

## О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным\*

А. Л. Попов<sup>1</sup>, С. А. Садовский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
Российская Федерация, 119526, Москва, пр. Вернадского, 101

<sup>2</sup> Национальный исследовательский Московский государственный  
строительный университет,  
Российская Федерация, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

**Для цитирования:** Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 270–281. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.207>

Известен ряд теоретических моделей для описания продольных колебаний стержня. Наиболее простая и распространенная модель основана на волновом уравнении. Менее распространенной является модель, учитывающая поперечное смещение (поправка Релея). Более совершенной считается модель Бишопа, учитывающая как поперечное смещение, так и деформацию сдвига. Казалось бы, чем совершеннее теоретическая модель, тем она лучше должна согласовываться с экспериментальными данными. Тем не менее при сравнении с реально определенным экспериментальным спектром продольных колебаний стержня на большой базе собственных частот оказывается, что это не совсем так. Причем в относительном проигрыше оказывается наиболее сложная модель Бишопа. Проведены сопоставления для длинного цилиндрического стержня, также затронуты вопросы уточнения скорости продольных волн и коэффициента Пуассона материала стержня с помощью экспериментально найденных частот.

*Ключевые слова:* стержень, продольные колебания, волновое уравнение, поправка Релея, поправка Бишопа, экспериментальные данные.

**1. Введение.** Изучение продольных колебаний стержня имеет обширную теоретическую базу. Достаточно упомянуть классические монографии [1–3]. Наиболее распространенной и простой моделью их описания является волновое уравнение. При его использовании предполагается, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной. Это позволяет при определении продольных смещений стержня пренебречь влиянием поперечных деформаций, сопровождающих деформации расширения-сжатия в процессе продольных колебаний.

Вывод уточненного уравнения, учитывающего поперечную деформацию при продольных колебаниях стержня, приведен в [2]. Получающаяся из него поправка для частот колебаний совпадает с поправкой Релея, выведенной из энергетических соображений [1].

Обобщением модели Релея является модель, предложенная Бишопом [4] для безграничного стержня, в которой, наряду с поперечными деформациями, учитываются и деформации сдвига. В отличие от двух других, эта модель описывается

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00100).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

дифференциальным уравнением 4-го порядка по продольной координате. Формулировка граничных условий для уравнения продольных колебаний с поправкой Бишопы приведена в [5]. Экспериментальные исследования продольных колебаний стержней берут начало с экспериментов Кундта, выполненных с помощью изобретенной им трубы [6]. В дальнейшем и по настоящее время используются два способа возбуждения колебаний: кратковременным ударным воздействием, вызывающим свободно затухающие колебания стержня (метод свободных колебаний), либо непрерывным воздействием с плавно изменяющейся частотой (резонансный метод) [7]. С появлением современных спектроанализаторов первый способ, позволяющий сразу и с высокой точностью определять большое количество собственных частот, становится предпочтительнее. Ниже с помощью этого способа рассмотрено соответствие теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным. Рассмотрение проводится на трех моделях в порядке возрастания их сложности.

**2. Базовая теоретическая модель на основе волнового уравнения.** Для описания свободных продольных колебаний стержня постоянного поперечного сечения обычно используется волновое уравнение в виде [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1)$$

в котором  $u = u(x, t)$  — продольное смещение точки стержня с координатой  $x$ , направленной вдоль его оси, в момент времени  $t$ ,  $E$  — модуль упругости,  $\rho$  — плотность стержня. При гармонических колебаниях стержня с круговой частотой решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$u(x, t) = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \exp(i\omega t), \quad \lambda = \omega/c, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные, определяемые из граничных условий на концах стержня.

На концах  $x = 0, l$  стержня примем условие закрепления:  $u = 0$ , — либо свободного края:  $\partial u / \partial x = 0$ . При подстановке решения (2) в эти условия выводятся формулы для собственных частот продольных колебаний стержня. При этом отличающимися по типу граничных условий будут только частоты колебаний стержня с сочетанием свободно-свободного ( $F - F$ ) и свободно-закрепленного ( $F - C$ ) концов:

$$f_n = \frac{c}{2l} \left\{ \begin{array}{l} n, \\ n - 1/2, \end{array} \frac{F - F}{F - C} \right\}, \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Частоты колебаний стержня с закрепленными и свободными концами совпадают [1].

В эксперименте наиболее просто реализуются условия свободных концов, например при горизонтальной подвеске стержня на двух нитях (рис. 1).

