе подхода Галеркина [108, 124, 125]. Будем искать приближенное решение вариационного уравнения в конечномерном подпространстве $H_0^N \in H_0$ размерности N .

Тогда функция $\dot{\vec{u}}^N(\vec{x}, t) \in H_0^N$ будет приближенным решением уравнения в момент нагружения $t \in [0, T]$, если для всех $\vec{w}^N(\vec{x}) \in H_0^N$ будет выполняться равенство

$$\int_V \mathbf{C}_{ijkl}^T(\dot{\vec{u}}^N, \vec{u}^N) \dot{u}_{k,l}^N w_{i,j}^N = \dot{A}^e(w_i^N)$$

$$\dot{A}^e(w_i^N) = \int_V \rho \dot{f}_i(t) w_i^N dV + \int_{\Sigma_2} \dot{S}_i^0(t) w_i^N d\Sigma$$

Разобьем область V , занимаемую телом, на конечные элементы объемом V_e . Представим функции $\vec{u}^N(\vec{x}, t)$ и $\vec{w}^N(\vec{x})$ в виде линейной комбинации функций форм конечного элемента $N(\vec{x})$

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^N(\vec{x}, t) &= \sum_{p=1}^{N_e} N_p(\vec{x}) \hat{u}_i^p(t) \equiv N_p \hat{u}_i^p \\ w_i^N(\vec{x}) &= \sum_{q=1}^{N_e} N_q(\vec{x}) \hat{w}_i^q \equiv N_q \hat{w}_i^q \end{aligned} \quad (2.13)$$

где N_e - число узлов конечного элемента, \hat{u}_i^p - скорость p -го узла конечного элемента, i - количество степеней свободы в узле, в трехмерном случае $i = 3$.

Производные аппроксимирующих функций вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i,j}^N(\vec{x}, t) &= N_{p,j} \hat{u}_i^p \\ w_{i,j}^N(\vec{x}) &= N_{q,j} \hat{w}_i^q \end{aligned} \quad (2.14)$$

Учитывая выражения (2.13) и (2.14) и аддитивное свойство интеграла, получим конечномерную аппроксимацию вариационного уравнения (2.12) в виде

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{V_e} \mathbf{C}_{ijkl}^T(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{u}}) N_{p,l} \hat{u}_k^p N_{q,j} \hat{w}_i^q dV &= \dot{A}^e(\hat{w}_i) \\ \dot{A}^e(\hat{w}_i) &= \sum_e \int_{V_e} \dot{f}_i(t) N_q \hat{w}_i^q dV + \sum_e \int_{\Sigma_e} \dot{S}_i^0(t) N_q \hat{w}_i^q d\Sigma \end{aligned} \quad (2.15)$$

Так как функция $\vec{w}^N(\vec{x})$ может быть выбрана произвольным образом, получим нелинейную систему дискретных алгебраических уравнений относительно $\hat{\vec{u}}(t)$

$$[K(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{u}})] \{ \hat{\vec{u}} \} = \{ \dot{A}^e \}$$

где глобальная матрица жесткости $[K(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{u}})]$ и вектор правых частей $\{ \dot{A}^e \}$ имеют вид

$$\begin{aligned} [K(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{u}})] &= \sum_e \int_{V_e} \mathbf{C}_{ijkl}^T(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{u}}) N_{p,l} N_{q,j} dV \\ \{ \dot{A}^e \} &= \sum_e \int_{V_e} \dot{f}_i(t) N_q dV + \sum_e \int_{\Sigma_e} \dot{S}_i^0(t) N_q d\Sigma \end{aligned}$$

Переходя от производных по параметру нагружения к дифференциалам получим окончательный вид нелинейной системы уравнений

$$[K(\hat{\vec{u}}, \hat{\vec{u}})]\{d\hat{u}\} = \{dA^e\}$$

$$\{dA^e\} = \sum_e \int_{V_e} df_i(t) N_q dV + \sum_e \int_{\Sigma_e} dS_i^0(t) N_q d\Sigma \quad (2.16)$$

2.3.2 Конечные элементы

Для моделирования материала матрицы композита в трехмерных задачах использовались четырехузловые элементы в виде тетраэдра и восьмиузловые элементы в виде параллелепипеда (типа brick) [108].

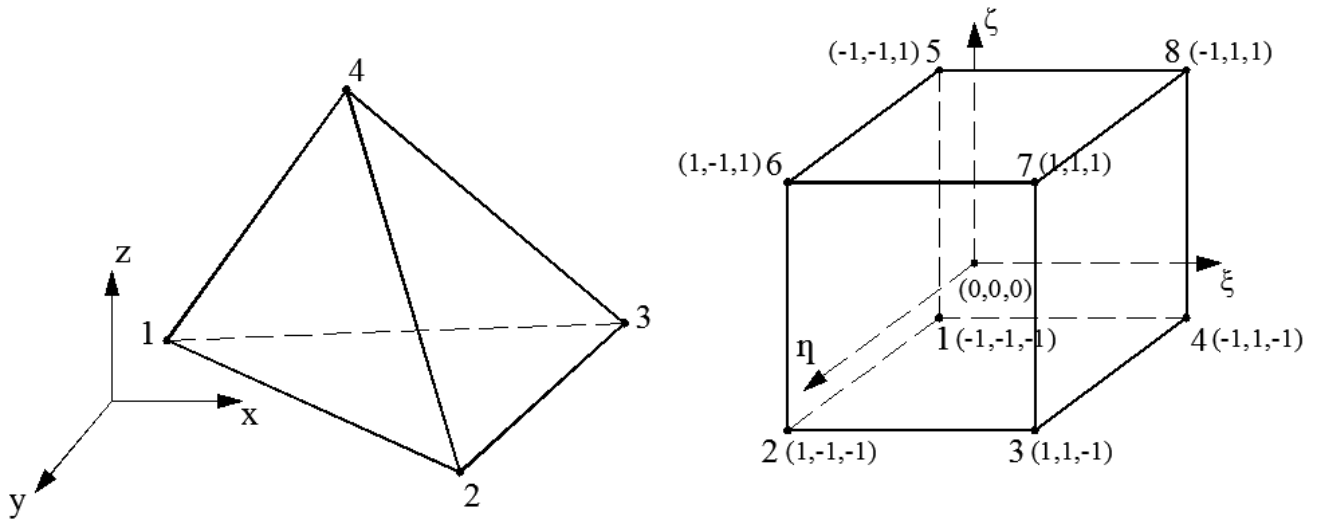


Рисунок 2.1: КЭ тетраэдра в глобальной системе координат и КЭ параллелепипеда в локальной системе координат.

Функции формы для четырехузлового элемента в виде тетраэдра имеют вид

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z), \quad i = 1, \dots, 4.$$

где V - объем тетраэдра, коэффициенты a_i, b_i, c_i и d_i определяются исходя из заданных в глобальной системе узловых координат.

Функции формы для параллелепипеда в локальной системе координат имеют вид

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i = 1, \dots, 8.$$

где (ξ_i, η_i, ζ_i) координаты элемента в локальной системе координат, см. рисунок 2.1.

2.3.3 Дискретизация вариационного уравнения по параметру нагружения

Заменяем дифференциалы по параметру нагружения на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ конечными приращениями. Применим для решения системы нелинейных уравнений неявную схему Эйлера с внутренними итерациями. Тогда на каждой итерации необходимо решить систему линейных уравнений вида

$$[K(\delta\hat{u}, \hat{u})]_{n+1}^k \{\delta\hat{u}\}_{n+1}^{k+1} = \{\delta A^e\}_{n+1} \quad (2.17)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ - номер внутренней итерации. Глобальная матрица жесткости $[K(\delta\hat{u}, \hat{u})]_{n+1}^k$ на k -ой итерации и вектор правых частей $\{\delta A^e\}_{n+1}$ в момент нагружения t_{n+1} имеют вид

$$\begin{aligned} [K(\delta\hat{u}, \hat{u})]_{n+1}^k &= \sum_e \int_{V_e} \mathbf{c}_{ijkl}^T(\delta\hat{u}_{n+1}^k, \hat{u}_{n+1}^k) N_{p,l} N_{q,j} dV \\ \{\delta A^e\}_{n+1} &= \sum_e \int_{V_e} \delta f_{i,n+1} N_q dV + \sum_e \int_{\Sigma_e} \delta S_{i,n+1}^0 N_q d\Sigma \end{aligned}$$

Приращение перемещений на интервале нагружения $[t_n, t_{n+1}]$ записываются следующим образом

$$\delta\hat{u}_{n+1}^{k+1} = \hat{u}_{n+1}^{k+1} - \hat{u}_n$$

В качестве начальных данных для работы итерационного алгоритма принимаются значения перемещений в момент нагружения t_n

$$\hat{u}_{n+1}^0 = \hat{u}_n \quad (2.18)$$

2.4 Глобальная и локальная задачи

Будем считать, что в некоторый момент нагружения t_n тело объемом V находится в состоянии равновесия. Пусть также в каждой точке тела известны вектор перемещений $\vec{u}(t_n)$, тензоры упругих и неупругих деформаций $\underline{\varepsilon}^e(t_n)$ и $\underline{\varepsilon}^i(t_n)$ и значения внутренних параметров $\alpha_k(t_n)$. На интервале времени $[t_n, t_{n+1}]$ заданы

приращения внешних нагрузок, т.е. известны компоненты векторов $\delta f_i(t_{n+1})$ и $\delta S_i^0(t_{n+1})$.

Процесс решения задачи на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ начинается с решения глобальной задачи, т.е. с определения вектора приращения перемещений $\delta \hat{u}_{n+1}$ согласно уравнению (2.17) и с учетом начальных данных \hat{u}_{n+1}^0 в момент t_n .

Далее, согласно соотношениям Коши вычисляются компоненты тензора скоростей полных деформаций. Для того, чтобы вычислить значения компонент тензора напряжений, необходимо проинтегрировать определяющие соотношения, записанные в скоростях и использовать закон Гука. Данная задача называется локальной и заключается в решении системы уравнений (2.2), (2.3) и (2.6) [115, 116].

Для ее решения заменим производные по времени конечно-разностным соотношением и применим неявную разностную схему Эйлера. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \Delta \varepsilon \\ \varepsilon_{n+1}^i &= \varepsilon_n^i + \sum_{k=1}^m \Delta \gamma_{k,n+1} \frac{\partial f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1})}{\partial \sigma} \\ \alpha_{i,n+1} &= \alpha_{i,n} + \sum_{k=1}^m \Delta \gamma_{k,n+1} \frac{\partial f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1})}{\partial \sigma^{eqv}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\Delta \gamma_{k,n+1} = \gamma_{k,n+1} \Delta t$. Условия нагрузки-разгрузки для k -ой поверхности имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_{k,n+1} &\geq 0, \quad f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1}) \leq 0 \\ \Delta \gamma_{k,n+1} f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $k = 1, \dots, m$ и m - число поверхностей, определяющих кусочно-гладкую поверхность разрушения.

Система уравнений (2.19), (2.20) для определения неизвестных ε^i , α_k и $\Delta \gamma_{k,n+1}$ в общем случае является нелинейной, для ее решения используется метод Ньютона.

В качестве начальных данных для решения системы уравнений принимается условие равенства нулю приращений неупругих деформаций и внутренних параметров

$$\Delta\gamma_{k,n+1} = 0 \quad \text{для всех } k = 1, \dots, m;$$

Выразим напряжения из закона Гука $\sigma_{n+1} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^i)$, пределы упругости через зависимость $\sigma_{k,n+1}^{eqv} = \sigma^{eqv}(\alpha_{k,n+1})$ и подставим в уравнения для функций $f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1}) = 0$, где \mathbf{C} - матрица упругих модулей. Если в результате для всех $k = 1, \dots, m$ значения функций $f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1}) < 0$, то напряженное состояние принадлежит упругой области и дополнительные итерации не требуются [116].

Если для некоторых k значения $f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1}) \geq 0$, то необходимо решить полученную систему уравнений с учетом того, что в конце итерационного процесса для данных номеров k должно быть выполнено условие $f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1}) \leq 0$.

Если в процессе итерационного решения для некоторого k нарушается условие $\Delta\gamma_{k,n+1} \geq 0$, то соответствующая поверхность $f_k(\sigma_{n+1}, \alpha_{k,n+1})$ исключается из системы уравнений и итерация повторяется с начала.

2.5 Поверхности нагружения

Функции, задающие поверхность нагружения изотропного материала, должны быть инвариантными функциями напряженного состояния и не зависеть от выбора системы координат, в которой вычисляются напряжения [1,27]. Для этого будем считать их зависимыми от инвариантов тензора напряжений или от его главных напряжений

$$f_k(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad \text{или} \quad f_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

где инварианты I_1 , J_2 и J_3 имеют вид

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}, \quad J_3 = \frac{1}{3}s_{ik}s_{kj}s_{ji}$$

Тензор напряжений представляется в виде шаровой и девиаторной части как $\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3}I_1\delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера [119]. Выражение инвариантов в главных осях при условии $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

$$\cos \theta = \frac{s_1}{\sqrt{12J_2}}, \quad \text{где } s_1 = 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$$

Уравнение поверхности нагружения с использованием цилиндрической системы координат Хэйга-Вестергаарда ξ, ρ, θ [1] имеет вид $f(\xi, \rho, \theta) = 0$, где

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}I_1, \quad \rho = \sqrt{2J_2}, \quad \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}}$$

Поверхности нагружения имеют наглядное геометрическое представление в системе координат главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ось поверхности совпадает с гидростатической осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ и равнонаклонена к трем осям главных напряжений. Для описания поверхности будем рассматривать ее меридиональные и девиаторные сечения. Меридианом поверхности нагружения называется кривая пересечения между поверхностью нагружения и плоскостью, содержащей гидростатическую ось при $\theta = const$. Плоскость, перпендикулярная гидростатической оси, называется девиаторной. В силу принятой в модели изотропии материала расположение поверхности симметрично относительно гидростатической оси.

На основании имеющихся в литературе экспериментальных данных можно сделать ряд выводов о виде поверхности нагружения для бетонных образцов [1, 23, 26, 34]:

- поверхность должна быть гладкой и выпуклой;
- вид поверхности зависит от значений гидростатического давления, т.е. от первого инварианта тензора напряжений I_1 ;
- разрушение материала при гидростатическом сжатии недостижимо, в материале при этом развиваются большие неупругие деформации;

- предельные напряжения, возникающие в материале при двуосном сжатии, выше по сравнению с предельными напряжениями при одноосном сжатии;
- меридианы поверхности имеют вид параболы, радиус меридиана при одноосном растяжении ($\theta = 0^\circ$) меньше радиуса меридиана при одноосном сжатии ($\theta = 60^\circ$);
- вид поверхности на девиаторной плоскости ближе к треугольному для растягивающих и малых сжимающих напряжений и ближе к окружности для больших сжимающих напряжений.

Для численных экспериментов было выбрано два типа поверхностей нагружения: гладкая поверхность Менетри-Уильямса [126], определяемая одной функцией и кусочно-гладкая поверхность, являющаяся комбинацией поверхностей Друкера-Прагера и максимальных растягивающих напряжений Ранкина [1, 127].

2.5.1 Поверхность Менетри-Уильямса

С использованием введенных координат уравнение поверхности нагружения записывается в виде

$$\begin{aligned} f(\xi, \rho, \theta, \alpha) &= \Phi(\xi, \rho, \theta) - k_2 \cdot (\sigma^{eqv}(\alpha))^2 \\ &= (A\rho)^2 + k_1 \cdot (B\rho r(\theta) + C\xi) - k_2 \cdot (\sigma^{eqv}(\alpha))^2 = 0 \end{aligned}$$

где функция $\sigma^{eqv}(\alpha)$ в начальный момент нагружения и коэффициенты A, B, C равны

$$\begin{aligned} \sigma^{eqv}(\alpha) &= \frac{f_c}{3} \text{ при } \alpha = 0 \\ A &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{f_c}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{6}f_c}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{3}f_c} \end{aligned}$$

и f_c - прочность материала при одноосном сжатии. Константы k_1 и k_2 определяются исходя из экспериментальных данных. Эволюция поверхности нагружения в процессе деформирования определяется величиной $\sigma^{eqv}(\alpha)$.

Функция $r(\theta)$, заданная на секторе $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$, определяет контур поверхности на девиаторной плоскости

$$r(\theta) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1)[4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e]^{1/2}}$$

где параметр e является константой и определяет степень округлости контура поверхности. Вдоль меридиана растяжения, когда $\theta = 0$ функция $r(\theta) = \frac{1}{e}$, вдоль меридиана сжатия при $\theta = 60^\circ$ функция $r(\theta) = 1$.

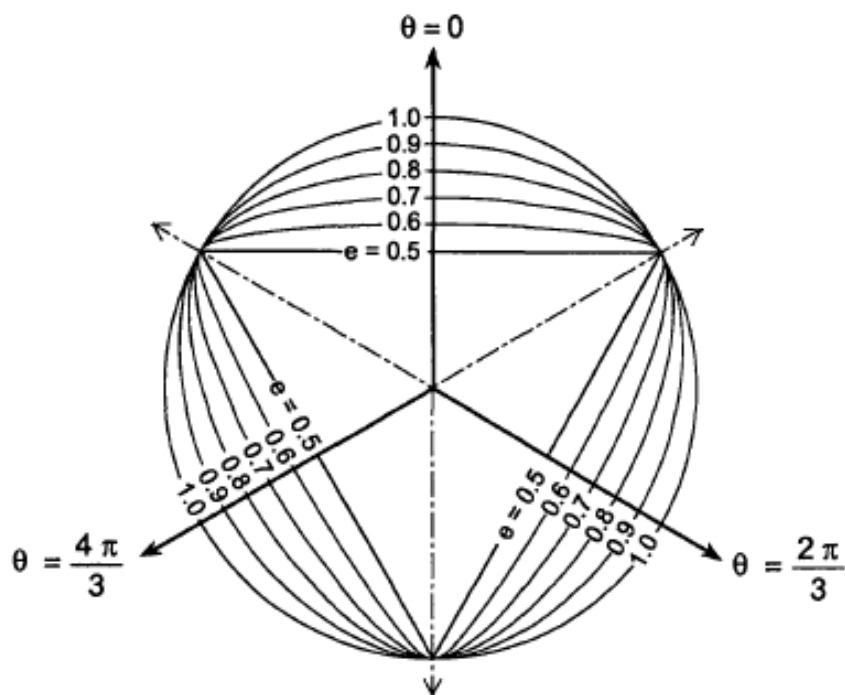


Рисунок 2.2: Вид поверхности Менетри-Уильямса на девиаторной плоскости при различных значениях параметра e [126].

Продолжение функции $r(\theta)$ для всех значений θ определяется за счет симметричного отображения относительно проекции осей главных напряжений на девиаторную плоскость.

Вид поверхности на девиаторной плоскости гладкий и выпуклый при условии $0.5 < e \leq 1$. В случае $e = 1$ - круг, при $e = 0.5$ - треугольник. За счет слагаемого $A\rho^2$ кривая на девиаторной плоскости стремится к кругу в случае возрастания всестороннего давления, т.е. при больших значениях ξ . Меридианы поверхности имеют форму параболы. При одноосном сжатии и растяжении меридианы различны, когда $0.5 < e < 1$. В вершине поверхность нагружения имеет особенность, координаты вершины $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{k_2 \cdot \sigma^{eqv}(\alpha)}{\sqrt{3}k_1 C}$.

На рисунке 2.3 на графике А представлены меридианы поверхности нагружения Менетри-Уильямса при растяжении и сжатии для различных значений

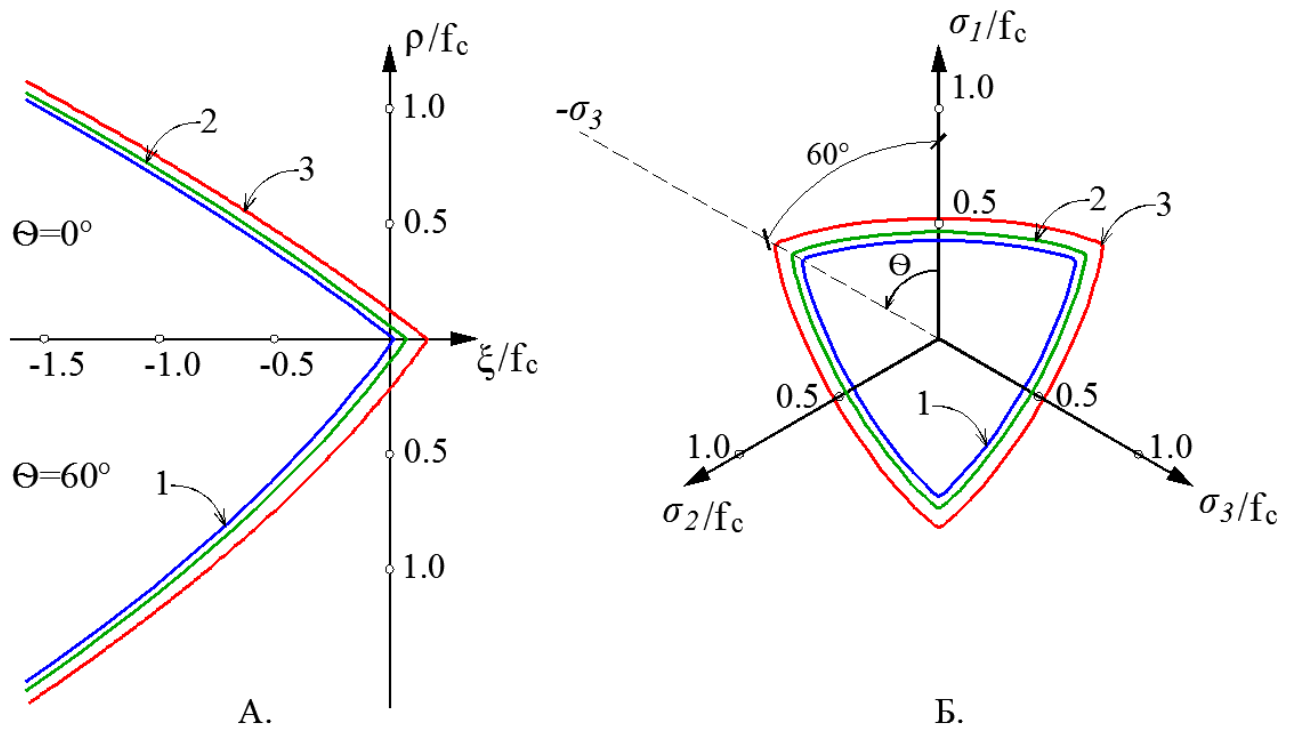


Рисунок 2.3: Эволюция поверхности в процессе нагружения при различных значениях $\sigma^{eqv}(\alpha)$.

$\sigma^{eqv}(\alpha)$. Кривая 1 - в момент $\sigma^{eqv} = \frac{f_c}{3}$, кривая 2 - в момент $\sigma^{eqv} = \frac{2f_c}{3}$, кривая 3 - в момент $\sigma^{eqv} = f_c$. На графике Б представлены соответствующие виды поверхности нагружения на девиаторной плоскости при $\xi = -\frac{f_c}{\sqrt{3}}$, т.е. в случае одноосного сжатия.

Для определения коэффициентов k_1 и k_2 необходимо воспользоваться опытами на одноосное сжатие и растяжение. В случае, когда функция $\sigma^{eqv}(\alpha)$ отражает прочность материала при одноосном сжатии, коэффициенты принимают значения

$$k_1 = \frac{f_c^2 - f_t^2}{f_c f_t} \frac{3e}{e+1}, \quad k_2 = \frac{1}{f_c^2}$$

где f_t - прочность материала при одноосном растяжении (tensile strength).

Подходящее значение параметра e можно определить исходя из значения прочности материала матрицы при двуосном сжатии f_{bc} (biaxial compressive strength). При $e = 0.5$ в случае плоского напряженного состояния при $\sigma_3 = 0$ получим, что $f_{bc} = f_c$, при $e = 1$ значение f_{bc} увеличивается в разы по сравнению с f_c .

