

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Абдикалыков Абдикожа Кожанасиридинович

**Вычисление собственных значений для
нормальных матриц специальной
структуры и смежные вопросы теории
матриц**

01.01.07 – Вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук

профессор Х. Д. Икрамов

Москва – 2016

Оглавление

Список сокращений и условных обозначений	4
Введение	5
Глава 1. Постановка задачи	11
1.1. Алгоритмы решения спектральной задачи для специальных матриц	11
1.2. Тёплицевы и ганкелевы матрицы	14
1.3. Предпосылки постановки теоретической задачи	22
Глава 2. Эффективные спектральные алгоритмы для некоторых специальных классов матриц	25
2.1. Спектральные алгоритмы для нормальных тёплицевых матриц	26
2.2. Спектральные алгоритмы для нормальных ганкелевых матриц	33
2.3. Спектральные алгоритмы для некоторых классов (Т+Н)-матриц	73
Глава 3. Унитарные автоморфизмы	89
3.1. Группа $\text{UAut}(T_n)$	90
3.2. Группа $\text{UAut}(H_n)$	96
3.3. Группа $\text{UAut}_c(T_n)$	108

3.4. Группа $\text{UAut}_c(H_n)$	119
3.5. Связь между группами унитарных автоморфизмов . .	126
3.6. Группа $\text{UAut}(TH_n)$	135
Заключение	172
Список литературы	176
Приложение	184

Список сокращений и условных обозначений

$\mathbb{R}$	— множество всех вещественных чисел
$\mathbb{C}$	— множество всех комплексных чисел
M_n	— множество всех комплексных матриц порядка n
I_n	— единичная матрица порядка n
P_n	— перъединичная матрица порядка n
F_n	— матрица дискретного преобразования Фурье порядка n
E_{jk}	— матричная единица
$\bar{A}$	— матрица, полученная из A поэлементным сопряжением
A^T	— транспонированная матрица
A^*	— эрмитово-сопряжённая матрица
A^{-1}	— обратная матрица
A^{-T}	— матрица $(A^{-1})^T$
$A \oplus B$	— прямая сумма матриц A и B
$[x]$	— целая часть числа x

Введение

В истории вычислительной математики уже не раз случались периоды, когда задача поиска матричных собственных значений считалась полностью решённой существующими методами. Первый такой период наступил в 1930-х годах; к тому времени был построен ряд эффективных алгоритмов нахождения характеристического многочлена матрицы, корнями которого как раз являются собственные числа. Два из этих алгоритмов связаны с именами математиков А.Н. Крылова и А.М. Данилевского. Популярный сейчас термин „крыловские подпространства“ происходит именно от работы А.Н. Крылова, предложившего вычислять характеристический многочлен с помощью оригинальной модификации теоремы Гамильтона-Кэли.

С появлением после второй мировой войны первых ЭВМ стало возможным рассматривать спектральные задачи существенно бóльших порядков, чем во времена арифмометров. Оказалось, что для таких возросших порядков методы 1930-х годов несостоятельны. Их численная неустойчивость была связана с тем, что, явно или неявно, коэффициенты характеристического многочлена вычислялись как решения плохо обусловленных систем линейных уравнений.

Так, в 1950-х годах возникла необходимость в эффективном и,

главное, устойчивом алгоритме определения собственных значений. Начали разрабатываться методы трансформационного типа. Это общее название объясняется тем, что в таких методах матрица подвергается последовательности преобразований подобия и в пределе принимает форму, в которой собственные значения очевидны, например, треугольную или блочно-треугольную. Данный период завершился в 1961 году изобретением QR-алгоритма. После внесения в этот метод нескольких усовершенствований он стал стандартом при вычислении собственных значений хранимых матриц, то есть матриц, требующих хранения всех n^2 элементов. Это положение стандарта QR-алгоритм сохраняет до сих пор.

Некоторое время проблема собственных значений снова казалось закрытой, однако развитие параллельных вычислений позволило ещё на порядок повысить размер решаемых спектральных задач. Это дало повод реанимировать, казалось бы, навсегда забытые методы Ланцоша и Арнольди, предложенные в начале 1950-х годов. Основной операцией этих алгоритмов является матрично-векторное умножение, то есть операция, эффективно использующая возможности параллельных вычислений.

В настоящее время значительно усовершенствованные версии QR-алгоритма, методов Ланцоша и Арнольди закрывают большинство практических потребностей в решении спектральных задач. Тем не менее, всё ещё остаются вопросы, не нашедшие

пока вполне удовлетворительных ответов. Одним из них является использование специфики конкретных матричных классов для разработки более эффективных методов, чем методы общего назначения. Классическим примером является класс нормальных матриц. Для эрмитовых (вещественных симметричных) матриц, составляющих его подкласс, такой эффективный метод есть, а именно симметричный QR-алгоритм. Однако продолжающиеся с 1960-х годов поиски метода сравнимой эффективности для нормальных неэрмитовых матриц до сих пор не дали результата.

Основной задачей данной диссертации является разработка приёмов эффективного вычисления собственных значений плотных нормальных матриц, обладающих дополнительными структурными особенностями: эти матрицы являются тёплицевыми, ганкелевыми, или более общо, $(T+H)$ -матрицами. Вопросам теоретического характера, возникающим при решении основной задачи, посвящены заключительные разделы диссертации.

Цели и задачи диссертационной работы:

Целями данной работы являются построение эффективных спектральных алгоритмов для нормальных матриц специального вида, а также получение описания групп унитарных автоморфизмов множеств тёплицевых, ганкелевых и $(T+H)$ -матриц, осуществляемых путём подобий и конгруэнций.

Унитарные автоморфизмы, осуществляемые путём подобий,

могут быть также применены для решения спектральной задачи посредством перехода к подобным матрицам более простой структуры. Что касается унитарных конгруэнций, то они являются частным случаем псевдоподобий, определённых в [1]: $A \mapsto U^{-1}A\bar{U}$. Инвариантом псевдоподобий является набор псевдосо собственных чисел, определяемых в [2, 3]. Таким образом, изучение унитарных автоморфизмов, осуществляемых путём конгруэнций, помогает решению задачи нахождения псевдоспектра.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получены эффективные алгоритмы решения спектральной задачи для нормальных тёплицевых, нормальных ганкелевых матриц и некоторых алгебр, состоящих из $(T+N)$ -матриц.
2. Получено описание групп унитарных автоморфизмов множеств тёплицевых и ганкелевых матриц, осуществляемых путём подобий и конгруэнций.
3. Дано объяснение связи между полученными группами.
4. Получено описание группы унитарных автоморфизмов множества $(T+N)$ -матриц, осуществляемых путём подобия.

Научная новизна. Классификация нормальных тёплицевых и нормальных ганкелевых матриц была получена не так давно, поэтому алгоритмы для таких матриц, использующие особенности их структуры, действительно новы. Исследования автоморфизмов матриц специальной структуры, в особенности, $(T+N)$ -матриц,

также были мало освещены до недавних пор.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные алгоритмы могут применяться на практике для нахождения спектра нормальных матриц специального вида.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

научный семинар кафедры вычислительных методов факультета ВМК МГУ под руководством профессора А. В. Гулина;

семинар “Матричные методы и вычисления”; научный руководитель — чл.-корр. РАН Е. Е. Тыртышников; Институт вычислительной математики РАН;

конференция “Matrix Methods in Mathematics and Applications – 2015”.

Публикации. По теме диссертации опубликованы научные работы [4–11] в журналах из списка ВАК. В совместных статьях [4–6] автору принадлежат идеи и реализации алгоритмов; на исследованиях автора также в основном построены совместные работы [7, 8, 11].

Структура диссертации.

Глава 1. Вводные определения, обозначения и теоремы приводятся в параграфах §1–2. В частности, §2 содержит классификацию нормальных тёплицевых и ганкелевых матриц, на

которой основываются построенные алгоритмы. В §3 объясняется происхождение теоретической задачи, решённой в диссертации.

Глава 2. Данная глава содержит предлагаемые спектральные алгоритмы. §1 посвящён алгоритмам для нормальных тёплицевых матриц, §2 содержит описания алгоритмов для нормальных ганкелевых матриц, в §3 можно найти алгоритмы нахождения собственных чисел для некоторых классов $(T+H)$ -матриц.

Глава 3. В последней главе приводится описание групп унитарных автоморфизмов матриц специального вида с последующим доказательством сформулированных положений. Параграфы §1–4 описывают группы $U\text{Aut}(T_n)$, $U\text{Aut}(H_n)$, $U\text{Aut}_c(T_n)$, $U\text{Aut}_c(H_n)$ соответственно. §5 посвящён доказательству отношения двойственности полученных групп автоморфизмов. Наконец, §6 содержит описание группы $U\text{Aut}(TH_n)$.

Глава 1

Постановка задачи

1.1. Алгоритмы решения спектральной задачи для специальных матриц

В настоящее время существует множество (см. [12–18]) различных алгоритмов для вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы. Этому множеству алгоритмов соответствует большое многообразие различных задач на собственные значения: так называемая полная проблема собственных значений (т.е. вычисление всех собственных чисел и, возможно, собственных векторов), частичная (поиск одного или нескольких собственных чисел и соответствующих им собственных векторов), обобщённая проблема собственных значений (т.е. вычисление собственных значений для линейного матричного пучка), полиномиальные задачи на собственные значения [19], многопараметрические задачи [20], и т.д.

Задачу на собственные значения, рассматриваемую в диссертации, можно охарактеризовать так: вычисление всех собственных значений комплексной квадратной матрицы умеренного порядка. Ограничение на порядок определяется требованием, чтобы матрица, для которой ищется спектр, могла быть размещена в

оперативной памяти вычислительной машины. Такую задачу мы и будем в дальнейшем для краткости называть спектральной.

Одним из самых эффективных способов решения этой задачи является QR-алгоритм, открытый в 1961 году В. Н. Кублановской и Дж. Френсисом независимо друг от друга. Этот метод широко известен, поэтому напомним лишь общие детали.

Для заданной комплексной матрицы A_0 строится последовательность $A_k = R_k Q_k$, где Q_k — унитарная, R_k — верхнетреугольная матрицы из QR-разложения матрицы $A_{k-1} = Q_k R_k$. Разложение может быть получено любым из возможных способов: с помощью отражений Хаусхолдера, вращений Гивенса или же с помощью процесса Грама-Шмидта, применённого к строкам или столбцам матрицы A . Видно, что A_k подобна исходной матрице A_0 при любом $k = 1, 2, \dots$, то есть A_k имеет тот же спектр. Кроме того, при некоторых ограничениях на матрицу A_0 диагональные элементы матриц A_k стремятся к собственным значениям A_0 . Процесс можно остановить, как только диагональ A_{k+1} станет мало отличима от диагонали A_k .

Очевидным преимуществом QR-алгоритма перед, например, степенным методом является то, что таким образом находятся все собственные значения, а не одно или несколько максимальных по модулю. Но есть и существенный недостаток данного метода: на каждом шаге приходится искать QR-разложение, что довольно

затратно. Обычно для улучшения этой ситуации исходную матрицу предварительно приводят к Хессенберговой форме, что ускоряет процесс. Если же A_0 была эрмитовой, то есть $A = A^*$, то Хессенбергова форма этой матрицы будет трёхдиагональной, и это ещё больше упростит вычисление каждого отдельного QR-разложения. Очевидно, что для комплексных эрмитовых (и в частности, вещественных симметричных) матриц QR-алгоритм работает эффективнее (см. [21, §9]).

Однако оказывается, что почти ни для каких других классов матриц нельзя получить выигрыш, связанный со специальной структурой матриц. Одно из исключений составляют унитарные матрицы: так, в [22] можно видеть использование унитарности для применения CS-разложения и последующего вычисления спектра. Отсюда довольно логично вытекает вопрос о существовании эффективного спектрального алгоритма для нормальных матриц, частным случаем коих и являются унитарные матрицы. Во второй главе данной работы описано решение поставленной задачи для другого частного случая: нормальных ганкелевых и тёплицевых матриц.

1.2. Тёплицевы и ганкелевы матрицы

Введём необходимые определения.

Квадратная матрица T порядка n называется тёплицевой, если

$$t_{ij} = t_{i+1,j+1} \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Квадратная матрица H порядка n называется ганкелевой, если

$$h_{ij} = h_{i+1,j-1} \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Другими словами, элементы тёплицевой матрицы t_{ij} зависят только от разности индексов $i - j$, в то время как элементы ганкелевой матрицы h_{ij} зависят только от суммы индексов $i + j$. Таким образом, тёплицева матрица полностью определяется своей первой строкой и первым столбцом, а ганкелева — первой строкой и последним столбцом, например.

Количество публикаций, посвящённых тёплицевым и ганкелевым матрицам, а также их бесконечномерным обобщениям, поистине огромна. Однако значительная часть этих работ касается теоретических аспектов предмета [23–26] или исследует асимптотическое поведение собственных чисел (в случае симметричных матриц) и сингулярных чисел (в несимметричном случае) [27–30]. Преобладающая часть остальных публикаций относится к решению систем линейных уравнений с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами [31–33]. Лишь очень небольшое число работ

посвящено вычислению собственных значений тёплицевых матриц умеренного порядка [34, 35], причём эти публикации рассматривают в основном лишь частичную проблему собственных значений.

Понятно, что тёплицевы матрицы можно определить и другим способом. Это все матрицы вида

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Аналогично можно ввести и ганкелевы матрицы.

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_{n-2} & \dots & h_1 & h_0 & h_{-1} \\ h_{n-2} & \dots & h_0 & h_{-1} & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & \dots & h_{-n+3} & h_{-n+2} & h_{-n+1} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Дадим также определения некоторых частных подмножеств тёплицевых матриц. Тёплицева матрица T (1.1) называется циркулянтом (или тёплицевым циркулянтом), если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

косым циркулянтом, если

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и ϕ -циркулянт, если

$$t_{-j} = \phi t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \phi \in \mathbb{C}.$$

Аналогичные понятия можно ввести и для ганкелевых матриц.

Матрица H (1.2) называется ганкелевым циркулянт, если

$$h_{-j} = h_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

ганкелевым косым циркулянт, если

$$h_{-j} = -h_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и ганкелевым ϕ -циркулянт, если

$$h_{-j} = \phi h_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \phi \in \mathbb{C}.$$

Ганкелевым циркулянт, в частности, является так называемая перьединичная матрица P_n , которая будет часто встречаться нам в дальнейшем.

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Известно, что спектр циркулянтов легко вычисляется, а именно для любого циркулянта A верно следующее спектральное разложение (см. [36]):

$$A = F_n^* D F_n, \tag{1.3}$$

где $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — диагональная матрица собственных значений матрицы A , а F_n — унитарная матрица дискретного преобразования Фурье с элементами

$$\{F_n\}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i}{n}(j-1)(k-1)}.$$

Если же A — ϕ -циркулянт, то верно представление (см. [36])

$$A = GF_n^* D F_n G^{-1}, \quad (1.4)$$

где $G = \text{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1})$, $\psi^n = \phi$.

Очевидно, что для любой тёплицевой матрицы T матрица $H = TP$ будет являться ганкелевой, так как H будет состоять из тех же столбцов, что и T , но переставленных в обратном порядке. То же самое можно сказать и про пары циркулянт — ганкелев циркулянт, косой циркулянт — ганкелев косой циркулянт, ϕ -циркулянт — ганкелев ϕ -циркулянт. Связанные таким соотношением матрицы T и H мы будем называть ассоциированными.

К слову, матрица PT будет также являться ганкелевой, так как домножение на перъединичную матрицу слева располагает в обратном порядке строки исходной матрицы. Если же домножать на P и справа, и слева, то матрица отразится и горизонтально, и вертикально, что приведёт к отражению всех элементов матрицы относительно центра. Это позволяет определить центросимметричные матрицы простым равенством: A — центросимметричная матрица, если $A = PAP$. При замене знака на

противоположный получаем определение косоцентросимметричной матрицы: A — косоцентросимметричная матрица, если $A = -PAP$.

Нетрудно видеть, что как тёплицевы, так и ганкелевы матрицы порядка n образуют линейные подпространства в M_n , где M_n — множество всех комплексных матриц порядка n . Назовём их T_n и H_n соответственно. Таким образом, можно ввести подпространство матриц, представимых в виде суммы тёплицевой и ганкелевой матриц. Это множество называется множеством (Т+Н)-матриц и будет обозначаться в дальнейшем TH_n . Необходимо заметить, что T_n и H_n не образуют прямой суммы, так как их пересечение имеет ненулевую размерность. Из этого следует, что обе компоненты в разложении (Т+Н)-матрицы на тёплицево и ганкелево слагаемое определяются неоднозначно.