Удобство использования колебаний стержня при таких условиях заключается также в том, что получающийся спектр частот, как указывал еще Релей [1], состоит из чередующихся частот колебаний стержня половинной длины  $l$  с закрепленно-свободным и свободно-свободным концами. Отметим, что шаг между частотами одинаковый, равный первой частоте стержня длиной  $l$  с закрепленно-свободным концом.

**3. Экспериментальное измерение спектра продольных колебаний стержня.** Колебания стержня, подвешенного на двух нитях, возбуждались ударом

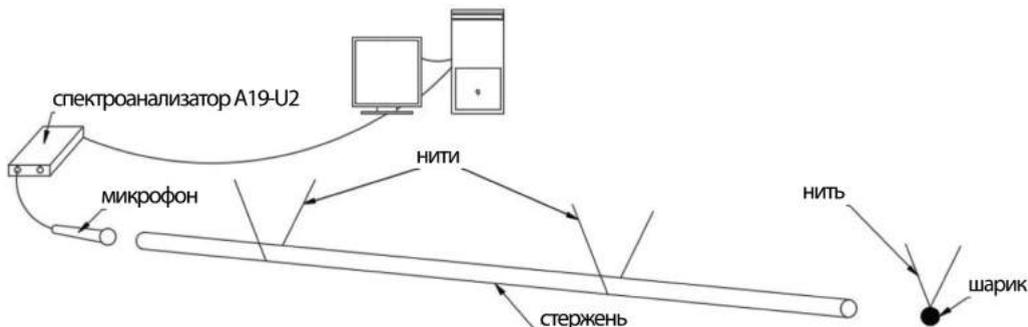


Рис. 1. Схема установки.

шарика из закаленной стали по одному из торцов стержня (рис. 1). Регистрация колебаний осуществлялась с помощью лабораторного микрофона, установленного вблизи другого торца. Сигнал от микрофона передавался на анализатор спектра A19-U2 и далее на компьютер, где обрабатывался с помощью программного комплекса ZETLab [8].

В качестве образца был выбран прямолинейный цилиндрический стержень из алюминиевого сплава длиной  $L = 2006$  мм и диаметром  $d = 24.8$  мм. На рис. 2, а показан фрагмент микрофонной записи многочастотного сигнала звукоизлучения стержня продолжительностью 0.2 с после удара в момент времени  $t = 0$ , а на рис. 2, б — графическое отображение спектра этого сигнала в Гц (амплитуды по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала (мВ), передаваемого с микрофона). Из рис. 2, б видно, что расстояние между ярко выраженными дискретными составляющими в полученном спектре частот колебаний стержня практически постоянно, что соответствует равномерному распределению теоретических частот продольных колебаний (3). Однако при подробном рассмотрении экспериментальное распределение частот не полностью подчиняется этому простому закону и с ростом номера частоты происходит нарастание отличий между расчетными и экспериментальными значениями частот.

Видно также, что при данном способе возбуждения и регистрации колебаний собственные частоты других типов колебаний, например поперечных, практически не проявляют себя, несмотря на то что регистрируется спектр колебаний начиная с самых низких частот — от 20 Гц. Однако не исключено, что при других сочетаниях длины и граничных условий по краям стержня возможен параметрический резонанс, теоретически обнаруженный в [9], при котором могут возникнуть значительные поперечные колебания.

**4. Сопоставление экспериментальных и теоретических частот колебаний.** Для численного сопоставления экспериментальных и теоретических частот колебаний стержня в формуле (3) должна быть известна скорость волн сжатия-расширения  $c$ , которая определяется из (1) через модуль упругости и плотность материала стержня. Справочные значения для этих параметров имеют некоторый разброс [10]:  $E = (69 \div 72.5)$  ГПа,  $\rho = (2650 \div 2850)$  кг/м<sup>3</sup>. Это приводит к разбросу значений для скорости продольных волн в интервале (4980 ÷ 5230) м/с.

