ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2021 **Выпуск 109. С. 11-16**

И. В. Асташова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова
Москва, Россия
ast.diffiety@gmail.com

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

Изучаются уравнения второго порядка типа Эмдена — Фаулера со степенной нелинейностью относительно решения и его производной. Получены условия на показатели степени и начальные данные, обеспечивающие единственность или неединственность решений начальной задачи. Библиография: 4 назв.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим уравнение

$$y'' = p(x, y, y')|y|_{\pm}^{k_0}|y'|_{\pm}^{k_1}, \tag{1.1}$$

где $|a|_{\pm}^{b}$ обозначает $|a|^b \operatorname{sgn} a$ и положительная непрерывная функция p локально липшицева по последним двум аргументам. Вещественные константы k_0 и k_1 положительны.

Наше цель — определить, будет ли уравнение (1.1) иметь единственное решение в окрестности точки 0, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \tag{1.2}$$

В данной статье мы используем некоторые методы из [**1**]. В частных случаях полученные здесь результаты совпадают с результатами из [**2**] и [**3**].

Будем использовать следующие обозначения:

$$p_0 = p(0, 0, 0) > 0,$$

$$p_m(X) = \inf\{p(x, u, v) : |x| \leqslant X,\ |u| \leqslant X,\ |v| \leqslant X\},$$

$$p_M(X) = \sup\{p(x, u, v) : |x| \leqslant X,\ |u| \leqslant X,\ |v| \leqslant X\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No. 20-11-20272).
© И. В. Асташова, 2021

Заметим, что $p_m(X) \to p_0$ и $p_M(X) \to p_0$ при $X \to +0$. Поскольку p локально липшицева по последним двум аргументам, можно считать, что

$$|p(x,u,v) - p(x,w,v)| \leqslant p_0 \lambda_X |u-w|,$$

$$|p(x,u,v) - p(x,u,w)| \leqslant p_0 \lambda_X |v-w|$$

для некоторого $\lambda_X > 0$ и всех вещественных $x, u, v, w \in [-X; X]$.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Предположим, что $k_0 \in (0;1)$, $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности 0 уравнение (1.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (1.2).*

Доказательство. Локальное существование решения вытекает из непрерывности правой части (1.1). Из уравнения и начальных условий находим

$$y(x) = \int\limits_0^x y'(\xi) d\xi,$$

$$y'(x) = y_1 + \int\limits_0^x p(\eta, y(\eta), y'(\eta)) |y(\eta)|_\pm^{k_0} |y'(\eta)|_\pm^{k_1} \, d\eta$$

$$= y_1 + \int\limits_0^x p\Bigg(\eta, \int\limits_0^\eta y'(\xi) d\xi, \, y'(\eta)\Bigg) \Bigg| \int\limits_0^\eta y'(\xi) d\xi \Bigg|_\pm^{k_0} |y'(\eta)|_\pm^{k_1} \, d\eta.$$

Последнее выражение можно записать в виде $F(y', y', y', y')(x)$, где

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4)(x) = y_1 + \int\limits_0^x p\Bigg(\eta, \int\limits_0^\eta u_1(\xi) d\xi, \, u_2(\eta)\Bigg) \Bigg| \int\limits_0^\eta u_3(\xi) d\xi \Bigg|_\pm^{k_0} |u_4(\eta)|_\pm^{k_1} \, d\eta$$

для любых непрерывных функций u_1, u_2, u_3, u_4. Предположим, что y и z — различные решения задачи (1.1), (1.2). Поскольку $y'(0) = z'(0) = y_1$, существует отрезок $[-X; X]$, $0 < X < 1$, такой, что $y'(x)/y_1$ и $z'(x)/y_1$ содержатся в $[1/2; 2]$ при любом $x \in [-X; X]$.

Пусть $\delta = \sup\{|y'(x) - z'(x)| : x \in [-X; X]\}$. Тогда

$$|y'(x) - z'(x)| = |F(y', y', y', y')(x) - F(z', z', z', z')(x)|$$

$$\leqslant |F(y', y', y', y')(x) - F(y', y', y', z')(x)| + |F(y', y', y', z')(x) - F(y', y', z', z')(x)|$$

$$+ |F(y', y', z', z')(x) - F(y', z', z', z')(x)| + |F(y', z', z', z')(x) - F(z', z', z', z')(x)|.$$

Теперь оценим каждое слагаемое последней суммы на $[-X; X]$. Для второго члена воспользуемся неравенством

$$||a|_\pm^k - |b|_\pm^k| \leqslant \frac{k\,|a-b|}{\min\{|a|, |b|\}^{1-k}}, \quad 0 < k < 1, \ \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b \neq 0.$$