В свою очередь, циркулянты и ганкелевы циркулянты образуют линейные подпространства размерности n в T_n и H_n соответственно. Аналогично понятию (Т+Н)-матрицы вводятся понятия (Т+Н)-циркулянта и косо (Т+Н)-циркулянта.

Рассмотрим теперь задачу классификации нормальных тёплицевых и нормальных ганкелевых матриц. Напомним, что квадратная комплексная матрица A называется нормальной, если

$$AA^* = A^*A.$$

Существуют критерии нормальности для тёплицевых и ганкелевых матриц, выведенные Х.Д. Икрамовым и В.Н. Чугуновым в [37] и [38]

соответственно.

Теорема 1.1. *Тёплицева матрица $T \in M_n$ является нормальной тогда и только тогда, когда принадлежит одному из следующих классов:*

Класс 1.1. T — матрица вида $\alpha I_n + \beta R$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, R — эрмитова тёплицева матрица.

Класс 1.2. T представляет собой ϕ -циркулянт для некоторого числа $\phi \in \mathbb{C}$, $|\phi| = 1$.

Перед формулировкой классификации нормальных ганкелевых матриц необходимо ввести понятие V -преобразования. Пусть V — некоторая вещественная невырожденная матрица второго порядка, T_1 и T_2 — вещественная и мнимая части алгебраического разложения комплексной матрицы T . Тогда под действием V -преобразования матрица T заменяется матрицей $\tilde{T} = (v_{11}T_1 + v_{21}T_2) + i(v_{12}T_1 + v_{22}T_2)$.

Теорема 1.2. *Ганкелева матрица $H \in M_n$ является нормальной тогда и только тогда, когда принадлежит одному из следующих классов:*

Класс 2.1. Вещественные ганкелевы матрицы и произвольные их комплексные кратные.

Класс 2.2. Матрицы вида $\alpha P_n + \beta H_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, где H_1 — произвольная вещественная центросимметричная ганкелева матрица.

Класс 2.3. Блочнo-диагональные матрицы вида $\alpha H_1 \oplus \beta H_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, где H_1 — верхнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка k ($0 < k < n$), а H_2 — нижнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка $l = n - k$. При этом мы называем H_1 и H_2 соответственно верхнетреугольной и нижнетреугольной ганкелевыми матрицами, если $\{H_1\}_{ij} = 0$ при $i + j > k + 1$ и $\{H_2\}_{ij} = 0$ при $i + j < l + 1$.

Класс 2.4. Матрицы вида $\alpha H_1 + \beta H_1^{-1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, где H_1 — невырожденная вещественная верхнетреугольная (или нижнетреугольная) ганкелева матрица.

Класс 2.5. Ганкелевы матрицы, для которых ассоциированные тѐплицевы матрицы получаются V -преобразованием множества унитарных ϕ -циркулянтов ($|\phi| = 1, \phi \neq \pm 1$) и их скалярных кратных.

Класс 2.6. Ганкелевы матрицы, для которых ассоциированные тѐплицевы матрицы получаются V -преобразованием матриц вида $T = T_1 + iT_2$, полученных одним из следующих способов:

а) T_1 — произвольный вещественный невырожденный ξ -циркулянт, T_2 — произвольное вещественное кратное матрицы T_1^{-T} ;

б) T_1 и T_2^T — вещественные ξ -циркулянты, удовлетворяющие условию $T_1 T_2^T = 0$.

Класс 2.7. Ганкелевы матрицы, для которых ассоциированные

тёплицевы матрицы являются циркулянтами вида (1.3), где $D = \text{diag} (d_1, d_2, \dots, d_n)$ — диагональная матрица, удовлетворяющая соотношениям $|d_j| = |d_{n+2-j}|$, $j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Класс 2.8. Ганкелевы матрицы, для которых ассоциированные тёплицевы матрицы являются косыми циркулянтами вида (1.4), где $\phi = -1$, $D = \text{diag} (d_1, d_2, \dots, d_n)$ — диагональная матрица, удовлетворяющая соотношениям $|d_1| = |d_2|$, $|d_j| = |d_{n+3-j}|$, $j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Класс 2.9. Ганкелевы матрицы, для которых ассоциированные тёплицевы матрицы получаются V -преобразованием матриц вида $T = T_1 + iT_2$, являющихся результатом выполнения следующей процедуры:

а) Задать в качестве T_1 произвольное вещественное кратное вещественного ортогонального циркулянта. Определить L_1 как строго нижнетреугольную тёплицеву матрицу, поддиагональная часть которой совпадает с поддиагональной частью T_1 , а T_3 как матрицу вида

$$T_3 = T_1 L_1^T - L_1 T_1^T; \quad (1.5)$$

б) В качестве T_2 можно взять любой вещественный циркулянт, решающий уравнение

$$X T_1^T - T_1 X^T = T_3. \quad (1.6)$$

Класс 2.10. Ганкелевы матрицы, для которых ассоциированные

тёплицевы матрицы получаются V -преобразованием матриц вида $T = T_1 + iT_2$, являющихся результатом выполнения следующей процедуры:

а) Задать в качестве T_1 произвольное вещественное кратное вещественного ортогонального косоуго циркулянта. Определить L_1 как строго нижнетреугольную тёплицеву матрицу, поддиагональная часть которой противоположна поддиагональной части T_1 ;

б) В качестве T_2 можно взять любой вещественный косоуго циркулянт, решающий уравнение (1.6), где T_3 определяется в (1.5).

Во второй главе для всех этих классов матриц представлены спектральные алгоритмы.

1.3. Предпосылки постановки теоретической задачи

Задача, решённая в третьей главе, вытекает из статьи [39]. Основным результатом данной статьи является следующее утверждение.

Утверждение 1.1. *Каждое из отображений*

$$A \mapsto Q_i^* A Q_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

переводит множество эрмитовых тёплицевых матриц в

множество вещественных $(T+H)$ -матриц. Здесь

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_n + iP_n), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_n - iP_n),$$

$$Q_3 = \frac{1}{2}((1+i)I_n + (1-i)P_n).$$

Стоит отметить, что доказательство данного факта достаточно проводить для какой-нибудь одной из матриц Q_1, Q_2, Q_3 , поскольку

$$Q_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}Q_2, \quad Q_1 = iP_nQ_2.$$

Почему домножение на перъединичную матрицу не выводит из группы унитарных автоморфизмов, будет пояснено позже, в той же третьей главе. Как видим, эти преобразования переводят одно подмножество комплексных $(T+H)$ -матриц порядка n (эрмитовы тёплицевы матрицы) в другое (вещественные $(T+H)$ -матрицы) путём унитарного подобия, причём, как можно показать, эти подобия овеществляют любую центроэрмитову матрицу. Поскольку переход к вещественной арифметике позволяет быстрее проводить машинные вычисления, возникает логичный вопрос: какие ещё унитарные подобия могут облегчить решение спектральной задачи для $(T+H)$ -матриц? Нетрудно убедиться, что введённые выше матрицы Q_i , $i = 1, 2, 3$, порождают подходящие автоморфизмы $(T+H)$ -матриц, однако более интересным выглядело бы полное решение поставленной задачи. Впрочем, данная проблема оказалась достаточно сложной, поэтому на подступах к ней были решены более простые, формулировка которых будет приведена ниже.

Пусть $X \subset M_n$ — некоторое множество комплексных матриц. Будем писать, что унитарная матрица $U \in \text{UAut}(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in X \quad U^*AU \in X. \quad (1.7)$$

Само множество $\text{UAut}(X)$ будем называть группой унитарных автоморфизмов X , осуществляемых путём подобия. При замене в (1.7) подобия U^*AU на конгруэнцию $U^T AU$ получим определение множества $\text{UAut}_c(X)$ — группы унитарных автоморфизмов X , осуществляемых путём конгруэнции. Теперь, пользуясь этой терминологией, мы можем ставить такие задачи: описать структуру множества $\text{UAut}(X)$ или $\text{UAut}_c(X)$.

Кроме главной задачи описания множества $\text{UAut}(TH_n)$, третья глава данной работы содержит описание множеств $\text{UAut}(T_n)$, $\text{UAut}(H_n)$, $\text{UAut}_c(T_n)$, $\text{UAut}_c(H_n)$, которые как раз и были исследованы ранее.

Глава 2

Эффективные спектральные алгоритмы для некоторых специальных классов матриц

Данная глава содержит текстовое описание алгоритмов нахождения собственных значений для всех классов нормальных тёплицевых (теорема 1.1) и ганкелевых матриц (теорема 1.2), а также для некоторых классов $(T+H)$ -матриц. Для каждого алгоритма приводится сравнение по среднему времени работы со стандартной процедурой Matlab *eig* на основе выборки в 20 матриц. (Все расчёты производились на вычислительной машине с процессором Intel Core i3-2310M с тактовой частотой в 2.1 ГГц. Версия Matlab — R2012a, 7.14.0.739 для win64.) Кроме того, для каждого алгоритма в первых двух параграфах указывается вспомогательный проверочный алгоритм, позволяющий генерировать случайные матрицы, принадлежащие тому или иному классу.

Тёплицевым матрицам посвящён §1, ганкелевым — §2, $(T+H)$ -матрицам — §3. Три этих параграфа построены на основе совместных статей [4–6] автора с Икрамовым Х. Д. и Чугуновым В. Н.

2.1. Спектральные алгоритмы для нормальных тёплицевых матриц

Класс 1.1

Алгоритм

Пусть T — матрица вида $\alpha I_n + \beta R$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, R — эрмитова тёплицева матрица. Понятно, что случай $T = \alpha I_n$ или, что то же самое, случай $\beta = 0$ или $R = 0$, тривиален — тогда матрица T будет иметь n -кратное собственное значение α . Так что будем считать $\beta \neq 0$, $R \neq 0$. Кроме того, не ограничивая общности, можно полагать, что $|\beta| = 1$, так как эрмитова матрица сохраняет эрмитовость при домножении на вещественный скаляр, а

$$\beta R = \frac{\beta}{|\beta|} \cdot |\beta| R.$$

В таком случае задача сводится к нахождению неизвестных коэффициентов α и β и спектра эрмитовой матрицы R ; ведь если числа α , β уже найдены, то собственные значения матрицы T равны

$$\lambda_j = \alpha + \beta \mu_j, \quad (2.1)$$

где μ_j — собственные числа R , $j = 1, \dots, n$.

Коэффициент α нельзя однозначно найти без дополнительных допущений о структуре матрицы R , поэтому будем считать, что главная диагональ R состоит из нулей. Это предположение также

не ограничивает общности, так как

$$\alpha I_n + \beta R = (\alpha + \beta r_0) I_n + \beta (R - r_0 I_n),$$

где r_0 — вещественное значение всех элементов главной диагонали матрицы R . Тогда α находится из очевидного равенства $\alpha = t_0$, если считать, что T имеет форму (1.1). Для удобства будем полагать, что матрицу R схожим образом определяют числа r_j , $j = -(n-1), -(n-2), \dots, n-2, n-1$.

Чтобы найти β , исследуем внедиагональные элементы t_j матрицы T , $j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)$. Известно, что $t_j = \beta r_j$ при таких значениях j . Поскольку T не скалярная матрица, найдётся такое j , что $t_j \neq 0$; но тогда $t_{-j} = \beta r_{-j} = \beta \bar{r}_j$ также не равно нулю. ($r_{-j} = \bar{r}_j$ ввиду эрмитовости матрицы R .) Перемножая два этих элемента, получаем

$$t_j t_{-j} = \beta^2 |r_j|^2$$

и, следовательно,

$$\arg \beta = \frac{1}{2} \arg (t_j t_{-j}).$$

Вместе с $|\beta| = 1$ это определяет число β и саму матрицу $R = (T - \alpha I_n)/\beta$. Стоит отметить, что можно и не перемножать элементы t_j и t_{-j} , а складывать, если t_j не является чисто мнимым числом:

$$t_j + t_{-j} = 2\beta \cdot \operatorname{Re} r_j \Rightarrow \arg \beta = \arg (t_j + t_{-j}) \mod \pi.$$

Вместо того чтобы сразу применять процедуру *eig* к комплексной эрмитовой матрице A , преобразуем её подобием с матрицей $Q = 1/\sqrt{2}(I_n + iP_n)$. Это подобие, идея которого взята из статей [39, 40], охватывает все эрмитовы тёплицевы матрицы:

$$\begin{aligned} Q^* R Q &= \frac{1}{2}(I - iP_n)R(I + iP_n) = \\ &= \frac{1}{2}(R + iRP_n - iP_nR + P_nRP_n) = \frac{1}{2}[(R + P_nRP_n) - i(P_nR - RP_n)]. \end{aligned}$$

Но так как матрица R персимметрична, то есть, симметрична относительно побочной диагонали, то

$$RP_n = P_nR^T$$

и поэтому верно

$$Q^* R Q = \frac{1}{2}[(R + R^T) - iP_n(R - R^T)] = \frac{1}{2}[(R + \bar{R}) - iP_n(R - \bar{R})].$$

В последнем равенстве матрица R^T была заменена на матрицу $\bar{R}$ ввиду эрмитовости R . Таким образом, если $R = A + iB$ — алгебраическое разложение матрицы R , то $Q^* R Q = A + P_nB$ — вещественная (Т+Н)-матрица. Более того, полученная матрица симметрична, так как симметричны оба слагаемых: вещественная часть A эрмитовой матрицы R обязана быть таковой, а матрица P_nB симметрична благодаря своей ганкелевости. Как уже отмечалось в главе 1, это способствует значительному сокращению времени вычисления собственных значений.

Теперь, найдя оба коэффициента и спектр матрицы $A + P_n B$, мы можем решить исходную задачу с помощью формулы (2.1).

Генерация произвольной матрицы из класса 1.1

Генерация соответствующей матрицы для проверки корректности алгоритма производится довольно просто: для этого нужно взять произвольный комплексный вектор-столбец $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$ и число ϕ , $|\phi| = 1$; при этом для построения ϕ достаточно задать его аргумент как случайное вещественное число. Числа t_j , $j = -(n-1), -(n-2), \dots, n-2, n-1$, на основе которых по диагоналям строится тёплицева матрица T , вычисляются следующим образом:

$$t_j = \begin{cases} \phi x_j, & j = 1, \dots, n-1, \\ x_0, & j = 0, \\ \phi \bar{x}_{-j}, & j = -1, \dots, -(n-1). \end{cases}$$

Сравнение со стандартным алгоритмом

В таблице 2.1 указано среднее время работы предлагаемого алгоритма в сравнении со стандартной функцией *eig* для матриц пяти разных порядков. Время представлено в секундах. Дополнительно указывается время, затраченное на предварительный и основной этапы. К предварительному этапу относятся вычисление коэффициентов α и β и составление матрицы

$A + P_n B$; к основному же этапу относятся вычисление спектра построенной матрицы $A + P_n B$ и применение формулы (2.1). Выигрыш по сравнению с функцией eig с приблизительно постоянным коэффициентом соответствует ожиданиям: ведь из существенных упрощений здесь была только замена параметра eig с комплексной матрицы на вещественную симметрическую, поэтому повышения эффективности на порядок здесь ждать не стоило.

n	Использование функции eig	Предлагаемый алгоритм				Выигрыш
		Предв. этап	Основной этап	Доля предв. этапа	Общее время	
250	0.1179	0.0078	0.0068	0.5342	0.0146	8.0753
500	0.6076	0.0340	0.0333	0.5052	0.0673	9.0282
1000	3.2216	0.1284	0.2115	0.3779	0.3398	9.4809
2000	18.1962	0.5168	1.3566	0.2759	1.8734	9.7129
3000	59.1955	1.2371	4.0651	0.2333	5.3022	11.1643

Таблица 2.1. Класс 1.1

Класс 1.2

Алгоритм

Пусть T — ϕ -циркулянт, причём $|\phi| = 1$. Впрочем, последним мы не воспользуемся, так как описанный алгоритм годится для любых ϕ -циркулянтов, кроме, конечно же, тривиального случая $\phi = 0$, соответствующего верхнетреугольным тёплицевым матрицам. Вспомним представление (1.4) или, если более детально, то

$$T = G_\phi C G_\phi^{-1},$$

где C — обыкновенный циркулянт. Таким образом, подобием с матрицей $G_\phi = \text{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1})$, где $\psi^n = \phi$, мы добиваемся упрощения задачи до нахождения спектра циркулянта. Используя широко известное соотношение (1.3), мы находим собственные числа матрицы C , совпадающие с собственными числами T .

Необходимо упомянуть, что после того, как был найден коэффициент ψ , достаточно работать лишь с первыми строками матриц. Так, например,

$$\{C\}_{1k} = \psi^{k-1} \{T\}_{1k}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

а спектр циркулянта C является результатом применения Matlab-процедуры *fft* к его первой строке. (Функция *fft* осуществляет быстрое дискретное преобразование Фурье.)