Для уточнения скорости звука в стержне применен подход к ее вычислению через найденную в эксперименте собственную частоту колебаний и длину стержня,

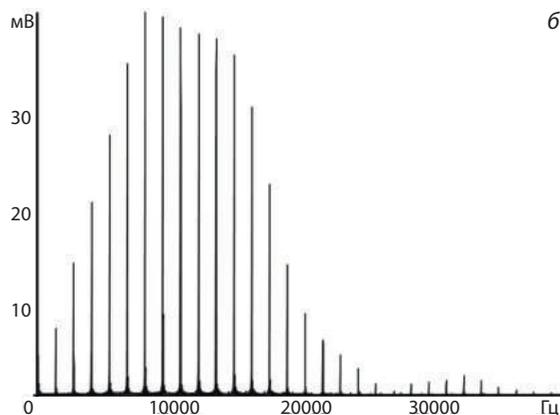
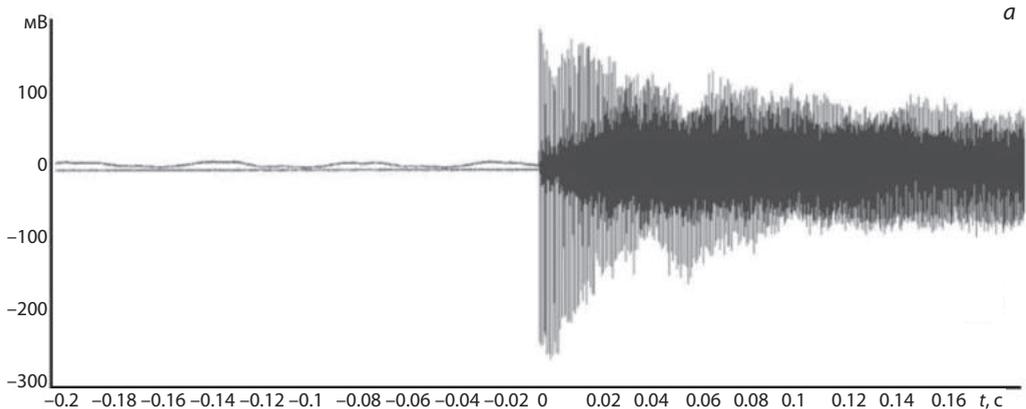


Рис. 2. Микрофонная запись продолжительностью 0.2 с многочастотного сигнала звукоизлучения стержня после ударного воздействия по его торцу (а), спектр этого сигнала в Гц (б).

реализованный впервые в трубке Кундта [6]. Используя для этого первую экспериментальную частоту продольных колебаний стержня  $f_{1, \text{exp}} = 1297.812$  Гц, находим из (3) скорость  $c = 5206.822$  м/с. Остальные расчетные значения частот, как следует из (3), определяются умножением первой частоты на их номера.

В таблице приведены значения отношений тридцати экспериментально зарегистрированных частот продольных колебаний стержня к первой частоте.

№ частоты (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{n, \text{exp}}/f_1$	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	5.999	6.997	7.996	8.994	9.990
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	10.998	11.982	12.978	13.972	14.966	15.958	16.949	17.940	18.929	19.918
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	20.905	21.889	22.873	23.855	24.835	25.814	26.791	27.766	28.739	29.710

Из таблицы видно постепенное нарастание отличий расчетных частот от экспериментальных в зависимости от номера частоты. К тридцатой частоте (38557.99 Гц) они достигают уже около 400 Гц, несмотря на то что рассматривался заведомо длинный стержень с отношением длины к диаметру более 80, применимость к которому волнового уравнения для вычисления частот продольных колебаний не вызывает сомнений.

Нарастание отличий расчетных частот от экспериментальных в зависимости от номера частоты может быть объяснено неучетом в волновом уравнении влияния поперечной деформации стержня. Это исправляется с помощью поправки Релея, которая может быть получена из уравнения уточненной теории продольных колебаний стержня.

**5. Поправка Релея.** В уточненной теории продольных колебаний стержня дополнительно учитывается инерция поперечных смещений, возникающих в соответствии с эффектом Пуассона. Уравнение уточненной теории продольных колебаний стержня имеет вид [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu^2 \frac{I_p}{F} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где через  $\nu$  обозначен коэффициент Пуассона,  $I_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения стержня с площадью  $F$ ; для круга  $I_p = \pi d^4/32$ ,  $y, z$  — расстояния от нейтральной оси до выбранной точки поперечного сечения.

Граничные условия для этого уравнения сводятся к тем же, что и в случае волнового уравнения [11].

Для решения уравнения (4) может быть использовано исходное представление (2). Подстановка его в граничные условия приводит к уточненному выражению для частот продольных колебаний стержня ( $f_{Rn}$ ) через соответствующие частоты ( $f_{wn}$ ), полученные из решения волнового уравнения:

$$f_{Rn} = \frac{f_{wn}}{\sqrt{1 + \eta_n}}, \quad f_{wn} = \frac{nA}{2L}, \quad \eta_n = \frac{\pi^2 n^2 \nu^2 d^2}{8L^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

При малом значении поправочного коэффициента в подкоренном выражении (5) поправка к частоте сводится к известной поправке Релея [1].