Если функция $\sigma^{eqv}(\alpha)$ отражает прочность материала при одноосном растяжении, то в соответствии с выражением (2.4) необходимо в уравнении поверхности нагружения $f(\xi, \rho, \theta, \alpha)$ заменить последнее слагаемое на $k_2 \cdot \sigma^{eqv}(\alpha)$ и принять равным в начальный момент нагружения $\sigma^{eqv}(0) = f_t$ и $k_2 = \frac{1}{f_t}$.

2.5.2 Поверхность Ранкина-Друкера-Прагера

Данная кусочно-гладкая поверхность нагружения состоит из двух поверхностей: в области положительных напряжений используется поверхность максимальных главных напряжений Ранкина, в области отрицательных - поверхность Друкера-Прагера.

Согласно критерию максимальных растягивающих напряжений Ранкина возникновение неупругих деформаций в материале начинается, когда максимальное растягивающее напряжение в точке материала достигнет предельной величины, равной прочности материала при одноосном растяжении f_t . Уравнения поверхности нагружения:

$$\sigma_1 = \sigma_1^{eqv}(\alpha_1), \quad \sigma_2 = \sigma_1^{eqv}(\alpha_1), \quad \sigma_3 = \sigma_1^{eqv}(\alpha_1)$$

$$\sigma_1^{eqv}(\alpha_1) = f_t \text{ при } \alpha_1 = 0$$

где функция $\sigma_1^{eqv}(\alpha_1)$ отражает изменение прочности материала при одноосном растяжении и в начальный момент нагружения равна величине f_t .

В пространстве главных напряжений данная поверхность представляется в виде трех плоскостей, перпендикулярных осям σ_1, σ_2 и σ_3 , соответственно, см. рисунок 2.4. Критерий полностью определяется одним параметром f_t .

Инвариантная запись критерия Ранкина

$$f_1(\xi, \rho, \theta, \alpha_1) = \sqrt{2}\rho \cos \theta + \xi - \sqrt{3}\sigma_1^{eqv}(\alpha_1) = 0$$

Критерий Друкера-Прагера представляет собой гладкую аппроксимацию шестигранной пирамиды поверхности нагружения Кулона-Мора и записывается в виде

$$f_2(\xi, \rho, \alpha_2) = \Phi_2(\xi, \rho) - \sqrt{2}k_2 \cdot \sigma_2^{eqv}(\alpha_2) = \rho + \sqrt{6}k_1 \cdot \xi - \sqrt{2}k_2 \cdot \sigma_2^{eqv}(\alpha_2) = 0$$

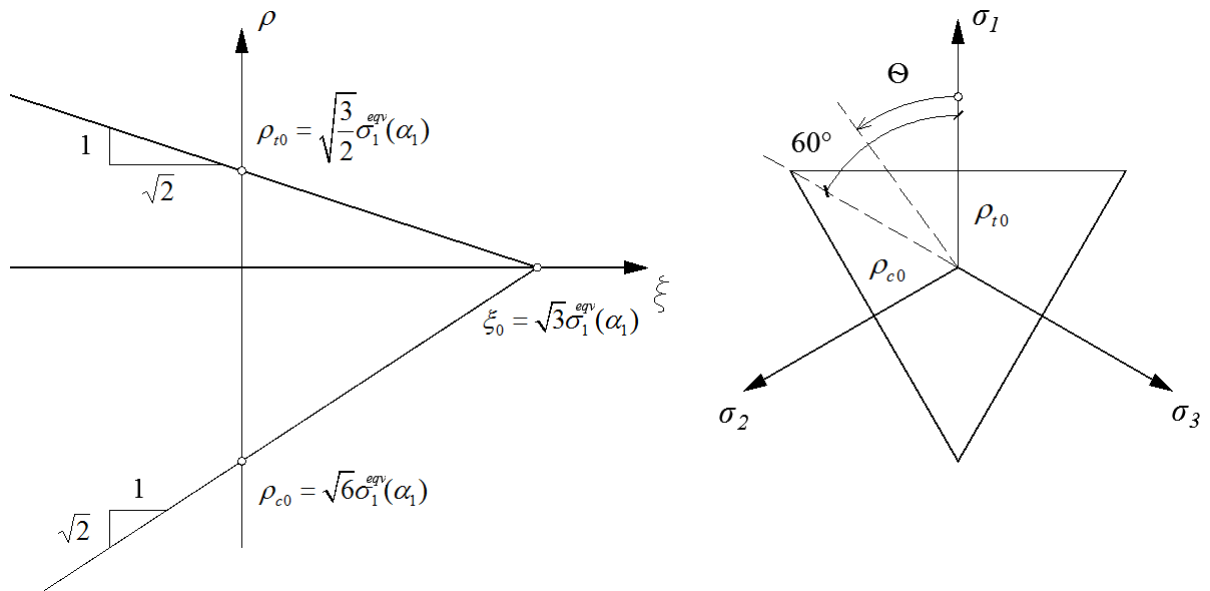


Рисунок 2.4: Меридианы сжатия и растяжения и вид на девиаторной плоскости поверхности нагружения Ранкина

где функция $\sigma_2^{eqv}(\alpha_2)$ отражает изменение прочности материала при одноосном сжатии и в начальный момент нагружения равна величине $\sigma_2^{eqv}(0) = \frac{f_c}{3}$.

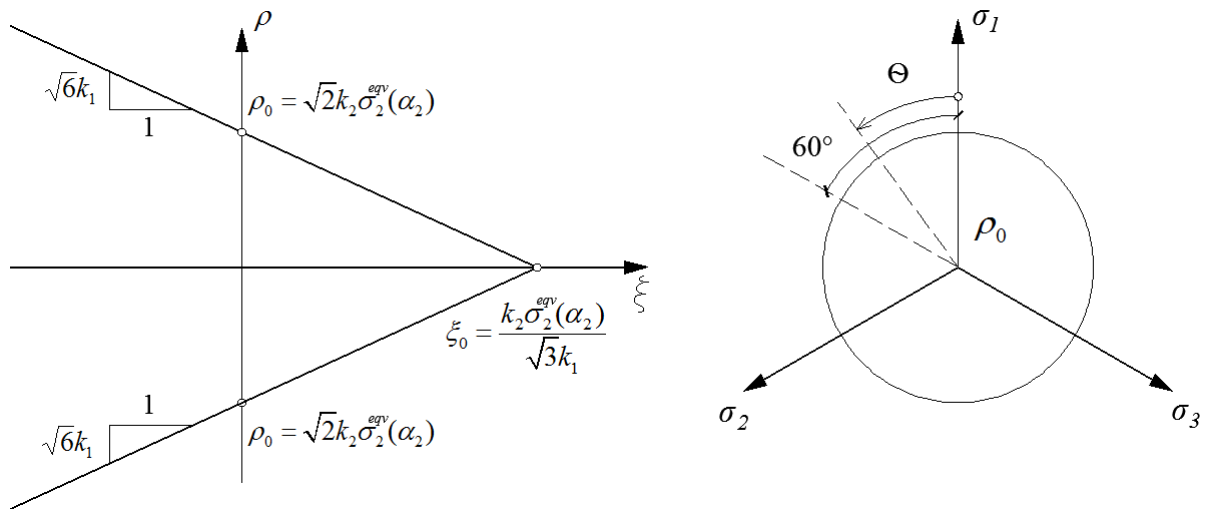


Рисунок 2.5: Меридианы сжатия и растяжения и вид на девиаторной плоскости поверхности нагружения Друкера-Прагера.

В пространстве главных напряжений функция $f_2(\xi, \rho, \alpha_2)$ определяет конус с вершиной в точке $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{k_2\sigma_2^{eqv}(\alpha_2)}{3k_1}$, см. рисунок 2.5.

Для определения коэффициентов k_1 и k_2 воспользуемся опытами на одноосное и двусное сжатие. В этом случае

$$k_1 = \frac{m-1}{\sqrt{3}(2m-1)}, \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - k_1, \quad m = \frac{f_{bc}}{f_c}$$

где f_{bc} - прочность материала матрицы при двuosном сжатии.

Вид кусочно-гладкой поверхности Ранкина-Друкера-Прагера при плоском напряженном состоянии $\sigma_3 = 0$ представлен на рисунке 2.6.

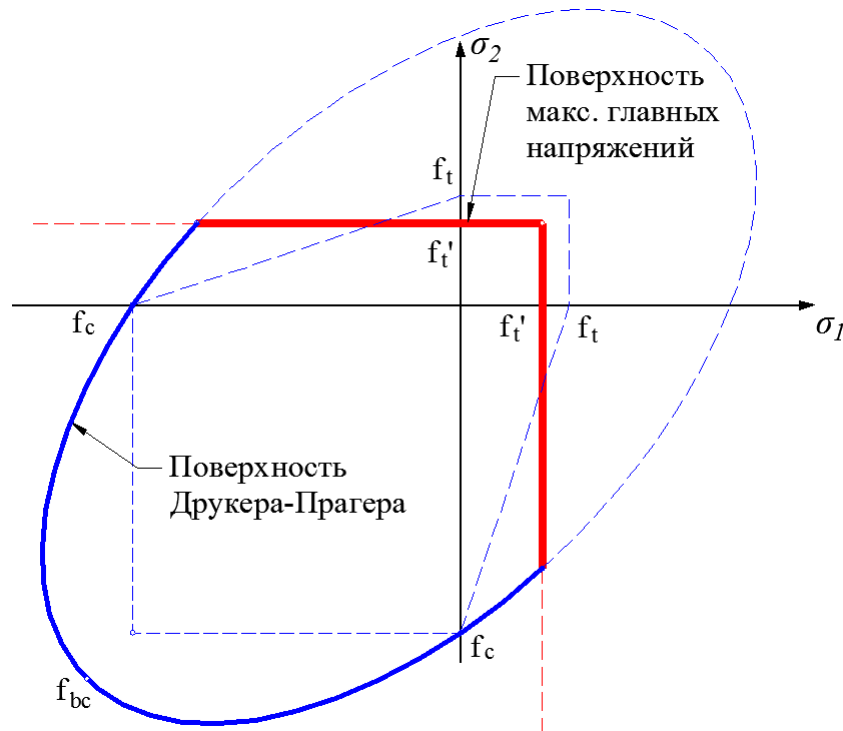


Рисунок 2.6: Вид поверхности Ранкина-Друкера-Прагера при $\sigma_3 = 0$.

2.6 Аппроксимация одноосных диаграмм напряжение-деформация

Для того, чтобы описать эволюцию поверхности нагружения в случае произвольного нагружения необходимо соотнести изменение эквивалентного напряжения $\sigma^{eqv}(\alpha)$, определяющего размер поверхности, с экспериментальными одноосными диаграммами напряжение-деформация для испытуемого образца [14, 115].

Исходя из определяющих соотношений, представленных в пункте 2.1, уравнения для скорости изменения внутреннего параметра и поверхности нагружения в одномерном случае принимают вид

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}_{11}^i|$$

$$f(\sigma_{11}, \alpha) = \sigma_{11} - \sigma^{eqv}(\alpha) = \sigma_{11} - (\sigma_0^{eqv} + q(\alpha)) = 0$$

где $\dot{\varepsilon}_{11}^i$ и σ_{11} - скорость неупругих деформаций и значения напряжений в направлении действия приложенного к телу усилия.

Таким образом, скорость изменения внутреннего параметра совпадает по модулю со скоростью неупругих деформаций, а функция $\sigma^{eqv}(\alpha)$ равна значению предельного напряжения в материале σ_{11} при $\alpha > 0$. В начальный момент нагружения $\alpha = 0$ и $\sigma^{eqv}(0) = \sigma_0^{eqv}$, где σ_0^{eqv} - начальный предел упругости материала.

В результате, для того, чтобы описать изменение поверхности нагружения необходимо аппроксимировать зависимость растягивающих напряжений σ_{11} от накопленных неупругих деформаций материала ε_{11}^i .

Рассмотрим сначала случай одноосного растяжения образца и соответствующую диаграмму напряжение-деформация.

Процесс образования трещин и разрушения материала в случае одноосного растяжения в некоторой точке тела начинается, когда растягивающие напряжения в ней достигают предельной величины σ_0^{eqv} , равной значению прочности материала f_t . До этого момента материал ведет себя как линейно-упругий (участок 1 на диаграмме). Если в момент достижения предела прочности приложить к телу дополнительную нагрузку, то силы сцепления в материале станут падать, начнется образование макротрещин и материал будет разрушаться (участок 2 на диаграмме), см. рисунок 2.7 сверху.

На основании экспериментальных данных [1, 91, 94], для аппроксимации зависимости одноосных растягивающих напряжений от накопленных неупругих деформаций используется экспоненциальная функция, см. рисунок 2.7 снизу, в виде

$$\sigma^{eqv}(\alpha) = f_t + q(\alpha) = \sigma_{11}(\varepsilon_{11}^i) = f_t + \left(f_t \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_{11}^i}{\varepsilon_{11,0}^i}\right) - 1 \right) \quad (2.21)$$

где $\varepsilon_{11,0}^i$ определяется исходя из значений энергии разрушения при растяжении G_t .

Использование зависимости (2.21) дает наилучшее совпадение численного моделирования с экспериментальными диаграммами напряжение-деформация.

Таким образом, построенные на основании одноосного эксперимента зависимости $\sigma^{eqv}(\alpha)$ и $q(\alpha)$, определяют эволюцию поверхности нагружения в случае произвольных нагружений.

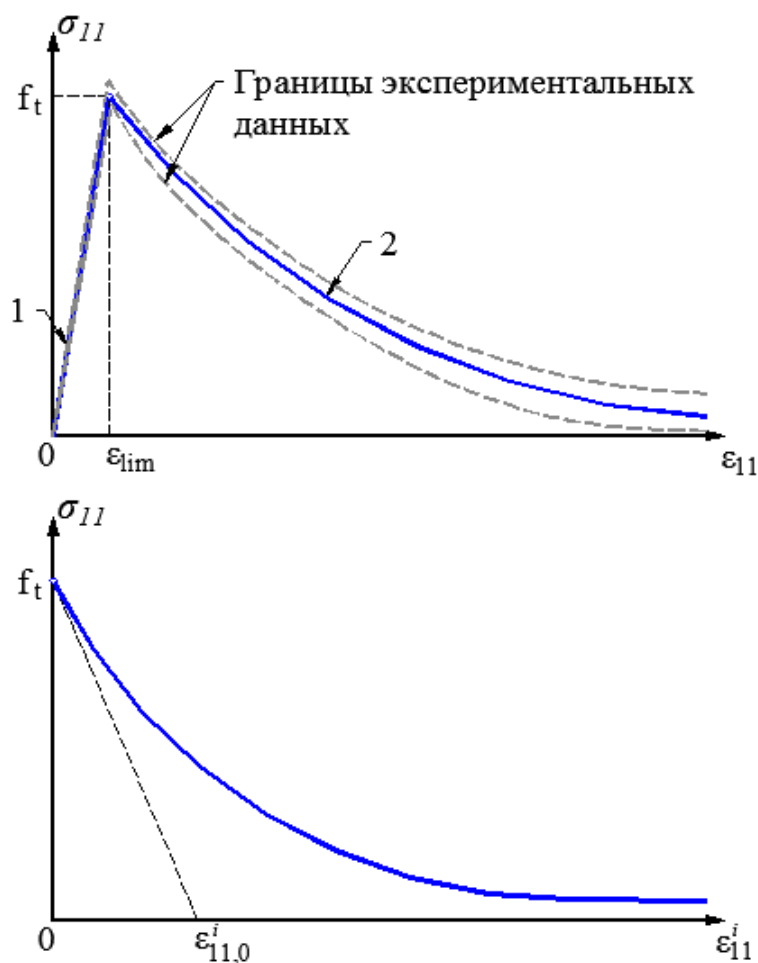


Рисунок 2.7: Диаграмма напряжение-деформация при одноосном растяжении и зависимость предельных напряжений от неупругих деформаций.

Аналогичные рассуждения применимы и при рассмотрении случая одноосного сжатия образца и соответствующей диаграммы напряжение-деформация. Процесс деформирования бетонных матриц при сжимающих нагрузках можно разделить на три участка, отмеченных на диаграмме 2.8 сверху [128]:

1. при величине сжимающих нагрузок до 30% от предельных материал ведет себя как линейно-упругий;
2. до момента достижения максимально возможных для материала напряжений наблюдается рост напряжений при увеличивающихся деформациях;

3. после достижения предельных напряжений образуются видимые трещины, прочность материала падает, происходит разрушение бетона от напряжений сдвига, действующих по определенным плоскостям, или в результате отрыва по плоскостям, перпендикулярным действующей силе.

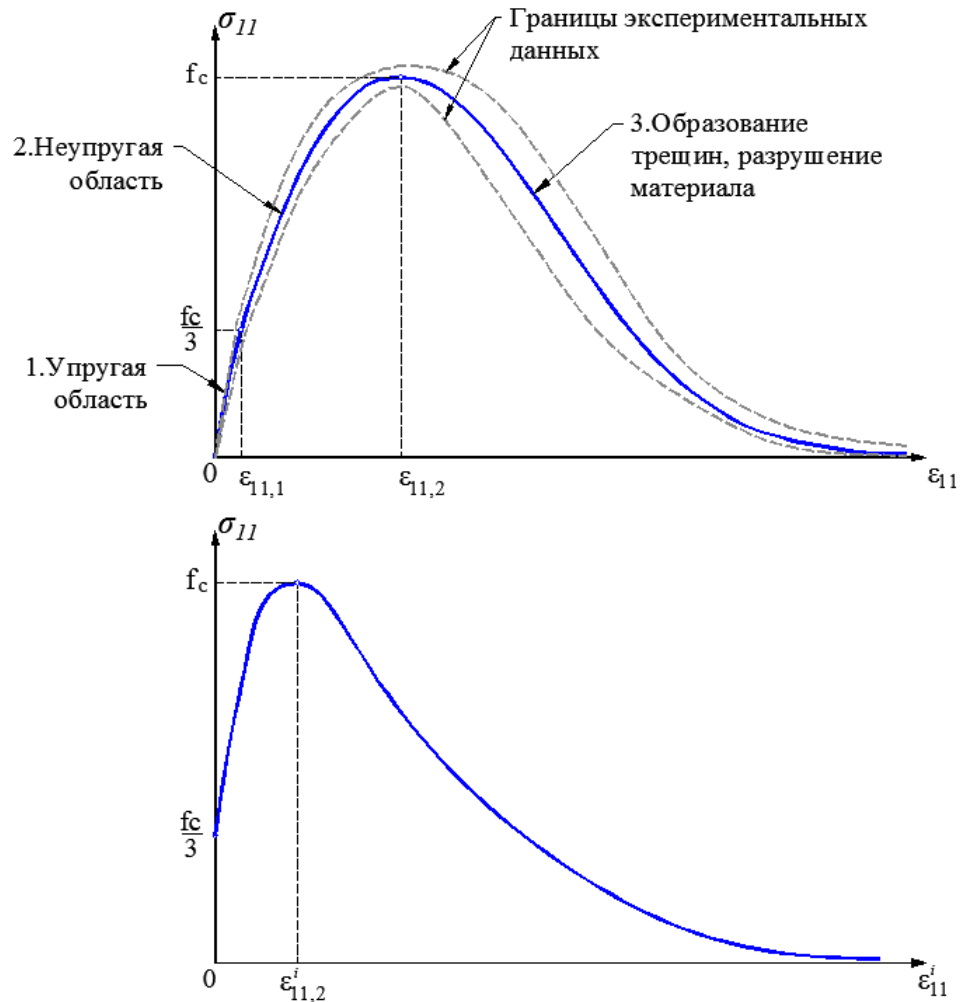


Рисунок 2.8: А. Диаграмма напряжение-деформация для бетона при одноосном сжатии. Б. Зависимость предельных напряжений от неупругих деформаций.

На первом участке полные деформации совпадают с упругими и следовательно $\epsilon_{11}^i = 0$ и $\sigma^{eqv}(0) = \sigma_0^{eqv} = \frac{f_c}{3}$. На втором и третьем участках возникают неупругие деформации, аппроксимация экспериментальных данных для функции $\sigma^{eqv}(\alpha)$ осуществляется с помощью кусочно-гладкой функции, состоящей

из ветви параболы и экспоненты:

$$\begin{aligned} \sigma^{eqv}(\alpha) &= \sigma_{11}(\varepsilon_{11}^i) = \frac{f_c}{3} + q(\alpha) \\ &= \begin{cases} \frac{f_c}{3} + \frac{f_c}{3} \cdot \left(\left(1 + 4 \frac{\varepsilon_{11}^i}{\varepsilon_{11,2}^i} - 2 \left(\frac{\varepsilon_{11}^i}{\varepsilon_{11,2}^i} \right)^2 \right) - 1 \right), & \text{для } \varepsilon_{11}^i \in [0, \varepsilon_{11,2}^i] \\ \frac{f_c}{3} + \frac{f_c}{3} \cdot \left(3 f_c \exp \left(- \left(\frac{\varepsilon_{11}^i - \varepsilon_{11,2}^i}{\varepsilon_{11,0}^i} \right)^2 \right) - 1 \right), & \text{для } \varepsilon_{11}^i \in [\varepsilon_{11,2}^i, +\infty] \end{cases} \end{aligned}$$

где f_c - прочность материала при одноосном сжатии, $\varepsilon_{11,2}^i$ - значения неупругих деформаций, соответствующих максимальному сжимающему напряжению, E - модуль упругости материала, $\varepsilon_{11,0}^{cr}$ определялась исходя из значений энергии разрушения при сжатии $G_c \approx 100G_t$.

Принимая $\alpha \equiv \varepsilon_{11}^i$, получим окончательное выражение для эволюции поверхности нагружения в соответствии с экспериментом на одноосное сжатие образца.

2.7 Устойчивость решения глобальной и локальной задач

Постулат устойчивости Хилла требует положительности второй производной работы напряжений на полных деформациях $d^2W > 0$. В случае, когда $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^T : \dot{\varepsilon}_{kl}$ условие устойчивости Хилла записывается в виде

$$d^2W = C_{ijkl}^T : d\varepsilon_{ij} : d\varepsilon_{kl} > 0, \quad \forall d\varepsilon$$

В момент потери устойчивости для симметричных матриц $\det(C_{ijkl}^T) = 0$ и матрица тензора касательных модулей C_{ijkl}^T теряет положительную определенность.

Более строгий постулат устойчивости Друкера [119,129,130] требует положительности второй производной работы напряжений на неупругих деформациях $d^2W^i = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^i > 0$. Условие стабильности Друкера является достаточным (но не необходимым условием устойчивости по Хиллу), т.к. условие $d^2W^i > 0$ влечет $d^2W > 0$ ($d^2W^e > 0$ всегда).

Нарушение условия устойчивости в некоторой точке материала ведет к нарушению устойчивости всей системы, т.е. потери положительной определенности

глобальной матрицы жесткости. Стоит также отметить, что для симметричных матриц C_{ijkl}^T условие устойчивости совпадает с условием единственности решения.

Нарушение условия устойчивости может привести к потере эллиптичности уравнений равновесия (является необходимым условием, уравнения становятся гиперболическими) и следовательно к некорректной постановке краевой задачи [131].

2.8 Моделирование армирующих волокон в случае идеальной связи

В данной работе рассматриваются случаи идеальной и неидеальной связи между материалом матрицы и армирующими волокнами. В первую очередь представлен подход к моделированию армирующих волокон в случае идеальной связи, когда волокна не могут проскальзывать относительно матрицы на всем процессе деформирования [103, 132]. Случай неидеальной связи будет рассмотрен в следующем пункте.

