

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЛАМЕ

С.Е. Александров¹, В.И. Бухалов¹, А.Л. Попов^{1,2}

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

²Московский государственный строительный университет, Москва
vlad.buhalov@yandex.ru

Аннотация. Известно, что решение задачи Ламе можно рассматривать как в упругой, так и в упругопластической постановке. В данной работе представлен итерационный метод решения упругопластической задачи Ламе для цилиндра, нагруженного под действием равномерного внешнего давления. Отличие данного подхода состоит в том, что решение упругопластической задачи Ламе находится с использованием упругого решения и аналитического представления напряжений в пластической области. Сходимость итерационного метода показана в сравнении с известным решением данной задачи в упругопластической постановке. Проведен также численный расчет упругопластической задачи Ламе с использованием итерационного решения и приведены сравнения с аналитическими результатами.

Работа поддержана грантом РНФ № 19-19-00616.

Введение

Решение упругопластических задач при плосконапряженном состоянии получены в ограниченном числе постановок. В частности, в различных постановках и выборе исходного представления для решений в пластической зоне приводится решение упругопластической задачи Ламе [1-6]. Однако, до сих пор не имеет аналитического решения упругопластическая задача Кирша, несмотря на ряд приближенных подходов к ее решению [7-9].

Особенностью задачи Кирша является наличие свободной границы в форме окружности. Пластическая зона возникает около этой границы. Так как уравнения для напряжений в пластической зоне относятся к гиперболическому типу и вблизи свободной границы необходимо решать задачу Коши, то решение для напряжений в пластической зоне не зависит от остальных краевых условий и является точно таким, как в задаче Ламе. В связи с этим представляется целесообразным развить приближенный подход к решению задачи Кирша, учитывающий эту характерную особенность точного решения.

В настоящей работе предложен полуаналитический подход к решению задач такого типа, состоящий в явном аналитическом представлении для напряжений в пластической области и итерационной процедуры численного решения в упругой области при заранее неизвестной границе пластической зоны. Форма упругопластической границы определяется сшивкой решений в упругой и пластической областях по условиям непрерывности напряжений. Сходимость итерационной процедуры проверяется на решении с помощью данного подхода упругопластической задачи Ламе, которая представлена в данной работе.

Аналитическое решение упругопластической задачи Ламе методом итерации упругого решения

Итерационная процедура решения упругопластической задачи Ламе для радиальной (σ_r) и окружной (σ_θ) компонент напряжений плоского напряженного состояния в кольце с радиусами a , b ($b > a$), находящегося под действием равномерного внешнего давления $P_0 > \sigma_Y / 2$ (σ_Y - предел текучести) строится на основе упругого решения этой задачи [5]

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{cases} = \pm \frac{A}{r^2} + B, \quad A = \frac{(P_0 - P_1)r_1^2 b^2}{b^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{P_1 r_1^2 - P_0 b^2}{b^2 - r_1^2}. \quad (1)$$

Здесь: r - радиальная координата с началом в центре кольца; в исходном приближении: $r_1 = a$, $P_1 = 0$.

Вычислив с помощью выражений (1) эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta}$$

и приравняв его пределу текучести σ_Y , получим приближенное выражение для радиуса (r_T) пластической зоны:

$$r_T^4 = 3A^2 / (\sigma_Y^2 - B^2) \quad (2)$$

На Рис. 1 показаны этапы итерационной процедуры: a - исходная расчетная схема для кольца, нагруженного по внешнему контуру, $\bar{b}$ - промежуточная расчетная схема для упругой задачи, в которой $r_1 = r_T$, $P_1 = \sigma_r^p$ полученные на предыдущем этапе решения (показано штриховой линией на Рис. 1 a).

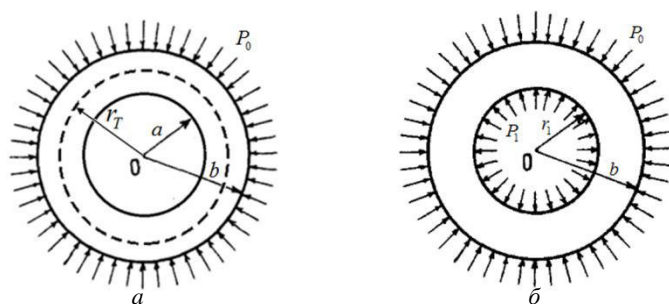


Рис. 1. Расчетные схемы по этапам итерационной процедуры; (а) - исходная схема для кольца, нагруженного по внешнему контуру, (б) - промежуточная схема для упругой задачи, в которой $r_1 = r_T$, $P_1 = \sigma_r^p$ полученные на предыдущем этапе

Для второй итерации рассматривается упругое кольцо с внутренней границей, проходящей по окружности радиуса r_T , вдоль которой задаётся давление P_1 , равное радиальной компоненте напряжений в пластической зоне σ_r^p , выражения для которых могут быть выписаны, например, из [4]:

$$\sigma_r^p = -\frac{2\sin\psi}{\sqrt{3}}\sigma_Y, \quad \sigma_\theta^p = -\left(\frac{\sin\psi}{\sqrt{3}} + \cos\psi\right)\sigma_Y, \quad r = a \frac{\sqrt[4]{3} \exp(\psi\sqrt{3}/2)}{\sqrt{2} \sqrt{\sin(\pi/3 - \psi)}}.$$

Задав здесь $r = r_T$, находим $\psi = \psi_T$, а по нему – значение давления P_1 .