Для сравнения значений частот, вычисленных по формуле (5), с экспериментально измеренными частотами необходимо, кроме скорости продольных волн, знание и коэффициента Пуассона материала стержня. Справочные данные по этому коэффициенту для алюминиевых сплавов имеют заметный разброс в пределах  $0.31 \div 0.33$  [9],  $0.32 \div 0.36$  [12]. Для уточнения этого значения применительно к материалу испытываемого стержня используем подход к определению коэффициента Пуассона, предложенный в [13].

Суть подхода состоит в следующем. Задавая коэффициент Пуассона в возможном интервале значений ( $0.31 \div 0.36$ ) и вычисляя по формуле (5) значения собственных частот колебаний стержня, получаем набор расчетных частот, соответствующий измеренным экспериментальным частотам. Далее, составляя модули разностей экспериментальных и расчетных частот с одинаковыми номерами и суммируя эти разности с делением на число частот, получаем критерий отклонения расчетных значений частот от экспериментальных при выбранном значении коэффициента

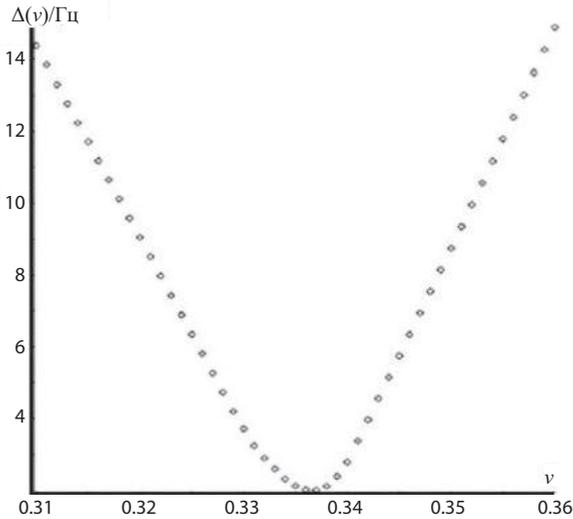


Рис. 3. Определение коэффициента Пуассона из условия минимума разницы между наборами экспериментальных и расчетных частот.

Пуассона:

$$\Delta(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\Delta f_n(\nu)|, \quad \Delta f_n(\nu) = f_{n,\text{cal}}(\nu) - f_{n,\text{exp}}(\nu). \quad (6)$$

На рис. 3 приведен график зависимости  $\Delta(\nu)$ , из которого видно, что минимальное отклонение между экспериментальными и расчетными наборами частот имеет место при  $\nu = 0.337$ .

При выбранном так значении коэффициента Пуассона были определены 30 собственных частот продольных колебаний стержня и их отличия от экспериментальных частот. Эти отличия в зависимости от номера частоты показаны на рис. 4 в сопоставлении с аналогичными отличиями от экспериментальных значений расчетных частот, вычисленных без поправки Релея.

Как видно из рис. 4, частоты, найденные по формуле (5), почти не отличаются от значений экспериментальных частот во всем рассматриваемом диапазоне.

Казалось бы, уравнение (5) почти безукоризненно описывает продольные колебания стержня. Однако в нем имеется особенность, которую можно проявить, исключив время зависимостью

$$u(x, t) = X(x) \exp(i\omega t) \quad (7)$$

и сгруппировав слагаемые у второй производной функции  $X(x)$ :

$$\left(1 - \nu^2 \lambda^2 \frac{I_p}{F}\right) X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (8)$$

Коэффициент при старшей производной в уравнении (8) при некоторой частоте, соответствующей предельной точке сгущения частот ( $f_{kp}$ ) [14], может обратиться