Армирующие волокна композиционного материала моделировались как одномерное твердое тело, способное воспринимать нагрузку, только вдоль своей оси [133]. Предполагается, что распределение деформаций и напряжений в волокнах является однородным и материал обладает упругопластическими свойствами. Закон Гука и уравнения равновесия в таком случае записываются следующим образом

$$\frac{\partial \sigma(u(x))}{\partial x} + f = 0$$
$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

где $u(x)$ - перемещения вдоль оси стержня, ε - осевые деформации, состоящие из упругой ε^e и пластической ε^p составляющих, σ - осевые напряжения, f - нагрузка вдоль оси стержня, E - модуль упругости стержня.

До момента достижения предела упругости армирующие волокна ведут себя как линейно-упругий материал. После достижения предела упругости возника-

ют пластические деформации, наблюдается упрочнение материала до момента разрушения.

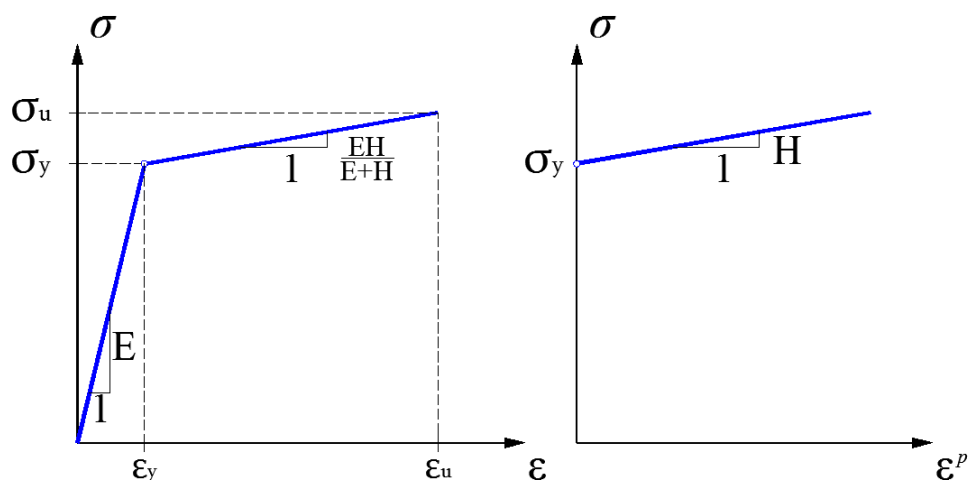


Рисунок 2.9: Диаграмма напряжение-деформация для фибры при растяжении.

Уравнение для поверхности разрушения с учетом линейного упрочнения в одномерном случае [116] записывается как

$$f = |\sigma| - q(\alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + H\alpha)$$

где σ_y - одноосный предел упругости, H - модуль упрочнения, α - внутренний параметр, отражающий величину накопленных пластических деформаций.

Стержневой конечный элемент имеет два узла, каждому узлу соответствует одна степень свободы - осевое перемещение. Аппроксимация поля перемещений между узлами считается линейной и записывает в локальной системе координат в виде

$$u(\xi) = \{N_1(\xi), N_2(\xi)\} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \left\{1 - \frac{\xi}{l_e}, \frac{\xi}{l_e}\right\} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = N(\xi)\hat{u}_e$$

где ось ξ направлена вдоль оси стержня и $N_1(\xi), N_2(\xi)$ - функции формы конечного элемента, l_e - длина элемента.

Выражение для осевой деформации имеет вид

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} = \left\{-\frac{1}{l_e}, \frac{1}{l_e}\right\} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{l_e} = B\hat{u}_e$$

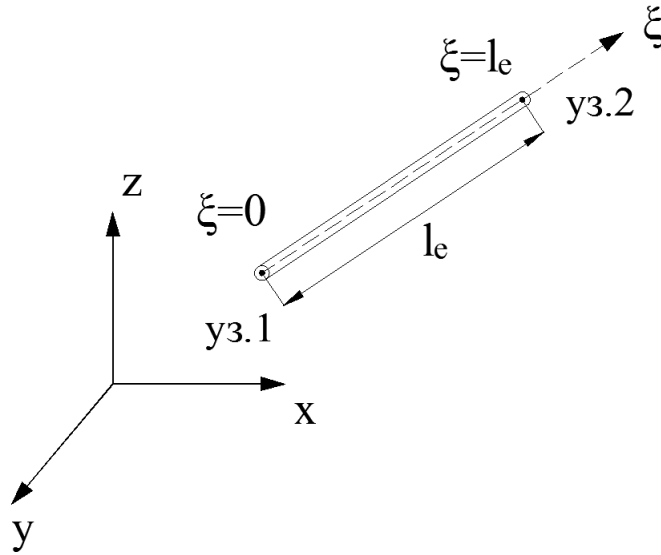


Рисунок 2.10: Стержневой конечных элемент.

Матрица жесткости стержневого элемента, моделирующего армирующие фибры, и вектор узловых сил в локальной системе координат, связанной со стержнем, записываются в виде

$$[k^{\text{фиб}}] = \frac{FE}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \{f^{\text{ext,фиб}}\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

где F - площадь поперечного сечения стержневого элемента, f_1 и f_2 - сосредоточенные в узлах внешние осевые силы, действующие на элемент.

Матрица преобразования между локальной и глобальной системой координат имеет вид

$$[T_1] = \begin{pmatrix} l_{12} & m_{12} & n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{12} & m_{12} & n_{12} \end{pmatrix}$$

где $l_{12} = \cos(\xi, x) = \frac{x_2 - x_1}{l_e}$, $m_{12} = \cos(\xi, y) = \frac{y_2 - y_1}{l_e}$ и $n_{12} = \cos(\xi, z) = \frac{z_2 - z_1}{l_e}$ - направляющие косинусы оси стержневого элемента. Величины (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) - координаты начала и конца стержневого элемента в глобальной системе координат.

Матрица жесткости и вектор узловых сил в глобальной системе координат будут иметь вид

$$[K^{\text{фиб}}] = [T_1]^T [k^{\text{фиб}}] [T_1], \quad \{F^{\text{ext,фиб}}\} = [T_1]^T \{f^{\text{ext,фиб}}\}$$

2.8.1 Встроенный стержневой элемент в случае идеальной связи

В данной работе используется модель встроенного стержневого элемента [121]. Степени свободы, связанные с узлами стержневых элементов, исключаются из системы уравнений метода конечных элементов за счет перераспределения жесткостей стержневого элемента по узлам конечного элемента материала матрицы, содержащего данный стержневой элемент.

Применение такого подхода позволяет сократить размер глобальной матрицы жесткости и производить построение конечно-элементной сетки для матрицы композита независимо от положения армирования.

Перераспределение жесткостей стержневого элемента по узлам элемента матрицы происходит с помощью матрицы весовых коэффициентов. В случае, когда стержневой элемент содержится внутри 8-ми узлового элемента в форме параллелепипеда матрица преобразования имеет вид [121]

$$[T_2] = \begin{pmatrix} N_1(\bar{\xi}_i^{\text{фиб}}) & 0 & 0 & \dots & N_8(\bar{\xi}_i^{\text{фиб}}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\bar{\xi}_i^{\text{фиб}}) & 0 & \dots & 0 & N_8(\bar{\xi}_i^{\text{фиб}}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\bar{\xi}_i^{\text{фиб}}) & \dots & 0 & 0 & N_8(\bar{\xi}_i^{\text{фиб}}) \\ N_1(\bar{\xi}_j^{\text{фиб}}) & 0 & 0 & \dots & N_8(\bar{\xi}_j^{\text{фиб}}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\bar{\xi}_j^{\text{фиб}}) & 0 & \dots & 0 & N_8(\bar{\xi}_j^{\text{фиб}}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\bar{\xi}_j^{\text{фиб}}) & \dots & 0 & 0 & N_8(\bar{\xi}_j^{\text{фиб}}) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

где $\bar{\xi}_i^{\text{фиб}}$ и $\bar{\xi}_j^{\text{фиб}}$ - координаты узлов i и j стержневого элемента в локальной системе координат 8-ми узлового элемента, которые определяются с помощью процедуры обратного отображения. N_p - функция формы p -го узла параллелепипеда.

С помощью матрицы $[T_2]$ получим окончательное выражение для матрицы жесткости встроенного стержневого элемента в глобальной системе координат

$$[K^{\text{фиб}}] = [T_2]^T [T_1]^T [k^{\text{фиб}}] [T_1] [T_2]$$

Граничные нагрузки задаются в узлах трехмерных элементов, так как узлы стержневых элементов исключаются из расчета.

В процессе ассамблирования матрица жесткости для трехмерного конечного элемента материала матрицы и пересекающих ее $N_{\text{фиб}}$ встроенных стержневых элементов определяется согласно выражению

$$K^{\text{комп}} = K^{\text{матр}} + \sum_{i=1}^{N_{\text{фиб}}} K_i^{\text{фиб}} \quad (2.23)$$

где $K^{\text{комп}}$ - матрица жесткости композита, $K^{\text{матр}}$ - матрица жесткости материала матрицы, $K_i^{\text{фиб}}$ - матрица жесткости i -го встроенного стержневого элемента.

Теперь поясним процесс построения матрицы (2.22). Процедура обратного отображения подразумевает решение задачи об определении локальных координат некоторой точки $\vec{\xi}^{\text{фиб}}$, принадлежащей области параллелепипеда, по ее глобальным координатам (см. рисунок 2.11). Данная задача является нелинейной и заключается в минимизации скалярной функции невязки [134]

$$f(\vec{\xi}^{\text{фиб}}) = \left(\vec{x}^{\text{фиб}} - \sum_{p=1}^{N_{\text{node}}} N_p(\vec{\xi}^{\text{фиб}}) \vec{x}^p \right)^2$$

где $\vec{x}^{\text{фиб}}$ и \vec{x}^p - известные глобальные координаты точки, для которой ищется ее локальная координата, и глобальные координаты узлов параллелепипеда. На первой итерации, в качестве начального приближения для точки $\vec{\xi}^{\text{фиб}}$ выбиралось значение центра масс параллелепипеда в локальной системе координат.

В искомой точке $\vec{\xi}^{\text{фиб}}$ функция невязки должна иметь минимум и $f(\vec{\xi}^{\text{фиб}}) = 0$. Для минимизации невязки использовался метод градиента, согласно которому в искомой точке должно быть выполнено условие

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = 0$$

Тогда итерационный процесс записывается следующим образом

$$\Delta \vec{\xi}^{\text{фиб}} = -\frac{1}{2} H^{-1} \vec{g}$$

где H - гессиан функции f , $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$.

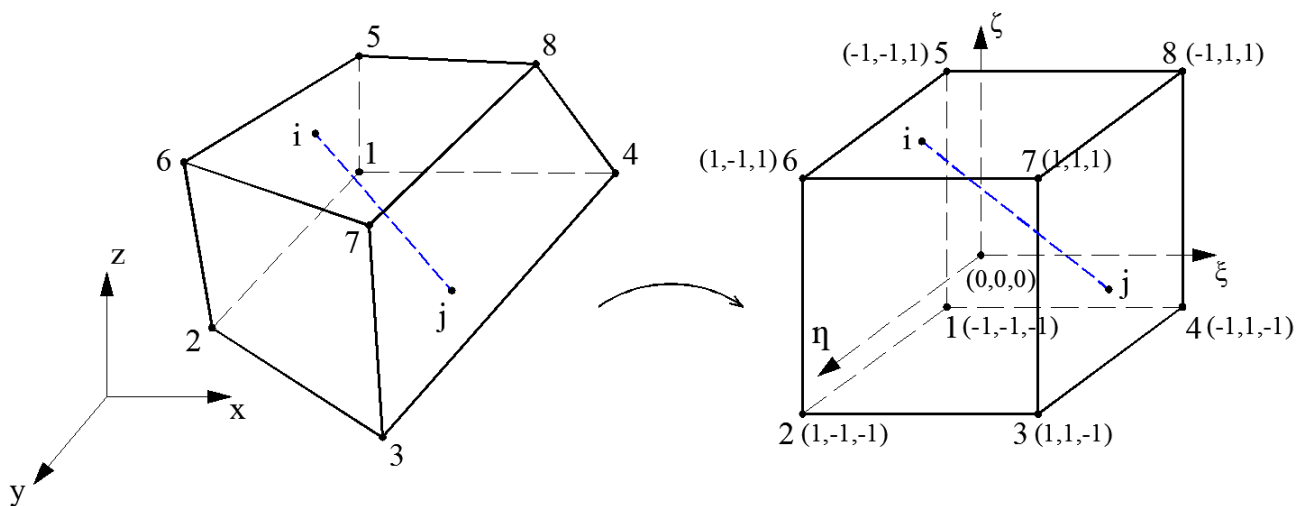


Рисунок 2.11: Процедура обратного отображения для определения локальных координат узлов стержневого элемента.

2.9 Моделирование связи между материалом матрицы и армирующими волокнами

Связь между материалом матрицы и армирующими волокнами характеризуется законом изменения напряжения связи в зависимости от величины проскальзывания армирующего элемента относительно поверхности матрицы. Для неидеальной связи можно выделить следующие основные черты соответствующего закона

1. до момента достижения максимальных напряжений связи преобладают силы адгезии;
2. к моменту достижения максимальных напряжений связи в бетоне образуются трещины, силы адгезии разрушаются;
3. в последующие моменты передача усилий осуществляется за счет механических сил трения.

На диаграмме представлены характерные зависимости напряжение связи-скольжение для стальных фибр с отгибами и гладких фибр.

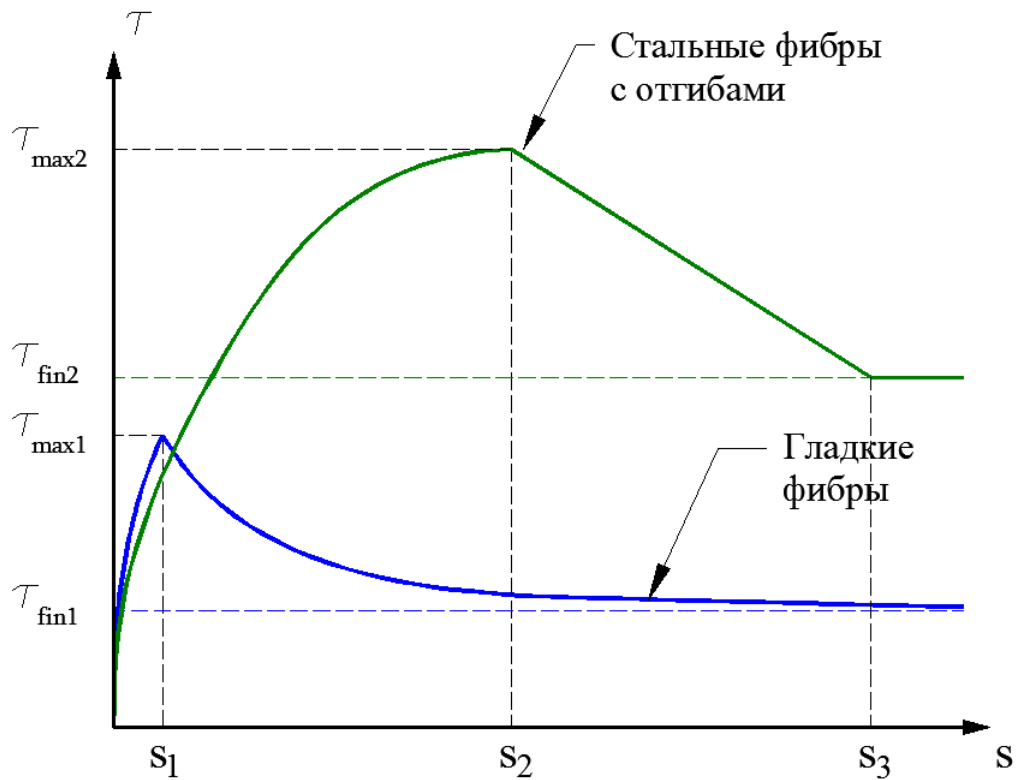


Рисунок 2.12: Диаграммы напряжение связи-скольжение.

Аппроксимация для фибр с гладкой поверхностью состоит из двух участков [114]

$$\tau(s) = \begin{cases} \tau_{max1} e^{s/s_1} & \text{для } s \in [0, s_1] \\ \tau_{fin1} + (\tau_{max1} - \tau_{fin1}) e^{k(s_1-s)} & \text{для } s \in [s_1, +\infty] \end{cases}$$

Аппроксимация для стальных фибр с отгибами состоит из трех участков

$$\tau(s) = \begin{cases} \tau_{max2} e^{s/s_2} & \text{для } s \in [0, s_2] \\ \tau_{max2} - (\tau_{max2} - \tau_{fin2}) \frac{s-s_2}{s_3-s_2} & \text{для } s \in [s_2, s_3] \\ \tau_{fin2} & \text{для } s \in [s_3, +\infty] \end{cases}$$

2.9.1 Встроенный стержневой элемент в случае неидеальной связи

Моделирование неидеальной связи происходит с помощью специального конечного элемента. Предполагается, что элемент связи соединяет узел материала матрицы с соответствующим узлом стержневого элемента, которые до начала деформирования имеют одинаковые координаты. Данный элемент можно визуально представить в виде нелинейной пружины, в процессе нагружения пружина деформируется и узлы испытывают относительное смещение, см. рисунок 2.13.

Явный подход к моделированию связи между армирующими волокнами и материалом матрицы предполагает создание двойных узлов на концах стержневых элементов, что накладывает существенные ограничения на построение конечно-элементной сетки. Неявный подход заключается в дополнении матрицы жесткости встроенного стержневого элемента величинами, отражающими жесткости связи на его концах. Для этого рассмотрим систему, состоящую из одного стержня и двух элементов связи [121], как представлено на рисунке 2.13.

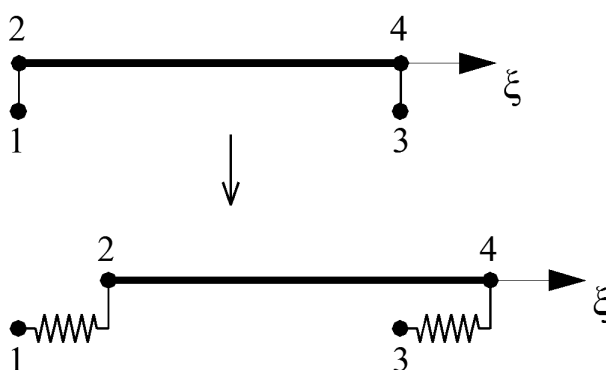


Рисунок 2.13: Проскальзывание стержневого элемента в процессе деформирования. 1,3 - узлы материала матрицы; 2,4 - узлы стержня.

Матрица жесткости, соответствующая данной системе складывается из трех слагаемых - матриц жесткости стержня и двух элементов связи, представленных на рисунке в виде пружин. Она связывает относительные перемещения материала матрицы и стержневого элемента и соответствующие узловые усилия следующим образом

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_2 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{св,н} & 0 & -k_{св,н} & 0 \\ 0 & k_{св,к} & 0 & -k_{св,к} \\ -k_{св,н} & 0 & k_{ст} + k_{св,н} & -k_{ст} \\ 0 & -k_{св,к} & -k_{ст} & k_{ст} + k_{св,к} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_4 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

где $k_{ст}$ - жесткость стержневого элемента, $k_{св,н}$ и $k_{св,к}$ - жесткости связи в начале и конце стержневого элемента. Жесткость связи в каждом из узлов равна произведению модуля связи, определяемого в соответствии с выбранным законом связи, на половину площади поверхности стержневого элемента.

Введем отдельные обозначения для степеней свободы связанных с узлами матрицы и армирующих элементов и перепишем систему уравнений (2.24) в виде

$$\begin{pmatrix} f_{\text{бт}} \\ f_{\text{ст}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\text{бт,бт}} & K_{\text{бт,ст}} \\ K_{\text{бт,ст}} & K_{\text{ст,ст}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{\text{бт}} \\ d_{\text{ст}} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Согласно модели встроенного стержневого элемента в глобальной матрице жесткости учитываются степени свободы только элементов матрицы композита, поэтому степени свободы, связанные с узлами стержня, необходимо исключить. В результате исключения $d_{\text{ст}}$ из системы уравнений (2.25), получим

$$\begin{aligned} \{f_{\text{бт}}\} - [K_{\text{бт,ст}}][K_{\text{ст,ст}}^{-1}]\{f_{\text{ст}}\} &= ([K_{\text{бт,бт}}] - [K_{\text{бт,ст}}][K_{\text{ст,ст}}^{-1}][K_{\text{бт,ст}}])\{d_{\text{бт}}\} \\ \{f_{\text{бт}}^*\} &= [K_{\text{бт,бт}}^*]\{d_{\text{бт}}\} \end{aligned}$$

где $\{f_{\text{бт}}^*\} = \{f_{\text{бт}}\} - [K_{\text{бт,ст}}][K_{\text{ст,ст}}^{-1}]\{f_{\text{ст}}\}$ и $[K_{\text{бт,бт}}^*] = [K_{\text{бт,бт}}] - [K_{\text{бт,ст}}][K_{\text{ст,ст}}^{-1}][K_{\text{бт,ст}}]$ - вектор узловых усилий и матрица жесткости встроенного стержневого элемента с учетом неидеальной связи.

Запишем выражение для $[K_{\text{бт,бт}}^*]$ в виде

$$[K_{\text{бт,бт}}^*] = \frac{k_{\text{ст}}}{1 + k_{\text{ст}}\left(\frac{1}{k_{\text{св,н}}} + \frac{1}{k_{\text{св,к}}}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Исходя из этого равенства видно, что чем слабее жесткость связи, тем меньше жесткость стержневого элемента. Перед ассамблированием матрицу $[K_{\text{бт,бт}}^*]$ необходимо преобразовать к глобальной системе координат с помощью матриц $[T_1]$ и $[T_2]$.

2.10 Моделирование структуры композита с короткими армирующими волокнами

На рисунке 2.14 представлены конечно-элементные сетки для материала матрицы и коротких армирующих волокон.

Алгоритм построения конечно-элементной структуры композита с короткими армирующими волокнами состоит из следующих шагов:

- Назначаются границы образца для численного эксперимента.

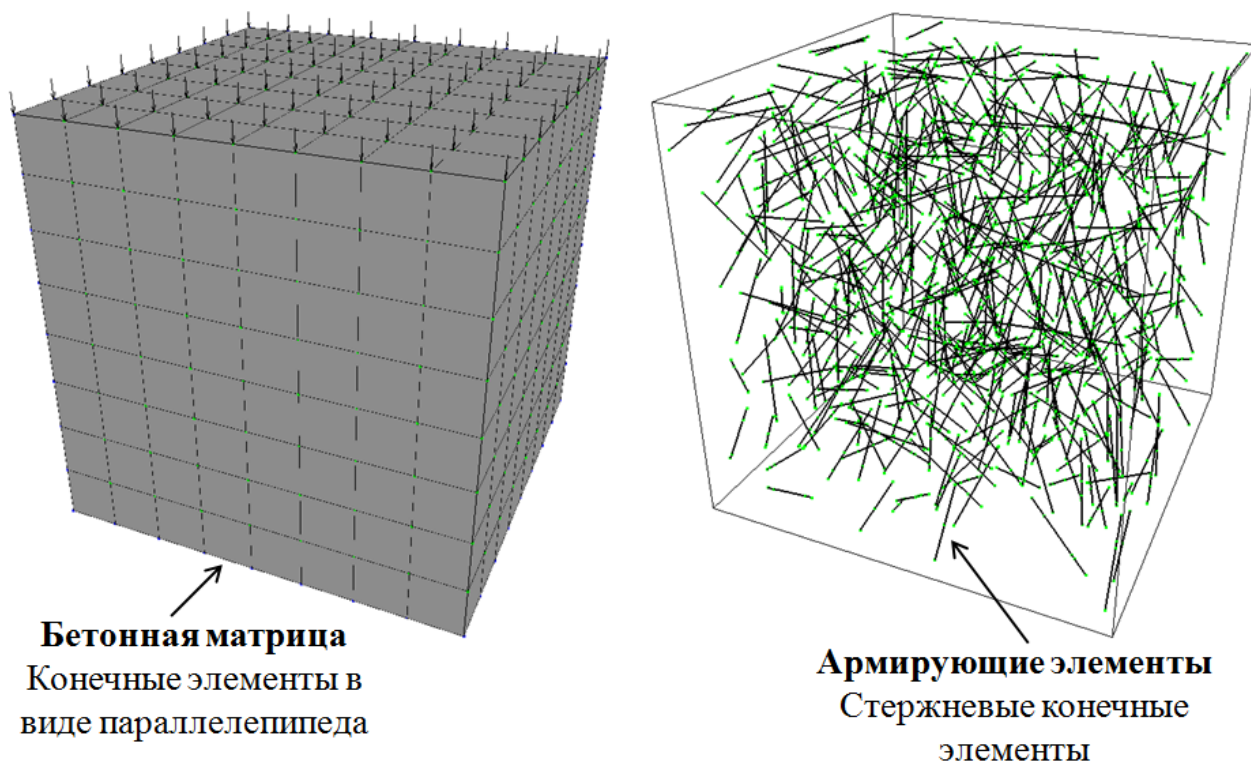


Рисунок 2.14: Конечно-элементная модель композита с короткими армирующими волокнами.