По найденному значению P_1 и $r_1 = r_T$ используя формулу (2) определяем второе приближение для радиуса пластической зоны. Последующие приближения выполняются подобно предыдущему.

Для примера рассмотрим итерационную процедуру при внешней нагрузке $P_0 = 0.9\sigma_Y$ и радиусах кольца $a = 1.5$ мм, $b = 10$ мм. Результаты расчета для 6 итераций сведены в Табл. 1.

Табл. 1

Номер итерации	r_T , мм	$\psi(r_T)$	P_1 / σ_Y
1	3.03	0.509	0.563
2	4.067	0.665	0.712
3	4.295	0.69	0.735
4	4.307	0.692	0.736
5	4.296	0.69	0.735
6	4.309	0.691	0.736

Из Табл. 1 видно, что начиная с 4-й итерации, значения радиуса пластической зоны стабилизируются в окрестности 4.3 мм. Это значение совпадает со значением радиуса пластической зоны, найденным в [6] из аналитического решения упругопластической задачи Ламе.

Численно-аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Ламе

Численно-аналитическое решение задачи Ламе проводилось с использованием программной среды Ansys. Для моделирования расчетной сетки для диска с внутренним радиусом отверстия $a = 1.5$ мм и внешним $b = 10$ мм достаточно было, вследствие симметрии, взять только 1/4 часть (Рис. 2).

После построения модели, были заданы свойства материала. Для данной задачи было задано идеальнупругопластическое тело с пределом текучести $\sigma_Y = 250$ МПа, модулем юнга $E = 210$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Вычислительная сетка была выбрана четырехугольной с средним значением длины элемента ребра 0.02 мм.

Сначала было получено решение задачи в упругопластической постановке с наложением следующих граничных условий: внешнее давление $P_0 = 0.9\sigma_Y$; край отверстия свободен от усилий; стороны оснований модели, прилегающих к отверстию, могут свободно перемещаться только вдоль своих осей (в силу симметрии модели).

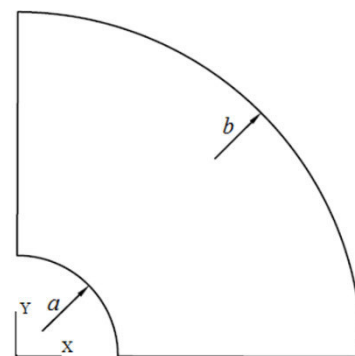


Рис. 2. Расчетная область для решения МКЭ

Результат численного решения в упругопластической постановке дал для радиуса пластической зоны значение $r_T = 4.29$ мм, что хорошо согласуется с аналитическим решением.

Следующим этапом являлось итерационное решение этой же задачи с исходной упругой постановкой, но с использованием численного модуля программы Ansys. Результаты расчета для 5 итераций сведены в Табл.2.

Табл. 2

Номер итерации	r_T , мм	$\psi(r_T)$	P_1 / σ_Y
1	3.03	0.509	0.563
2	4.058	0.664	0.711
3	4.288	0.689	0.734
4	4.305	0.691	0.736
5	4.305	0.691	0.736

Видно, что в первом приближении радиус пластической зоны совпадает с аналогичным значением, полученным из упругого решения. Дальнейшие приближения также оказались близки к полученным аналитическим методом. Начиная с 4-й итерации значение радиуса пластической зоны совпало со значением радиуса пластической зоны, найденным из аналитического решения упругопластической задачи Ламе и далее не менялось.

Заключение

В данной работе на модельной задаче Ламе в упругопластической постановке продемонстрирована итерационная процедура полуаналитического решения, когда в пластической области используются явные аналитические выражения для компонент напряжений, а в упругой области находится либо аналитическое решение (в силу простоты модели), либо численное решение. Граница упругопластической области и величина давления на ней определяются на каждом этапе из решения упругой задачи. Показано, что для сходимости процедуры определения границы пластической области требуется небольшое количество итераций.

Предложенный подход будет впоследствии обобщен для реализации полуаналитического решения упругопластической задачи Кирша.

Литература

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. - 400 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. Шк., 1969. - 608 с.
3. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука СО, 1983. - 239 с.
4. Alexandrov S. Elastic/plastic discs under plane stress conditions. Berlin: Springer, 2015. - 114 p.
5. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Изд. АСВ, 1995. - 568 с.
6. Попов А.Л., Челюбеев Д.А., Бухалов В.И. Задача Гадолина в упругопластической постановке // ПММ. 2018. Т. 82. №6. С. 804-812.
7. Фаерберг И. И. Растяжение пластинки с круговым отверстием за пределом упругости / Тр. ЦАГИ. 1947, № 615. с. 1-13.
8. Перлин П.И. Приближенный метод решения упругопластических задач // Инж. журн., 1960, вып. 28, с. 145-150.
9. Tuba I.S. An analytic method for elastic-plastic solutions // Int. J. Solids Struct., 1967, Vol. 3, pp. 543 - 564