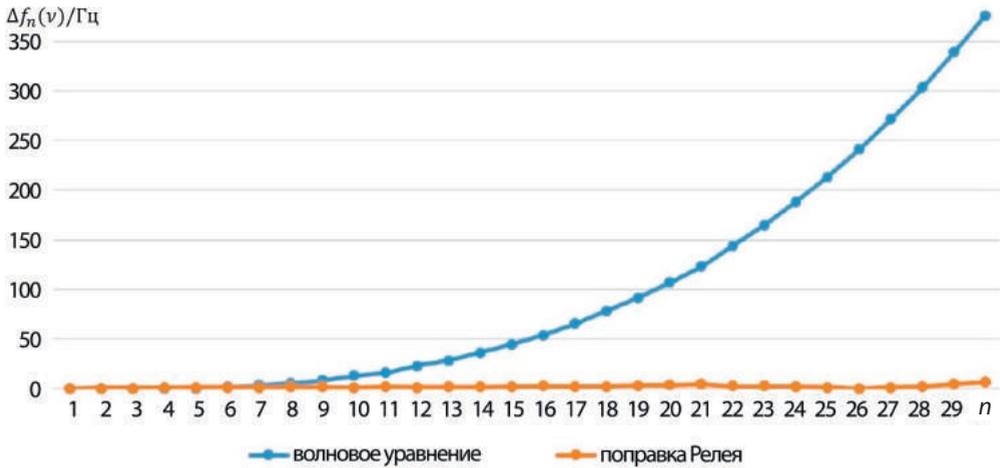


Рис. 4. Отличия в Гц расчетных частот от экспериментальных в зависимости от номера частоты.

в нуль, а при ее превышении — стать отрицательным, что приведет к неосциллирующим решениям уравнения (8). Оценка величины  $f_{кр}$  для стержня, рассматриваемого в данной работе, дает значение около 300 кГц, т. е. максимальная частота (38557.99 Гц) диапазона из тридцати первых частот собственных колебаний этого стержня почти на порядок ниже критической частоты, что гарантированно обеспечивает применимость поправки Релея при вычислении и намного более высоких частот. В то же время из графика, приведенного на рис. 4, наблюдается некоторое сгущение экспериментальных частот с ростом их номера и величины. Несмотря на это, принципиальная ограниченность спектра частот, вычисляемого с поправкой Релея, и остающиеся незначительные отличия в значениях экспериментальных и расчетных частот указывает на желательность перехода к более совершенной модели продольных колебаний стержня, разработанной Бишопом.

**6. Модель Бишопа.** Главной особенностью модели Бишопа является учет не только поперечных, но и сдвиговых деформаций [4, 5]. Продольные колебания стержня по этой модели описываются более сложным уравнением 4-го порядка по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu^2 \frac{I_p}{F} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{c^2 \nu^2}{2(1 + \nu)} \frac{I_p}{F} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \quad (9)$$

Соответственно, для его решения должны быть поставлены по два граничных условия на концах стержня. Варианты таких условий представлены в [5]. В случае свободных концов они имеют вид

$$\left( EF \frac{\partial u}{\partial x} + \nu^2 \rho I_p \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - \nu^2 G I_p \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=0, L} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0, L} = 0, \quad (10)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

При жестком закреплении концов стержня граничные условия таковы:

$$u \Big|_{x=0, L} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, L} = 0. \quad (11)$$

Общее решение уравнения (9) представляется комбинацией тригонометрических и гиперболических функций:

$$u(x, t) = (C_1 \operatorname{ch} \beta_1 x + C_2 \operatorname{sh} \beta_1 x + C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) \exp(i\omega t), \quad (12)$$

$$\beta_{1,2}^2 = \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} + \frac{\lambda^2}{b}} \pm \frac{a}{2b}, \quad a = 1 - \nu^2 \lambda^2 \frac{I_p}{F}, \quad b = \frac{\nu^2}{2(1+\nu)} \frac{I_p}{F}.$$

Подстановка выражения (12) в граничные условия (11) или (10) приводит к частотным уравнениям для жестко закрепленных ( $n = 0$ ) либо свободных ( $n = 1$ ) концов:

$$2(\beta_1 \beta_2)^{2n+1} \left( \cos \beta_2 L - \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_1 L} \right) + (-1)^n (\beta_2^{4n+2} - \beta_1^{4n+2}) \sin \beta_2 L \operatorname{th} \beta_1 L = 0, \quad n = 0, 1. \quad (13)$$

Для сравнения результатов по различным моделям продольных колебаний стержня удобно использовать граничные условия свободного упора концов стержня в жесткие стенки [15]. В этом случае по краям стержня отсутствуют продольные смещения и сдвиги, пропорциональные второй производной:

$$u \Big|_{x=0, L} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0, L} = 0.$$

Данные условия позволяют представить решение уравнения (6) в простом виде:

$$u(x, t) = \sin \frac{\pi n x}{L} \exp(i\omega t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Соответственно, для частот  $f_{Bn}$  продольных колебаний стержня по модели Бишопы может быть выписана явная формула

$$f_{Bn} = f_{Rn} \sqrt{1 + \frac{\eta_n}{2(1+\nu)}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где через  $f_{Rn}$  обозначены частоты, вычисленные с поправкой Релея (5).