Таким образом, имеем

$$|F(y', y', y', y')(x) - F(y', y', y', z')(x)| \leqslant X \cdot p_M(X) \cdot |2y_1 X|^{k_0} \cdot k_1 |y_1|^{k_1 - 1} 2^{|k_1 - 1|} \delta,$$

$$|F(y', y', y', z')(x) - F(y', y', z', z')(x)| \leqslant p_M(X) \cdot \frac{k_0}{k_0 + 1} X^{k_0 + 1} \Big|\frac{2}{y_1}\Big|^{1 - k_0} \delta \cdot |2y_1|^{k_1},$$

$$|F(y', y', z', z')(x) - F(y', z', z', z')(x)| \leqslant X \cdot p_0 \lambda_X \delta \cdot |2y_1 X|^{k_0} \cdot |2y_1|^{k_1},$$

$$|F(y', z', z', z')(x) - F(z', z', z', z')(x)| \leqslant X \cdot X p_0 \lambda_X \delta \cdot |2y_1 X|^{k_0} \cdot |2y_1|^{k_1}.$$

Можно выбрать малое $X > 0$ так, чтобы правые части этих четырех неравенств были меньше, чем $\delta/8$. Тогда $|y'(x) - z'(x)| < \delta/2$ на $[-X; X]$, что противоречит определению δ. $\square$

Теорема 2.2. *Предположим, что* $k_1 \in (0;1)$, $y_0 \neq 0$, $y_1 = 0$. *Тогда уравнение* (1.1) *имеет по крайней мере два решения, которые удовлетворяют* (1.2), *но при этом различны в точках, произвольно близких к точке* 0.

Доказательство. Без потери общности можем считать, что $y_0 > 0$. Очевидно, что $y \equiv y_0$ является решением задачи (1.1), (1.2).

Чтобы найти другое решение, положим $\alpha = 1/(1-k_1) > 1$ и рассмотрим двумерную систему первого порядка

$$y'(x) = |v(x)|^\alpha,$$

$$v'(x) = \frac{|y(x)|_\pm^{k_0}}{\alpha}\, p(x, y(x), |v(x)|^\alpha)$$

с начальным условиями $y(0) = y_0$, $v(0) = 0$. Так как $y_0 \neq 0$, задача регулярна в окрестности точки $(0, y_0, 0)$, независимо от того, будет ли k_0 меньше, чем 1. Следовательно, задача имеет решение в окрестности точки 0.

В силу второго уравнения системы имеем $v'(0) \neq 0$ и, следовательно, $y'(x) = |v(x)|^\alpha$ обращается в нуль в точке 0, но не равно нулю тождественно ни в какой окрестности точки 0. Таким образом, y не может быть константой.

Далее, $y(x)$, $v(x)$, $y'(x)$ положительны при $x > 0$ и

$$y''(x) = \alpha v(x)^{\alpha-1}\, \frac{y(x)^{k_0}}{\alpha} p(x, y(x), v(x)^\alpha) = y'(x)^{(\alpha-1)/\alpha}\, y(x)^{k_0} p(x, y(x), y'(x)).$$

Поскольку $(\alpha-1)/\alpha = k_1$, функция $y(x)$ является решением задачи (1.1), (1.2), отличным от константы. □

Теорема 2.3. *Предположим, что* $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_0 + k_1 \geqslant 1$, $y_0 = y_1 = 0$. *Тогда в некоторой окрестности точки* 0 *уравнение* (1.1) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям* (1.2).

Доказательство. Существование решения очевидно даже без привлечения теоремы Пеано, так как $y \equiv 0$ удовлетворяет (1.1) и (1.2). Таким образом, достаточно доказать, что никаких других решений нет в произвольно малой окрестности точки 0.

Сначала рассмотрим знакопостоянные решения задачи (1.1), (1.2) со знакопостоянными производными в полуокрестности точки 0. Для таких решений справедливы эквивалентности (при $x \to 0$)

$$y''(x)|y'(x)|^{1-k_1} \sim p_0 |y(x)|_\pm^{k_0} y'(x),$$

$$(\ln |y'| \operatorname{sgn} y')'(x) \sim \frac{p_0}{k_0+1}(|y|^{k_0+1})'(x), \quad k_1 = 2,$$

$$(|y'|_\pm^{2-k_1})'(x) \sim \frac{(2-k_1)p_0}{k_0+1}(|y|^{k_0+1})'(x), \quad k_1 \neq 2.$$

Правые части последних двух эквивалентностей суть производные ограниченных функций. То же верно для эквивалентных функций. Однако при $k_1 \geqslant 2$ левые части являются производными неограниченных функций. Ввиду полученного противоречия достаточно рассмотреть лишь случай $k_1 < 2$.