Генерация произвольной матрицы из класса 1.2

Алгоритм генерации матрицы из класса 1.2 аналогичен алгоритму для класса 1.1 и начинается так же: снова берутся произвольный n -мерный комплексный вектор-столбец $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$ и число ϕ , $|\phi| = 1$. (Здесь $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$ — первая строка генерируемого ϕ -циркулянта.) Числа t_j , $j = -(n-1), -(n-2), \dots, n-2, n-1$, на этот раз вычисляются по другим формулам:

$$t_j = \begin{cases} x_j, & j = 0, \dots, n-1, \\ \phi x_{n-|j|}, & j = -1, \dots, -(n-1). \end{cases}$$

Сравнение со стандартным алгоритмом

Аналогично предыдущему классу вводятся понятия предварительного и основного этапов. Предварительный этап здесь состоит из поиска чисел ϕ и ψ и построения первой строки циркулянта C , подобного исходному ϕ -циркулянту T . В основной этап входит лишь применение быстрого дискретного преобразования Фурье для нахождения спектра матрицы C . В отличие от алгоритма для класса 1.1, данный способ нахождения спектра не использует функции *eig*, заменяя её на функцию *fft*, сложность которой имеет асимптотику $O(n \log n)$, что и объясняет ощутимую разницу в эффективности по сравнению с алгоритмом из предыдущей части.

n	Использование функции <i>eig</i>	Предлагаемый алгоритм				Выигрыш
		Предв. этап	Основной этап	Доля предв. этапа	Общее время	
250	0.1275	1.51E-04	4.76E-05	0.7588	1.99E-04	640.7035
500	0.5849	2.93E-04	5.87E-05	0.8324	3.52E-04	1661.6477
1000	3.0507	5.43E-04	8.40E-05	0.8660	6.27E-04	4865.5502
2000	16.3142	0.0012	1.30E-04	0.9230	0.0013	12549.3850
3000	47.8531	0.0022	1.77E-04	0.9167	0.0024	19938.7920

Таблица 2.2. Класс 1.2

2.2. Спектральные алгоритмы для нормальных ганкелевых матриц

Перед описанием алгоритмов для нормальных ганкелевых матриц будет правильно упомянуть, что доказательство теоремы 1.2 в [38] содержит способ нахождения класса произвольной нормальной ганкелевой матрицы, основанный на анализе двух вещественных $n \times 2$ матриц, построенных на основе элементов матрицы H . Таким образом, нам не обязательно знать класс матрицы заранее: мы можем сначала применить алгоритм классификации и лишь потом найти собственные значения исходной матрицы с помощью соответствующего спектрального алгоритма.

На протяжении всей подглавы под числами h_k будут подразумеваться числа, определяющие ганкелеву матрицу H тем же способом, что указан в (1.2). Поэтому для упрощения в некоторых алгоритмах генерации матрицы соответствующего класса вместо выбора H предлагается способ выбора чисел $h_{-(n-1)}, \dots, h_{n-1}$, что, в принципе, то же самое.

Класс 2.1

Алгоритм

Итак, пусть H является комплексным кратным некоторой вещественной ганкелевой матрицы H_1 :

$$H = \alpha H_1, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Алгоритм для данного класса очевиден: сначала ищется коэффициент α (его можно определить как $e^{i \arg h_j}$, где h_j — произвольный ненулевой элемент среди чисел $h_{-(n-1)}, \dots, h_{n-1}$), затем находится матрица $H_1 = 1/\alpha \cdot H$. Вычислив спектр вещественной симметричной (ввиду ганкелевости) матрицы H_1 , домножим его на число α , чтобы получить искомый спектр H .

Генерация произвольной матрицы из класса 2.1

Возьмём произвольный вещественный вектор размерности $2n - 1$ $(x_{-(n-1)}, \dots, x_{n-1})$ и определим

$$h_j = \alpha x_j, \quad j = -(n-1), \dots, n-1,$$

где α — случайное комплексное число. Здесь числа x_j определяют матрицу H_1 так же, как числа h_j определяют H .

Сравнение со стандартным алгоритмом

Аналогично случаю класса 1.1, выигрыш достигается заменой комплексного аргумента функции eig на вещественный.

n	Использование функции eig	Предлагаемый алгоритм
250	0.1736	0.0114
500	0.8052	0.0389
1000	4.4317	0.2719
2000	25.0830	1.7124
3000	78.7157	4.7415

Таблица 2.3. Класс 2.1

Класс 2.2

Алгоритм

Пусть $H = \alpha P_n + \beta H_1$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, H_1 — вещественная центросимметричная матрица. Рассмотрим сначала случай чётного порядка $n = 2k$. Тогда матрицу H_1 благодаря её центросимметричности можно записать в блочном виде

$$H_1 = \begin{pmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 \\ P_k \hat{H}_2 P_k & P_k \hat{H}_1 P_k \end{pmatrix},$$

где $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ — вещественные ганкелевы матрицы порядка k . Как уже говорилось в главе 1, домножение на перъединичную матрицу соответствующего порядка с обеих сторон отражает элементы исходной матрицы относительно центра.

Заметим, что $P_k \hat{H}_2 P_k = \hat{H}_2$ ввиду ганкелевости H_1 . (В общем случае, если любую ганкелеву матрицу порядка $2k$ разбить на четыре блока порядка k , то матрицы с блочными индексами $(1, 2)$ и $(2, 1)$ будут совпадать.) Поэтому исходная матрица H при разбиении на блоки тех же размеров будет выглядеть так:

$$H = \begin{pmatrix} \beta \hat{H}_1 & \beta \hat{H}_2 + \alpha P_k \\ \beta \hat{H}_2 + \alpha P_k & \beta P_k \hat{H}_1 P_k \end{pmatrix}.$$

Введём теперь вещественную ортогональную матрицу

$$W = \begin{pmatrix} I_k & I_k \\ P_k & -P_k \end{pmatrix}.$$

В [41] указывается, что конгруэнция, осуществлённая посредством этой матрицы, приводит произвольную центросимметричную матрицу к блочно-диагональному виду с двумя диагональными блоками порядка k . Для центросимметричной матрицы H из класса 2.2 мы получаем даже большее:

$$\begin{aligned} W^*HW &= W^THW = \begin{pmatrix} \beta(\hat{H}_1 + \hat{H}_2P_k) + \alpha I_k & 0 \\ 0 & \beta(\hat{H}_1 - \hat{H}_2P_k) - \alpha I_k \end{pmatrix} = \\ &= \beta \begin{pmatrix} \hat{H}_1 + \hat{H}_2P_k & 0 \\ 0 & \hat{H}_1 - \hat{H}_2P_k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ и $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ — собственные значения матриц $\hat{H}_1 + \hat{H}_2P_k$ и $\hat{H}_1 - \hat{H}_2P_k$ соответственно. Вычислив их с помощью Matlab-функции *eig*, мы сможем найти собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы H по формулам

$$\lambda_1 = \beta\mu_1 + \alpha, \lambda_2 = \beta\mu_2 + \alpha, \dots, \lambda_k = \beta\mu_k + \alpha,$$

$$\lambda_{k+1} = \beta\nu_1 - \alpha, \lambda_{k+2} = \beta\nu_2 - \alpha, \dots, \lambda_n = \beta\nu_k - \alpha.$$

Случай нечётного n разбирается похожим образом. При $n = 2k + 1$ матрица H представляется в виде

$$H = \begin{pmatrix} \beta\hat{H}_1 & \beta c & \beta\hat{H}_2 + \alpha P_k \\ \beta c^T & \beta g + \alpha & \beta c^T P_k \\ \beta\hat{H}_2 + \alpha P_k & \beta P_k c & \beta P_k \hat{H}_1 P_k \end{pmatrix},$$

где c — некоторый вещественный вектор-столбец размерности k . Для достижения того же эффекта, что и в чётном случае, берётся матрица

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_k & 0 & I_k \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ P_k & 0 & -P_k \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, W — вещественная ортогональная матрица. Подобие с матрицей W приводит к разбиению задачи на две меньшие с размерами k и $k + 1$:

$$W^T H W = \beta \begin{pmatrix} \hat{H}_1 + \hat{H}_2 P_k & \sqrt{2}c & 0 \\ \sqrt{2}c^T & g & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H}_1 - \hat{H}_2 P_k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -I_k \end{pmatrix}.$$

Вычисляются собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_{k+1}$ матрицы

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_1 + \hat{H}_2 P_k & \sqrt{2}c \\ \sqrt{2}c^T & g \end{pmatrix}$$

и собственные значения $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ матрицы $\hat{H}_1 - \hat{H}_2 P_k$. Тогда спектр H находится по формулам

$$\lambda_1 = \beta\mu_1 + \alpha, \lambda_2 = \beta\mu_2 + \alpha, \dots, \lambda_{k+1} = \beta\mu_{k+1} + \alpha,$$

$$\lambda_{k+2} = \beta\nu_1 - \alpha, \lambda_{k+3} = \beta\nu_2 - \alpha, \dots, \lambda_n = \beta\nu_k - \alpha.$$

Генерация произвольной матрицы из класса 2.2

Центросимметричная ганкелева матрица полностью определяется своей первой строкой. Если для вещественной матрицы H_1 это строка $(x_{n-1}, \dots, x_0)$, то элементы комплексной матрицы $H = \alpha P_n + \beta H_1$ должны определяться следующей системой:

$$h_j = \begin{cases} \beta x_{|j|}, & j = \pm 1, \dots, \pm(n-1), \\ \alpha + \beta x_0, & j = 0. \end{cases}$$

По этим формулам можно сгенерировать произвольную матрицу из класса 2.2. Правда, этот алгоритм допускает некоторое упрощение: можно генерировать не n -мерный вещественный вектор $(x_{n-1}, \dots, x_0)$, а $(n-1)$ -мерный $(x_{n-1}, \dots, x_1)$. Тогда числа h_j можно будет вычислять так:

$$h_j = \begin{cases} \beta x_{|j|}, & j = \pm 1, \dots, \pm(n-1), \\ \alpha, & j = 0. \end{cases}$$

Сравнение со стандартным алгоритмом

Как показывает таблица 2.4, алгоритм для класса 2.2 эффективнее алгоритма для класса 2.1, что было ожидаемо. Задача для класса 2.1 сводилась к вещественному случаю, для класса же 2.2 задача сводится к вычислению спектра двух вещественных матриц, но вдвое меньшего размера.

n	Использование функции <i>eig</i>	Предлагаемый алгоритм
250	0.1057	0.0035
500	0.6158	0.0183
1000	3.2598	0.0879
2000	18.5105	0.5100
3000	57.1573	1.5943

Таблица 2.4. Класс 2.2

Класс 2.3

Алгоритм

Пусть H — блочно-диагональная матрица вида $\alpha H_1 \oplus \beta H_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, где H_1 — верхнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка k ($0 < k < n$), а H_2 — нижнетреугольная вещественная ганкелева матрица порядка $l = n - k$. Сразу отметим, что специальной структурой матриц H_1 и H_2 мы воспользуемся только для нахождения k — размера первого блока. Чтобы найти k (или l), достаточно пройти по первой (последней) строке матрицы H слева направо (справа налево соответственно), учитывая все ненулевые элементы.

После того, как мы отделили друг от друга блоки αH_1 и βH_2 ,

найдем их спектр, применив алгоритм для матриц из класса 2.1. Объединение всех собственных значений этих двух блоков и будет являться спектром матрицы H .

Генерация произвольной матрицы из класса 2.3

Выберем произвольный вещественный n -мерный вектор $(x_1, \dots, x_n)$, комплексные числа α и β , а также размер первого диагонального блока k . Последние k компонент вектора будут определять элементы блока αH_1 , первые $n - k$ компонент — элементы блока βH_2 :

$$h_j = \begin{cases} \beta x_{n-|j|}, & j = -(n-1), \dots, -k, \\ 0, & j = -(k-1), \dots, n-k-1, \\ \alpha x_{j+1}, & j = n-k, \dots, n-1. \end{cases}$$

Сравнение со стандартным алгоритмом

В отличие от других классов, в этом каждая матрица имеет два параметра, от которых может прямо зависеть среднее число выполняемых операций. К привычному порядку n добавляется ещё и размер первого диагонального блока k . Кроме получаемого выигрыша от перехода к вещественной арифметике можно отметить ускорение алгоритма при приближении k к $n/2$. Это объясняется следующими соображениями: если считать, что сложность QR-алгоритма $O(n^3)$, то данный алгоритм будет

содержать порядка $c(k^3 + (n - k)^3)$ операций, где c — некоторая константа. Число в скобках будет принимать своё минимальное значение именно при $k = n/2$.

n	k	Использование функции eig	Предлагаемый алгоритм
250	50	0.0962	0.0051
	125	0.0915	0.0045
500	200	0.3158	0.0150
	250	0.3535	0.0153
1000	200	2.7437	0.1133
	500	2.2267	0.0812
2000	400	12.7676	0.8550
	1000	11.4896	0.4519
3000	600	43.4848	2.3589
	1500	37.3402	1.4932

Таблица 2.5. Класс 2.3

Класс 2.4

Алгоритм

Пусть H — матрица вида $\alpha H_1 + \beta H_1^{-1}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, H_1 — невырожденная вещественная верхнетреугольная (или

нижнетреугольная) ганкелева матрица. Остановимся на случае верхнетреугольной ганкелевой матрицы H_1 , так как случай нижнетреугольной ганкелевой матрицы H_1 сводится к предыдущему отражением матрицы относительно ее центра. Заметим, что матрица H_1^{-1} обязана быть нижнетреугольной ганкелевой. Действительно, если перейти к ассоциированной тёплицевой матрице $T_1 = H_1 P_n$, то можно видеть, что она обязана быть верхнетреугольной (уже в обыкновенном смысле); то же самое можно сказать и про T_1^{-1} , так как множество невырожденных верхнетреугольных тёплицевых матриц со стандартными операциями сложения и умножения есть поле. Но тогда $H_1^{-1} = (T_1 P_n)^{-1} = P_n T_1^{-1}$ — уже нижнетреугольная ганкелева матрица. Это позволяет заявить следующее: первая строка и последний столбец матрицы H с точностью до домножения на комплексный скаляр совпадают с первой строкой матрицы H_1 и последним столбцом матрицы H_1^{-1} соответственно, если не брать во внимание элемент $\{H\}_{1n} = h_0$.

Таким образом, существует комплексное число γ такое, что верхнетреугольная ганкелева матрица $\hat{H}_1$, определённая своей первой строкой $(h_{n-1}, \dots, h_1, \gamma)$, и нижнетреугольная ганкелева матрица $\hat{H}_2$, определённая своим последним столбцом $(h_0 - \gamma, h_{-1}, \dots, h_{-(n-1)})^T$, при перемножении дают скалярную матрицу. Чтобы найти значение γ , выберем любое $1 < k \leq n$ такое, что

$h_{k-1} \neq h_{-(k-1)}$, и приравняем нулю элемент $\{\hat{H}_1 \hat{H}_2\}_{1k}$:

$$h_{k-1}(h_0 - \gamma) + h_{k-2}h_{-1} + \dots + h_1h_{-(k-2)} + \gamma h_{-(k-1)} = 0;$$

$$(h_{k-1} - h_{-(k-1)})\gamma = h_{k-1}h_0 + h_{k-2}h_{-1} + \dots + h_1h_{-(k-2)}. \quad (2.2)$$

Так мы получаем недостающий элемент матриц $\hat{H}_1 = \alpha H_1$ и $\hat{H}_2 = \beta H_1^{-1}$, просто решив линейное уравнение (2.2).

Рассмотрим отдельно случай, когда подходящего k нет, то есть $h_1 = h_{-1}, h_2 = h_{-2}, \dots, h_{n-1} = h_{-(n-1)}$. Это равносильно тому, что T_1 обратна самой себе, то есть $T_1^2 = I_n$. Докажем, что это возможно только в тривиальном случае $T_1 = \pm I_n$.

Утверждение 2.1. Пусть A — верхнетреугольная тѐплицева матрица порядка n , причѐм $A^2 = I_n$. Тогда $A = \pm I_n$.

Доказательство

Обозначим первую строку матрицы A как $(a_0, \dots, a_{n-1})$, где $a_0 \neq 0$ в силу невырожденности A . Как уже упоминалось, множество невырожденных верхнетреугольных тѐплицевых матриц является полем. Поле это изоморфно множеству многочленов от одной переменной x степени не выше $n - 1$ с операциями сложения и умножения по модулю x^n . Матрице A при этом будет соответствовать многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1},$$

матрице $A^2 = I_n$ — тождественная единица. Таким образом,

$$f(x)^2 - 1 = x^n Q(x), \quad (2.3)$$

где $Q(x)$ — некоторый (возможно нулевой) многочлен. Докажем, что $a_j = 0$ при $j = 1, \dots, n-1$. Допустим, что это не так и $k < n$ — минимальное натуральное такое, что $a_k \neq 0$. Тогда

$$f(x)^2 = a_0^2 + 2a_0a_kx^k + \dots,$$

что противоречит (2.3). Следовательно, $A = a_0I_n$, причём $a_0^2 = 1$. Поэтому $A = \pm I_n$, что завершает доказательство.