Из формулы (15) видно, что частоты колебаний стержня, найденные по модели Бишопы, должны иметь меньшие значения, чем вычисленные из волнового уравнения, но должны превышать частоты, определенные с поправкой Релея. Наглядным подтверждением этого являются диаграммы, представленные на рис. 5. На них показаны отличия расчетных частот, вычисленных по волновому уравнению и с поправками Релея и Бишопы при использовании граничных условий свободных концов общего вида (10), от экспериментальных частот в зависимости от номера частоты при наименьшем из возможных значений коэффициента Пуассона и близком к найденному по алгоритму (7) значению  $\nu = 0.34$ .

Как видно из рис. 5, поправка Бишопы из уравнения 4-го порядка к частотам волнового уравнения хотя и приближает их к значениям экспериментальных частот продольных колебаний однородного стержня, но несопоставимо в меньшей степени, чем более простая поправка Релея, следующая из уравнения того же порядка, что и волновое уравнение. Необходимо также отметить, что в случае длинного стержня использование простейшего представления (14) для описания формы колебаний стержня по модели Бишопы приводит к значениям собственных частот колебаний,

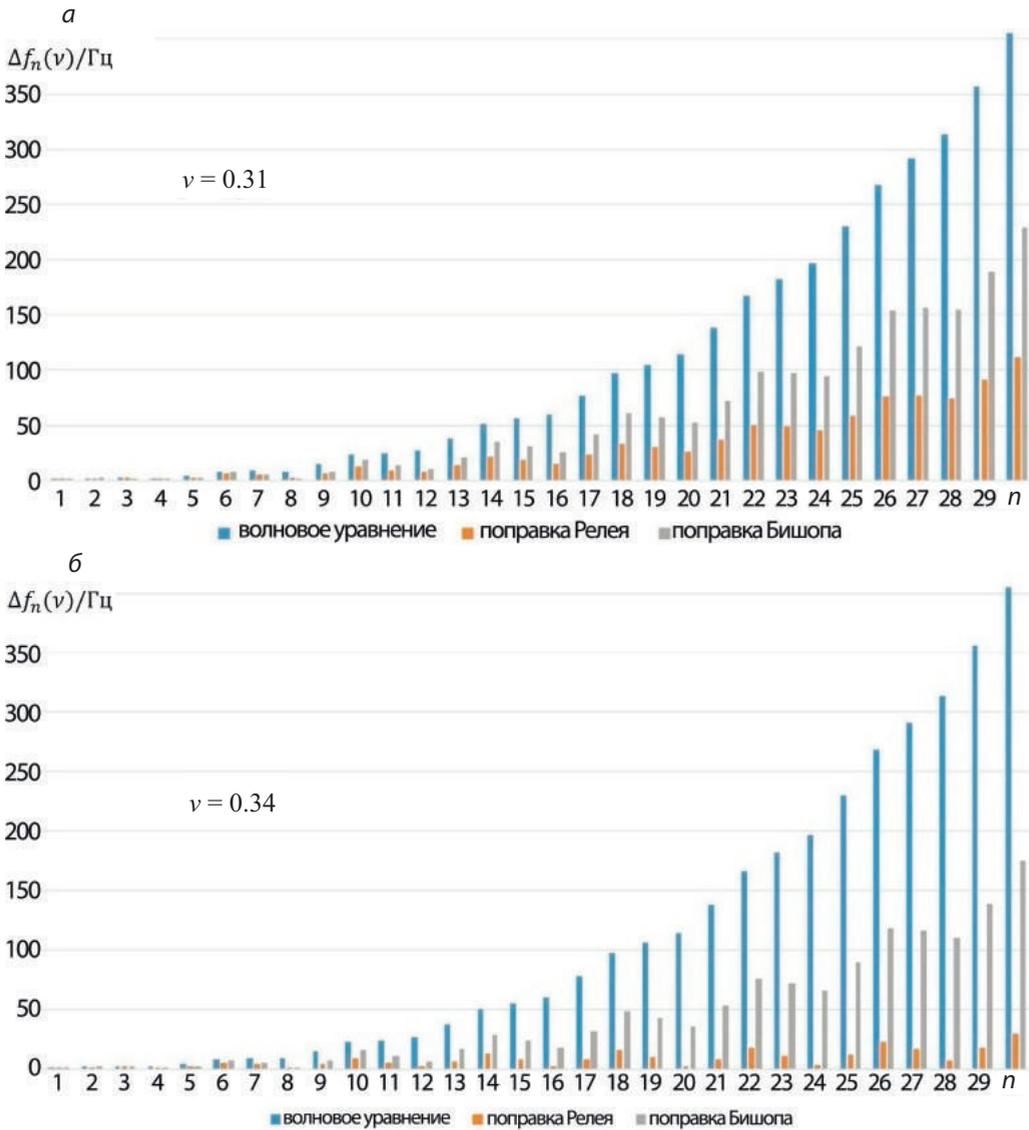


Рис. 5. Отличия расчетных частот по волновому уравнению и с поправками Релея и Бишоп от экспериментальных частот стержня: а — при  $\nu = 0.31$ , б — при  $\nu = 0.34$ .