По правилу Лопиталя из последней эквивалентности следует

$$|y'(x)|_\pm^{2-k_1} \sim \frac{(2-k_1)p_0}{k_0+1}|y(x)|^{k_0+1},$$

$$y'(x) \sim \Big(\frac{(2-k_1)p_0}{k_0+1}\Big)^{1/(2-k_1)} |y(x)|^{(k_0+1)/(2-k_1)},$$

$$(\ln |y| \operatorname{sgn} y)'(x) \sim \Big(\frac{(2-k_1)p_0}{k_0+1}\Big)^{1/(2-k_1)}, \quad k_0 + 1 = 2 - k_1,$$

$$(|y|_{\pm}^{1-(k_0+1)/(2-k_1)})'(x) \sim \Big(\frac{(2-k_1)p_0}{k_0+1}\Big)^{1/(2-k_1)}\Big(1-\frac{k_0+1}{2-k_1}\Big), \quad k_0+1 \neq 2-k_1.$$

По условиям теоремы показатель $1-(k_0+1)/(2-k_1) = (1-k_0-k_1)/(2-k_1)$ степени $|y|_{\pm}$ в последнем соотношении отрицателен. Следовательно, левые части последних двух соотношений суть производные неограниченных функций, но эквивалентны конечным константам. Полученное противоречие показывает, что в любой полуокрестности точки 0 не существует знакопостоянного решения задачи (1.1), (1.2) со знакопостоянной производной, исключая тривиальное решение $y \equiv 0$.

Рассмотрим вопрос о существовании решений непостоянного знака. Если такое решение существует, то его область определения должна включать монотонную последовательность непересекающихся интервалов $(a_j; b_j)$ таких, что

(i) $y(x)\,y'(x) \neq 0$ на $(a_j; b_j)$,

(ii) $y(a_j)\,y'(a_j) = 0$,

(iii) $y(b_j)\,y'(b_j) = 0$,

(iv) $a_j \to 0$ и $b_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Заметим, что равенства $y(a_j) = y'(a_j) = 0$ и $y(b_j) = y'(b_j) = 0$ не имеют места ввиду первой части доказательства.

Равенства $y(a_j) = y(b_j) = 0$ и $y'(a_j) = y'(b_j) = 0$ не выполняются ввиду условия (i), леммы Ролля и уравнения (1.1).

Если $y(a_j) = 0$ и $y'(a_j) > 0$, то из (1.1) следует, что $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, $y''(x) > 0$ на $(a_j; b_j)$, что противоречит (iii). Аналогично, если $y(b_j) = 0$ и $y'(b_j) > 0$, то $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$, $y''(x) < 0$ на$(a_j; b_j)$, что противоречит (iii).

Итак, возможны лишь случаи $y(a_j) = 0$, $y'(a_j) < 0$, $y(b_j) < 0$, $y'(b_j) = 0$ и $y(a_j) > 0$, $y'(a_j) = 0$, $y(b_j) = 0$, $y'(b_j) < 0$. Пара таких сегментов может быть согласована в общей концевой точке с $y(x) = 0$. Однако вне их объединения решение либо постоянно, либо отходит от нуля и, следовательно, не может удовлетворять (1.2). □

Теорема 2.4. *Предположим, что* k_0, k_1, $k_0 + k_1 \in (0; 1)$, $y_0 = y_1 = 0$. *Тогда в окрестности точки* 0 *уравнение* (1.1) *имеет по крайней мере два решения, которые удовлетворяют* (1.2) *и различны в точках, произвольно близких к точке* 0.

Доказательство. Очевидно, что $y \equiv 0$ — решение задачи (1.1), (1.2). Чтобы найти другое решение, положим $\beta = (k_0+1)/(1-k_0-k_1) > 1$ и заметим, что

$$(\beta+1)k_0 + \beta k_1 = \beta - 1. \tag{2.1}$$

Рассмотрим операторы, действующие в пространстве положительных непрерывных функций по правилу

$$Y(u)(x) = \int_0^x s^{\beta} u(s)\,ds,$$

$$P(u)(x) = p(x, Y(u)(x), x^{\beta}u(x)),$$

$$Q(u)(x) = Y(u)(x)^{k_0} \cdot (x^{\beta}u(x))^{k_1} \cdot P(u)(x),$$

$$F(u)(x) = x^{-\beta}\int_0^x Q(u)(s)\,ds$$

для $u \in C[0; X]$, $X > 0$, $x \in [0; X]$. Последний оператор кажется корректно определенным только для $x > 0$. Однако имеют место следующие эквивалентности при $x \to +0$:

$$Y(u)(x) \sim \frac{x^{\beta+1}u(0)}{\beta+1},$$

$$P(u)(x) \sim p_0,$$

$$Q(u)(x) \sim \frac{x^{(\beta+1)k_0} u(0)^{k_0} \cdot x^{\beta k_1} u(0)^{k_1} \cdot p_0}{(\beta+1)^{k_0}} = \frac{x^{\beta-1} u(0)^{k_0+k_1} p_0}{(\beta+1)^{k_0}},$$

$$F(u)(x) \sim \frac{u(0)^{k_0+k_1} p_0}{(\beta+1)^{k_0}\beta}.$$

Таким образом, $F(u)(0)$ можно определить корректно.

Выбрав $u_0 > 0$ такое, что

$$u_0^{k_0+k_1} p_0 = u_0 \beta (\beta+1)^{k_0}, \tag{2.2}$$

и положительную непрерывную функцию u такую, что $u(0) = u_0$, получим $F(u)(0) = u_0$. Поскольку $0 < k_0 + k_1 < 1$, можно выбрать $\Theta > 1$ такое, что $0 < (k_0+k_1)\Theta^2 < 1$, и положить $\theta = \Theta^{-1}$. Затем можно выбрать достаточно малое $X > 0$ такое, что

$$\frac{\Theta X^{\beta+1} u_0}{\beta+1} < \Theta X^{\beta} u_0 < X,$$

$$\theta^{1-k_0-k_1} p_0 < p_m(X) \leqslant p_0 \leqslant p_M(X) < \Theta^{1-k_0-k_1} p_0.$$

Предположим, что непрерывная функция u удовлетворяет неравенствам $\theta u_0 \leqslant u(x) \leqslant \Theta u_0$ на $[0; X]$. Тогда

$$\frac{x^{\beta+1}\theta u_0}{\beta+1} \leqslant Y(u)(x) \leqslant \frac{x^{\beta+1}\Theta u_0}{\beta+1},$$

$$p_0 \theta^{1-k_0-k_1} \leqslant P(u)(x) \leqslant p_0 \Theta^{1-k_0-k_1},$$

$$\frac{x^{(\beta+1)k_0+\beta k_1}\, \theta\, u_0^{k_0+k_1} p_0}{(\beta+1)^{k_0}} \leqslant Q(u)(x) \leqslant \frac{x^{(\beta+1)k_0+\beta k_1}\, \Theta\, {u_0}^{k_0+k_1} p^0}{(\beta+1)^{k_0}},$$

что совпадает с

$$\beta x^{\beta-1}\, \theta\, u_0 \leqslant Q(u)(x) \leqslant \beta x^{\beta-1}\, \Theta\, u_0,$$

$$\theta u_0 \leqslant F(u)(x) \leqslant \Theta u_0$$

в силу (2.1) и (2.2). Таким образом, если U — пространство всех непрерывных функций на $[0; X]$ таких, что $\theta u_0 \leqslant u(x) \leqslant \Theta u_0$ и $u(0) = u_0$, то оператор F отображает U в U. Оператор F сжимающий, если X достаточно мало. Действительно, для $u \in U$ и $v \in V$ положим $\delta = \sup\{|u(x) - v(x)| : x \in [0; X]\}$. Тогда

$$|Y(u)(x) - Y(v)(x)| \leqslant \frac{x^{\beta+1}\delta}{\beta+1},$$

$$|P(u)(x) - P(v)(x)| \leqslant p_0 \lambda_X |Y(u)(x) - Y(v)(x)| + p_0 \lambda_X |x^{\beta} u(x) - x^{\beta} v(x)|$$

$$\leqslant \Big(p_0 \lambda_X \frac{X^{\beta+1}}{\beta+1} + p_0 \lambda_X X^{\beta}\Big)\delta,$$

$$|Q(u)(x) - Q(v)(x)| \leqslant k_0 \Big(\frac{x^{\beta+1}\theta u_0}{\beta+1}\Big)^{k_0-1} \frac{x^{\beta+1}\delta}{\beta+1} \cdot (x^{\beta}\Theta u_0)^{k_1} \cdot \Theta^{1-k_0-k_1} p_0$$

$$+ \Big(\frac{x^{\beta+1}\Theta u_0}{\beta+1}\Big)^{k_0} \cdot k_1 (x^{\beta}\theta u_0)^{k_1-1} x^{\beta}\delta \cdot \Theta^{1-k_0-k_1} p_0$$