Таким образом, уравнение (2.2) позволяет найти слагаемые αH_1 и βH_1^{-1} всегда, кроме легко проверяемого случая $H = \kappa P_n$, $\kappa \in \mathbb{C}$. Получив эти матрицы и сами коэффициенты α и β , найдём собственные значения $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ вещественной матрицы H_1 . Тогда спектр H можно будет найти по формулам

$$\lambda_j = \alpha\mu_j + \beta\mu_j^{-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Генерация произвольной матрицы из класса 2.4

Алгоритм генерации явно следует из определения класса. Необходимо взять два произвольных комплексных числа α и β и набор из n вещественных чисел $(h'_0, \dots, h'_{n-1})$, проследив при этом, чтобы h'_0 не оказалось равным нулю. Тогда для проверки описанного выше спектрального алгоритма на вход может быть подана матрица

$\alpha H_1 + \beta H_1^{-1}$, где H_1 — верхнетреугольная ганкелева матрица с первой строкой $(h'_{n-1}, \dots, h'_0)$. Матрица H_1 заведомо будет невырожденной именно за счёт неравенства $h'_0 \neq 0$.

Сравнение со стандартным алгоритмом

Как видно из таблицы 2.6, мы получаем точно такой же выигрыш, что и для класса 2.1, что не удивительно. В алгоритмах для классов 2.1 и 2.4 большая часть вычислений отводится на одно и то же — выполнение функции *eig* с вещественной ганкелевой матрицей в качестве параметра.

n	Использование функции <i>eig</i>	Предлагаемый алгоритм
250	0.1192	0.0070
500	0.6848	0.0366
1000	3.7420	0.2287
2000	23.6584	1.6555
3000	74.5923	4.6300

Таблица 2.6. Класс 2.4

Класс 2.6

Алгоритм

Для удобства на этот раз ганкелеву матрицу, спектр которой мы ищем, будем обозначать как $\tilde{H}$. Кроме того, будем считать, что $\tilde{H} = \tilde{H}_1 + i\tilde{H}_2$, $\tilde{T} = \tilde{T}_1 + i\tilde{T}_2$ — алгебраические разложения матриц $\tilde{H}$ и $\tilde{T}$, где $\tilde{T}$ — тёплицева матрица, ассоциированная с $\tilde{H}$.

Итак, пусть матрица $\tilde{T}$ получена V -преобразованием матрицы вида $T = T_1 + iT_2$, полученной одним из следующих способов:

а) T_1 — произвольный вещественный невырожденный ξ -циркулянт, T_2 — произвольное вещественное кратное матрицы T_1^{-T} ;

б) T_1 и T_2^T — вещественные ξ -циркулянты, удовлетворяющие условию $T_1 T_2^T = 0$.

Покажем, что в обоих этих случаях спектральную задачу для матрицы H можно решить схожими алгоритмами.

Пусть H_1 и H_2 — ассоциированные ганкелевы матрицы для T_1 и T_2 соответственно. Тогда ввиду применённого V -преобразования

$$\tilde{H} = \tilde{H}_1 + i\tilde{H}_2 = (v_{11}H_1 + v_{21}H_2) + i(v_{12}H_1 + v_{22}H_2).$$

Рассмотрим сначала случай 2.6а. Тогда $T_2 = \delta T_1^{-T}$ для некоторого вещественного δ , а для ассоциированной матрицы H_2 будет верно

$$H_2 = T_2 P_n = \delta T_1^{-T} P_n = \delta (P_n T_1^T)^{-1} = \delta (T_1 P_n)^{-1} = \delta H_1^{-1}. \quad (2.4)$$

Так как H_1 — вещественная невырожденная симметричная матрица, то найдутся n линейно независимых собственных векторов x_j , $j = 1, \dots, n$, отвечающих собственным значениям $\lambda_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$: $H_1 x_j = \lambda_j x_j$, при этом из (2.4) следует $H_2 x_j = (\delta/\lambda_j) x_j$.

Остановимся на этой идее и перейдём к разбору случая 2.6б. Выясним, что означает в терминах матриц H_1 и H_2 равенство $T_1 T_2^T = 0$:

$$0 = T_1 T_2^T = H_1 P_n (H_2 P_n)^T = H_1 P_n P_n^T H_2^T = H_1 H_2. \quad (2.5)$$

Таким образом, $H_1 H_2 = 0$. Транспонируя, получаем

$$H_2 H_1 = 0 \quad (2.6)$$

и, следовательно, матрицы H_1 и H_2 коммутируют. Поскольку H_1 — вещественная симметричная матрица, её можно диагонализировать ортогональным подобием:

$$Q^T H_1 Q = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь Q — некоторая вещественная ортогональная матрица, D — невырожденная диагональная матрица, содержащая на своей диагонали все ненулевые собственные значения матрицы H_1 . Порядок матрицы D будет равен $k = \text{rg } H_1$. Тогда, ввиду (2.5) и (2.6), применяя то же подобие к H_2 , получим

$$Q^T H_2 Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

где A — вещественная квадратная матрица порядка $n - k$. При этом A будет симметричной, поскольку симметрична вся матрица $Q^T H_2 Q$. Из этого можно сделать вывод, что существует система из линейно независимых n -мерных векторов $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих следующим равенствам для некоторых вещественных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$H_1 x_j = \lambda_j x_j, \quad H_2 x_j = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$H_1 x_j = 0, \quad H_2 x_j = \lambda_j x_j, \quad j = k + 1, \dots, n.$$

Последние два равенства можно представить в компактной записи, если ввести коэффициенты $\nu_j \in \{0, 1\}$:

$$H_1 x_j = \nu_j \lambda_j x_j, \quad H_2 x_j = (1 - \nu_j) \lambda_j x_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Другими словами, если объединить спектры матриц H_1 и H_2 , то среди этих $2n$ чисел будет не более n ненулевых.

Получаем ту же ситуацию, что и для класса 2.6а: матрицы H_1 и H_2 обязаны иметь одинаковый набор собственных векторов. Однако есть одно существенное различие: если в случае класса 2.6а мы получили некоторый собственный вектор матрицы H_1 , то он гарантированно будет собственным вектором и для H_2 . Для класса 2.6б такой гарантии нет. Поэтому предлагаются следующие два немного различающихся алгоритма.

Класс 2.6а. Сначала с помощью стандартной функции *eig* находятся собственные значения λ_j вещественной матрицы H_1 . Для

каждого j вычисляем величину

$$\mu_j = \frac{\delta}{\lambda_j},$$

где δ — коэффициент в равенстве $H_1 H_2 = \delta I_n$. Нетрудно проверить, что μ_j — собственное значение H_2 , отвечающее тому же собственному вектору, что и собственное значение λ_j матрицы H_1 .

Класс 2.6б. С помощью стандартной функции *eig* находятся собственные значения матриц H_1 и H_2 . Обозначим их λ'_j и μ'_j соответственно. Сконструируем перестановки λ_j и μ_j этих двух множеств так, чтобы выполнялись равенства $\lambda_j \mu_j = 0$ для любого j . Этого можно добиться как сортировкой массивов λ' и μ' в противоположных порядках, так и простым перебором обоих массивов методом двух указателей.

Конечная часть снова общая для двух классов. После нахождения λ_j и μ_j мы можем выписать спектр $\tilde{H}$. Он будет состоять из чисел

$$(v_{11}\lambda_j + v_{21}\mu_j) + i(v_{12}\lambda_j + v_{22}\mu_j).$$

В результате, чтобы решить исходную задачу для $\tilde{H}$, необходимо найти собственно матрицы H_1 и H_2 и коэффициенты матрицы V , осуществляющей нужное V -преобразование.

Для этого перейдём к ассоциированным тёплицевым матрицам. Заметим, что в любом случае T_1 — вещественный ξ -циркулянт, T_2 — вещественный ξ^{-1} -циркулянт, поскольку для

любого ξ -циркулянта A обратная матрица A^{-1} (если существует) также является ξ -циркулянтом, а транспонированная матрица A^T является ξ^{-1} -циркулянтом. Таким образом, обе матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ можно представить в виде линейной комбинации ξ -циркулянта и ξ^{-1} -циркулянта для некоторого вещественного ξ . Понятно, что благодаря условию $|V| \neq 0$ можно говорить об обратном V -преобразовании и, значит, можно и наоборот матрицы T_1 и T_2 представить в виде линейной комбинации $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$. Попробуем это использовать для нахождения ξ .

Пусть α, β — такие вещественные числа, что $\alpha\tilde{T}_1 + \beta\tilde{T}_2$ — ξ -циркулянт. Введём такие обозначения: p_j — транспонированная первая строка матрицы $\tilde{T}_j$ без первого элемента, q_j — записанный в обратном порядке первый столбец матрицы $\tilde{T}_j$ без первого элемента, $j = 1, 2$. Тогда, пользуясь собственно определением ξ -циркулянта, данное условие можно переписать следующим образом:

$$\alpha q_1 + \beta q_2 = \xi(\alpha p_1 + \beta p_2).$$

Преобразуя, получаем

$$\alpha(q_1 - \xi p_1) + \beta(q_2 - \xi p_2) = 0,$$

то есть задача сводится к тому, чтобы найти такое ξ , что векторы $q_1 - \xi p_1$ и $q_2 - \xi p_2$ линейно зависимы. При таком ξ должны быть линейно зависимы все пары двумерных векторов $(q_{1j} - \xi p_{1j}, q_{2k} - \xi p_{2k})^T$ и

$(q_{2j} - \xi p_{2j}, q_{2k} - \xi p_{2k})^T, j, k = 1, 2, \dots, n$. Получаем такие уравнения:

$$(q_{1j} - \xi p_{1j})(q_{2k} - \xi p_{2k}) = (q_{1k} - \xi p_{1k})(q_{2j} - \xi p_{2j}),$$

или, что то же самое,

$$(p_{1j}p_{2k} - p_{2j}p_{1k})\xi^2 + (q_{1k}p_{2j} + q_{2j}p_{1k} - q_{2k}p_{1j} - q_{1j}p_{2k})\xi + (q_{1j}q_{2k} - q_{2j}q_{1k}) = 0.$$

Здесь p_{jk} означает k -й элемент вектора p_j ; аналогично определяется q_{jk} .

Надо заметить, что коэффициенты при ξ^2 и ξ^0 есть не что иное, как миноры Δ_{jk}^F и Δ_{jk}^G , определённые в [38]; там же доказывается, что равенство $\Delta_{jk}^F = \Delta_{jk}^G$ обязано выполняться для всех нормальных ганкелевых матриц. Следовательно, все полученные уравнения с не равным нулю старшим коэффициентом имеют одни и те же два взаимно обратных корня, причём оба нам будут подходить. Так мы находим ξ .

Теперь уже можно находить начальные матрицы T_1 и T_2 . Разберём основной случай, когда $\tilde{T}_1$ не является ни ξ -циркулянт, ни ξ^{-1} -циркулянт. Тогда $v_{11} \neq 0, v_{21} \neq 0$, и, не ограничивая общности, можно считать, что $\tilde{T}_1 = T_1 + T_2$. Здесь матрица

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

заменяется на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{v_{12}}{v_{11}} \\ 1 & \frac{v_{22}}{v_{21}} \end{pmatrix},$$

а матрицы T_1 и T_2 — на $v_{11}T_1$ и $v_{21}T_2$ соответственно с сохранением всех полученных соотношений.

Внедиагональные элементы T_1 и T_2 находятся посредством решения $n - 1$ систем из двух линейных уравнений от двух переменных. Если обозначить первые строки матриц T_1 и T_2 как $(t'_0, t'_1, \dots, t'_{n-1})$ и $(t''_0, t''_1, \dots, t''_{n-1})$ соответственно, то эти системы будут выглядеть так:

$$\begin{cases} t'_j + t''_j &= p_{1j}, \\ \xi t'_j + \frac{1}{\xi} t''_j &= q_{1,n-j} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Здесь было использовано только то, что T_1 — ξ -циркулянт, а T_2 — ξ^{-1} -циркулянт. Для нахождения же диагональных элементов t'_0 и t''_0 надо использовать тот факт, что все внедиагональные элементы матрицы $T_1 T_2^T$ равны нулю, так как $T_1 T_2^T = \delta I_n$ для некоторого вещественного δ , причём $\delta \neq 0$ соответствует классу 2.6а, $\delta = 0$ — классу 2.6б. Кроме того, сумма $t'_0 + t''_0$ равна диагональному элементу матрицы $\tilde{T}_1$. Снова получается система из двух линейных уравнений. Таким образом, найдены искомые матрицы T_1 и T_2 . Чтобы найти оставшиеся коэффициенты v_{12} и v_{22} (мы положили $v_{11} = v_{21} = 1$), нужно решить уравнение

$$\tilde{T}_2 = v_{12}T_1 + v_{22}T_2, \quad (2.7)$$

где все три матрицы уже известны.

Если оказалось, что уравнение (2.7) не имеет решений, то значит, матрица $\tilde{T}_1$ — ξ -циркулянт (что соответствует случаю $v_{21} = 0$) или ξ^{-1} -циркулянт ($v_{11} = 0$). В таком случае нужно аналогичным образом рассмотреть матрицу $\tilde{T}_2$. Вышеописанный алгоритм не подойдёт, только если $\tilde{T}_2$ также ξ -циркулянт или ξ^{-1} -циркулянт. Тогда ввиду своей невырожденности матрица V является диагональной или пердиагональной. В первом случае можно считать $T_1 = \tilde{T}_1$, $T_2 = \tilde{T}_2$, $V = I_2$; во втором $T_1 = \tilde{T}_2$, $T_2 = \tilde{T}_1$, $V = P_2$.

Генерация произвольной матрицы из класса 2.6

Сгенерируем сначала вещественные ξ -циркулянты T_1 и T_2^T такие, что $T_1 T_2^T = \delta I_n$. Учитывая (1.4), можно сказать, что это равносильно задаче получения двух циркулянтов $C_1 = G^{-1} T_1 G$ и $C_2 = G^{-1} T_2^T G$ с тем же свойством

$$C_1 C_2 = \delta I_n. \quad (2.8)$$

Проще всего их получить, отталкиваясь от их собственных значений, по которым легко можно восстановить сами матрицы C_1 и C_2 , используя (1.3). При этом необходимо проследить за тем, чтобы результирующие матрицы T_1 и T_2^T оказались вещественными. Здесь нужно разделить исследование на два случая.

Случай 1. $\xi > 0$ или $\xi < 0$ и $n = 2r + 1$ — нечётное число.

При таких ограничениях матрица G сама будет вещественной, поэтому в данном случае условие вещественности T_1 и T_2^T эквивалентно условию вещественности циркулянтов C_1 и C_2 . Используем лемму 2.15 из [38].

Лемма 2.1. *Циркулянт $C = F^*DF$, $D = \text{diag} (d_1, \dots, d_n)$, будет вещественным тогда и только тогда, когда*

$$d_1 = \bar{d}_1,$$

$$d_j = \bar{d}_{n+2-j}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Пусть $C_1 = F^*D_1F$, $D_1 = \text{diag} (d'_1, \dots, d'_n)$, $C_2 = F^*D_2F$, $D_2 = \text{diag} (d''_1, \dots, d''_n)$. Тогда, кроме условий леммы, необходимо выполнить ещё и эквивалентное (2.8) условие $d'_jd''_j = \delta$.

Получаем следующий алгоритм для класса 2.6а. Сначала генерируем комплексные d'_j , удовлетворяющие условиям, аналогичным тем, что в лемме 2.1, дополнительно требуя $d'_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Полагая же теперь $d''_j = \delta/d'_j$, мы одновременно добиваемся и выполнения условия леммы для C_2 , и равенства (2.8).

Построение C_1 и C_2 для класса 2.6б производится схожим образом. Генерируются n комплексных чисел $d_1, \dots, d_n$, удовлетворяющих лемме 2.1, и n чисел $z_1, \dots, z_n$, где $z_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, n$, и

$$z_j = z_{n+2-j}, \quad j = 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Для каждого j полагаем $d'_j = z_j d_j$ и $d''_j = (1 - z_j) d_j$. Нетрудно убедиться, что оба набора d'_j и d''_j порождают вещественные циркулянты, удовлетворяя при этом ещё и условию $d'_j d''_j = 0$.