практически совпадающих с частотами, определяемыми из общего решения (12) при граничных условиях общего вида (11) (отличие в частотах заметно только в шестой и седьмой значащих цифрах). Следовательно, использование более общей, но и гораздо более сложной модели продольных колебаний стержня на основе поправок Бишоп не улучшает, а даже ухудшает согласование расчетных и экспериментальных частот в случае длинного стержня.

**7. Заключение.** Широко распространено положение о том, что чем больше теоретически возможных факторов учитывается в математической модели, тем она

совершеннее и должна лучше согласовываться с экспериментальными данными. В работе на примере продольных колебаний стержня были рассмотрены три уровня таких моделей: волновое уравнение, уточненное уравнение, учитывающее влияние поперечной деформации стержня, и уравнение четвертого порядка по координате, учитывающее наряду с предыдущим также и сдвиговые деформации. Спектры частот колебаний стержня, полученные по этим моделям, сравнивались с экспериментальным набором частот, определенным с помощью высокоточной спектроанализирующей аппаратуры. Результат этого сравнения оказался неочевидным.

Сравнение экспериментальных частот с частотами, полученными по модели волнового уравнения, показало их быстро увеличивающееся расхождение с ростом номера частоты. Наилучшее согласование с экспериментальными частотами показали расчетные значения, вычисленные с поправкой Рэлея, т. е. модели, учитывающей влияние поперечной деформации. Частоты, определенные из более сложной модели, разработанной Бишопом, учитывающей как поперечные, так и сдвиговые деформации, несколько улучшают результаты, полученные из волнового уравнения, но несравненно хуже аппроксимируют их значения при сравнении с экспериментом, чем частоты, вычисленные только с учетом поперечной деформации. Это может быть объяснено принципиальным свойством симметричности деформации поперечного сечения стержня при продольных колебаниях.

Возможны, конечно, рассмотрения вариантов продольных колебаний стержней несимметричного поперечного сечения, которые, скорее всего, будут сопровождаться и колебаниями других типов. В этих случаях, вероятно, сдвиговые деформации будут играть какую-то роль в уточнении расчетных частот продольных колебаний стержня. Однако для длинных стержней с симметричным поперечным сечением при расчете частот продольных колебаний не требуется перехода к более сложной модели, чем уравнение колебаний с учетом поперечной деформации.

## Литература

1. Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей). *Теория звука*, пер. с англ. Т. 1. Москва, ГИТТЛ (1955).
2. Ляв А. *Математическая теория упругости*, пер. с англ. Москва, Ленинград, ОНТИ (1935).
3. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле*, пер. с англ. Москва, Наука (1967).
4. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams. *Aeronautical* **3** (2), 280–293 (1952).
5. Rao S. S. *Vibration of Continuous Systems*. Hoboken, John Wiley & Sons Inc. (2007).
6. Kundt A. Acoustic Experiments. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **35** (4), 41–48 (1868).
7. Клюев В. В. (ред.) *Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник*. Москва, Машиностроение (2003).
8. *Функции Zetlab*. Доступно на: <https://zetlab.com/product-category/programmnoeobespechenie/funksii-zetlab> (дата обращения: 04.03.2021).
9. Беляев А. К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Шурпатов А. О. Динамика стержня при продольном ударе телом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 3, 506–515 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/srbu01.2017.312>
10. Григорьева И. С., Мейлихова Е. З. (ред.) *Физические величины. Справочник*. Москва, Энергоатомиздат (1991).
11. *Вибрации в технике: Справочник*. Т. 1. Москва, Машиностроение (1978).
12. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. (ред.) *Справочник по сопротивлению материалов*. Киев, Наукова думка (1988).
13. Akulenko L. D., Nesterov S. V. *High Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications*. London, New York, Washington, CRC Press (2004).
14. Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея. *Доклады Академии наук* **417** (1), 56–61 (2007).

15. Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю., Тенкам Э. М. Продольные колебания стержня Рэлея — Бишопа. *Доклады Академии наук* **435** (5), 613–618 (2010).