- Внутри данной области генерируются армирующие волокна в виде одномерных стержней. Координаты точки начала и вектор направления волокон задаются случайным образом. Если координаты точки начала попадают в предопределенную пользователем область уже существующего волокна, то их генерация выполняется снова до тех пор, пока условие удаленности волокон друг от друга не будет выполнено. Это обеспечивает равномерное распределение волокон в пространстве без пересечений с произвольной ориентацией.
- Выполняется построение трехмерной конечно-элементной сетки для материала матрицы.
- Узлы стержневых конечных элементов определяются как места пересечений армирующих волокон с конечно-элементной сеткой для трехмерных элементов материала матрицы.
- Матрица жесткости элемента композита определяется согласно (2.23).

2.11 Моделирование процесса нагружения

На каждом этапе нагружения необходимо было решить задачу с заданными граничными условиями в виде перемещений. Так как вариационная постановка задачи подразумевает нулевые граничные перемещения, то необходимо использование дополнительной процедуры для их учета. Известно несколько способов преодоления этого технического вопроса, в данной работе использовался способ, представленный ниже.

Вектор перемещений разделяется на две группы $\{u_1, u_2\}$: первая содержит свободные неизвестные узловые перемещения, вторая - фиксированные predetermined узловые перемещения. Соответствующим образом разделяются векторы внутренних $\{f_{int,1}, f_{int,2}\}$ и внешних $\{f_{ext,1}, f_{ext,2}\}$ усилий.

Используя данное разделение перемещений и усилий получим следующую систему уравнений равновесия

$$\begin{cases} f_{int,1}(u_1, u_2) = 0 \\ f_{int,2}(u_1, u_2) = f_{ext,2} \end{cases} \quad (2.26)$$

где для простоты вычислений предположено, что в свободных узлах u_1 внешние усилия $f_{ext,2}$ не действуют.

Решая данную систему уравнений для заданных перемещений u_2 найдем перемещения u_1 . После чего внешние усилия $f_{ext,2}$ определяются путем вычисления значения $f_{int,2}(u_1, u_2)$.

Итерационный процесс записывается следующим образом. Пусть имеется точка равновесия $u_n = (u_{1,n}, u_{2,n})$ в момент нагружения t_n . Используя линеаризованную версию первого уравнения системы (2.26) получим

$$\begin{cases} [K_{11}]_{n+1}^k \delta u_{1,n+1}^{k+1} = -F_{n+1}^{int,k} - [K_{12}]_{n+1}^k \delta u_{2,n+1}^{k+1} \\ u_{1,n+1}^{k+1} = u_{1,n+1}^k + \delta u_{1,n+1}^{k+1} \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ - номер итерации, перемещения в начале первой итерации $u_{1,n+1}^0 = u_{1,n}$ и $u_{2,n+1}^0 = u_{2,n}$. Приращения перемещений δu_2 известны заранее и

отличны от нуля только на первой итерации

$$\begin{aligned}\delta u_{2,n+1}^1 &= u_{2,n+1} - u_{2,n} \\ \delta u_{2,n+1}^{k+1} &= 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Матрицы $[K_{11}] = \partial f_{int,1}/\partial u_1$ и $[K_{12}] = \partial f_{int,1}/\partial u_2$ являются частями матрицы $[K]$:

$$[K] = \frac{\partial f_{int}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{int,1}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{int,1}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_{int,2}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{int,2}}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{pmatrix}$$

Глава 3. Численное исследование деформирования бетона с короткими армирующими волокнами

3.1 Численное моделирование эксперимента на одноосное сжатие

В работе [91] представлены экспериментально определенные диаграммы одноосного сжатия бетонных образцов, содержащих произвольно распределенные стальные волокна в объеме от 0% до 1.13%. Цель работы [91] заключалась в определении степени влияния стальных фибр на поведение бетона при сжимающих нагрузках.

Модуль Юнга $E_{\text{бет}}$ и прочность бетона при одноосном сжатии f_c без армирования составили 35.8 ГПа и 38.3 МПа, соответственно. Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{бет}}$ принимался равным 0.2.

Стальные фибры применялись длиной $l_{\text{арм}} = 30$ мм и диаметром $d_{\text{арм}} = 0.38$ мм. Модуль упругости стали был равен $E_{\text{арм}} = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{\text{арм}} = 0.28$. Предел прочности волокон равен 2300 МПа. Фибры имеют отгибы по концам для повышенного сцепления с бетоном.

Эксперименты проводились с контролем перемещений, плита нагружения перемещалась со скоростью 0.01 мм/с.

Для каждой концентрации волокон было выполнено шесть тестов на одноосное сжатие цилиндрических образцов диаметром 150 мм и высотой 300 мм. По результатам серии тестов были определены осредненные диаграммы напряжение-деформация. Основными параметрами, определяющими их вид, являются модуль Юнга E , прочность при одноосном сжатии f_c и соответствующая этому моменту деформация ε_0 [91].

Численный эксперимент.

В ходе численного эксперимента было исследовано влияние на деформирование фибробетона следующих параметров: концентрация армирующих волокон,

тип связи между матрицей и армирующими волокнами, вид поверхности нагружения матрицы композита и вид образца для эксперимента [135].

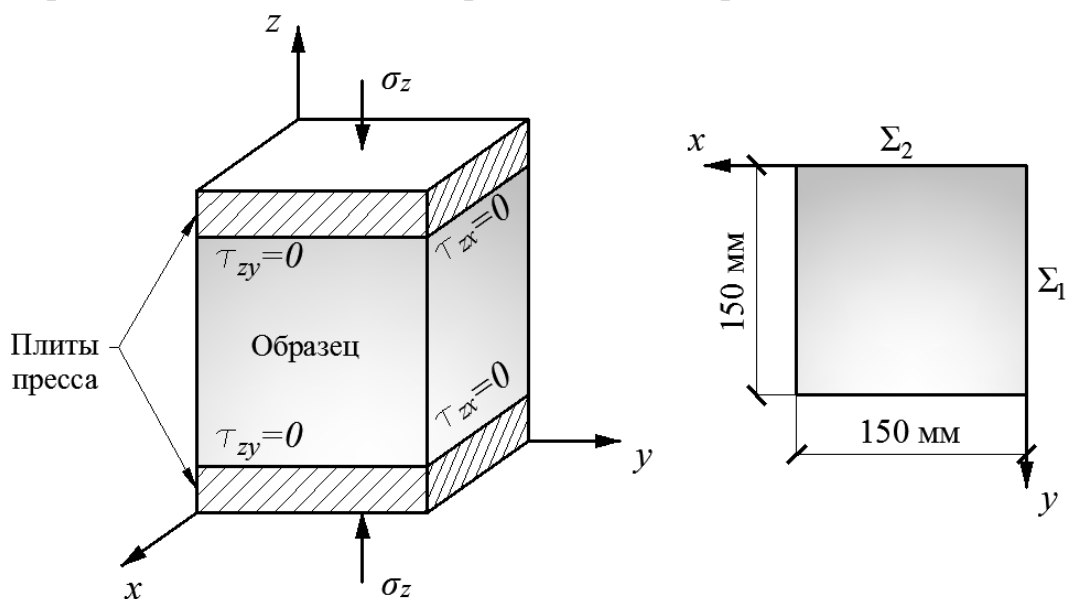


Рисунок 3.1: Схема нагружения для численного анализа.

При моделировании использовались два типа связи: идеальная и с возможностью проскальзывания волокон. В работе [91] не было указано данных о взаимодействии бетона и армирования, поэтому аппроксимация закона связи в случае неидеального контакта была построена на основании данных производителя фибр с идентичными параметрами и представлена на рисунке 3.2.

В качестве поверхности нагружения были рассмотрены случаи кусочно-гладкой поверхности Ранкина-Друкера-Прагера и гладкой поверхности Менетри-Уильямса с двумя различными значениями параметра e .

Для первой серии численных экспериментов была выбрана кубическая область со сторонами 150 мм и три регулярных конечно-элементных сетки. Первая сетка состояла из 512 кубических элементов (9 узлов с шагом 18.75 мм вдоль каждой из сторон области), вторая из 1000 элементов (11 узлов с шагом 15 мм вдоль каждой из сторон области) и третья из 1728 элементов (13 узлов с шагом 12.5 мм вдоль каждой из сторон области).

В случае объемной концентрации армирования 0.38% число волокон для численного эксперимента составило 3770 штук, для концентрации 0.75% - 7440

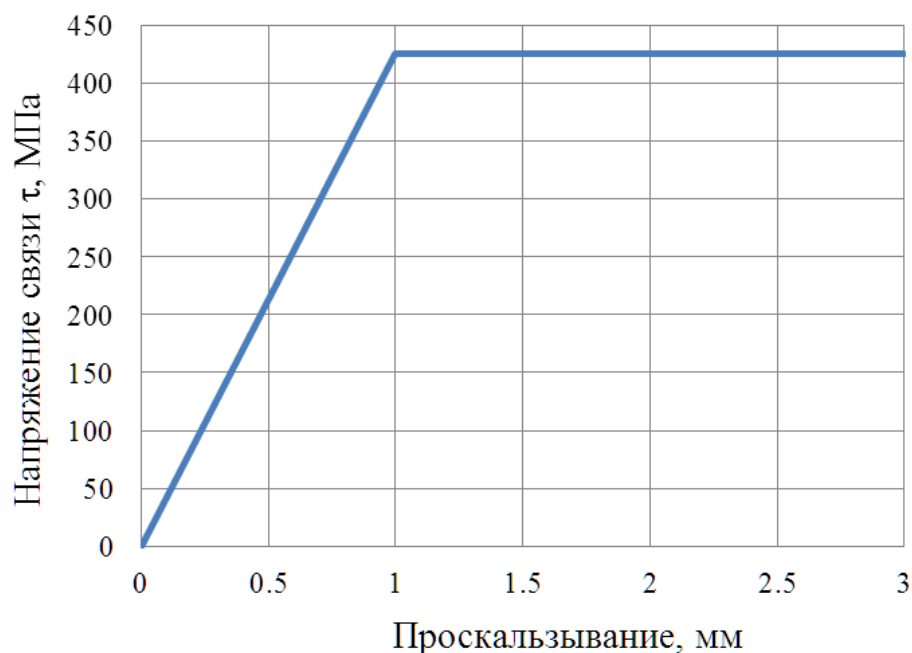


Рисунок 3.2: Диаграмма напряжение связи-скольжения для численных экспериментов.

штук, для концентрации 1.13% - 11210 штук. Число стержневых элементов для данных концентраций армирования в случае сетки из 512 кубических элементов составило 12358, 24310 и 36781 штук и в случае сетки из 1728 кубических элементов - 16998, 33228 и 50445 штук, соответственно.

Схема нагружения для численного анализа представлена на рисунке 3.1. При моделировании предполагался контакт без трения на границе плит пресса и образца, т.е. касательные напряжения равнялись нулю. Для того, чтобы образец находился в состоянии одноосного напряженного состояния на границах области Σ_1 и Σ_2 нормальные перемещения \vec{u}_n и касательные напряжения σ_{xy} принимались равными нулю.

В таблицах 3.1 и 3.2 представлены осредненные по трем конечно-элементным сеткам значения предельной прочности композита на сжатие. Данные были получены для различных комбинаций связи между бетоном и волокнами и типов поверхностей нагружения. Для соответствующих объемных концентраций волокон в таблицах также указаны значения экспериментально определенной прочности фибробетона на сжатие.

Таблица 3.1: Экспериментальные и средние численные значения одноосной прочности фибробетона f_c в случае идеальной связи, МПа

$V_f, \%$	Эксп. f_c ,	Средняя прочность f_c			Различие с эксп.,%		
		РК-ДП	МУ1	МУ2	РК-ДП	МУ1	МУ2
0.38	40	55.67	44.36	41.84	44.2	10.9	4.6
0.75	40.1	83.37	52.96	45.64	107.9	32.1	13.8
1.13	44.4	111.41	-	49.58	150.9	-	11.7

Обозначение МУ1 означает использование поверхности Менетри-Уильямса с параметром $e = 1$, МУ2 - с параметром e , определенным таким образом, чтобы наиболее точно аппроксимировать кривую напряжение-деформация при концентрации волокон 0.38%. В данном случае наилучшая аппроксимация была получена для параметра $e = 0.63$.

Таблица 3.2: Экспериментальные и средние численные значения одноосной прочности фибробетона f_c в случае неидеальной связи, МПа

$V_f, \%$	Эксп. f_c	Средняя прочность f_c			Различие с эксп.,%		
		РК-ДП	МУ1	МУ2	РК-ДП	МУ1	МУ2
0.38	40	45.99	41.13	40.00	15.0	2.8	0.0
0.75	40.1	57.80	44.29	41.82	44.1	10.5	4.3
1.13	44.4	73.49	47.63	43.58	65.5	7.3	1.9

Согласно экспериментальным данным [91] прочность фибробетона при одноосном сжатии для концентрации волокон 0.38% увеличилась на 4% по сравнению с неармированным бетоном, для концентрации 1.13% на 16%. Численное исследование также показало значительное повышение прочности композита при увеличении концентрации армирования. Наилучшее совпадение с экспериментом было получено с использованием неидеальной связи между армиру-

ющими волокнами и матрицей и гладкой поверхности нагружения с контуром на девиаторной плоскости, близким к треугольному. Различие с экспериментом в этом случае не превышает 4.3% на исследуемом диапазоне концентрации волокон.

В результате численного моделирования было установлено, что наличие неидеальной связи оказывает существенное влияние на одноосную прочность фибробетона f_c и соответствующую максимальной нагрузке деформацию ε_0 на всем диапазоне концентрации волокон и для всех поверхностей нагружения. При этом с увеличением концентрации армирования возрастает и влияние проскальзывания. В случае концентрации волокон 1.13% учет проскальзывания снижает прочность фибробетона на 34.2% для поверхности Ранкина-Друкера-Прагера и на 12.3% для поверхности Менетри-Уильямса при $e = 0.63$ по сравнению со случаем идеальной связи. Аналогичные снижения деформации ε_0 составили 17.8% и 25.2%. Данные значения являются средними по всем конечно-элементным сеткам.

На основе численных экспериментов были построены диаграммы напряжение-деформация 3.3-3.8 для одноосного сжатия кубического образца с учетом различных типов связи и для различных поверхностей нагружения.

На рисунках 3.9 и 3.10 представлено распределение осевых сжимающих напряжений в бетонной матрицы и осевых напряжений в армирующих стержневых элементах в момент пиковой нагрузки фибробетона.

Использование различных поверхностей нагружения также в значительной степени влияет на численное моделирование. Использование поверхности Ранкина-Друкера-Прагера на исследуемом диапазоне концентрации волокон дает значительное превышение предельной прочности композита по сравнению с реальным экспериментом даже в случае учета проскальзывания волокон. Варьирование параметра e для поверхности Менетри-Уильямса позволяет построить наиболее точную аппроксимацию экспериментальных данных. Для concentra-

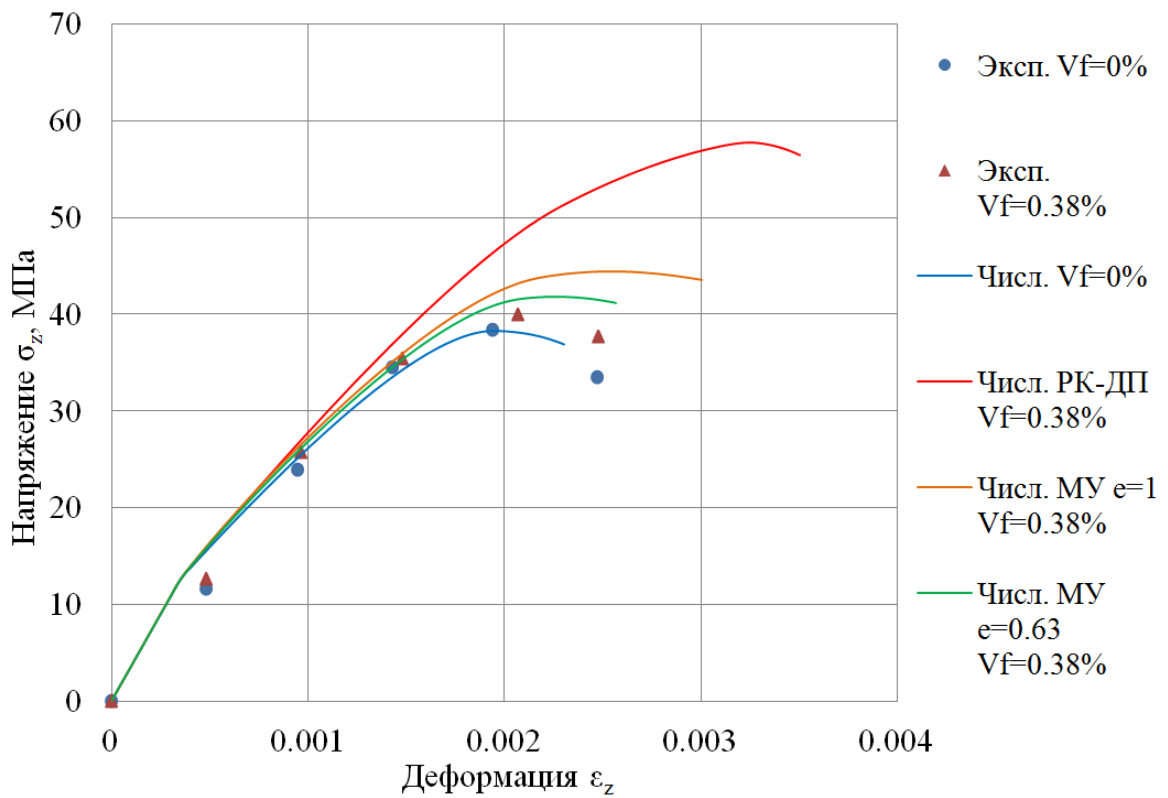


Рисунок 3.3: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 0.38% и случая идеальной связи.

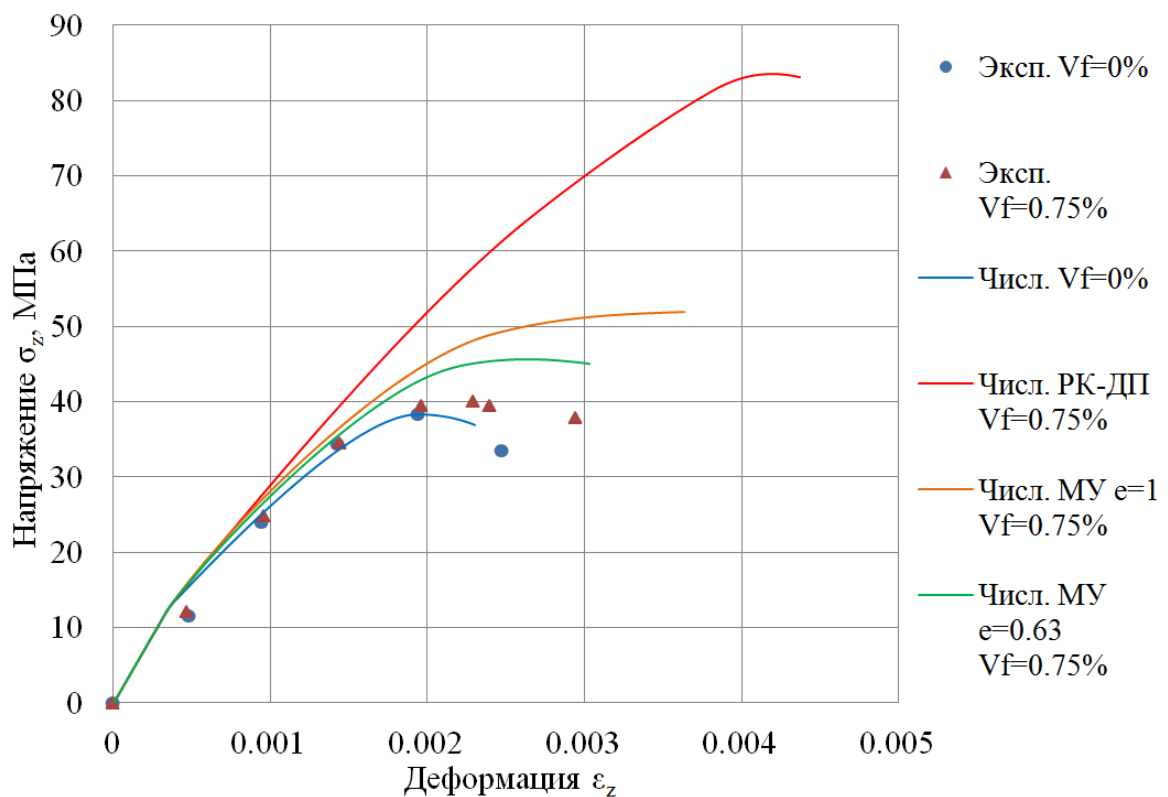


Рисунок 3.4: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 0.75% и случая идеальной связи.

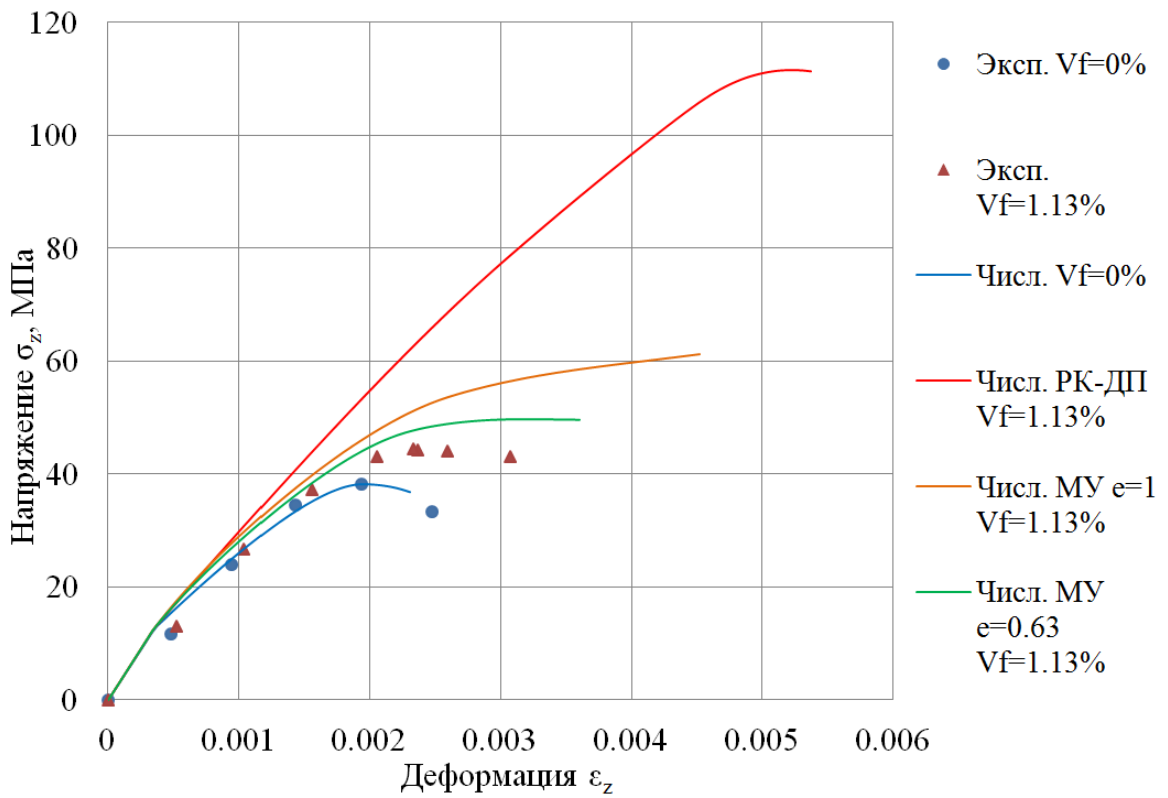


Рисунок 3.5: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 1.13% и случая идеальной связи.