Построив циркулянты C_1 и C_2 , найдём ξ -циркулянт $T_1 = GC_1 G^{-1}$ и ξ^{-1} -циркулянт $T_2 = (GC_2 G^{-1})^T$. Для получения $\tilde{T}$ осуществим V -преобразование матрицы $T = T_1 + iT_2$ с произвольной вещественной 2×2 -матрицей V , а окончательная нормальная ганкелева матрица $\tilde{H}$ будет ассоциированной для $\tilde{T}$: $\tilde{H} = \tilde{T} P_n$.

Случай 2. $\xi < 0$ и $n = 2r$ — чётное.

В этом случае матрица G уже не будет вещественной, а значит, лемму 2.1 применять нельзя. Впрочем, алгоритм построения циркулянтов C_1 и C_2 будет почти таким же, за исключением условий, которым должны удовлетворять диагональные элементы D_1 и D_2 . Здесь используется следствие из леммы 2.10 (см. [38]).

Лемма 2.2. ξ -циркулянт $C = GF^* DFG^{-1}$, $D = \text{diag} (d_1, \dots, d_n)$ будет вещественным тогда и только тогда, когда

$$d_1 = \bar{d}_2,$$

$$d_3 = \bar{d}_{n+3-j}, \quad j = 3, \dots, n.$$

Соответственно изменяются и прочие детали: например, в алгоритме для класса 2.6б набор чисел $z_1, \dots, z_n$ должен удовлетворять не соотношению (2.9), а уравнениям

$$z_1 = z_2, \quad z_j = z_{n+3-j}, \quad j = 3, \dots, n.$$

Сравнение со стандартным алгоритмом

Так же, как и в некоторых предыдущих классах, ядро обоих алгоритмов — это вызов функции *eig* для вещественной ганкелевой матрицы того же порядка n . Объясняется разная их эффективность тем, что в алгоритме для класса 2.6б этот вызов осуществляется двукратно, а для класса 2.6а — однократно, что подтверждается примерно вдвое меньшим временем выполнения относительно класса 2.6б и примерно таким же временем выполнения относительно класса 2.1.

n	Использование функции <i>eig</i>	Предлагаемый алгоритм
250	0.1197	0.0102
500	0.6371	0.0460
1000	3.6688	0.2640
2000	20.9380	1.6349
3000	64.4404	4.5048

Таблица 2.7. Класс 2.6а

n	Использование функции <i>eig</i>	Предлагаемый алгоритм
250	0.1278	0.0146
500	0.7527	0.0764
1000	3.8775	0.4735
2000	21.3227	3.0749
3000	63.9496	8.3497

Таблица 2.8. Класс 2.6б

Класс 2.7

Алгоритм

Пусть ассоциированная тёплицева матрица для H является циркулянтном вида (1.3), где $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — диагональная матрица, удовлетворяющая соотношениям $|d_j| = |d_{n+2-j}|$, $j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Тогда можно написать

$$H = F_n^* D F_n P_n. \quad (2.10)$$

Заметим сразу, что предлагаемый ниже алгоритм позволяет найти спектр произвольного ганкелевого циркулянта, не обязательно входящего в класс 2.7.

Напомним вид матрицы дискретного преобразования Фурье и введём две новые матрицы, которые будут использованы в

дальнейшем.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$W = \text{diag}(1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}), \quad Q_1 = 1 \oplus P_{n-1}.$$

Здесь $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень n -ой степени из единицы.

Нетрудно проверить соотношения

$$F_n^2 = Q_1, \quad Q_1^2 = I_n. \quad (2.11)$$

Докажем теорему, на которой будет основан алгоритм для данного класса матриц.

Теорема 2.1. Пусть H — ганкелев циркулянт, представленный в виде (2.10). Тогда собственными значениями матрицы H будут числа

$$d_1, \pm\sqrt{d_2 d_n}, \pm\sqrt{d_3 d_{n-1}}, \dots, \pm\sqrt{d_{m+1} d_{m+2}},$$

если $n = 2m + 1$, и числа

$$d_1, \pm\sqrt{d_2 d_n}, \pm\sqrt{d_3 d_{n-1}}, \dots, \pm\sqrt{d_m d_{m+2}}, -d_{m+1}$$

при $n = 2m$.

Доказательство

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$F_n^* D F_n P_n x = \lambda x. \quad (2.12)$$

Введём вспомогательный вектор $y = Q_1 F_n^* x$, тогда $x = F_n Q_1 y$.

Подставим полученное представление в (2.12):

$$F_n^* D F_n P_n F_n Q_1 y = \lambda F_n Q_1 y.$$

Домножим последнее равенство слева на F_n и с учётом (2.11) получим:

$$D F_n P_n F_n Q_1 y = \lambda y.$$

Принимая во внимание доказанное в [42] равенство $P_n F_n = F_n^* W^*$, окончательно имеем

$$D W^* Q_1 y = \lambda y.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению спектра матрицы

$$D W^* Q_1 = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & d_2 \bar{\epsilon} & \\ & & & d_3 \bar{\epsilon}^2 & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & d_n \bar{\epsilon}^{n-1} & & & \end{pmatrix}.$$

Переставим строки и столбцы данной матрицы в следующем порядке: 1, 2, n , 3, $n-1$, 4, $n-2$, ... В результате приходим к задаче

определения собственных значений следующей блочно-диагональной матрицы, имеющей два различных вида в зависимости от чётности порядка:

$$d_1 \oplus \begin{pmatrix} & d_2 \bar{\epsilon} \\ d_n \bar{\epsilon}^{n-1} & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & d_3 \bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1} \bar{\epsilon}^{n-2} & \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} & d_{m+1} \bar{\epsilon}^m \\ d_{m+2} \bar{\epsilon}^{m+1} & \end{pmatrix}$$

при $n = 2m + 1$ и

$$d_1 \oplus \begin{pmatrix} & d_2 \bar{\epsilon} \\ d_n \bar{\epsilon}^{n-1} & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & d_3 \bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1} \bar{\epsilon}^{n-2} & \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} & d_m \bar{\epsilon}^{m-1} \\ d_{m+2} \bar{\epsilon}^{m+1} & \end{pmatrix} \oplus d_{m+1} \bar{\epsilon}^m$$

при $n = 2m$.

Отсюда видно, что d_1 — собственное значение. Остальные собственные значения распадаются на пары, каждая из которых является решением задачи на собственные значения для матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & d_j \bar{\epsilon}^{j-1} \\ d_{n+2-j} \bar{\epsilon}^{n+1-j} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\lambda^2 - d_j \bar{\epsilon}^{j-1} d_{n+2-j} \bar{\epsilon}^{n+1-j} = 0, \quad j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] + 1,$$

или, поскольку $\bar{\epsilon}^{n+1-j} = \bar{\epsilon}^{1-j}$,

$$\lambda^2 - d_j d_{n+2-j} = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы для случая нечётного n . Если же $n = 2m$, то в спектр добавляется ещё одно собственное значение $d_{m+1} \bar{\epsilon}^m = -d_{m+1}$, так как $\epsilon^m = e^{\pi i} = -1$. Теорема 2.1 доказана.

Очевидно, как в связи с этим будет выглядеть алгоритм, порождаемый данной теоремой: сначала нужно получить вектор d , применив функцию *fft* к первой строке ассоциированного циркулянта T (или, что то же самое, к первой строке H , выписанной в обратном порядке), а затем выписать собственные значения по формулам из теоремы 2.12.

Генерация произвольной матрицы из класса 2.7

Для тестирования данного алгоритма можно подать на вход любой ганкелев циркулянт, однако не так сложно сгенерировать именно матрицу из класса 2.7. Для этого надо строго следовать определению класса. Возьмём $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ произвольных комплексных чисел $d_1, \dots, d_k$ и $n - k$ произвольных вещественных аргументов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}$ и положим

$$d_j = d_{n+2-j} e^{i\alpha_{j-k}}, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Определённые таким образом числа $d_1, \dots, d_n$ будут удовлетворять условиям класса. Используя обратное дискретное преобразование Фурье, которому в Matlab'е соответствует функция *ifft*, получим первую строку ассоциированного циркулянта T . Для получения первой строки самой матрицы H , по которой можно восстановить весь циркулянт, результат обратного преобразования Фурье нужно выписать в обратном порядке.

Сравнение со стандартным алгоритмом

Выигрыш в эффективности для этого алгоритма ожидаемо гораздо выше, чем для предыдущих классов нормальных ганкелевых матриц, поскольку используемый здесь алгоритм имеет асимптотическую сложность $O(n \log n)$.

n	Использование функции <i>eig</i>	Предлагаемый алгоритм
250	0.1447	1.54E-04
500	0.7274	2.51E-04
1000	3.6753	3.59E-04
2000	19.4959	6.21E-04
3000	57.5739	8.38E-04

Таблица 2.9. Класс 2.7

Класс 2.8

Алгоритм

Пусть ассоциированная тёплицева матрица для H является косым циркулянтном вида (1.4), где $\phi = -1$, $D = \text{diag} (d_1, d_2, \dots, d_n)$ — диагональная матрица, удовлетворяющая соотношениям $|d_1| =$

$|d_2|, |d_j| = |d_{n+3-j}|, j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Тогда можно написать

$$H = GF_n^* DF_n G^{-1} P_n. \quad (2.13)$$

Здесь $G = \text{diag} (1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^{n-1})$, где $\mu = e^{\frac{\pi i}{n}}$ — первообразный корень n -ой степени из -1 . Подобно случаю класса 2.7, нижеизложенный алгоритм решает спектральную задачу вообще для всех косых ганкелевых циркулянтов. Основанием для этого утверждения служит следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть H — косой ганкелев циркулянт, представленный в виде (2.13). Тогда собственными значениями матрицы H будут числа

$$\pm\sqrt{d_1 d_2}, \pm\sqrt{d_3 d_n}, \pm\sqrt{d_4 d_{n-1}}, \dots, \pm\sqrt{d_{m+1} d_{m+3}}, d_{m+2},$$

если $n = 2m + 1$, и числа

$$\pm\sqrt{d_1 d_2}, \pm\sqrt{d_3 d_n}, \pm\sqrt{d_4 d_{n-1}}, \dots, \pm\sqrt{d_{m+1} d_{m+2}}$$

при $n = 2m$.

Прежде чем доказывать эту теорему, установим справедливость вспомогательного утверждения.

Лемма 2.3. Верно следующее матричное соотношение

$$F_n G^* P_n G F_n^* = -\frac{1}{\mu} Q_2 W,$$

где $Q_2 = P_2 \oplus P_{n-2}$.

Доказательство леммы

$$\begin{aligned}
\{F_n G^* P_n G F_n^*\}_{kj} &= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \epsilon^{(k-1)(m-1)} \mu^{-(m-1)} \mu^{n-m} \epsilon^{-(n-m)(j-1)} = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \epsilon^{(k-1)(m-1)} \mu^{-(m-1)} \mu^{n-1} \mu^{-m+1} \epsilon^{-(n-m)(j-1)} = \\
&= -\frac{1}{\mu} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \epsilon^{(k-1)(m-1)} \mu^{-2(m-1)} \epsilon^{m(j-1)} = \{\mu^2 = \epsilon\} = \\
&= -\frac{\epsilon^{j-1}}{\mu} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \epsilon^{(k-1)(m-1)} \epsilon^{-(m-1)} \epsilon^{(m-1)(j-1)} = -\frac{\epsilon^{j-1}}{\mu} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left(\epsilon^{(k+j-3)} \right)^{m-1}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left(\epsilon^{(k+j-3)} \right)^{m-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } k+j-3=0 \text{ или } k+j-3=n, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому для всех k и j получаем

$$\{F_n G^* P_n G F_n^*\}_{kj} = -\frac{1}{\mu} \{Q_2\}_{kj} \{W\}_{jj} = -\frac{1}{\mu} \{Q_2 W\}_{kj}.$$

Лемма доказана. Вернёмся теперь к теореме 2.2.

Доказательство теоремы 2.2

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$GF_n^* D F_n G^* P_n x = \lambda x. \tag{2.14}$$

Введём вектор $y = F_n G^{-1} x$, тогда $x = GF_n^* y$. Подставим полученное представление в (2.14):

$$GF_n^* D F_n G^* P_n GF_n^* y = \lambda GF_n^* y.$$

Домножив последнее равенство слева на $F_n G^*$, получим

$$D F_n G^* P_n G F_n^* y = \lambda y.$$

Используя лемму, можно записать

$$-\frac{1}{\mu} D Q_2 W y = \lambda y.$$

Будем искать собственные значения в виде $\lambda = -\frac{1}{\mu}\nu$, где ν — собственное значение матрицы

$$D Q_2 W = \begin{pmatrix} d_1 \epsilon & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & d_3 \epsilon^{n-1} & \\ & & & d_4 \epsilon^{n-2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & d_n \epsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Переставим строки и столбцы данной матрицы в следующем порядке: 1, 2, 3, n , 4, $n-1$, 5, $n-2$, ... В результате приходим к задаче определения собственных значений блочно-диагональной матрицы, имеющей два различных вида в зависимости от чётности порядка:

$$\begin{pmatrix} d_1 \epsilon & \\ & d_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3 \epsilon^{n-1} & \\ & d_n \epsilon^2 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} d_{m+1} \epsilon^{m+2} & \\ & d_{m+3} \epsilon^m \end{pmatrix} \oplus d_{m+2} \epsilon^{m+1}$$

при $n = 2m + 1$,

$$\begin{pmatrix} & d_1\epsilon \\ d_2 & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} & d_3\epsilon^{n-1} \\ d_n\epsilon^2 & \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} & d_{m+1}\epsilon^{m+1} \\ d_{m+2}\epsilon^m & \end{pmatrix}$$

при $n = 2m$. Отсюда видно, что собственные значения распадаются на пары. Первая пара является решением спектральной задачи для матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} 0 & d_1\epsilon \\ d_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Её характеристическое уравнение имеет вид

$$\nu^2 - d_1 d_2 \epsilon = 0,$$

откуда получаем два собственных значения $\nu = \pm\sqrt{d_1 d_2 \epsilon}$, что даёт $\lambda = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{d_1 d_2 \epsilon} = \pm\sqrt{d_1 d_2}$, так как $\mu^2 = \epsilon$.

Остальные пары — решения задач на собственные значения для матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & d_j\epsilon^{n+2-j} \\ d_{n+3-j}\epsilon^{j-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 3, 4, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\nu^2 - d_j\epsilon^{n+2-j}d_{n+3-j}\epsilon^{j-1} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1,$$

или

$$\nu^2 - d_j d_{n+3-j} \epsilon = 0, \quad j = 3, 4, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Получаем собственные значения $\nu = \pm\sqrt{d_j d_{n+3-j}}\epsilon$, поэтому $\lambda = \pm\frac{1}{\mu}\sqrt{d_j d_{n+3-j}}\epsilon = \pm\sqrt{d_j d_{n+3-j}}$.

В случае нечётного $n = 2m + 1$ добавляется ещё одно собственное значение $-\frac{1}{\mu}d_{m+2}\epsilon^{m+1} = -d_{m+2}\mu\epsilon^m = d_{m+2}$. Теорема 2.2 доказана.

Получаем алгоритм, аналогичный тому, что был сконструирован для класса 2.7. Единственным различием является то, что необходимо сделать дополнительное подобие, переводящее косой циркулянт $GF_n^*DF_nG^*$ в циркулянт $F_n^*DF_n$. Как это обычно для циркулянтов, не обязательно совершать подобие всей матрицы; достаточно проследить за изменениями первой строки.

Генерация произвольной матрицы из класса 2.8

Возьмём $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ произвольных комплексных чисел $d_3, \dots, d_{k+2}$ и $n - k - 2$ произвольных вещественных аргументов $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k-2}$. Положим

$$d_j = d_{n+3-j}e^{i\alpha_{j-k-2}}, \quad j = k+3, \dots, n.$$

Аналогичным способом сгенерируем два комплексных числа d_1 и d_2 , удовлетворяющие условию $|d_1| = |d_2|$. Используя обратное дискретное преобразование Фурье, получим первую строку матрицы $F_n^*DF_n$. Затем вычисляем элементы первой строки ассоциированного

с H косо́го циркулянта $GF_n^*DF_nG^*$:

$$\{GF_n^*DF_nG^*\}_{1j} = \bar{\mu}^{j-1}\{F_n^*DF_n\}_{1j}\bar{\mu}^{j-1}.$$

Сравнение со стандартным алгоритмом

Как видно из таблицы 2.10, предлагаемый алгоритм для класса 2.8 сравним по эффективности с аналогичным алгоритмом для класса 2.7. Некоторое увеличение времени работы объясняется дополнительной обработкой первой строки матрицы.

n	Использование функции <i>eig</i>	Предлагаемый алгоритм
250	0.1447	2.09E-04
500	0.7274	3.11E-04
1000	3.6753	4.81E-04
2000	19.4959	9.07E-04
3000	57.5739	0.0013

Таблица 2.10. Класс 2.8

Классы 2.5, 2.9, 2.10

Алгоритм

Все предыдущие алгоритмы довольно удачно используют специфическую структуру матриц соответствующих классов. Для оставшихся же трёх классов предлагается общий алгоритм, который использует лишь следствие того факта, что матрицы, принадлежащие этим классам, являются нормальными ганкелевыми.