Статья поступила в редакцию 6 июля 2020 г.;  
после доработки 8 сентября 2020 г.;  
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Попов Александр Леонидович — д-р физ.-мат. наук, проф.; popov@ipmnet.ru  
Садовский Сергей Александрович — аспирант; bigostart@rambler.ru

## On the correspondence of theoretical models of longitudinal vibrations of a rod with experimental data\*

A. L. Popov<sup>1</sup>, S. A. Sadovsky<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation

<sup>2</sup> National Research Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

**For citation:** Popov A. L., Sadovsky S. A. On the correspondence of theoretical models of longitudinal vibrations of a rod with experimental data. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 270–281.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.207> (In Russian)

A number of theoretical models are known for describing longitudinal vibrations of a rod. The simplest and most common is based on the wave equation. Next comes a model that takes into account lateral displacement (Rayleigh correction). The Bishop model is considered to be more perfect, taking into account both transverse displacement and shear deformation. It would seem that the more perfect the theoretical model, the better it should be consistent with experimental data. Nevertheless, when comparing with a really defined experimental spectrum of longitudinal vibrations of a rod on a large base of natural frequencies, it turns out that this is not quite so. Moreover, in the relative loss is the most complex Bishop model. Comparisons were made for a smooth long cylindrical rod. The questions of refinement with the help of experimentally found frequencies of the velocity of longitudinal waves and the Poisson's ratio of the rod material are also touched.

*Keywords:* longitudinal vibrations, wave equation, Rayleigh correction, Bishop correction, experimental data.

## References

1. Strutt J. V. (Lord Rayleigh). *The Theory of sound*. London, Macmillan and Co. Limited (1926). [Russ. ed.: Strutt J. V. (Lord Rayleigh). *Teoriia zvuka*. Vol. 1. Moscow, GITTL Publ. (1955)].
2. Love A. *Mathematical theory of elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press (1927). [Russ. ed.: Love A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti*. Moscow, Leningrad, OHTI Publ. (1935)].
3. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. Toronto, New York, London, Van Nostrand Company (1955). [Russ. ed.: Timoshenko S. P. *Kolebaniia v inzhenernom dele*. Moscow, Nauka Publ. (1967)].
4. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams. *Aeronautical* **3** (2), 280–293 (1952).
5. Rao S. S. *Vibration of Continuous Systems*. Hoboken, John Wiley & Sons Inc. (2007).
6. Kundt A. Acoustic Experiments. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **35** (4), 41–48 (1868).

\*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00100).

7. Klyuev V. V. (ed.) *Non-destructive testing and diagnostics: Reference book*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (2003). (In Russian)
8. *Functions of Zetlab*. Available at: <https://zetlab.com/product-category/programmnoeobespechenie/funksii-zetlab> (accessed: March 4, 2021). (In Russian)
9. Belyaev A. K., Ma Ch.-Ch., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Shurpatov A. O. Dynamics of rod under axial impact by a body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 3, 506–515 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.312> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **50**, 310–317 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117030050>].
10. Grigoryeva I. S., Meilikhova E. Z. (eds.) *Physical quantities. Directory*. Moscow, Energoatomizdat Publ. (1991). (In Russian)
11. *Vibration in technology: Directory*. Vol. 1. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1978). (In Russian)
12. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. (eds.) *Reference on the resistance of materials*. Kiev, Naukova Dumka Publ. (1988). (In Russian)
13. Akulenko L. D., Nesterov S. V. *High Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications*. London, New York, Washington, CRC Press (2004).
14. Fedotov I. A., Polyanin A. D., Shatalov M. Yu. The theory of free and forced oscillations of a solid rod based on the Rayleigh model. *Doklady Akademii nauk* **417** (1), 56–61 (2007). (In Russian) [Engl. transl.: *Doklady Physics* **52** (11), 607–612 (2007)].
15. Fedotov I. A., Polyanin A. D., Shatalov M. Yu., Tenkam E. M. Longitudinal vibrations of the Rayleigh–Bishop rod. *Doklady Akademii nauk* **435** (5), 613–618 (2010). (In Russian) [Engl. transl.: *Doklady Physics* **55** (12), 609–614 (2010)].

Received: July 6, 2020  
 Revised: September 8, 2020  
 Accepted: December 17, 2020

Authors' information:

*Alexander L. Popov* — [popov@ipmnet.ru](mailto:popov@ipmnet.ru)  
*Sergei A. Sadovsky* — [bigostart@rambler.ru](mailto:bigostart@rambler.ru)