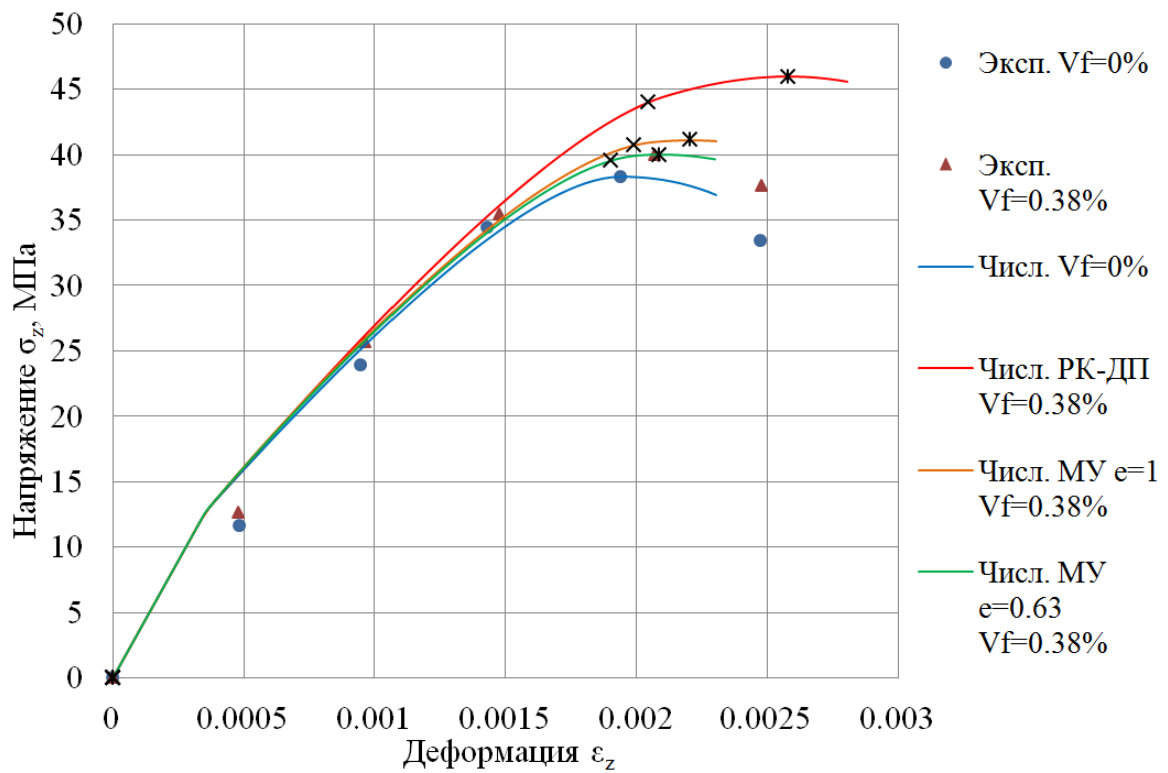


Рисунок 3.6: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 0.38% и случая неидеальной связи.

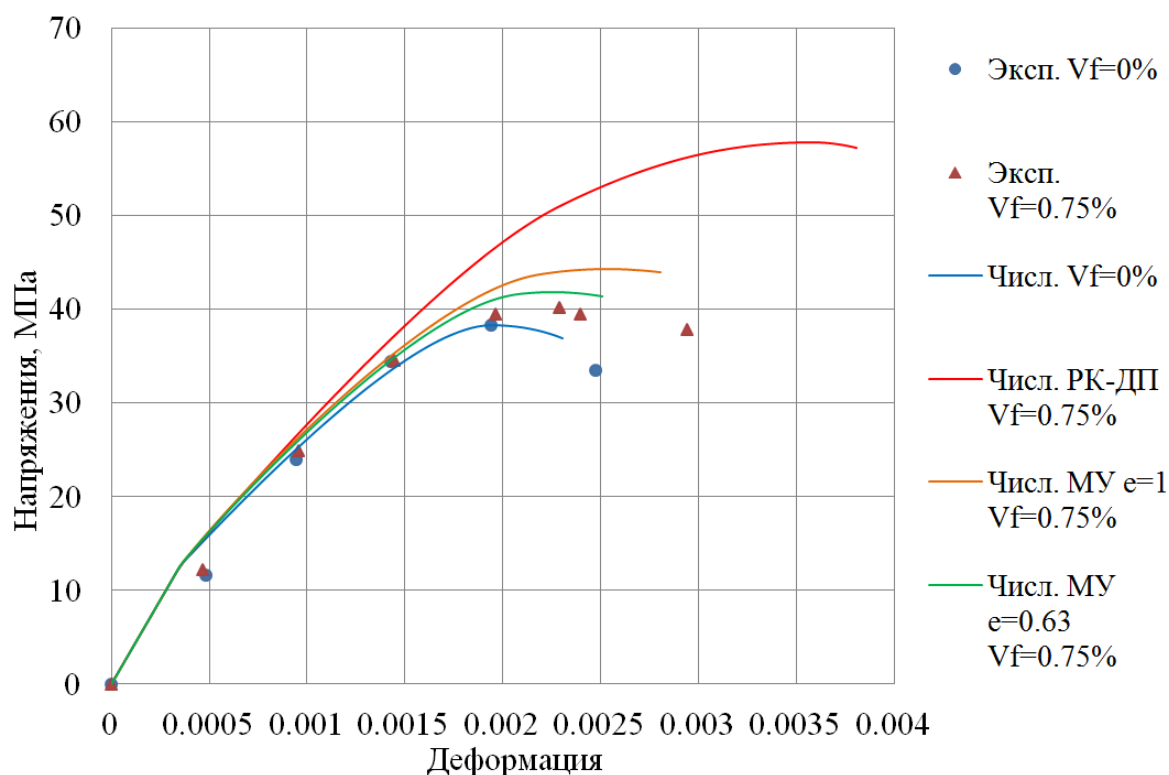


Рисунок 3.7: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 0.75% и случая неидеальной связи.

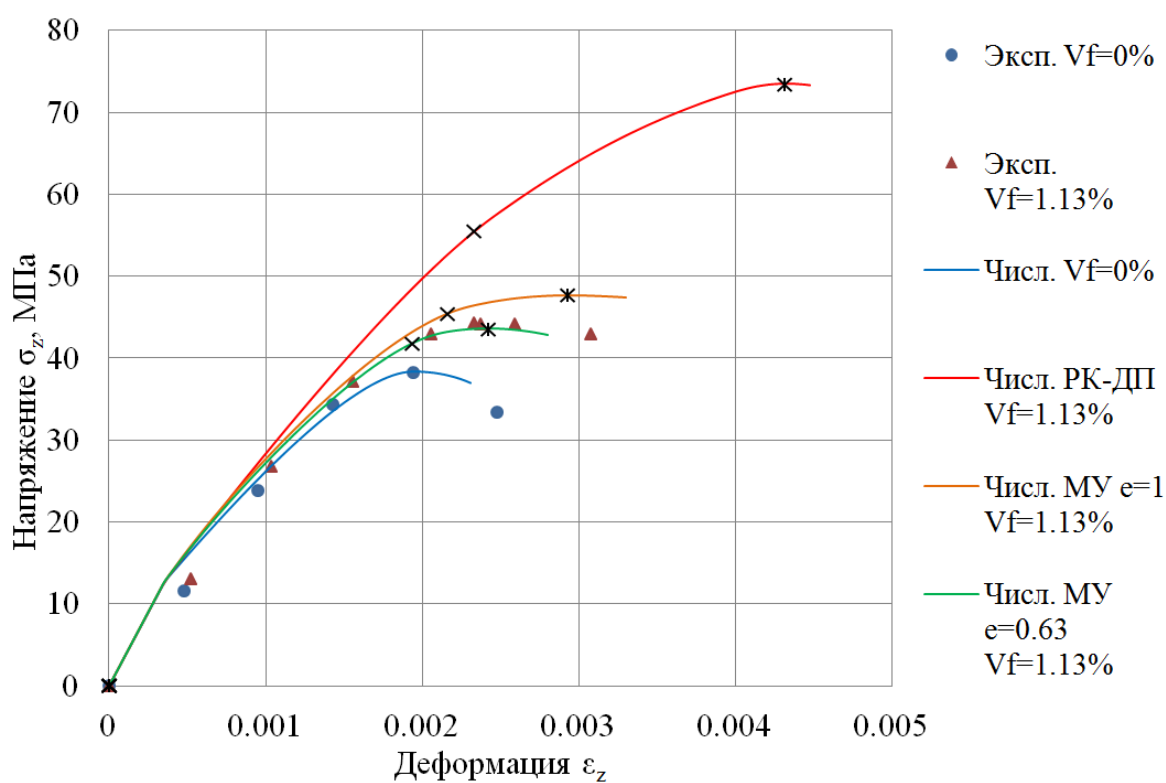
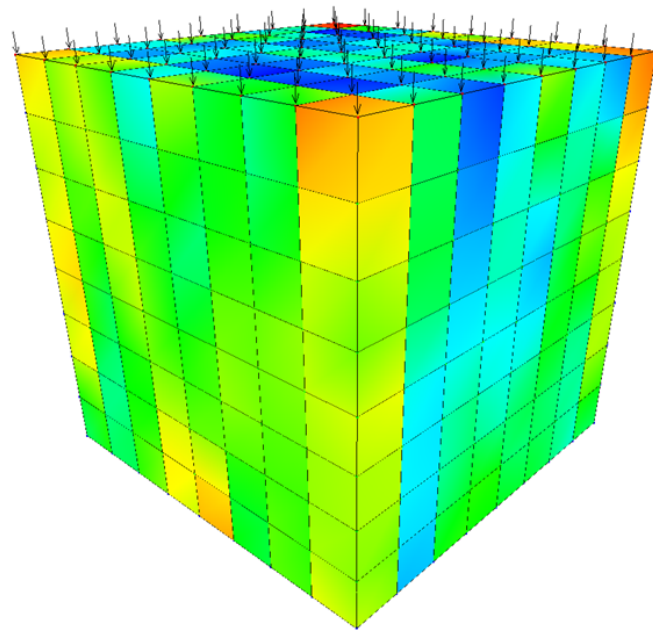
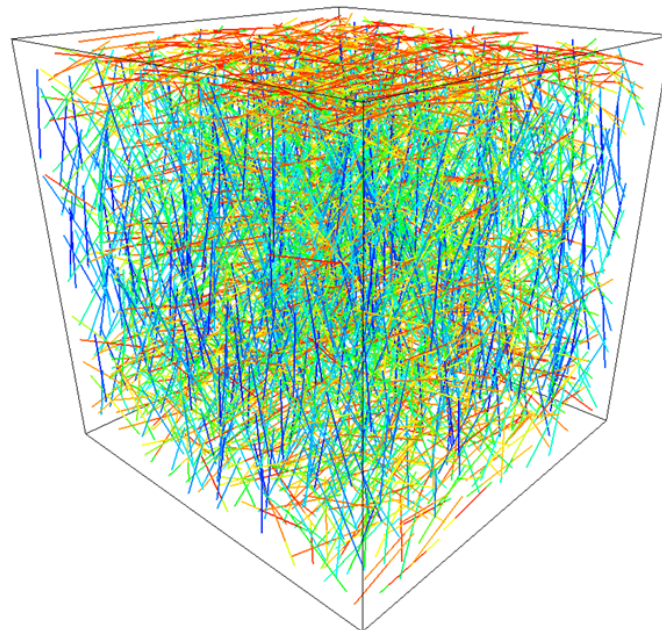
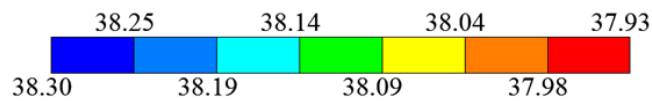


Рисунок 3.8: Диаграммы одноосного сжатия фибробетона для концентрации волокон 1.13% и случая неидеальной связи.



Осевые сжимающие напряжения в
бетонной матрице, МПа



Осевые напряжения
в волокнах, МПа

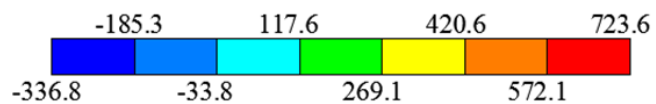
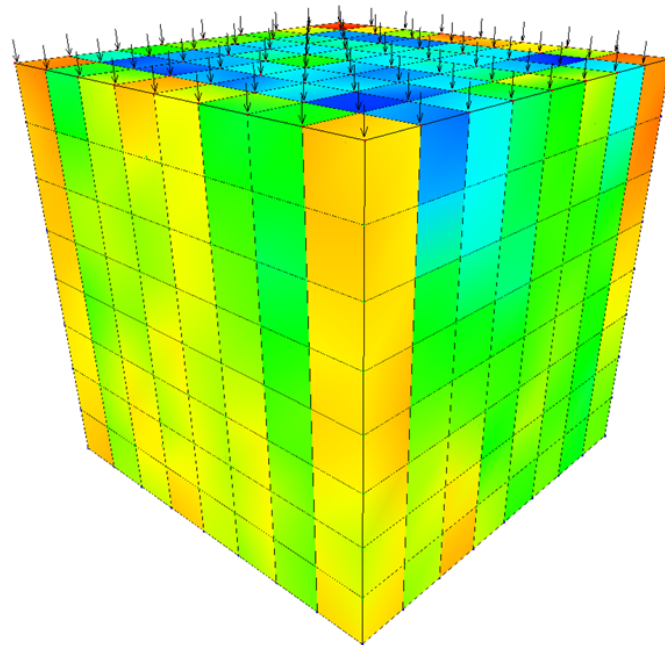
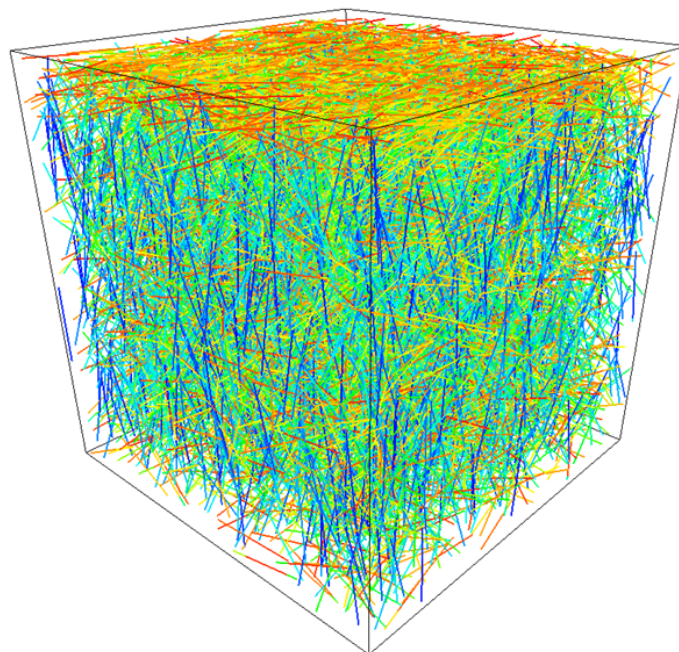
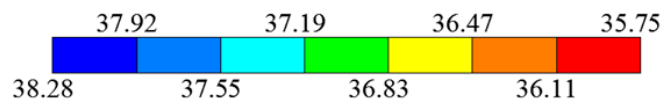


Рисунок 3.9: Напряженное состояние бетонной матрицы и армирующих элементов для концентрации волокон 0.38% в момент максимальной нагрузки для поверхности Менетри-Уильямса при $e = 0.63$ и неидеальной связи.



Осевые сжимающие напряжения в
бетонной матрице, МПа



Осевые напряжения
в волокнах, МПа

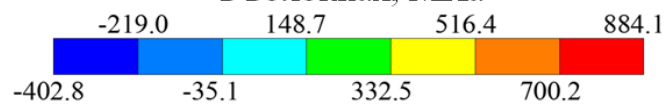


Рисунок 3.10: Напряженное состояние бетонной матрицы и армирующих элементов для концентрации волокон 1.13% в момент максимальной нагрузки для поверхности Менетри-Уильямса при $e = 0.63$ и неидеальной связи.

ции волокон 1.13% с учетом проскальзывания волокон различие с экспериментом составило 1.9%.

В работе [91] отмечено, что с увеличением концентрации фибр в образце наблюдается возрастание прочности на сжатие и процесс трещинообразования замедляется. При этом, связанные с добавлением фибр, технологические проблемы могут наоборот снизить прочность композита. В процессе твердения бетона наблюдается образование пузырьков воздуха вокруг фибр, которые служат местом зарождения микротрещин.

Этим можно объяснить тот факт, что при концентрации волокон 0.75% прочность композита практически не возросла и соответственно в ходе численного моделирования для некоторых поверхностей нагружения именно при этой концентрации волокон были обнаружены наибольшие расхождения с экспериментом.

На рисунках 3.6 и 3.8 для каждой из диаграмм деформирования композита крестиком отмечен момент перехода бетонной матрицы из стадии упрочнения в стадию разупрочнения. Звездочкой отмечен момент начала разупрочнения композита. Стоит отметить, что за счет наличия в бетоне армирующих волокон, напряжения в композите продолжали возрастать даже после начала разрушения бетонной матрицы. До момента достижения предельных напряжений в фибробетоне матрица касательных модулей композита оставалась положительно определенной и наблюдалась сходимость численного алгоритма для различных значений шагов по параметру нагружения и различных конечно-элементных сеток.

Во второй серии численных экспериментов было исследовано влияние вида образца на процесс моделирования. Было рассмотрено четыре вида областей для конечно-элементной дискретизации: куб со сторонами 150 мм, куб со сторонами 100 мм, цилиндр диаметром 150 мм и высотой 300 мм и восьмая часть данного цилиндра. Сравнения были выполнены для случая неидеальной связи и предельной поверхности Менетри-Уильямса при $e = 0.63$.

Численные эксперименты на одноосное сжатие для каждой из областей проводились на трех типах конечно-элементных сеток, аналогичных сеткам для области в виде куба со сторонами 150 мм. В случае куба со сторонами 100 мм использовались три регулярных сетки, состоящие из 125 (6 узлов вдоль каждой из сторон), 343 (8 узлов вдоль каждой из сторон) и 512 (9 узлов вдоль каждой из сторон) элементов, соответственно. Для восьмой части цилиндра сетки содержали 120, 216 и 360 элементов, для цилиндра - 708, 1805 и 2714 элементов, соответственно.

В результате было установлено, что область для численного анализа не оказывает значительное влияние на моделирование одноосного сжатия фибробетона. Прочность на сжатие f_c для кубической области со сторонами 100 мм выше прочности для кубической области со сторонами 150 мм в среднем по всем сеткам и диапазону концентрации волокон 0.38% – 1.13% на 0.66%, для области в виде восьмой части цилиндра ниже на 1.10%, для целого цилиндра выше на 1.37%.

3.2 Численное моделирование изгиба балки

Способность воспринимать изгибающую нагрузку является одной из основных характеристик, определяющих работу фибробетона. В большинстве случаев для ее оценки используется эксперимент на статический изгиб балки в третях пролета. Именно в таких случаях нагружения, когда материал преимущественно подвержен растягивающим усилиям, наличие фибр важнее, чем при сжатии.

В работе [136] представлены экспериментально определенные диаграммы изгиба фибробетонных балок, содержащих произвольно распределенные стальные волокна в объеме от 0% до 1.0%. На основании полученных данных был сделан ряд выводов о влиянии механических свойств компонент композита на зависимость прогиба балки от приложенной нагрузки.

Прочность бетона, используемого для изготовления балок, при одноосном сжатии f_c без армирования составила 38.5 МПа, коэффициент Пуассона $\nu_{бет}$ при-

нимался равным 0.2. Максимальный размер заполнителя равен 10 мм. В качестве армирования применялись фибры из низкоуглеродистой стали длиной $l_{\text{арм}} = 30$ мм и диаметром $d_{\text{арм}} = 0.5$ мм. Модуль упругости стали равен $E_{\text{арм}} = 212$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{\text{арм}} = 0.28$, предел прочности 1200 МПа. Фибры имели отгибы по концам для повышенного сцепления с бетоном.

Диаграмма прогиба-нагрузки балки при изгибе сильно зависит от способа измерения. Все исследования были выполнены в соответствии с наиболее популярным стандартом [137] для проведения экспериментов и определения жесткости балки при изгибе.

Для каждого значения концентрации армирующих волокон авторами работы [136] было изготовлено шесть балок квадратного сечения 100×100 мм и длиной 350 мм. Схема нагружения балок представлена на рисунке 3.11. Эксперименты проводились с контролем перемещений, нагружающий механизм перемещался со скоростью 0.08 мм/с. По результатам серии тестов были определены осредненные диаграммы зависимости прогиба низа балки в середине пролета от приложенной нагрузки. Для определения прочности бетона при одноосном сжатии было изготовлено четыре цилиндрических образца диаметром 100 мм и высотой 200 мм.

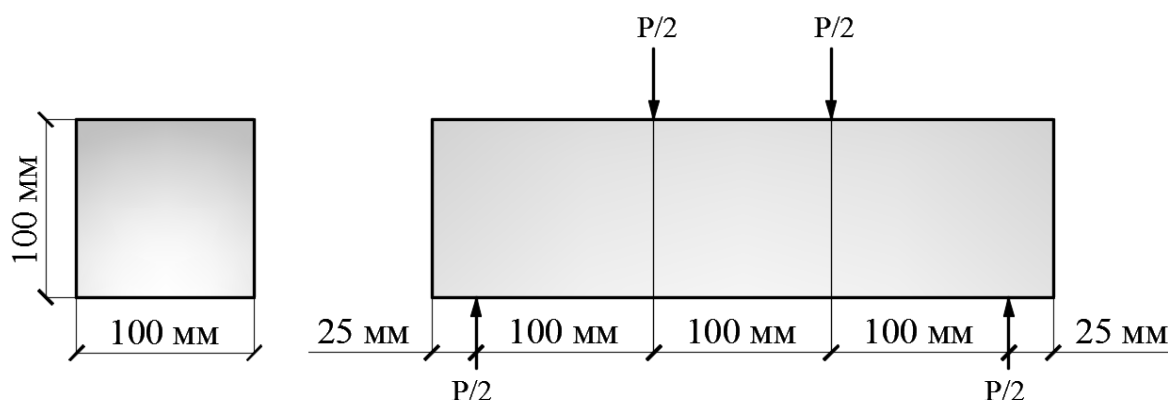


Рисунок 3.11: Схема нагружения балки.

Момент первой трещины и пиковой нагрузки являются двумя наиболее важными точками на диаграмме прогиба-нагрузки при изгибе балки.

В силу неоднородной внутренней структуры бетонной матрицы, на практике становится достаточно сложно однозначно определить положение первой трещины на диаграмме. Согласно нормам [137] момент первой трещины определяется как точка, при которой кривизна диаграммы резко возрастает в первый раз и угол наклона кривой значительно изменяется.