Лемма 2.4. *Для любой нормальной ганкелевой матрицы $H = H_1 + iH_2$ верно равенство $H_1H_2 = H_2H_1$.*

Доказательство

Так как обе матрицы H_1 и H_2 ганкелевы и, как следствие, симметричны, то $H^* = H_1^T - iH_2^T = H_1 - iH_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} HH^* - H^*H &= (H_1 + iH_2)(H_1 - iH_2) - (H_1 - iH_2)(H_1 + iH_2) = \\ &= 2i(H_2H_1 - H_1H_2), \end{aligned}$$

а значит, H_1 и H_2 коммутируют, что доказывает лемму.

Как известно, в таком случае существует подобие, приводящее H_1 к диагональному виду, а H_2 — к блочно-диагональному, при этом число блоков соответствует числу различных собственных значений H_1 . Более формально, пусть H_1 имеет собственные числа λ_j с

алгебраическими кратностями q_j , $j = 1, \dots, p$, тогда

$$X^{-1}H_1X = \lambda_1 I_{q_1} \oplus \dots \oplus \lambda_p I_{q_p},$$

$$X^{-1}H_2X = A_1 \oplus \dots \oplus A_p,$$

$$X^{-1}(H_1 + iH_2)X = (\lambda_1 I_{q_1} + iA_1) \oplus \dots \oplus (\lambda_p I_{q_p} + iA_p),$$

где A_j — квадратный блок порядка q_j , а X — матрица из собственных векторов H_1 , причём первые q_1 столбцов X являются собственными векторами, отвечающими собственному значению λ_1 , следующие q_2 столбцов соответствуют λ_2 , и так далее.

Эти соображения приводят к следующему алгоритму: найти собственные значения и собственные векторы матрицы H_1 , упорядочить полученные собственные числа по возрастанию, сделав при этом такую же перестановку для собственных векторов. Получив матрицу X , диагонализующую H_1 посредством подобия, найдём блочно-диагональную матрицу $X^{-1}H_2X$. Заметим, что не обязательно находить все элементы матрицы: достаточно найти блоки A_j , что довольно просто, если предварительно ортогонализировать столбцы матрицы X . Тогда

$$A_j = X_j^T H_2 X_j, \quad j = 1, \dots, p,$$

где X_j — $n \times q_j$ -матрица, в которую по столбцам записан ортонормированный базис собственного подпространства матрицы H_1 , отвечающего собственному значению λ_j . К каждому блоку A_j

также применим стандартную функцию eig , на этот раз для того, чтобы найти только собственные значения $\mu_{j1}, \dots, \mu_{jq_j}$. Тогда спектр исходной матрицы H может быть вычислен по формулам

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + i\mu_{11}, \dots, \lambda_1 + i\mu_{1q_1}, \\ &\lambda_2 + i\mu_{21}, \dots, \lambda_2 + i\mu_{2q_2}, \dots, \\ &\lambda_p + i\mu_{p1}, \dots, \lambda_p + i\mu_{pq_p}. \end{aligned}$$

Генерация произвольной матрицы для данного алгоритма

Генерация матриц из классов 2.9 и 2.10 в силу их определения довольно нетривиальна, поэтому приведём алгоритм для класса 2.5.

Сначала построим тёплицев унитарный циркулянт. Как и раньше, начинаем с собственных значений. У унитарного циркулянта они обязаны быть равными единице по модулю, поэтому здесь достаточно сгенерировать вещественные аргументы. Построив первую строку циркулянта C , перейдём к подобному ему ϕ -циркулянту $\hat{C}$:

$$\{\hat{C}\}_{1j} = \{C\}_{1j}\psi^{-(j-1)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $\psi^n = \phi$. Понятно, что вместо генерации комплексного ϕ , $|\phi| = 1$, и последующего вычисления корня n -ой степени, можно сразу взять произвольное комплексное ψ с модулем 1. Здесь генерация также сводится к выбору случайного аргумента. Наконец, переходим к ассоциированной ганкелевой матрице из класса 2.5 $H = \hat{C}P$.

Сравнение со стандартным алгоритмом

Таблица 2.11 соответствует классу 2.5 и подобна таблицам, что были до этого. Видим, что и здесь достигается некоторое повышение эффективности.

n	Использование функции eig	Предлагаемый алгоритм
250	0.1360	0.0520
500	0.7201	0.2152
1000	3.9057	1.3458
2000	21.4454	9.7166
3000	69.1285	48.1016

Таблица 2.11. Класс 2.5

2.3. Спектральные алгоритмы для некоторых классов $(T+N)$ -матриц

$(T+N)$ -циркулянты

Рассмотрим спектральную задачу для $(T+N)$ -циркулянтов. Напомним, что $(T+N)$ -циркулянтом называется матрица, представляемая в виде суммы циркулянта и ганкелева циркулянта. В

связи с этим для любого (Т+Н)-циркулянта A верно представление

$$A = F_n^* D_1 F_n + F_n^* D_2 F_n P_n, \quad (2.15)$$

где D_1, D_2 — диагональные матрицы, содержащие на своих диагоналях спектры тёплицева и ганкелева слагаемого соответственно. Докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. Пусть A — $(T+H)$ -циркулянт вида (2.15), где D_1 и D_2 — диагональные матрицы:

$$D_1 = \text{diag} (d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}), \quad D_2 = \text{diag} (d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}).$$

Тогда собственными числами матрицы A будут величины

$$d_1^{(1)} + d_1^{(2)},$$

$$\frac{d_2^{(1)} + d_n^{(1)} \pm \sqrt{(d_2^{(1)} + d_n^{(1)})^2 - 4(d_2^{(1)} d_n^{(1)} - d_2^{(2)} d_n^{(2)})}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)} \pm \sqrt{(d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)})^2 - 4(d_3^{(1)} d_{n-1}^{(1)} - d_3^{(2)} d_{n-1}^{(2)})}}{2},$$

...

$$\frac{d_{m+1}^{(1)} + d_{m+2}^{(1)} \pm \sqrt{(d_{m+1}^{(1)} + d_{m+2}^{(1)})^2 - 4(d_{m+1}^{(1)} d_{m+2}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)} d_{m+2}^{(2)})}}{2},$$

если $n = 2m + 1$, и величины

$$d_1^{(1)} + d_1^{(2)},$$

$$\frac{d_2^{(1)} + d_n^{(1)} \pm \sqrt{(d_2^{(1)} + d_n^{(1)})^2 - 4(d_2^{(1)} d_n^{(1)} - d_2^{(2)} d_n^{(2)})}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)} \pm \sqrt{(d_3^{(1)} + d_{n-1}^{(1)})^2 - 4(d_3^{(1)} d_{n-1}^{(1)} - d_3^{(2)} d_{n-1}^{(2)})}}{2},$$

...

$$\frac{d_m^{(1)} + d_{m+2}^{(1)} \pm \sqrt{(d_m^{(1)} + d_{m+2}^{(1)})^2 - 4(d_m^{(1)} d_{m+2}^{(1)} - d_m^{(2)} d_{m+2}^{(2)})}}{2},$$

$$d_{m+1}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)},$$

если $n = 2m$.

Доказательство

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ax = \lambda x,$$

или, с учётом (2.15),

$$(F_n^* D_1 F_n + F_n^* D_2 F_n P_n) x = \lambda x. \quad (2.16)$$

Как и при доказательстве теоремы 2.1, будем искать вектор x в виде

$$x = F_n Q_1 y,$$

где по-прежнему $Q_1 = 1 \oplus P_{n-1}$. Подставляя в (2.16), имеем:

$$F_n^* D_1 F_n F_n Q_1 y + F_n^* D_2 F_n P_n F_n Q_1 y = \lambda F_n Q_1 y.$$

Домножаем последнее равенство на F_n слева и, с учётом условий (2.11), получим

$$D_1 y + D_2 F_n P_n F_n Q_1 y = \lambda y.$$

Вспоминая уже использованное в доказательстве теоремы 2.1 равенство $P_n F_n = F_n^* W^*$, можем записать

$$(D_1 + D_2 W^* Q_1) y = \lambda y.$$

Задача сводится к нахождению собственных чисел матрицы

$$D_1 + D_2 W^* Q_1 = \begin{pmatrix} d_1^{(1)} + d_1^{(2)} & & & & & \\ & d_2^{(1)} & & & & d_2^{(2)} \bar{\epsilon} \\ & & d_3^{(1)} & & & d_3^{(2)} \bar{\epsilon}^2 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_{n-1}^{(2)} \bar{\epsilon}^{n-2} & & d_{n-1}^{(1)} \\ & & & & & & d_n^{(2)} \bar{\epsilon}^{n-1} & & d_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Переставим строки и столбцы данной матрицы в следующем порядке: 1, 2, n , 3, $n-1$, 4, $n-2$, ... В результате приходим к задаче

определения собственных значений блочно-диагональной матрицы, имеющей два различных вида в зависимости от чётности порядка n :

$$\begin{aligned} & \left(d_1^{(1)} + d_1^{(2)} \right) \oplus \begin{pmatrix} d_2^{(1)} & d_2^{(2)} \bar{\epsilon} \\ d_n^{(2)} \bar{\epsilon}^{n-1} & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & d_3^{(2)} \bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1}^{(2)} \bar{\epsilon}^{n-2} & d_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \begin{pmatrix} d_{m+1}^{(1)} & d_{m+1}^{(2)} \bar{\epsilon}^m \\ d_{m+2}^{(2)} \bar{\epsilon}^{m+1} & d_{m+2}^{(1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

при $n = 2m + 1$ и

$$\begin{aligned} & \left(d_1^{(1)} + d_1^{(2)} \right) \oplus \begin{pmatrix} d_2^{(1)} & d_2^{(2)} \bar{\epsilon} \\ d_n^{(2)} \bar{\epsilon}^{n-1} & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & d_3^{(2)} \bar{\epsilon}^2 \\ d_{n-1}^{(2)} \bar{\epsilon}^{n-2} & d_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \begin{pmatrix} d_m^{(1)} & d_m^{(2)} \bar{\epsilon}^{m-1} \\ d_{m+2}^{(2)} \bar{\epsilon}^{m+1} & d_{m+2}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \left(d_{m+1}^{(1)} + d_{m+1}^{(2)} \bar{\epsilon}^m \right) \end{aligned}$$

при $n = 2m$. Очевидно, что одним из собственных значений будет число $d_1^{(1)} + d_1^{(2)}$. Все остальные собственные значения, кроме одного в случае чётного порядка, распадаются на пары, каждая из которых является решением задачи на собственные значения для матрицы

$$\begin{pmatrix} d_j^{(1)} & d_j^{(2)} \bar{\epsilon}^{j-1} \\ d_{n+2-j}^{(2)} \bar{\epsilon}^{n+1-j} & d_{n+2-j}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] + 1,$$

с характеристическим уравнением

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (d_j^{(1)} + d_{n+2-j}^{(1)})\lambda + d_j^{(1)} d_{n+2-j}^{(1)} - d_j^{(2)} \bar{\epsilon}^{j-1} d_{n+2-j}^{(2)} \bar{\epsilon}^{n+1-j} &= 0, \\ j = 2, 3, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] + 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\bar{\epsilon}^{n+1-j} = \bar{\epsilon}^{1-j}$, то это уравнение можно переписать в виде

$$\lambda^2 - (d_j^{(1)} + d_{n+2-j}^{(1)})\lambda + d_j^{(1)}d_{n+2-j}^{(1)} - d_j^{(2)}d_{n+2-j}^{(2)} = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы для случая нечётного n . Если же $n = 2m$, то в спектр добавляется ещё собственное значение $d_{m+1}^{(1)} + d_{m+1}^{(2)}\bar{\epsilon}^m = d_{m+1}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)}$, так как $\epsilon^m = -1$. Теорема доказана.

Заметим, что полагая $D_1 = 0$, $D_2 = D$, мы получаем теорему 2.1.

Данная теорема позволяет применить следующий алгоритм: разбить A на тёплицево и ганкелево слагаемые, с помощью дискретного преобразования Фурье найти числа $d_j^{(1)}$ и $d_j^{(2)}$ и подставить их в формулы теоремы 2.3. Соответствующее разбиение матрицы A на сумму тёплицевого и ганкелевого циркулянта можно совершить способом, описанным в [43]. Очевидно, асимптотика всего алгоритма будет $O(n \log n)$.

Косые (Т+Н)-циркулянты

Пусть теперь A — матрица, представимая в виде суммы теплицевого и ганкелевого косых циркулянтов. Тогда верно равенство

$$A = GF_n^* D_1 F_n G^* + GF_n^* D_2 F_n G^* P_n, \quad (2.17)$$

где, как и раньше, $G = \text{diag}(1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^{n-1})$, $\mu = e^{\frac{\pi i}{n}}$, D_1, D_2 — некоторые диагональные матрицы.

Теорема 2.4. Пусть A — косо́й $(T+H)$ -циркулянт вида (2.17), где D_1 и D_2 — диагональные матрицы:

$$D_1 = \text{diag} (d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}), \quad D_2 = \text{diag} (d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}).$$

Тогда собственными числами матрицы A будут величины

$$\frac{d_1^{(1)} + d_2^{(1)} \pm \sqrt{(d_1^{(1)} + d_2^{(1)})^2 - 4(d_1^{(1)} d_2^{(1)} - d_1^{(2)} d_2^{(2)})}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)} + d_n^{(1)} \pm \sqrt{(d_3^{(1)} + d_n^{(1)})^2 - 4(d_3^{(1)} d_n^{(1)} - d_3^{(2)} d_n^{(2)})}}{2},$$

...

$$\frac{d_{m+1}^{(1)} + d_{m+3}^{(1)} \pm \sqrt{(d_{m+1}^{(1)} + d_{m+3}^{(1)})^2 - 4(d_{m+1}^{(1)} d_{m+3}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)} d_{m+3}^{(2)})}}{2},$$

$$d_{m+2}^{(1)} + d_{m+2}^{(2)},$$

если $n = 2m + 1$, и величины

$$\frac{d_1^{(1)} + d_2^{(1)} \pm \sqrt{(d_1^{(1)} + d_2^{(1)})^2 - 4(d_1^{(1)} d_2^{(1)} - d_1^{(2)} d_2^{(2)})}}{2},$$

$$\frac{d_3^{(1)} + d_n^{(1)} \pm \sqrt{(d_3^{(1)} + d_n^{(1)})^2 - 4(d_3^{(1)} d_n^{(1)} - d_3^{(2)} d_n^{(2)})}}{2},$$

...

$$\frac{d_{m+1}^{(1)} + d_{m+2}^{(1)} \pm \sqrt{(d_{m+1}^{(1)} + d_{m+2}^{(1)})^2 - 4(d_{m+1}^{(1)} d_{m+2}^{(1)} - d_{m+1}^{(2)} d_{m+2}^{(2)})}}{2},$$

если $n = 2m$.