$$+ \Big(\frac{x^{\beta+1}\Theta u_0}{\beta+1}\Big)^{k_0} \cdot (x^{\beta}\Theta u_0)^{k_1} \cdot \Big(p_0 \lambda_X \frac{X^{\beta+1}}{\beta+1} + p_0 \lambda_X X^{\beta}\Big)\delta$$

$$= k_0 x^{\beta-1} \Theta^{2-2k_0} \frac{u_0^{k_0-1+k_1} p_0}{(\beta+1)^{k_0}} \delta + k_1 x^{\beta-1} \Theta^{2-2k_1} \frac{u_0^{k_0+k_1-1} p_0}{(\beta+1)^{k_0}} \delta$$

$$+ x^{\beta-1}\,\Theta^{k_0+k_1}\,\frac{u_0^{k_0+k_1}p_0}{(\beta+1)^{k_0}}\Big(\lambda_X\frac{X^{\beta+1}}{\beta+1}+\lambda_X X^{\beta}\Big)\delta \leqslant (k_0\Theta^2+k_1\Theta^2\ +2u_0\lambda_X X^{\beta})\beta x^{\beta-1}\,\delta,$$

$$|F(u)(x)-F(v)(x)| \leqslant (k_0\,\Theta^2+k_1\Theta^2+2u_0\lambda_X X^{\beta})\delta.$$

Поскольку $(k_0+k_1)\Theta^2<1$, выражение в последних скобках можно сделать меньше, чем 1, за счет выбора достаточно малого $X>0$. Таким образом, сжимающий оператор F имеет единственную неподвижную точку, т.е. положительную непрерывную функцию u на $[0;X]$ такую, что $F(u)=u$.

Рассмотрим функцию $y=Y(u)$. По определению Y имеем $y(0)=y'(0)=0$. Далее,

$$y'(x)=x^{\beta}u(x)=x^{\beta}F(u)(x)=\int\limits_0^x Q(u)(s)\,ds.$$

Следовательно,

$$y''(x)=Q(y)(x)=Y(u)(x)^{k_0}\cdot(x^{\beta}u(x))^{k_1}\cdot P(u)(x)$$

$$=y(x)^{k_0}y'(x)^{k_1}p(x,Y(u)(x),x^{\beta}u(x))=y(x)^{k_0}y'(x)^{k_1}p(x,y(x),y'(x)).$$

Таким образом, y — решение задачи (1.1), (1.2). Поскольку оно положительно на $(0;X]$, мы получаем другое решение. □

3. Итог

n=2	$(0,0)$	$(Y_0,0)$	$(0,Y_1)$	(Y_0,Y_1)
$k_0\geqslant 1,\ k_1\geqslant 1$	U	U	U	U
$k_0<1,\ k_1\geqslant 1$	U:T2.3	U	U:T2.1	U
$k_0\geqslant 1,\ k_1<1$	U:T2.3	N:T2.2	U	U
$k_0<1,\ k_1<1,\ k_0+k_1\geqslant 1$	U:T2.3	N:T2.2	U:T2.1	U
$k_0+k_1<1$	N:T2.4	N:T2.2	U:T2.1	U

В первом столбце таблицы указаны условия на положительные коэффициенты k_j. Первая строка описывает начальные данные $y(0)$ и $y'(0)$, где Y_0 и Y_1 обозначают любые ненулевые значения. Буква “U” означает единственность решения задачи (1.1), (1.2) при соответствующих условиях, а буква “N” означает неединственность. После букв либо указывается ссылка на соответствующую теорему, либо подразумевается, что применяется классическая теорема существования и единственности.

Замечание 3.1. Асимптотическое поведение неограниченных решений уравнения (1.1) изучалось в [**4**] при дополнительных условиях $0<p_*\leqslant p(x,u,v)\leqslant p^*<\infty$ для некоторых $p_*,p^*\in\mathbb{R}$ и всех $(x,u,v)\in\mathbb{R}^3$.

Литература

1. И. В. Асташова, “Качественные свойства обыкновенных дифференциальных уравнений” В: *Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа*, с. 22–290, ЮНИТИ-ДАНА, М. (2015).
2. R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, McGraw-Hill, New-York etc (1953).
3. И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М. (1990).
4. Т. А. Корчемкина, “Об асимптотическом поведении неограниченных решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями общего вида”, *Тр. семин. им. И. Г. Петровского* **32**, 239–256 (2019).

Статья поступила в редакцию 7 декабря 2020 г.