Прогиб балки, соответствующий моменту первой трещины, может быть определен на основании теории упругости согласно выражению [137]

$$w_z = \frac{23P_zL^3}{1296EI} \left(1 + \frac{216h^2(1+\nu)}{115L^2} \right)$$

где w_z - прогиб балки в момент первой трещины мм, P_z - нагрузка в момент первой трещины кН, L - длина пролета мм, E - модуль упругости материала МПа, I - момент инерции поперечного сечения балки мм⁴, h - высота поперечного сечения балки мм, ν - коэффициент Пуассона.

Численный эксперимент.

Основной задачей численного моделирования являлось аппроксимация экспериментальных данных для изгиба фибробетонных балок, содержащих различные концентрации произвольно распределенных армирующих волокон, с помощью предложенной механической модели.

В ходе численного эксперимента было исследовано влияние концентрации армирующих волокон, типа связи между бетоном и армирующими волокнами и вида поверхности нагружения материала матрицы композита на процесс деформирования фибробетонной балки при изгибе.

Как и в случае численных экспериментов на одноосное сжатие при моделировании использовалось два типа связи: идеальная и с возможностью проскальзывания фибр. В качестве поверхности нагружения были рассмотрены случаи кусочно-гладкой поверхности Ранкина-Друкера-Прагера и гладкой поверхности Менетри-Уильямса.

Алгоритм аппроксимации экспериментальных данных для различных концентраций армирующих волокон состоял из следующих шагов. В первую оче-

редь, с помощью процедуры обратного анализа для неармированной балки были определены значения модуля Юнга бетонной матрицы, одноосной прочности матрицы на растяжение и зависимость эквивалентного напряжения от параметра α , т.е. от накопленных неупругих деформаций в процессе активного нагружения.

Данная процедура заключается в проведении серии численных экспериментов. С каждой итерацией механические параметры бетонной матрицы уточняются для достижения наиболее точной аппроксимации экспериментальных данных. В случае использования гладкой поверхности Менетри-Уильямса наилучшее совпадение с экспериментом было получено для параметра e , определяющего вид поверхности на девиаторной плоскости, равного 0.6. Отдельных экспериментов для определения данных величин в работе [136] представлено не было.

В результате были получены следующие механические параметры для бетонной матрицы: модуль Юнга бетона $E_{бет} = 32.8$ ГПа, прочность при одноосном растяжении $f_t = 3.38$ МПа.

Данное значение согласуется с рекомендациями норм [114]. Модуль Юнга бетонной матрицы, согласно [114], приближенно определялся согласно выражению:

$$E_{бет} = 21500 \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{\frac{1}{3}}$$

где f_{ck} - характеристическая прочность бетона при одноосном сжатии, определенная для цилиндра диаметром 150 мм и высотой 300 мм.

Согласно работе [138] прочность бетона при одноосном сжатии для цилиндра диаметром 150 мм и высотой 300 мм ниже на 1% соответствующей прочности для цилиндра диаметром 100 мм и высотой 200 мм. Учитывая данную разницу, получим в нашем случае для прочности бетона на сжатие $f_c = 0.99 * 38.5 \text{ МПа} = 38.12$ МПа модуль Юнга $E_{бет} = 35.8$ ГПа.

Таблица 3.3: Механические свойства бетонной матрицы

Наименование	Нормы	Обратный анализ	Разница, %
Модуль упругости, ГПа	35.8	32.8	8.2
Средн. прочность на растяжение, МПа	3.42	3.38	1.2

Для оценки одноосной прочности бетонной матрицы при одноосном растяжении также использовались рекомендации норм [114]

$$f_{ctk,min} = 0.95 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{\frac{2}{3}} \quad f_{ctk,max} = 1.85 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{\frac{2}{3}}$$

где $f_{ctk,min}$ и $f_{ctk,max}$ - нижняя и верхняя оценки прочности бетона при одноосном растяжении, определенные на основании прочности бетона при одноосном сжатии. В нашем случае оценки равны 2.32 и 4.51 МПа, соответственно, среднее значение равно 3.42 МПа.

Итоговые значения модуля упругости, прочности при одноосном растяжении и их различия представлены в таблице 3.3. Исходя из этого можно сделать вывод, что значения бетонной матрицы, полученные в результате процедуры обратного анализа, удовлетворяют требованиям норм.

На основании выполненного анализа была получена зависимость напряжения в бетонной матрице при одноосном растяжении от полных деформаций в процессе нагружения и представлена на рисунке 3.12.

Наличие коротких армирующих волокон значительно увеличивает способность балки сопротивляться изгибающим нагрузкам. Согласно экспериментальным данным [136] на рассматриваемом диапазоне концентрации армирования максимальное увеличение прогиба и нагрузки в момент первой трещины составило 8.3% и 31.8%, соответственно.

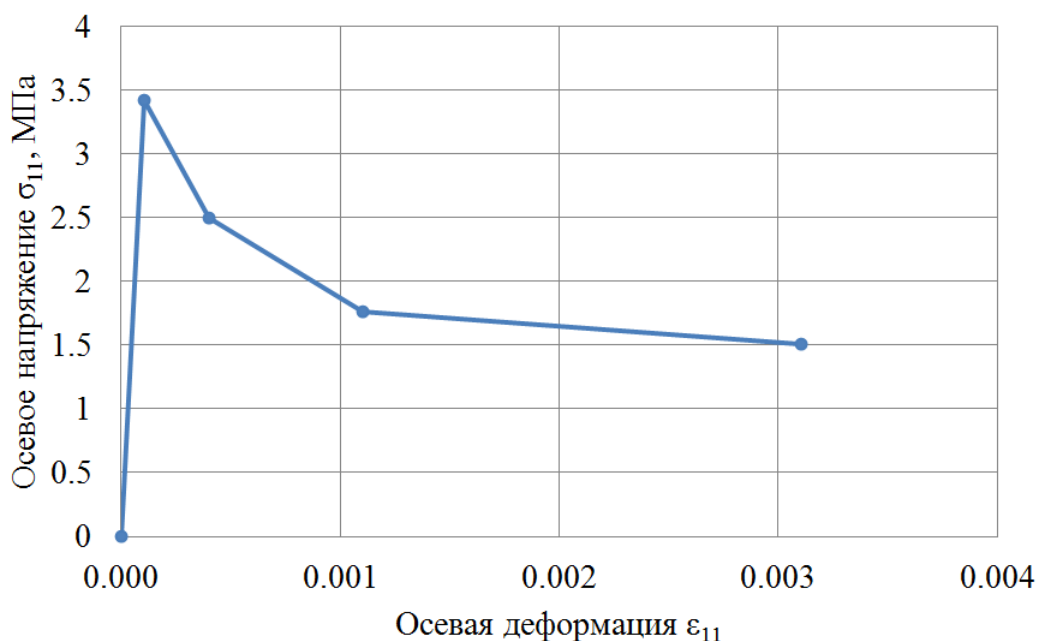


Рисунок 3.12: Диаграмма напряжение-деформация для бетонной матрицы при одноосном растяжении.

Аналогичный вывод был сделан и по результатам численного моделирования. Среднее расхождение с экспериментально определенными значениями прогиба в момент первой трещины на рассматриваемом диапазоне концентрации волокон и для различных поверхностей нагружения составило 7.6% в случае идеальной связи и 6.7% в случае неидеальной связи. Численно определенная нагрузка в момент первой трещины имеет более низкие значения по сравнению с экспериментальными. Аналогичные расхождения в момент первой трещины составили 24.8% и 26.4%, соответственно.

На основе численных экспериментов были построены диаграммы нагрузка-прогиб 3.13-3.16 при изгибе балок с учетом различных типов связи и поверхностей нагружения.

На рисунке 3.17 представлено распределение максимальных главных растягивающих напряжений в бетонной матрице и осевых напряжений в армирующих волокнах в момент первой трещины при изгибе.

Исходя из полученных в работе [136] экспериментальных кривых видно, что в диапазоне концентраций армирования 0 – 0.5% после момента первой трещины практически сразу следует момент пиковой нагрузки, после чего происходит

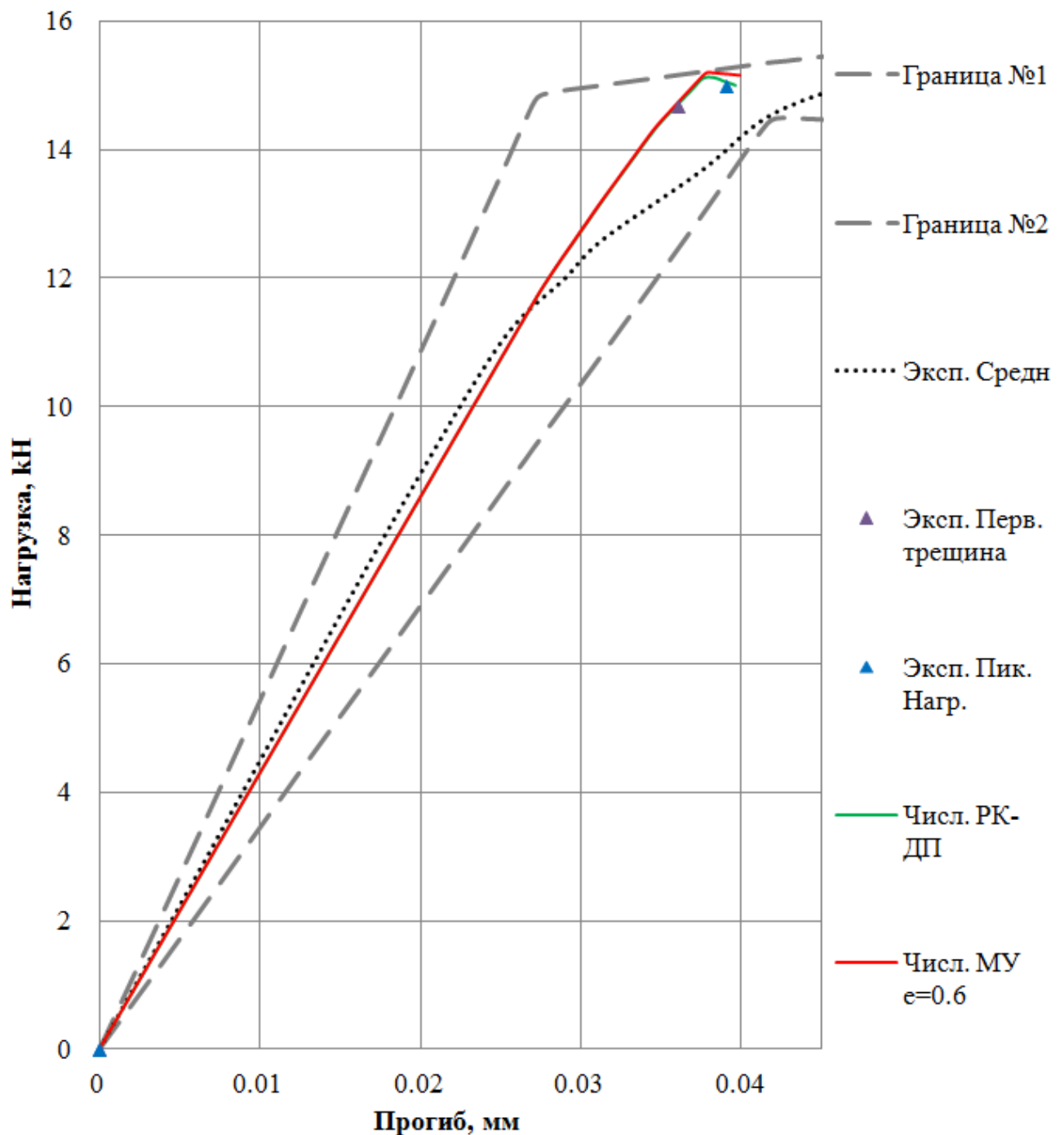


Рисунок 3.13: Диаграммы изгиба бетонной балки для концентрации волокон 0% для различных поверхностей нагружения.

потеря несущей способности балки вплоть до разрушения. В диапазоне концентраций армирования 0.75 – 1.0% после момента первой трещины наблюдается значительное упрочнение. Данная особенность экспериментального исследования фибробетонных балок при изгибе подтверждается и численным моделированием.

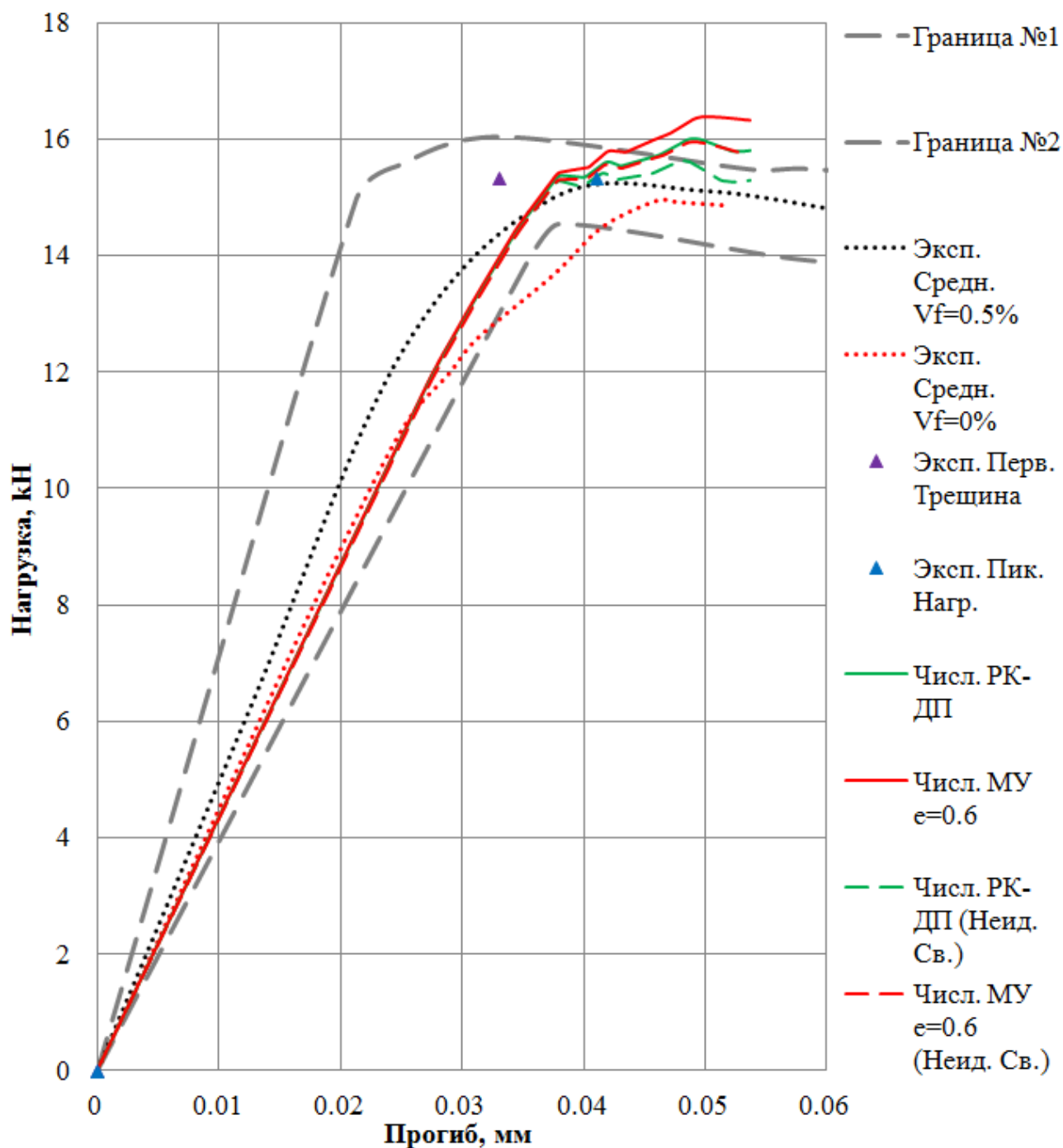


Рисунок 3.14: Диаграммы изгиба фибробетонной балки для концентрации волокон 0.5% для различных поверхностей нагружения и типов связи.

Практически все полученные при моделировании численные кривые прогиб-нагрузка для исследуемых концентраций волокон лежат внутри границ экспериментальных данных.

Учет неидеального контакта между материалом матрицы и армирующими волокнами снижает значения прогиба балки в момент первой трещины в среднем для концентрации волокон 0 – 1.0% и для различных поверхностей нагружения

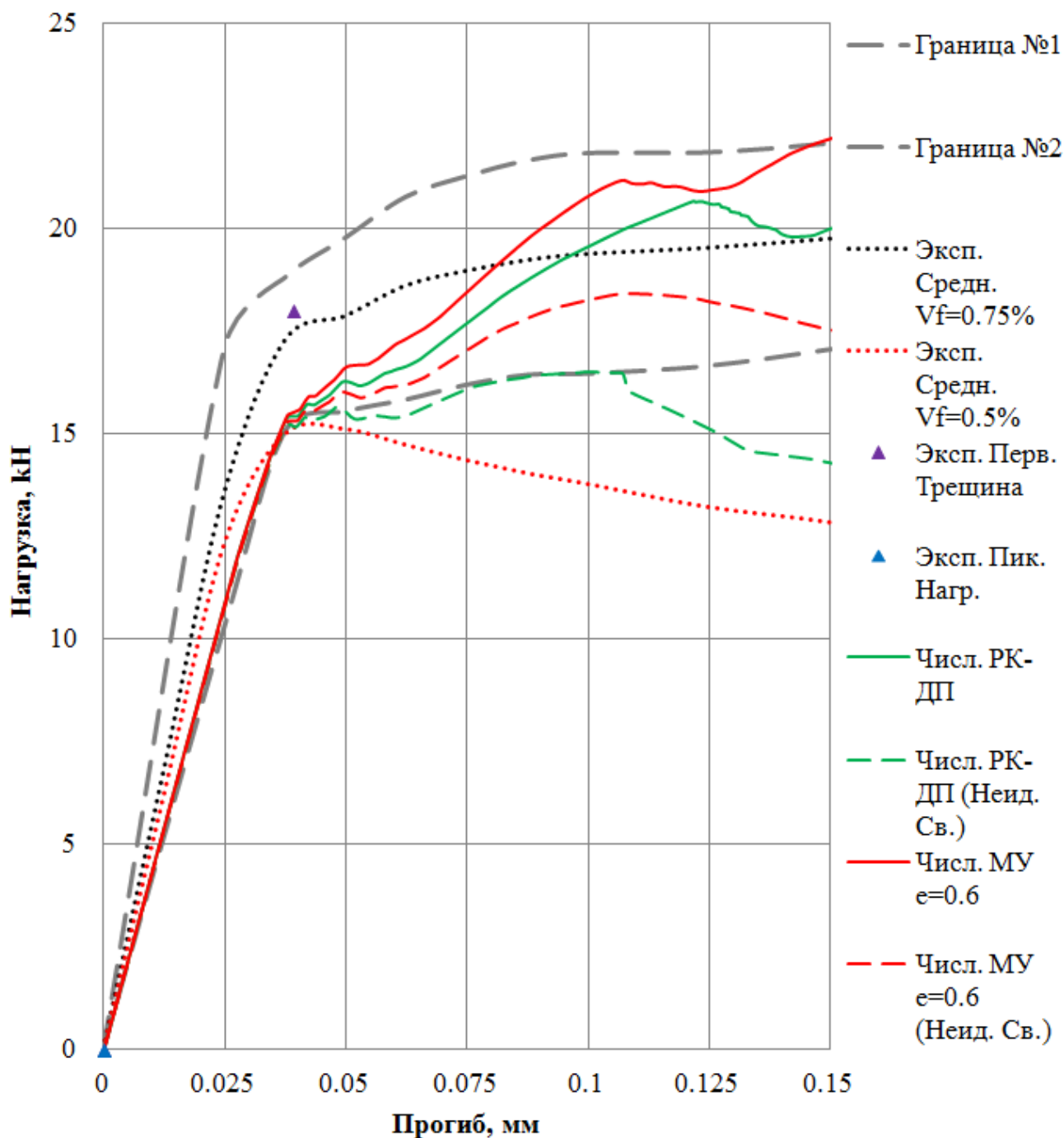


Рисунок 3.15: Диаграммы изгиба фибробетонной балки для концентрации волокон 0.75% для различных поверхностей нагружения и типов связи. на 1.7%, нагрузки - на 1.2%. С увеличением прогиба балки в процессе деформирования влияние проскальзывания увеличивается и оказывает существенное влияние на способность балки воспринимать изгибающие усилия.