Доказательство

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(GF_n^* D_1 F_n G^* + GF_n^* D_2 F_n G^* P_n) x = \lambda x. \quad (2.18)$$

Как и при доказательстве теоремы 2.2, будем искать вектор x в виде

$$x = GF_n^* y.$$

Подставляем это представление в (2.18):

$$GF_n^* D_1 F_n G^* GF_n^* y + GF_n^* D_2 F_n G^* P_n GF_n^* y = \lambda GF_n^* y.$$

Домножив последнее равенство слева на $F_n G^*$, получим

$$(D_1 + D_2 F_n G^* P_n GF_n^*) y = \lambda y.$$

Используя лемму 2.3, можем записать

$$\left(D_1 - \frac{1}{\mu} D_2 Q_2 W\right) y = \lambda y.$$

Распишем матрицу $D_1 - \frac{1}{\mu} D_2 Q_2 W$ в явном виде:

$$\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon & & & & & & & \\ -\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} & & & & & & & \\ & & d_3^{(1)} & & & & & & \\ & & & d_4^{(1)} & & & & & \\ & & & & -\frac{1}{\mu}d_4^{(2)}\epsilon^{n-2} & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & -\frac{1}{\mu}d_{n-1}^{(2)}\epsilon^3 & d_{n-1}^{(1)} \\ & & & & & & & & & d_n^{(1)} \\ & & & & & & & & & & -\frac{1}{\mu}d_n^{(2)}\epsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Переставим строки и столбцы данной матрицы в следующем порядке: $1, 2, 3, n, 4, n-1, 5, n-2, \dots$ В результате приходим к задаче определения собственных значений блочно-диагональной матрицы, имеющей два различных вида в зависимости от чётности порядка:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon \\ -\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_3^{(2)}\epsilon^{n-1} \\ -\frac{1}{\mu}d_n^{(2)}\epsilon^2 & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \dots \right. \\ & \left. \dots \oplus \begin{pmatrix} d_{m+1}^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_{m+1}^{(2)}\epsilon^{m+2} \\ -\frac{1}{\mu}d_{m+3}^{(2)}\epsilon^m & d_{m+3}^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_{m+2}^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_{m+2}^{(2)}\epsilon^{m+1} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

при $n = 2m + 1$,

$$\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon \\ -\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} d_3^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_3^{(2)}\epsilon^{n-1} \\ -\frac{1}{\mu}d_n^{(2)}\epsilon^2 & d_n^{(1)} \end{pmatrix} \oplus \dots \\ \dots \oplus \begin{pmatrix} d_{m+1}^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_{m+1}^{(2)}\epsilon^{m+1} \\ -\frac{1}{\mu}d_{m+2}^{(2)}\epsilon^m & d_{m+2}^{(1)} \end{pmatrix}$$

при $n = 2m$. Отсюда видно, что собственные значения распадаются на пары. Первая пара является решением спектральной задачи для матрицы

$$\begin{pmatrix} d_1^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_1^{(2)}\epsilon \\ -\frac{1}{\mu}d_2^{(2)} & d_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

с характеристическим уравнением

$$\lambda^2 - (d_1^{(1)} + d_2^{(1)})\lambda + \left(d_1^{(1)}d_2^{(1)} - \frac{1}{\mu^2}d_1^{(2)}d_2^{(2)}\epsilon \right) = 0,$$

корнями которого и будут два первых собственных числа.

Остальные пары — решения задач на собственные значения для матриц

$$\begin{pmatrix} d_j^{(1)} & -\frac{1}{\mu}d_j^{(2)}\epsilon^{n+2-j} \\ -\frac{1}{\mu}d_{n+3-j}^{(2)}\epsilon^{j-1} & d_{n+3-j}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad j = 3, 4, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] + 1.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\lambda^2 - (d_j^{(1)} + d_{n+3-j}^{(1)})\lambda + \left(d_j^{(1)}d_{n+3-j}^{(1)} - \frac{1}{\mu^2}d_j^{(2)}\epsilon^{n+2-j}d_{n+3-j}^{(2)}\epsilon^{j-1} \right) = 0, \\ j = 3, 4, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] + 1,$$

или

$$\lambda^2 - (d_j^{(1)} + d_{n+3-j}^{(1)})\lambda + \left(d_j^{(1)}d_{n+3-j}^{(1)} - d_j^{(2)}d_{n+3-j}^{(2)}\right) = 0,$$

$$j = 3, 4, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

Отсюда следует утверждение теоремы для случая чётного n .

Если же $n = 2m + 1$, то в спектр добавляется ещё одно собственное значение $\lambda = d_{m+2}^{(1)} - \frac{1}{\mu}d_{m+2}^{(2)}\epsilon^{m+1} = d_{m+2}^{(1)} - d_{m+2}^{(2)}\mu\epsilon^m = d_{m+2}^{(1)} + d_{m+2}^{(2)}$. Теорема доказана.

Из формулировки теоремы 2.4 видно, что если $D_1 = 0$, то мы находимся в условиях теоремы 2.2 и в случае $D_2 = D$ получаем формулы теоремы 2.2.

Таким образом, спектр косого (Т+Н)-циркулянта можно найти, разбив его на сумму тёплицева и ганкелева косых циркулянтов, используя модификацию алгоритма из [43], и применив формулы теоремы 2.4 после нахождения чисел $d_j^{(1)}$, $d_j^{(2)}$ путём дискретного преобразования Фурье. Сложность полученного алгоритма снова $O(n \log n)$.

Некоторые алгебры (Т+Н)-матриц

Из [44] известно, что рассмотренное ранее множество (Т+Н)-циркулянтов является алгеброй. То же самое верно и для косых (Т+Н)-циркулянтов. Однако существуют и другие нетривиальные алгебры, являющиеся подмножествами пространства TH_n . Так, в [45] указывается, что алгеброй (Т+Н)-матриц будет

централизатор любой матрицы вида $S + \tilde{E}$, где S — трёхдиагональная теплицева матрица с нулём на главной диагонали и единицей на соседних диагоналях

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\tilde{E} = \alpha_{11}E_{11} + \alpha_{1n}E_{1n} + \alpha_{n1}E_{n1} + \alpha_{nn}E_{nn}$. Здесь α_{11} , α_{1n} , α_{n1} , α_{nn} — произвольные комплексные числа, а E_{jk} — матричная единица, то есть матрица, единственный ненулевой элемент которой равен единице и находится в позиции (j, k) . Напомним, что централизатором элемента X алгебры M является множество всех элементов A , коммутирующих с X : $AX = XA$.

Таким образом, задавая различные значения четвёрки коэффициентов $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn})$, можно получать разные алгебры, состоящие из $(T+H)$ -матриц. В частности, если $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (0, 1, 1, 0)$, то централизатором $S + \tilde{E}$ будет уже исследованное выше множество всех $(T + H)$ -циркулянтов. Множество всех косых $(T + H)$ -циркулянтов получается при выборе коэффициентов $(\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (0, -1, -1, 0)$. Централизаторам, получающимся при еще двух частных выборах

матрицы $\tilde{E}$, посвящены два следующих подраздела.

$$1. (\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (0, 0, 0, 0)$$

Найдем централизатор матрицы $S + \tilde{E} = S$. Для этого определим собственные значения и собственные векторы матрицы S . Известно, что собственными значениями являются числа

$$\lambda_k = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Элементы ортогональной матрицы X , составленной по столбцам из собственных векторов матрицы S , равны

$$x_{jk} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi jk}{n+1}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $S = X \Lambda X^T$, где $\Lambda = \text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Введём матрицу $D = X^T A X$. Нетрудно видеть, что эта матрица коммутирует с диагональной матрицей Λ . Ввиду того, что диагональные элементы λ_k попарно различны, матрица D обязана быть диагональной. Получаем, что любая матрица A из централизатора S диагонализуется тем же подобием:

$$A = X D X^T, \tag{2.19}$$

где D — диагональная матрица, содержащая на своей диагонали собственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$ матрицы A .

Перемножим матрицы в правой части соотношения (2.19) и заменим это соотношение поэлементными равенствами

$$a_{jk} = \frac{2}{n+1} \sum_{s=1}^n \mu_s \sin \frac{\pi js}{n+1} \sin \frac{\pi ks}{n+1}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Положим в последнем равенстве $k = 1$:

$$a_{j1} = \frac{2}{n+1} \sum_{s=1}^n \mu'_s \sin \frac{\pi js}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

где $\mu'_s = \mu_s \sin \frac{\pi s}{n+1}$. Если ввести вектор a , равный первому столбцу матрицы A , и вектор-столбец $d' = (\mu'_1, \dots, \mu'_n)^T$, то (2.20) можно переписать как матрично-векторное соотношение $a = \sqrt{\frac{2}{n+1}} X d'$.

Учитывая ортогональность матрицы X , выразим d' через a :

$$d' = \sqrt{\frac{n+1}{2}} X a,$$

или, если расписать поэлементно,

$$\mu'_s = \sum_{j=1}^n a_{j1} \sin \frac{\pi js}{n+1}, \quad s = 1, \dots, n.$$

Возвращаясь к числам μ_s , получаем спектральные формулы

$$\mu_s = \frac{1}{\sin \frac{\pi s}{n+1}} \sum_{j=1}^n a_{j1} \sin \frac{\pi js}{n+1}, \quad s = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

Видно, что собственные значения произвольной матрицы A из централизатора S можно получить синус-преобразованием первого столбца этой матрицы. Даже если вычислять спектр

непосредственно по формулам (2.21), то на это понадобится $O(n^2)$ операций, что уже даёт выигрыш по сравнению со стандартными алгоритмами. Впрочем, более эффективно будет воспользоваться тем, что синус-преобразование можно выразить через два дискретных Фурье-преобразования на векторах вдвое большей длины. При использовании этого способа имеем асимптотику $O(n \log n)$ операций.

$$2. (\alpha_{11}, \alpha_{1n}, \alpha_{n1}, \alpha_{nn}) = (1, 0, 0, 0)$$

Рассмотрим теперь спектральную задачу для матриц из централизатора $\tilde{S} = S + \tilde{E} = S + E_{11}$. Для самой матрицы $\tilde{S}$ справедливо спектральное разложение

$$\tilde{S} = X \Lambda X^T,$$

где $\Lambda = \text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица, содержащая на своей диагонали собственные значения

$$\lambda_k = 2 \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

а X — ортогональная матрица собственных векторов с элементами

$$x_{jk} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \cos \frac{\pi(2j-1)(2k-1)}{2(2n+1)}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Получаем ту же ситуацию, что и для централизатора S : обе матрицы $S + E_{11}$ и S имеют простой спектр. Таким образом, для любой

матрицы из централизатора $S + E_{11}$ верно представление $A = XDX^T$, но уже для другой матрицы X . Аналогично предыдущему случаю получим выражение элементов первого столбца матрицы A через собственные значения μ_s :

$$a_{j1} = \frac{4}{2n+1} \sum_{s=1}^n \mu_s \cos \frac{\pi(2s-1)}{2(2n+1)} \cos \frac{\pi(2j-1)(2s-1)}{2(2n+1)},$$

$$j = 1, \dots, n.$$

Введём для сокращения записи числа $\mu'_s = \mu_s \cos \frac{\pi(2s-1)}{2(2n+1)}$. Тогда

$$a_{j1} = \frac{4}{2n+1} \sum_{s=1}^n \mu'_s \cos \frac{\pi(2j-1)(2s-1)}{2(2n+1)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Это равенство можно переписать как матричное соотношение $a = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} X d'$, где векторы a и d' определяются так же, как при разборе предыдущего случая. Так как $d' = \frac{\sqrt{2n+1}}{2} X a$, то получаются следующие спектральные формулы для матрицы A :

$$\mu_s = \frac{1}{\cos \frac{\pi(2s-1)}{2(2n+1)}} \sum_{j=1}^n a_{j1} \cos \frac{\pi(2j-1)(2s-1)}{2(2n+1)}, \quad s = 1, \dots, n.$$

На этот раз собственные числа определяются одним из дискретных косинус-преобразований первого столбца матрицы A .

Глава 3

Унитарные автоморфизмы

Данная глава содержит решение задачи описания групп унитарных автоморфизмов $\text{UAut}(T_n)$, $\text{UAut}(H_n)$, $\text{UAut}_c(T_n)$, $\text{UAut}_c(H_n)$ и $\text{UAut}(TH_n)$, определение которых дано в (1.7). Фактически каждый параграф данной главы состоит из формулировки теоремы, описывающей состав соответствующего множества, и последующего доказательства.

Группам автоморфизмов $\text{UAut}(T_n)$ и $\text{UAut}(H_n)$, осуществляемых путём подобий, посвящены §1 и §2, основанные на статьях [46, 47] Х. Д. Икрамова. Автоморфизмы, осуществляемые путём конгруэнций, исследуются в §3 и §4, содержание которых построено на основе совместных статей [7, 8] автора с Икрамовым Х. Д. и Чугуновым В. Н. В §5 предлагается объяснение схожести структур двух пар полученных множеств. В последнем §6 содержится решение задачи об унитарных автоморфизмах пространства $(T+H)$ -матриц, осуществляемых путём подобия. В основу этого параграфа легли статьи [9, 10] автора и совместная статья [11] автора с Икрамовым Х. Д. и Чугуновым В. Н.

3.1. Группа $\text{UAut}(T_n)$

По определению унитарная матрица $U \in M_n$ принадлежит множеству $\text{UAut}(T_n)$ в том и только том случае, если

$$\forall A \in T_n \quad U^*AU \in T_n.$$

Докажем теорему, описывающую состав множества $\text{UAut}(T_n)$.

Теорема 3.1. *Все матрицы $U \in \text{UAut}(T_n)$ представимы в одном из следующих двух видов:*

$$a) U = \sigma \cdot \text{diag} (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1});$$

$$б) U = \sigma P_n \cdot \text{diag} (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}).$$

В обоих случаях σ и ε — комплексные числа, равные по модулю единице.

Доказательство

Докажем эту теорему методом индукции по n .

Пусть $n = 2$. Тогда для включения $U \in \text{UAut}(T_n)$ необходимо и достаточно, чтобы подобие с трансформирующей матрицей U сохраняло тёплицеву структуру трёх матриц, составляющих базис T_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая очевидные равенства $U^*I_2U = I_2$, $U^*A^TU = (U^*AU)^*$, можем утверждать, что достаточно того, чтобы тёплицевой была матрица $B = U^*AU$.

Таким образом, должно выполняться равенство $b_{11} = b_{22}$, или, что то же самое, равенство

$$u_{11}\overline{u_{21}} = u_{12}\overline{u_{22}}. \quad (3.1)$$

Однако матрица U унитарна, следовательно, её строки (равно как и столбцы), если рассматривать их как комплексные векторы, должны образовывать ортогональный базис пространства $\mathbb{C}_2$ в смысле стандартного скалярного произведения. В частности, первая строка должна быть ортогональна второй:

$$u_{11}\overline{u_{21}} + u_{12}\overline{u_{22}} = 0. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$u_{11}u_{21} = u_{12}u_{22} = 0. \quad (3.3)$$

Если $u_{21} = 0$, то $|u_{11}| = 1$ ввиду унитарности матрицы U , а значит, и $u_{12} = 0$, $|u_{22}| = 1$. В итоге получаем нужное представление

$$U = \sigma \cdot \text{diag} (1, \varepsilon),$$

где $\sigma = u_{11}$, $\varepsilon = u_{22}/u_{11}$.

При $u_{21} \neq 0$ видим из (3.3), что $u_{11} = 0$, $|u_{21}| = 1$, а значит, и $u_{22} = 0$, $|u_{12}| = 1$. В этом случае

$$U = \sigma P_2 \cdot \text{diag} (1, \varepsilon),$$

где $\sigma = u_{21}$, $\varepsilon = u_{12}/u_{21}$. Базис индукции доказан.

Перейдём к шагу индукции. Предположим, что теорема доказана для всех порядков, меньших, чем $n \geq 3$. Обозначим первую и последнюю строки матрицы $U \in \text{UAut}(T_n)$ как $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Подобно случаю $n = 2$ положим $A = E_{1n}$, то есть, A — тёплицева матрица, единственный ненулевой элемент которой находится в позиции $(1, n)$ и равен единице. Матрица $B = U^*AU$ по-прежнему обязана быть тёплицевой. При этом нетрудно видеть, что

$$B = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}\beta_1 & \overline{\alpha_1}\beta_2 & \dots & \overline{\alpha_1}\beta_n \\ \overline{\alpha_2}\beta_1 & \overline{\alpha_2}\beta_2 & \dots & \overline{\alpha_2}\beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\alpha_n}\beta_1 & \overline{\alpha_n}\beta_2 & \dots & \overline{\alpha_n}\beta_n \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы тёплицевой матрицы B должны совпадать:

$$\overline{\alpha_1}\beta_1 = \overline{\alpha_2}\beta_2 = \dots = \overline{\alpha_n}\beta_n. \quad (3.4)$$

Однако первая и последняя строки U должны быть ортогональны, поэтому

$$\overline{\alpha_1}\beta_1 + \overline{\alpha_2}\beta_2 + \dots + \overline{\alpha_n}\beta_n = 0. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) следует, что

$$\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = \dots = \alpha_n\beta_n = 0.$$

Рассмотрим два разных случая: $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_1 = 0$.

Пусть сначала $\alpha_1 \neq 0$, тогда обязательно $\beta_1 = 0$. Следовательно, первый столбец матрицы B является нулевым,

и B является строго верхнетреугольной матрицей ввиду своей тёплицевости. Нетрудно убедиться, что если

$$\beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = 0, \quad \beta_k \neq 0,$$

то ранг матрицы B окажется равным $n + 1 - k$. При этом $\text{rg } B = \text{rg } A = 1$, поскольку подобные матрицы имеют одинаковые ранги. Тем самым, β_n — единственный ненулевой элемент в последней строке матрицы U . Но тогда $|\beta_n| = 1$ и все внедиагональные элементы последнего столбца U также равны нулю.

Выходит, что в матрице B отличен от нуля только элемент, находящийся в позиции $(1, n)$. Тогда из равенств $b_{kn} = \overline{\alpha_k} \beta_n = 0$, $k \geq 2$, получаем

$$\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Поэтому $|\alpha_1| = 1$ и это единственный ненулевой элемент в первом столбце матрицы U . В итоге U имеет вид

$$U = u_{11} \oplus U_{n-2} \oplus u_{nn},$$

где U_{n-2} — унитарная матрица порядка $n - 2$.