Исходя из диаграмм прогиб-нагрузка видно, что в диапазоне армирования 0.75 – 1.0% в случае идеальной связи численные кривые после момента первой трещины достигают экспериментальной средней кривой при прогибе около 0.1

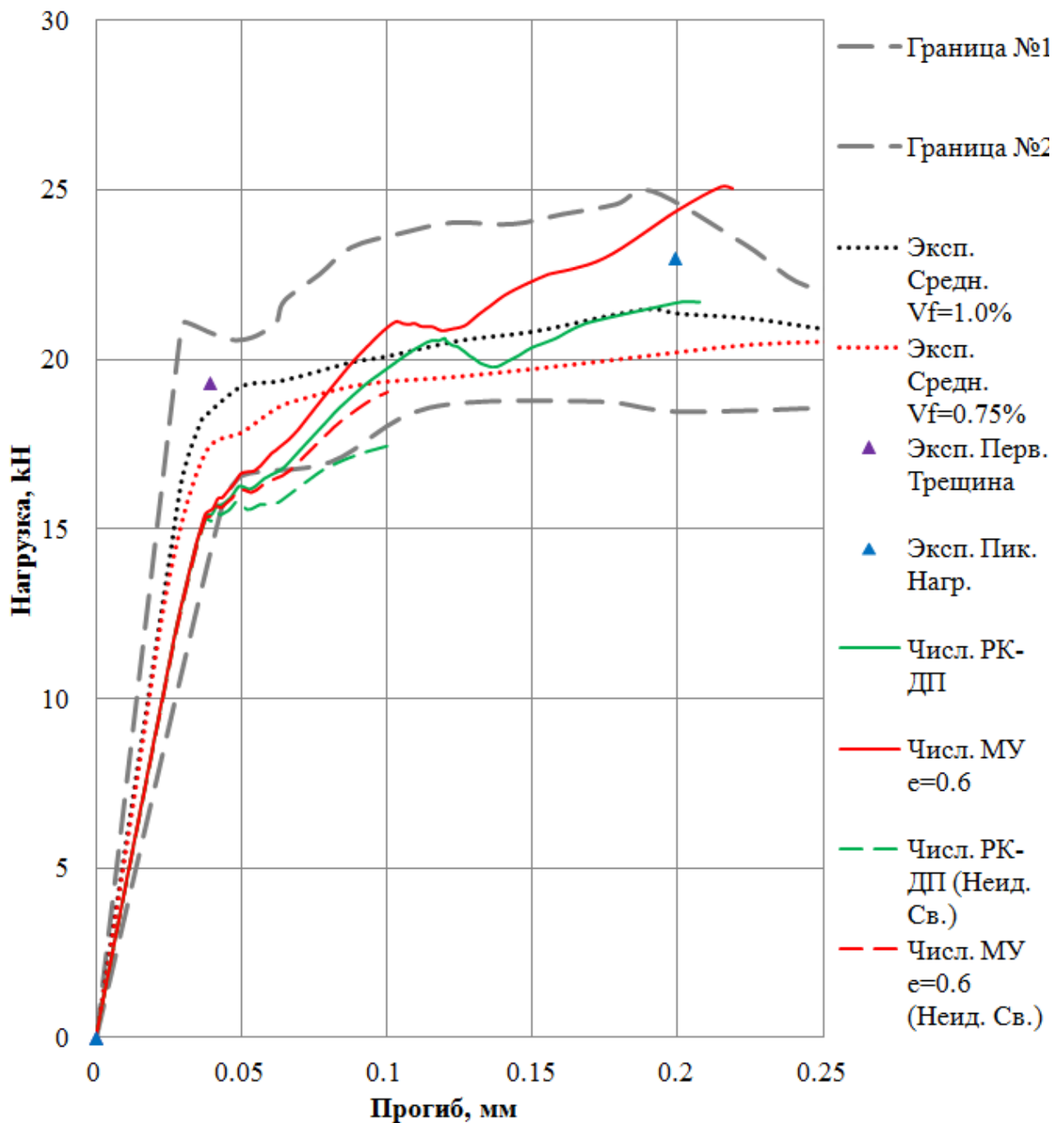
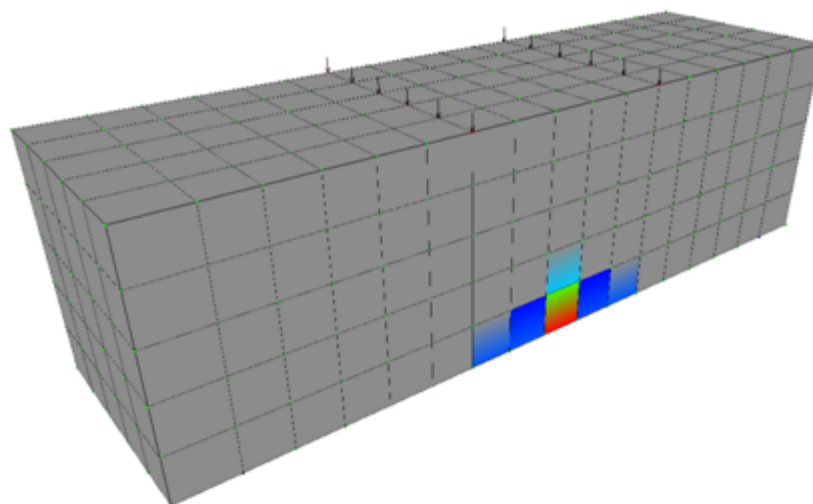
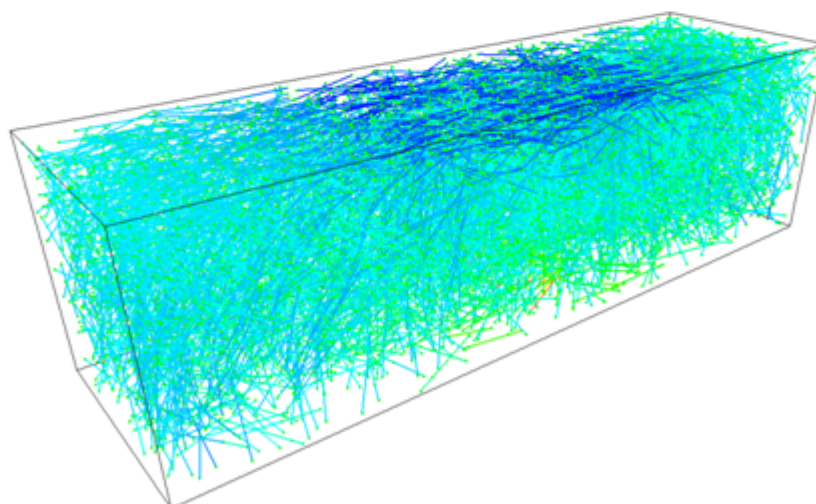
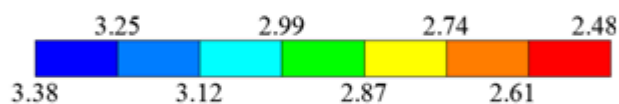


Рисунок 3.16: Диаграммы изгиба фибробетонной балки для концентрации волокон 1.0% для различных поверхностей нагружения и типов связи.

мм, после чего дают ее достаточно точную аппроксимацию, особенно в случае использования поверхности Ранкина-Друкера-Прагера. При использовании поверхности Менетри-Уильямса численная кривая с увеличением прогиба стремится к верхней границе экспериментальной области. В случае неидеальной связи в диапазоне армирования 0.75 – 1.0% численные кривые после момента первой трещины проходят вблизи нижней границы экспериментальных данных.



Распределение макс. главных растягивающих напряжений для балки с концентрацией волокон 1.0%, МПа



Осевое напряжение в волокнах, МПа

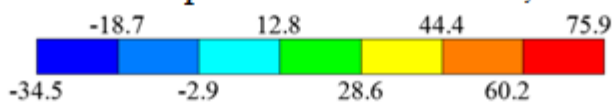


Рисунок 3.17: Напряженное состояние бетонной матрицы и армирующих волокон в момент образования первой трещины для поверхности Менетри-Уильямса при $e = 0.63$ и идеальной связи. Концентрация волокон равна 1.0%.

3.3 Численное моделирование изгиба плиты на упругом основании

Бетон с короткими армирующими волокнами наиболее часто используется для покрытия дорог, аэродромных покрытий и полов промышленных зданий.

Именно поэтому исследование задачи об изгибе фибробетонной плиты на грунтовом основании является особенно актуальным [139].

Применение коротких фибр, в сравнении с классическим армированием, позволяет значительно сократить время на установку армирующих сеток и процесс бетонирования. Также плита из фибробетона может быть на 30 – 40% тоньше, что дополнительно снижает стоимость работ и делает фибробетон экономически конкурентным материалом в этой области строительства.

В работе [140] представлены экспериментально определенные диаграммы прогиба фибробетонных плит размером $1800 \times 1800 \times 75$ мм на грунтовом основании толщиной 550 мм, содержащих произвольно распределенные стальные волокна в объеме от 0% до 0.57%.

Для каждого значения концентрации армирующих элементов было выполнено два теста на изгиб плиты на грунтовом основании. Для оценки механических свойств бетонной матрицы всего было выполнено четыре эксперимента на сжатие цилиндра диаметром 150 мм и высотой 300 мм.

Средняя прочность матрицы без армирования при одноосном сжатии f_c и деформация в момент максимальной нагрузки по результатам экспериментов составила 40.3 МПа и 0.00242, соответственно. Коэффициент Пуассона $\nu_{бет}$ принимался в равным 0.2.

Модуль упругости бетонной матрицы, соответствующий средней экспериментально определенной прочности на сжатие, согласно рекомендациям норм [114] принимался равным $E_{бет} = 34.2$ ГПа. Диапазон изменения одноосной прочности бетона на растяжение f_t составляет от 2.4 до 4.68 МПа.

В качестве армирования применялись стальные фибры длиной $l_{арм} = 60$ мм и диаметром $d_{арм} = 0.75$ мм. Модуль упругости стали равен $E_{арм} = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_{арм} = 0.28$, предел прочности 1200 МПа. Фибры имели отгибы по концам для повышенного сцепления с бетоном.

В качестве грунтового основания использовался песок. Размер емкости для песка составлял $2500 \times 2500 \times 550$ мм. Для оценки модуля реакции основания

авторами работы [140] были выполнены тесты на нагружение грунта стальной пластиной диаметром 300 мм и толщиной 25 мм. На основании результатов эксперимента была построена зависимость давления под подошвой пластины от осадки оснований. Из данной диаграммы следует, что модуль реакции варьируется от $70 \text{ MN}/\text{m}^3$ на начальном участке диаграммы и до $129 \text{ MN}/\text{m}^3$ при прогибах основания выше 3 мм.

Для задания механических свойств основания при численном моделировании необходимо знать его модуль упругости. Существует большое количество методик для определения модуля упругости основания $E_{\text{осн}}$ исходя из значения его модуля реакции $K_{\text{осн}}$. В работе [141] предложено соотношение, основанное на рассмотрении грунтового основания как линейно-упругого деформируемого полупространства

$$E_{\text{осн}} = K_{\text{осн}} \omega \sqrt{F} (1 - \nu_{\text{осн}}^2)$$

где ω - коэффициент, зависящий от формы штампа, в случае квадрата $\omega = 0.88$. F - площадь штампа, равная в нашем случае 0.06 м, $\nu_{\text{осн}}$ - коэффициент Пуассона основания.

В работе [142] представлены соотношения между модулем упругости основания $E_{\text{осн}}$ и значением его модуля реакции $K_{\text{осн}}$, учитывающие толщину сжимаемого слоя. Формулы предполагают моделирование основания в виде узкого сжимаемого слоя, покоящегося на нижнем, почти несжимаемом основании. Решения возможно получить с помощью теории упругости для двух случаев: идеальный контакт на границе слоев и с возможность проскальзывания без трения. Соответствующие выражения имеют вид

$$E_{\text{осн}} = K_{\text{осн}} (1 - \nu_{\text{осн}}) h_{\text{осн}}$$

и

$$E_{\text{осн}} = \frac{K_{\text{осн}} (1 + \nu_{\text{осн}}) (1 - 2\nu_{\text{осн}}) h_{\text{осн}}}{1 - \nu_{\text{осн}}}$$

где $h_{\text{осн}}$ - толщина сжимаемого слоя, равная в нашем случае 0.55 мм.

Таким образом для модуля реакции основания, равного $70 \text{ MN}/\text{m}^3$ диапазон изменения модуля упругости составил 13.7-35 МПа.

В ходе эксперимента нагрузка прикладывалась к центру плиты через стальную пластину размером $245 \times 245 \text{ мм}$, приращение нагрузки составляло 2.5 кН в минуту, измерения фиксировались каждые 5 секунд. Схема нагружения плиты на грунтовом основании представлена на рисунках 3.18 и 3.19. Точка замера прогиба находилась в нижней части плиты на расстоянии 150 мм от центра приложения нагрузки, см. рисунок 3.21.

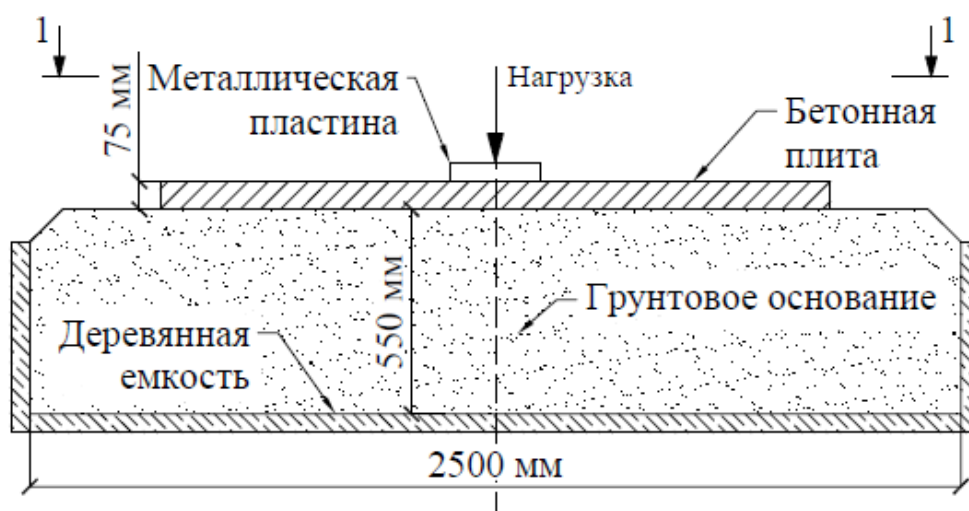


Рисунок 3.18: Схема нагружения плиты на грунтовом основании. Разрез.

Из экспериментально определенных диаграмм зависимости нагрузки от прогиба плиты следует, что несущая способность плиты на грунтовом основании возрастает с увеличением концентрации коротких армирующих волокон в бетоне. В случае армированных плит нагрузка при прогибе в 1 мм в среднем увеличилась на 22.8%, при прогибе в 3 мм - на 77.3%.

Активное трещинообразование в плите без армирования начинается при нагрузке около 70 кН, после чего плита резко теряет большую часть своей жесткости. В конце плита разрушается в результате продавливания.

Активное трещинообразование в плитах с короткими армирующими волокнами начинается при нагрузке около 100 кН. После этого момента потеря жест-

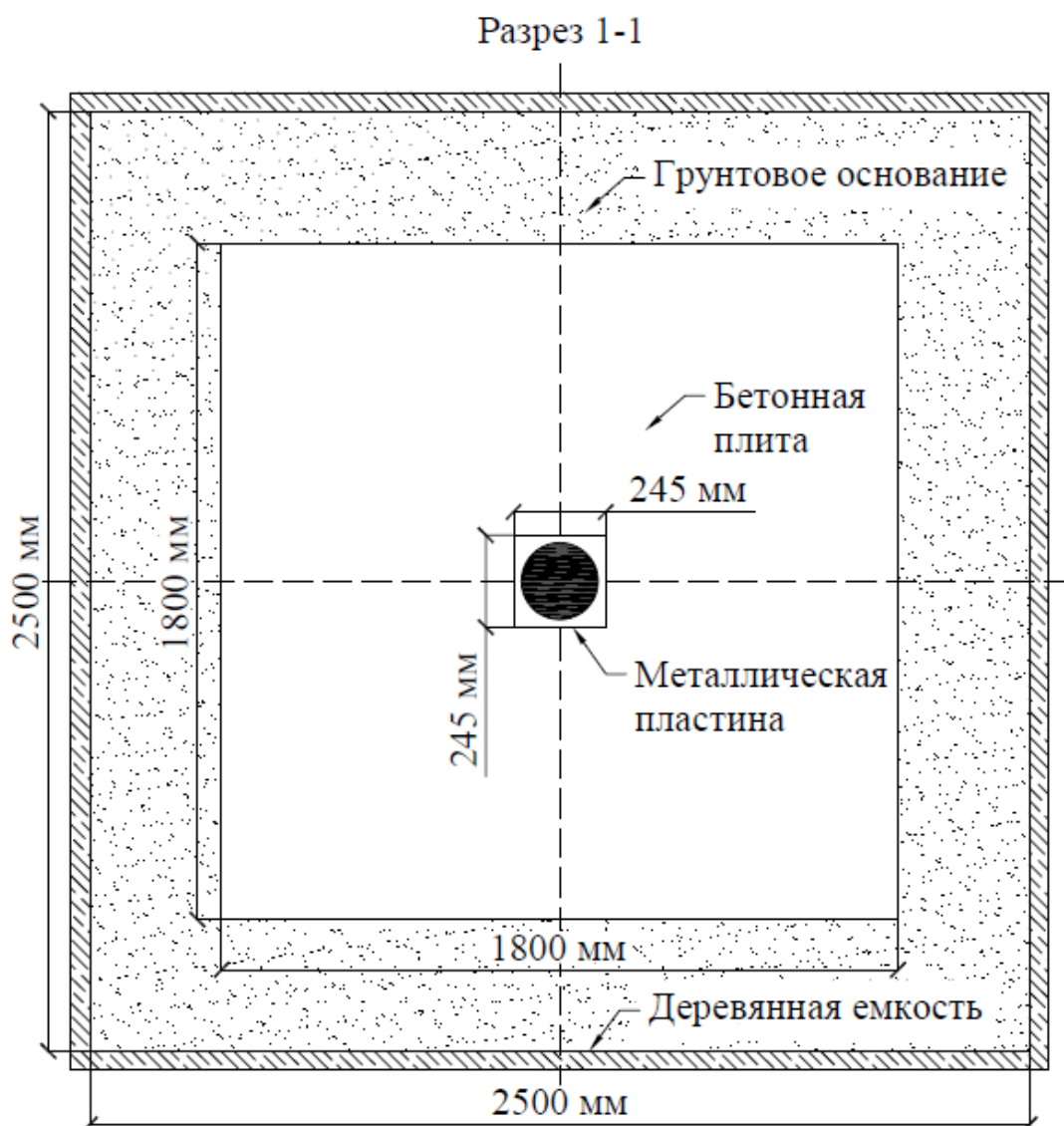


Рисунок 3.19: Схема нагружения плиты на грунтовом основании. План. кости происходит постепенно и более плавно за счет включения в работу равномерно распределенных в плите фибр.

Характерные черты процесса деформирования плит, полученные на основании диаграмм зависимости нагрузки от прогиба, подтверждаются визуальным осмотром образцов после завершения экспериментов. В работе [140] отмечено, что плита без армирования была расколота на части магистральными трещинами по осям симметрии и в некоторых местах по диагоналям, как представлено на рисунке 3.20 А. В случае плит с короткими армирующими волокнами наблюдалось образование большого числа узких трещин в нижней части плиты, см. рисунок рисунке 3.20 Б, трещины не достигали верхней поверхности. С

увеличением концентрации армирования распределение трещин в нижней части становится более равномерным и ширина их раскрытия сокращается.

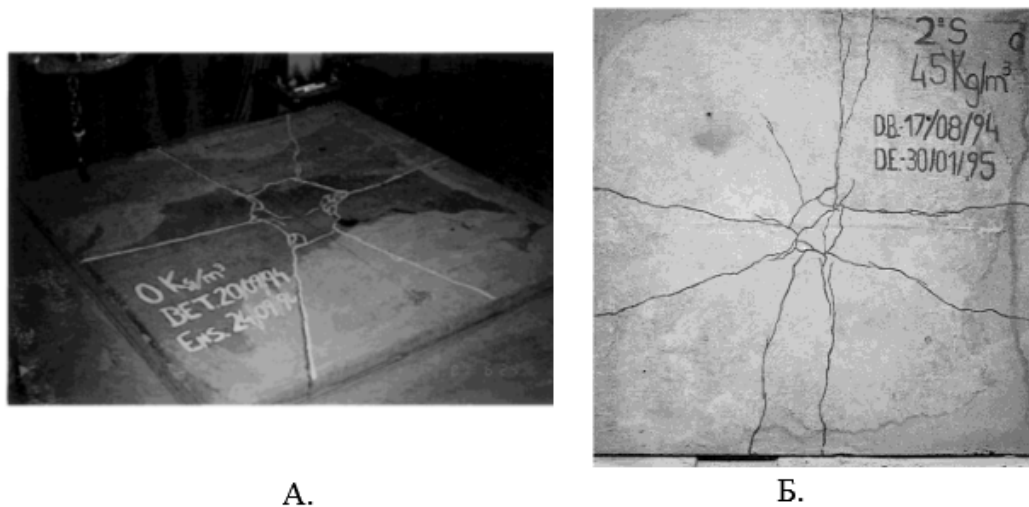


Рисунок 3.20: Виды разрушения плит для различных концентраций армирующих волокон [140]. А. Без армирования. Б. Процент армирования 0.57%.

Численный эксперимент.

Для численного моделирования использовалась конструкция, состоящая из плиты размером $900 \times 900 \times 75$ мм и грунтового основания размером $1250 \times 1250 \times 550$ мм, равная четверти от реального размера конструкции. Для того, чтобы работа усеченной конструкций совпадала с поведением полной, на соответствующих частях конечно-элементной области накладывались надлежащие граничные условия, отражающие условия симметрии, см. рисунок 3.21.

Грунтовое основание моделировалось как упругая среда. На границе плиты и основания принималось условие идеального контакта. При моделировании плиты и основания использовались конечные элементы в виде параллелепипеда.

Результаты экспериментальных данных и численного моделирования представлены на графике 3.22 в случае концентрации фибр 0.57%.

Наилучшая аппроксимация экспериментальных данных была получена в случае использования идеальной связи между армирующими волокнами и бетонной матрицей и для поверхности Ранкина-Друкера-Прагера. Значения одноосной

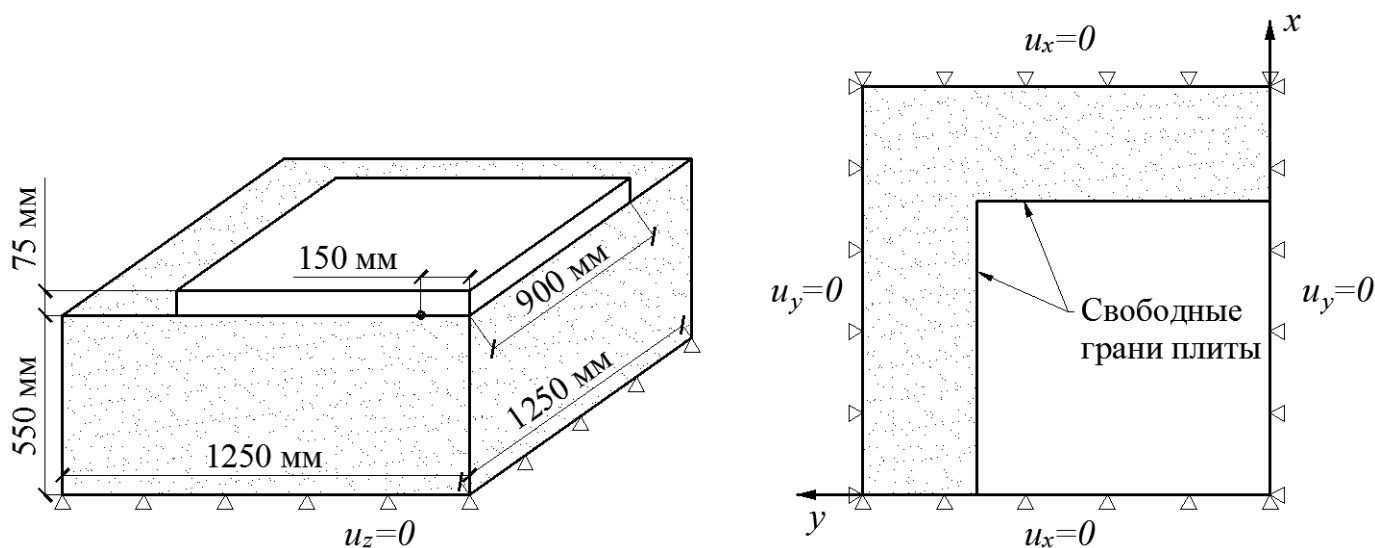


Рисунок 3.21: Схема конструкции для численного анализа.

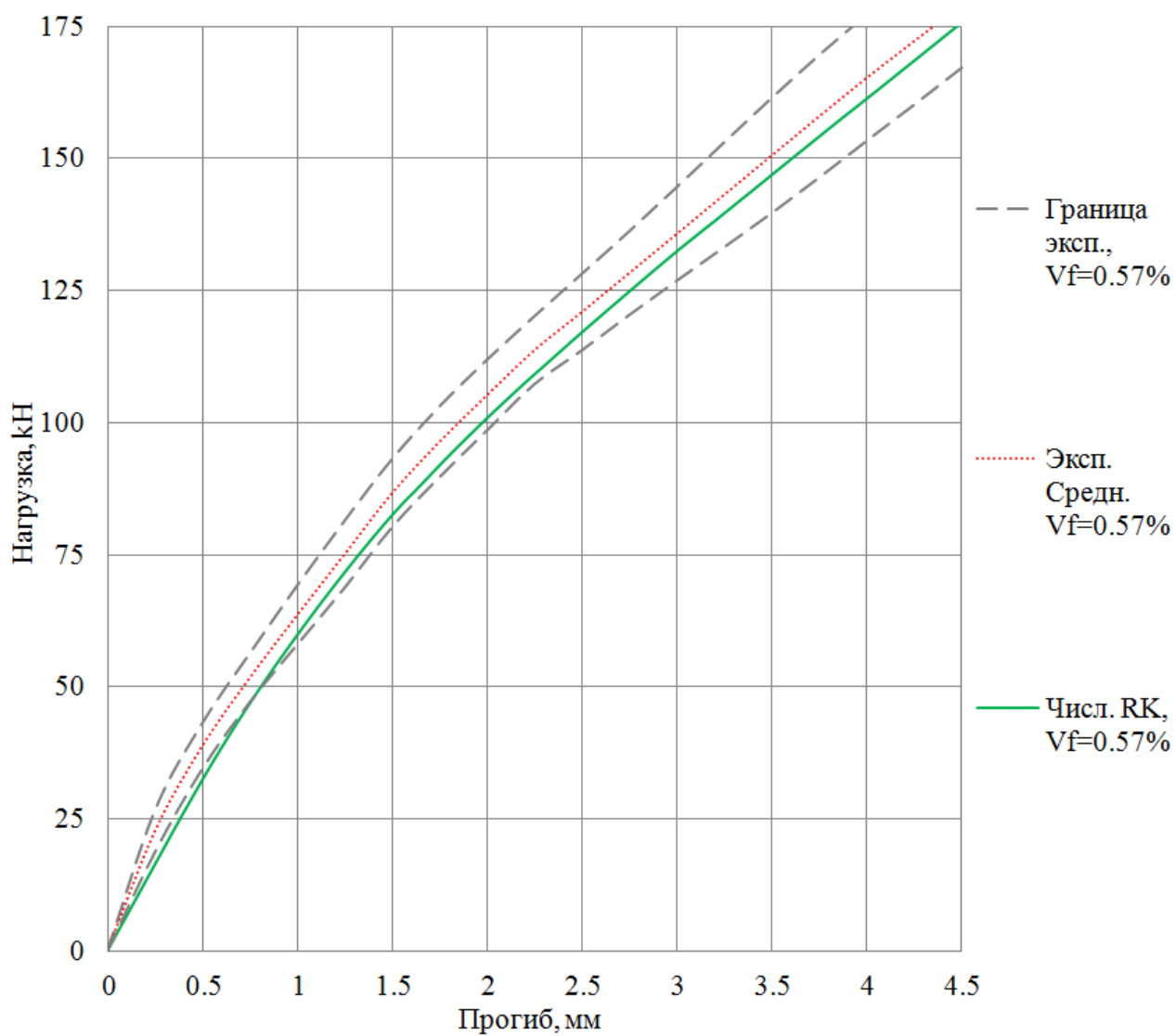


Рисунок 3.22: Диаграмма изгиба фибробетонной плиты на упругом основании для концентрации волокон 0.57%.

прочности на растяжение бетонной матрицы f_t и модуль упругости основания $E_{\text{осн}}$ в этом случае составляли 2.4 и 16.2 МПа, соответственно. При моделировании предполагалось условие идеального контакта между плитой и основанием.

Численное моделирование в случае концентрации волокон 0.57% дает хорошую аппроксимацию экспериментальных данных. Численная кривая находится в области экспериментальных данных и различие с осредненной экспериментальной кривой для величины прогибов до 4 мм не превосходит 6.7%.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Представлена механическая модель композиционного материала, учитывающая неупругие свойства матрицы, наличие коротких армирующих волокон и неидеальный контакт на границе волокон. Разработана ее численная реализация и создан набор программ для анализа элементов конструкций.
2. Выполнен сравнительный анализ аналитических и численного подходов к определению эффективных упругих характеристик композиционного материала с короткими армирующими волокнами. Показано на основе экспериментов, что для малых концентраций волокон аналитические подходы дают такую же точность, как и численный подход. Получено хорошее совпадение расчетов с экспериментом.
3. Показано, что наличие коротких армирующих волокон, учет нелинейных соотношений связи между материалом матрицы и армирующими волокнами и вид критерия возникновения необратимых деформаций в матрице оказывают значительное влияние на результаты моделирования композиционного материала.
4. С помощью разработанного набора программ выполнено численное моделирование основных типов задач для исследования механических свойств бетона с короткими армирующими волокнами. Сравнение с экспериментом показало, что результаты численного моделирования дают адекватную оценку жесткостных и прочностных свойств фибробетона.

Литература

1. W.F. Chen. Plasticity in Reinforced Concrete. New York: McGraw-Hill, 1982. Т. 7 из *Interdisciplinary Applied Mechanics*. С. 474.
2. van Geel E. Concrete Behaviour in Multiaxial Compression, Experimental Research. Ph.D. thesis: PhD thesis, TU Eindhoven. 1998.
3. Н.П. Фролов. Стеклопластиковая арматура и стеклопластбетонные конструкции. М.: Стройиздат, 1980. С. 104.
4. Ф.Н. Рабинович. Композиты на основе дисперсно армированных бетонов. Вопросы теории и проектирования, технология, конструкции. АСВ, 2004. С. 560.
5. J.G.M. Van Mier. Fracture processes of concrete (Assessment of Material Parameters for Fracture Models). CRC Press, 1997. С. 448.
6. Б.Е. Победря. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 336.
7. Шешенин С.В. Савенкова М.И. Вычисление эффективных модулей сплавов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2011. № 1. С. 68–70.
8. Муравлева Л.В. Шешенин С.В. Эффективные свойства железобетонных плит при упругопластических деформациях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2004. № 3. С. 62–65.
9. Л.В. Муравлева. Эффективные свойства ортотропных композитов при упругопластических деформациях // Упругость и неупругость: материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформи-

- руемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. 2006. С. 371–378.
10. D. Ngo, A.C. Scordelis. Finite element analysis of reinforced concrete beams // American Concrete Institute Journal. 1967. Т. 63. С. 152–163.
 11. Y.R. Rashid. Analysis prestressed concrete pressure vessels // J Eng Mech ASCE. 1968. Т. 7, № 4. С. 334–355.
 12. Козлов М.В. Шешенин С.В. Моделирование прогрессирующего разрушения слоистых композитов // Механика композиционных материалов. 2015. Т. 51, № 6. С. 991–1006.
 13. Л.В. Муравлева. О некоторых критериях разрушения композитов на основе метода осреднения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 3. С. 166–176.
 14. Jirasek M., Bazant Z.P. Inelastic Analysis of Structures. Wiley, 2001. С. 758.
 15. Chen A. C. T., Chen W. F. Constitutive Relations for Concrete // Journal of Engineering Mechanics Division. 1975. Т. 101, № 4. С. 465–481.
 16. Lade P.V. Three-parameter Failure Criterion for Concrete // Journal of the Engineering Mechanics Division. 1982. Т. 108, № EM5. С. 850–863.
 17. Ottosen N. S. A Failure Criterion for Concrete // Journal of the Engineering Mechanics Division. 1977. Т. 103, № 4. С. 527–535.
 18. Hsieh S. S., Ting E. C., Chen W. F. Elastic-Fracture Model for Concrete // Proceeding ASCE Engineering Mechanics Division Specification Conference, 3rd. 1979. С. 437–440.
 19. Hammoud R. Unified Formulation for a Triaxial Elastoplastic Constitutive Law for Concrete // Materials. 2013. Т. 6. С. 4426–4248.

20. А.А. Гвоздев. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Госстройиздат, 1949. С. 280.
21. Писаренко Г.С. Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. С. 416.
22. В.И. Феодосьев. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1975. С. 176.
23. О.Я. Берг. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1962. С. 96.
24. Гениев Г.А. Киссюк В.Н. Левин Н.И. Никонова Г.А. Прочность легких и ячеистых бетонов при сложных напряженных состояниях. М.: Стройиздат, 1978. С. 166.
25. А.Ф. Миролубов. К вопросу об обобщении теории октаэдрических касательных напряжений на хрупкие материалы // Тр. Ленинградского технологического ин-та. 1953. № 25. С. 22–28.
26. М.М. Филоненко-Бородич. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. сб. 1954. Т. 19. С. 15–47.
27. Гениев Г.А. Киссюк В.Н. Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1974. С. 316.
28. М.М. Филоненко-Бородич. Механические теории прочности. М.: МГУ, 1961. С. 90.
29. E. Schleicher. Oen spannungszustandan der flieszgres-ze. 1926. № 3. С. 199–215.
30. Н.И. Безухов. Заключительная лекция по сопротивлению материалов и теории упругости. Известия ВАИА, 1958. Т. 109.

31. П.П. Баландин. К вопросу о гипотезах прочности // Вестник инженеров и техников. 1937. № 1. С. 12–36.
32. В.М. Круглов. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии // Строительная механика и расчет сооружений. 1987. № 1. С. 40–48.
33. А.В. Яшин. Влияние неодносных (сложных) напряженных состояний на прочность и деформации бетона, включая область, близкую к разрушению // Прочность, жесткость и трещиностойкость железобетонных конструкций. 1979. С. 187–202.
34. Н.И. Карпенко. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. С. 416.
35. А.А. Ильюшин. Пластичность. Л.: Гостехиздат, 1948. С. 372.
36. Е.С. Лейтес. Вариант теории пластического течения бетона // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. № 3. С. 34–37.
37. А.П. Кричевский. Прочность и деформации тяжелого бетона в условиях плоского напряженного состояния с учетом температурных воздействий // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и арх-ра. 1985. № 1. С. 6–11.
38. А.В. Яшин. Критерий прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния // Расчет и проектирование железобетонных конструкций. 1977. С. 48–57.
39. Л.М. Качанов. Основы механики разрушения. Наука, 1974. С. 312.
40. Ю.Н. Работнов. Механика деформируемого твердого тела. Наука, 1988. С. 712.
41. D.R. Hayhurst. Creep rupture under multi-axial state of stress // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1972. Т. 20. С. 381–390.

42. J. Mazars. A description of micro and macroscale damage of concrete structures // *International Journal of Fracture*. 1986. Т. 25. С. 729–737.
43. Krajcinovic D., Fonseka G.U. The continuous damage theory of brittle materials // *Journal of Applied Mechanics, ASME*. 1981. Т. 48. С. 809–824.
44. Вакуленко А.А Качанов М.Л. Континуальная теория среды с трещинами // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1971. Т. 48, № 4. С. 159–166.
45. Carol I., Rizzi E., Willam K.J. On the formulation of anisotropic elastics degradation. II. Generalized pseudo-Rankine model for tensile damage // *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Т. 38. С. 519–546.
46. Hansen E., Willam K., Carol I. A two-surface anisotropic damage/plasticity model for plain concrete. Balkema, 2001. С. 549–556.
47. Ju J.W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects // *International Journal of Solids and Structures*. 1989. Т. 25, № 7. С. 803–833.
48. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures // *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*. 1998. Т. 124. С. 892–900.
49. An elastic plastic damage formulation for the behavior of concrete / L. Jason, G. Pijaudier-Cabot, A. Huerta [и др.]. 2004. С. 549–556.
50. A plastic-damage model for concrete / J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller [и др.] // *International Journal of Solids and Structures*. 1989. Т. 25, № 3. С. 299–326.
51. Imran I., Pantazopoulou S.J. Plasticity model for concrete under triaxial compression // *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*. 2001. Т. 127. С. 281–290.

52. Bazant Z.P. Microplane Model for Strain-Controlled Inelastic Behavior. Wiley, 1984. C. 45–59.
53. Bazant Z.P., Oh B.H. Microplane model for Progressive Fracture of Concrete and Rock // Journal of Engineering Mechanics. 1985. T. 111, № 4. C. 559–582.
54. Bazant Z.P., Caner F.C. Microplane model M5 with kinematic and static constraints for concrete fracture and anelasticity. I. Theory // Engineering Fracture Mechanics. 2005. T. 131, № 1. C. 31–40.
55. Caner F.C., Bazant Z.P., Wender R. Microplane model M7f for fiber reinforced concrete // Engineering Fracture Mechanics. 2013. T. 105. C. 41–57.
56. Rots J.G. Computational modeling of concrete fracture. Ph.D. thesis: PhD thesis, Delft University of Technology. 1988.
57. Jirasek M. Damage and Smearred Crack Models // Numerical Modeling of Concrete Cracking / под ред. G. Hofstetter, G. Meschke. Springer, 2011. C. 1–49.
58. Griffith A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // Philosophical Transactions. 1920. T. 221. C. 163–198.
59. Irwin G.R. Onset of Fast Crack Propagation in High Strength Steel and Aluminum Alloys // Sagamore Research Conference Proceedings. 1956. T. 2. C. 289–305.
60. Kaplan M.F. Crack propagation and the fracture of concrete // American Concrete Institute Journal. 1961. T. 58, № 5. C. 591–610.
61. Naus D.J., J.L. Lott. Fracture toughness of Portland cement concretes // American Concrete Institute Journal. 1969. T. 66, № 39. C. 481–489.
62. A. Carpinteri. Application of fracture mechanics to concrete structures // J Struct Div ASCE. 1982. T. 108, № ST4. C. 833–847.

63. P.C. Strange, H. Bryant. Experimental test on concrete fracture // J Eng Mech ASCE. 1979. T. 105, № EM2. C. 337–342.
64. Hillerborg A., Modéer M., Petersson P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements // Cement and Concrete Research. 1976. T. 6, № 6. C. 773–781.
65. Reis J.M.L., Ferreira A.J.M. The Influence of Notch Depth on the Fracture Mechanics Properties of Polymer Concrete // International Journal of Fracture. 2003. T. 124, № 1-2. C. 33–42.
66. A.A. Wells. Unstable crack propagation in metals: damage and fast fracture // Proceedings of the Crack Propagation Symposium Cranfield. 1962. T. 1. C. 210–230.
67. В.З. Партон. Механика разрушения: От теории к практике. Москва: Наука, 1990. С. 240.
68. Партон В.З. Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. Москва: Наука, 1985. С. 504.
69. Rice J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // Journal of Applied Mechanics. 1968. T. 35. C. 379–386.
70. A. Hillerborg, M. Modeer, P.E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements // Cem Concr Res. 1976. T. 6. C. 773–782.
71. P.E. Petersson. Crack growth and development of fracture zone in plain concrete and similar materials: Tech. Rep.: : Report No. TVBM-100, Lund Institute of Technology, 1981.

72. M. Xie, W.H. Gerstle. Energy-based cohesive crack propagation modeling // J Eng Mech ASCE. 1995. T. 121, № 12. C. 1349–1358.
73. Concrete fracture prediction using bilinear softening / Roesler J., Paulino G.H., Park K. [и др.] // Cem Concr Compos. 2007. T. 29. C. 300–312.
74. Z.P. Bazant, B.H. Oh. Crack band theory for fracture of concrete // Mater Struct. 1983. T. 16, № 93. C. 155–177.
75. Y.S. Jenq, S.P. Shah. Two parameter fracture model for concrete // J Eng Mech ASCE. 1985. T. 111, № 10. C. 1227–1241.
76. Y.S. Jenq, S.P. Shah. A fracture toughness criterion for concrete // Eng Fract Mech. 1985. T. 21. C. 1055–1069.
77. P. Nallathambi, B.L. Karihaloo. Determination of specimen-size independent fracture toughness of plain concrete // Magn Concr Res. 1986. T. 38, № 135. C. 67–76.
78. S. Xu, H.W. Reinhardt. Determination of double-K criterion for crack propagation in quasibrittle materials, Part I: Experimental investigation of crack propagation // Int J Fract. 1999. T. 98. C. 111–149.
79. Y. Zhao, S. Xu. An analytical and computational study on energy dissipation along fracture process zone in concrete // Comput Concr. 2004. T. 1, № 1. C. 47–60.
80. D'Addetta G.A., Kun F., Ramm E. On the application of a discrete model to the fracture process of cohesive granular materials // Granular Matter. 2002. T. 4. C. 77–90.
81. Numerical study of compressive behaviour of concrete at high strain rates / F.V. Donze, S.A. Magnier, L. Daudeville [и др.] // Journal for Engineering Mechanics. 1999. C. 1154–1163.

82. Kozicki J.F.V., Donzé F.V. A new open-source software developed for numerical simulations using discrete modeling methods // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2008. T. 197. C. 4429–4443.
83. Carol I., López C.M., Roa O. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2001. T. 52. C. 193–215.
84. Caballero A., Carol I., Lopez C.M. New results in 3d meso-mechanical analysis of concrete specimens using interface elements // *Computational Modelling of Concrete Structures / под ред. de Borst R. Mang H. Bicanic N. Meschke, G.* Abington: Taylor and Francis, 2006. C. 43–52.
85. van Mier J.G.M., Schlangen E., Vervuurt A. Lattice type fracture models for concrete // *Continuum Models for Materials with Microstructure / под ред. H.-B. Mühlhaus.* Chichester: John Wiley and Sons, 1995. C. 341–377.
86. Jirasek M., Bazant Z.P. Particle model for quasi-brittle fracture and application to sea ice // *J. Eng. Mech.* 1995. T. 121, № 9. C. 1016–1025.
87. Bolander J.E., Sukumar N. Irregular lattice model for quasi-static crack propagation: Tech. Rep.: : *Phys. Rev. B* 71, 94106, 2005.
88. Kozicki J., Tejchman J. Modelling of fracture processes in concrete using a novel lattice model // *Granular Matter.* 2008). T. 10, № 5. C. 377–388.
89. Grassl P., Jirasek M. Meso-mechanically motivated nonlocal models for modelling of the fracture process zone in quasi-brittle materials // *8th. World Congress on Computational Mechanics WCCM8 / под ред. Perego U. Schrefler, B.A.* T. 30.06-4.06. 2008.

90. Cusatis G., Bazant Z.P., Cedolin L. Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression: I. theory // *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 2003. T. 129, № 12. C. 1439–1448.
91. Fernandes de Almeida J., Neves R. Compressive behaviour of steel fibre reinforced concrete // *Structural Concrete*. 2005. T. 2, № 1. C. 1–8.
92. J. Thomas, A. Ramaswamy. Mechanical Properties of Steel Fiber-Reinforced Concrete // *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering*. 2007. T. 19, № 5. C. 385–395.
93. Gao J., Sun W., Morino K. Mechanical properties of steel fiber reinforced high strength light weight concrete // *Cem. Concr. Compos*. 1997. T. 19. C. 307–313.
94. K. Sirijaroonchai. A Macro-Scale Plasticity Model for High Performance Fiber Reinforced Cement Composites. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Michigan. 2009.
95. M. Trub. Numerical Modeling of High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites. Ph.D. thesis: PhD thesis, Institute of Structural Engineering Swiss Federal Institute of Technology. 2011.
96. Blazejowski M. Flexural Behaviour of Steel Fibre Reinforced Concrete Tunnel Linings. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Western Ontario. 2012.
97. Denneman E. Fracture in High Performance Fibre Reinforced Concrete Pavement Materials. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Pretoria. 2011.
98. Oikonomou-Mpegetis S. Behaviour and Design of Steel Fibre Reinforced Concrete Slabs. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Imperial College London. 2013.

99. Eldeen S.A. Taniguchi T. Modeling of fiber reinforced concrete by the homogenization method // Journal of the Faculty of Environmental Science and Technology, Okayama University. 2006. T. 11, № 1. С. 43–49.
100. Evaluation of Elastic and Viscoelastic Properties of Fiber Reinforced Concrete by Means of a Micromechanical Approach / V.F. Dutra, S. Maghous, A. Filho [и др.] // 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics. 2009.
101. Li V.C., Wang Y., Becker S. Micromechanical Model of Tension-Softening and Bridging Toughening of Short Random Fiber Reinforced Brittle Matrix Composites // Journal Mechanics and Physics of Solids. 1991. T. 39, № 5. С. 607–625.
102. Ren X. Li J. Multi-scale based fracture and damage analysis of steel fiber reinforced concrete // Engineering Failure Analysis. 2013. T. 35. С. 253–261.
103. Cunha F. Steel Fibre Reinforced Self-Compacting Concrete (from Micro-Mechanics to Composite Behaviour). Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Minho. 2010.
104. Basis of a Finite-Element Simulation Tool to Predict the Flexural Behavior of SFRC Prisms / T. Soetens, S. Matthys, L. Taerwe [и др.] // High Performance Fiber Reinforced Cement Composites 6 / под ред. H.W. Reinhardt G.J. Parra-Montesinos, A.E. Naaman. Springer, 2012. С. 91–98.
105. Radtke F. Computational modelling of fibre-reinforced cementitious composites: An analysis of discrete and mesh-independent techniques. Ph.D. thesis: PhD thesis, Delft University of Technology. 2012.
106. Р. Кристенсен. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. С. 334.
107. K. Kaw A. Mechanics of Composite Materials. New York: CRS Press, 2005. С. 490.

108. Зинкевич О. Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Мир, 1986. С. 318.
109. Б.Е. Победря. Численные методы в теории упругости и пластичности. Москва: Изд-во МГУ, 1995. С. 366.
110. Дж. Эшелби. Континуальная теория дислокаций. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. С. 247.
111. W.B. Russel. On the effective moduli of composite materials effect of fiber length and geometry at dilute concentrations // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1973. Т. 24, № 4. С. 581–600.
112. D.B. Mohite, S.B. Shinde. Experimental investigation on effect of different shaped steel fibers on compressive strength of high strength concrete // IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering. 2013. Т. 6, № 4. С. 24–26.
113. Солодовников А.С. Шешенин С.В. Определение эффективных упругих характеристик бетонов с короткими армирующими элементами // Транспортное строительство. 2015. № 2. С. 19–22.
114. Beton Comite Euro-International Du. CEB-FIP Model Code 1990: Design Code. 1990. С. 460.
115. de Souza Neto E. A., Peric D., Owen D. R. J. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. Wiley, 2008. С. 814.
116. Simo J.C., Hughes T.J.R. Computational Inelasticity. Springer, 2000. С. 392.
117. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Wiley, 1991. Т. 1. С. 345.
118. В. Новацкий. Теория упругости. Москва: Мир, 1975. С. 872.
119. Л.М. Качанов. Основы теории пластичности. Москва: Наука, 1969. С. 420.

120. В.Т. Койтер. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. С. 78.
121. Kwak H.G., Filippou F.C. Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads: Tech. Rep.: : A report on research conducted under Grant RTA-59M848 from the California Department of Transportation, 1990.
122. Стренг Г. Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Москва: Мир, 1977. С. 349.
123. Победря Б.Е. Георгиевский Д.В. Лекции по теории упругости. Москва: Эдиториал УРСС, 1999. С. 208.
124. Бате К. Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва: Стройиздат, 1982. С. 448.
125. Р. Галлагер. Метод конечных элементов. Основы. Москва: Мир, 1984. С. 428.
126. Menetrey P. Numerical Analysis of Punching Failure in Reinforced Concrete Structures. Ph.D. thesis: PhD thesis, University of Colorado. 1994.
127. P.H Feenstra, de Borst R. A composite plasticity model for concrete // International Journal of solids and structures. 1996. Т. 33, № 5. С. 707–730.
128. Ю.М. Баженов. Технология бетона. М.: Изд-во АСВ, 2002. С. 500.
129. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids // Journal of Applied Mechanics. 1956. Т. 23. С. 493–496.
130. Ишлинский А.Ю. Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 704.

131. Вильдеман В.Э. Соколкин Ю.В. Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1997.
132. A. E. Naaman G. Namur H. Najm, Alwan J. Bond mechanisms in Fiber Reinforced Cement-based Composites: Tech. Rep.: : A report on Research Sponsored by the Air Force Office of Scientific Research Grant No. F49620-87-C-0063, 1989.
133. Liu G.R., S.S. Quek. The Finite Element Method: Practical Course. Butterworth-Heinemann, 2003. С. 348.
134. Gustavo S. Le Riche R. Molimard J. Vautrin A. Exact and efficient interpolation using finite elements shape functions. 2006.
135. А.С. Солодовников. Численное определение прочностных свойств бетона с короткими армирующими элементами // Аннотировано в: Библиографический указатель ВИНТИ РАН РФ "Депонированные научные работы". 2016. Т. 6, № 145-B2016.
136. Chen L. Flexural Toughness of Fibre Reinforced Concrete. Ph.D. thesis: PhD thesis, The University of British Columbia. 1995.
137. C1018-97 ASTM. Standard Test Method for Flexural Toughness and First-Crack Strength of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading). ASTM International, 1997.
138. Samman T.A., Wafa F.F., Radian T.A. Mechanical Properties of Normal and High-strength Concrete with Steel Fibers // Journal of King Abdulaziz University: Engineering Sciences. 1999. Т. 12, № 1. С. 87–104.

139. А.С. Солодовников. Сравнение методов расчета плит на многослойном основании // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2015. № 3. С. 69–72.
140. Barros J.A.O., Figueiras J.A. Experimental behaviour of fibre concrete slabs on soil // Mechanics of Cohesive-Frictional Materials. 1998. Т. 3. С. 277–290.
141. С.Н. Клепиков. Расчет конструкций на упругом основании. Будивельник, 1967.
142. Горбунов-Посадов М.И. Маликова Т.А. Расчет конструкций на упругом основании. Стройиздат, 1973.