Перейдём ко второму случаю $\alpha_1 = 0$. Если предположить, что $\beta_1 = 0$, то матрица B будет строго верхнетреугольной и строго нижнетреугольной одновременно, то есть, нулевой, что невозможно, так как $\text{rg } B = 1$. Поэтому $\beta_1 \neq 0$.

Рассуждая аналогично тому, как это делалось выше, выводим, что на границе матрицы U находятся только два ненулевых элемента

α_n и β_1 . Здесь и далее под границей матрицы подразумевается совокупность элементов первой и последней строк и первого и последнего столбцов. Поэтому матрица U представима в виде

$$U = P_n \cdot (u_{n1} \oplus U_{n-2} \oplus u_{1n}),$$

где U_{n-2} — также унитарная матрица порядка $n - 2$.

Выясним, как должна выглядеть матрица U_{n-2} . Не ограничивая общности, разберём только первый случай, поскольку домножение на перьединичную матрицу не выводит матрицу из рассматриваемой группы автоморфизмов: если $U^*AU \in T_n$, то и $(UP_n)^*A(UP_n) = P_n(U^*AU)P_n \in T_n$, так как при отражении своих элементов относительно центра тѐплицева матрица просто транспонируется и остаѐтся тѐплицевой. Соответственно, для второго случая достаточно домножить полученный ответ U_{n-2} на P_{n-2} слева. Итак,

$$U = u_{11} \oplus U_{n-2} \oplus u_{nn} \in \text{UAut}(T_n).$$

Пусть A — произвольная матрица из T_n , $B = U^*AU$. Введѐм матрицы A_{n-2} и B_{n-2} — центральные главные подматрицы порядка $n - 2$ для A и B соответственно. Нетрудно убедиться, что $B_{n-2} = U_{n-2}^*A_{n-2}U_{n-2}$, где A_{n-2} может принимать любое значение из T_{n-2} . Таким образом, $U_{n-2} \in \text{UAut}(T_{n-2})$. При этом, по предположению индукции, матрица U_{n-2} должна иметь один из двух видов, указанных в условии теоремы. Докажем от противного, что случай

(б) невозможен при $n \geq 4$. (При $n = 3$ в обоих случаях U_{n-2} представляет собой матрицу, состоящую из одного числа.)

Допустим, что U_{n-2} — унитарная матрица вида

$$U_{n-2} = P_{n-2} D_{n-2} = P_{n-2} \cdot \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-2}),$$

а $U = \alpha_1 \oplus U_{n-2} \oplus \beta_n \in \text{UAut}(T_n)$. Тогда тёплицевой обязана быть матрица

$$B = U^*(E_{1,n-1} + E_{2n})U, \quad (3.6)$$

поскольку тёплицевой является сама матрица $A = E_{1,n-1} + E_{2n}$. Однако, перемножив матрицы в (3.6), получаем $B = \overline{\alpha_1} \gamma_1 E_{12} + \beta_n \overline{\gamma_{n-2}} E_{n-1,n}$. Поскольку $\alpha_1, \beta_n, \gamma_1, \gamma_{n-2} \neq 0$ и $n \geq 4$, получаем противоречие — матрица X не может быть тёплицевой.

Таким образом, U_{n-2} — диагональная матрица, а вместе с ней диагональна и вся матрица U . Осталось узнать, как выглядят диагональные матрицы, принадлежащие множеству $\text{UAut}(T_n)$. Пусть

$$U = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_k = e^{i\psi_k}, \quad \psi_k \in \mathbb{R}.$$

На этот раз в качестве трансформируемой матрицы A возьмём жорданову клетку порядка n с нулём на главной диагонали. Тогда для элементов тёплицевой матрицы $B = U^* A U$ верно

$$b_{m,m+1} = e^{i(\psi_{m+1} - \psi_m)}, \quad m = 1, \dots, n-1.$$

Получаем, что можно подобрать аргументы $\psi_1, \dots, \psi_n$ так, чтобы

они образовывали арифметическую прогрессию:

$$\psi_k = \psi_1 + (k-1)\phi, \quad k = 1, \dots, n.$$

Если теперь положить $\sigma = e^{i\psi_1}$, $\varepsilon = e^{i\phi}$, то $\delta_k = \sigma\varepsilon^{k-1}$ и матрица U оказывается матрицей вида (а). При разборе же случая $\alpha_1 = 0$ была бы получена форма (б). Теорема доказана.

3.2. Группа $\text{UAut}(H_n)$

По определению унитарная матрица $U \in M_n$ принадлежит множеству $\text{UAut}(H_n)$ в том и только том случае, если

$$\forall A \in H_n \quad U^*AU \in H_n.$$

Верно следующее утверждение.

Теорема 3.2. 1. Для $n = 2$ любая матрица $U \in \text{UAut}(H_2)$ представима в виде σT , где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, T — некоторая вещественная ортогональная матрица.

2. При $n > 2$ любая матрица $U \in \text{UAut}(H_n)$ представима в виде σT , где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, T — матрица из дискретной мультипликативной группы, образующими которой являются диагональная матрица

$$\Lambda_n = \text{diag} (1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1})$$

и перестановочная матрица P_n .

Доказательство

Докажем эту теорему методом индукции по n .

Начнём со случая $n = 2$. Как известно, произвольная матрица U из группы $\mathbb{U}_2$ унитарных матриц второго порядка представима в виде

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \cos \gamma \cdot e^{i\psi_1}, \quad \beta = \sin \gamma \cdot e^{i\psi_2}. \quad (3.7)$$

Для включения $U \in \text{UAut}(H_2)$ необходимо, чтобы подобие с U в качестве трансформирующей матрицы сохраняло ганкелевость матрицы $A = E_{11}$. Другими словами, ганкелевой должна быть матрица $B = U^*AU$, что для матрицы второго порядка равносильно выполнению одного условия $b_{12} = b_{21}$. Получаем следующее ограничение на элементы матрицы U :

$$\alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для α и β из (3.7) и решая полученное уравнение относительно $e^{i(\psi_1 - \psi_2)}$, находим, что $e^{i\psi_1} = \pm e^{i\psi_2}$. При верхнем знаке получаем

$$\alpha = \cos \gamma \cdot e^{i\psi}, \quad \beta = \sin \gamma \cdot e^{i\psi},$$

при нижнем

$$\alpha = \cos(-\gamma) \cdot e^{i\psi}, \quad \beta = \sin(-\gamma) \cdot e^{i\psi},$$

где $\psi = \psi_1$. Как видно, без ограничения общности можно считать, что имеет место первый случай. Таким образом, матрицу U можно представить в виде произведения

$$U = e^{i\phi} D_\psi T_\gamma, \quad D_\psi = \text{diag} (e^{i\psi}, e^{-i\psi}), \quad T_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Отметим, что T_γ — вещественная ортогональная матрица. Используем теперь то, что ганкелевой должна быть и матрица $U^* P_2 U$. Это приводит к соотношению

$$e^{2i\psi} = e^{-2i\psi},$$

а значит, экспонента $e^{i\psi}$ принимает одно из четырёх значений ± 1 , $\pm i$. Если $e^{i\psi} = \pm 1$, то

$$U = \pm e^{i\phi} T_\gamma;$$

если $e^{i\psi} = \pm i$, то

$$U = \pm i e^{i\phi} \Lambda_2 T_\gamma.$$

В любом из возможных случаев матрица U равна вещественной ортогональной матрице с точностью до комплексного множителя, равного единице по модулю. Нетрудно проверить, что все такие матрицы действительно лежат в $\text{UAut}(H_2)$. Доказательство теоремы для $n = 2$ завершено.

Предположим теперь, что теорема верна для всех порядков, меньших $n \geq 3$. Так же, как и при доказательстве теоремы 3.1,

запишем первую и последнюю строки матрицы U как $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Сделаем дополнительно допущение, что на границе U нет нулевых элементов.

Исследуем матрицу $B = U^* E_{11} U$, которая обязана быть ганкелевой, поскольку ганкелевой является сама матрица E_{11} . Видно, что

$$B = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \overline{\alpha_1}\alpha_2 & \dots & \overline{\alpha_1}\alpha_n \\ \overline{\alpha_2}\alpha_1 & |\alpha_2|^2 & \dots & \overline{\alpha_2}\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\alpha_n}\alpha_1 & \overline{\alpha_n}\alpha_2 & \dots & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

В силу своей ганкелевости матрица B должна быть симметричной, а значит, $\overline{\alpha_k}\alpha_l = \overline{\alpha_l}\alpha_k$ для всех k и l . Следовательно, все попарные произведения $\overline{\alpha_k}\alpha_l$ являются вещественными числами, а учитывая сделанное выше предположение, все эти числа ещё и ненулевые. Таким образом, можно сказать, что все элементы первой строки матрицы U имеют один и тот же аргумент с точностью до πk , $k \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$\mu = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in \mathbb{R}.$$

Распишем условия $b_{kk} = b_{k-1,k+1}$ для $2 \leq k \leq n-1$:

$$|\alpha_k|^2 = \overline{\alpha_{k-1}}\alpha_{k+1}.$$

Из этого следует

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\overline{\alpha_k}}{\alpha_{k-1}},$$

но поскольку $\alpha_2/\alpha_1 = \mu \in \mathbb{R}$, то получаем, что числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ образуют геометрическую прогрессию с вещественным знаменателем μ .

Рассматривая вместо матрицы $U^*E_{11}U$ матрицу $U^*E_{nn}U$, можно доказать, что элементы последней строки $\beta_1, \dots, \beta_n$ также образуют геометрическую прогрессию с вещественным знаменателем $\nu = \beta_2/\beta_1$.

Воспользуемся теперь ортогональностью первой и последней строк матрицы U :

$$\alpha_1\overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n\overline{\beta_n} = \alpha_1\overline{\beta_1}(1 + x + \dots + x^{n-1}) = 0,$$

где $x = \mu\nu \in \mathbb{R}$. Так как $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$, то можно утверждать, что $x = -1$, а n — чётное. Таким образом, $\nu = -\mu^{-1}$.

Заметим, что домножение на матрицы P_n и Λ_n справа не выводит матрицу из $\text{UAut}(H_n)$. Действительно, дополнительное подобие с трансформирующей матрицей P_n отражает матрицу относительно центра, что не приводит к потере ганкелевой структуры; подобие, применённое к матрице A с трансформирующей матрицей Λ_n , меняет все элементы a_{jk} на $(-1)^{j+k}a_{jk}$, что также оставляет матрицу ганкелевой. Поэтому можно считать без ограничения общности, что $\mu \geq 1$, ведь домножение на P_n справа заменяет знаменатель прогрессии μ на $1/\mu$, а домножение на Λ_n — заменяет на $-\mu$.

Евклидовы нормы первой и последней строк U равны единице,

поэтому

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = |\alpha_1|^2(1 + \mu^2 + \dots + \mu^{2n-2}) = 1,$$

$$|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 + \dots + |\beta_n|^2 = |\beta_1|^2(1 + \mu^{-2} + \dots + \mu^{-(2n-2)}) = 1.$$

Отсюда следует

$$|\beta_1| = |\alpha_1|\mu^{n-1}, \quad |\beta_n| = |\beta_1| \cdot |\nu^{n-1}| = |\alpha_1|. \quad (3.9)$$

Поскольку вместе с матрицей $U \in \text{UAut}(H_n)$ в это же множество входит и $U^{-1} = U^*$, то рассуждения, проделанные выше для крайних строк, верны и для крайних столбцов матрицы U . Можно утверждать, например, что элементы первого столбца также составляют геометрическую прогрессию, причём из (3.9) можно вывести, что её знаменатель равен μ или $-\mu$. При необходимости домножая матрицу U слева на Λ_n , не ограничивая общности, будем считать, что

$$\beta_1 = \alpha_1\mu^{n-1}.$$

В итоге получаем, что элементы первого столбца, так же, как и элементы первой строки, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем μ ; элементы последнего столбца, так же, как и элементы последней строки, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $-\mu^{-1}$.

В дальнейшем будем вместо матрицы U рассматривать матрицу $\alpha_1^{-1}U$. При этом строки всё ещё будут составлять ортогональный

базис пространства $\mathbb{C}_n$. Перейдём к исследованию второй строки матрицы U . Представим её в виде $(x_1, \dots, x_n)$, при этом нам уже известно, что

$$x_1 = \mu, \quad x_n = -\mu^{n-2}.$$

На этот раз рассмотрим действие подобием на ганкелеву матрицу $A = E_{12} + E_{21}$. Как обычно, $B = U^*AU$. Легко проверяется, что

$$b_{jk} = \mu^{j-1}x_k + \mu^{k-1}\overline{x_j}.$$

Выпишем некоторые из условий ганкелевости матрицы B :

$$\begin{aligned} b_{12} = b_{21} & : & x_2 + \mu^2 = \mu^2 + \overline{x_2} \\ b_{13} = b_{31} = b_{22} & : & x_3 + \mu^3 = \mu^3 + \overline{x_3} = \mu x_2 + \mu \overline{x_2} \\ b_{14} = b_{41} = b_{23} & : & x_4 + \mu^4 = \mu^4 + \overline{x_4} = \mu x_3 + \mu^2 \overline{x_2} \\ & \dots & \\ b_{1,k+1} = b_{k+1,1} = b_{2k} & : & x_{k+1} + \mu^{k+1} = \mu^{k+1} + \overline{x_{k+1}} = \mu x_k + \mu^{k-1} \overline{x_2}. \\ & \dots & \end{aligned}$$

Решив эти рекуррентные соотношения, получим

$$x_{k+1} = k\mu^{k-1}x_2 - (k-1)\mu^{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.10)$$

С другой стороны, значение x_n было известно ещё раньше. Приравнивая два выражения для x_n , имеем

$$x_n = -\mu^{n-2} = (n-1)\mu^{n-2}x_2 - (n-2)\mu^n.$$

Рассматривая последнее равенство как линейное уравнение относительно x_2 , выводим

$$x_2 = \frac{(n-2)\mu^2 - 1}{n-1}. \quad (3.11)$$

Воспользуемся ортогональностью первых двух строк матрицы U :

$$\begin{aligned} S(\mu) &= \overline{\alpha}_1 x_1 + \dots + \overline{\alpha}_n x_n = \\ &= \mu + \mu x_2 + \mu^2 x_3 + \dots + \mu^{n-2} x_{n-1} - \mu^{2n-3} = 0. \end{aligned}$$

Используя полученное решение (3.10), можем исключить из записи $S(\mu)$ элементы $x_3, \dots, x_{n-1}$. Подставляя туда же вместо x_2 его представление (3.11) через μ , окончательно получаем

$$S(\mu) = \frac{-\mu\psi(\mu)}{(n-1)(\mu^2-1)^2},$$

где

$$\psi(\mu) = (n-2)\mu^{2n} - n\mu^{2n-2} + n\mu^2 - (n-2).$$

Легко проверить, что

$$\psi(1) = \psi'(1) = \psi''(1) = 0,$$

$$\psi'''(\mu) = 4n(n-1)(n-2)\mu^{2n-5}((2n-1)(\mu^2-1) + 2).$$

Видно, что при $n > 2$ третья производная многочлена $\psi(\mu)$ положительна на множестве $\mu \geq 1$. Распишем $\psi(\mu_0)$ по формуле

Тейлора с центром в точке 1 и с остаточным членом в форме Лагранжа для произвольного $\mu_0 > 1$:

$$\psi(\mu_0) = \psi(1) + \psi'(1) + \frac{1}{2}\psi''(1) + \frac{1}{6}\psi'''(\xi) = \frac{1}{6}\psi'''(\xi) > 0.$$

Здесь ξ — некоторое число из интервала $(1, \mu_0)$. Таким образом, на всём множестве $\mu \geq 1$ функция $\psi(\mu)$, а вместе с ней и $S(\mu)$, имеет только один корень — $\mu = 1$. При этом значении μ соотношение (3.10) принимает вид

$$x_{k+1} = kx_2 - (k-1), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

что позволяет утверждать: вторая строка $(x_1, \dots, x_n)$ представляет собой арифметическую прогрессию с крайними элементами $x_1 = \mu = 1$ и $x_n = -\mu^{n-2} = -1$. Но тогда $|x_k| < 1$ при $k = 2, \dots, n-1$, в то время как $\alpha_k = 1$ при $k = 1, \dots, n$, а значит, длина второй строки меньше длины первой строки, что невозможно, так как матрица U с точностью до скалярного множителя является унитарной. Это означает, что сделанное предположение неверно и граница матрицы U должна содержать хотя бы один нуль даже при чётном порядке.

Без ограничения общности можно считать, что нуль стоит в первой строке. Если он стоит в первом столбце, то вместо матрицы U можно рассматривать матрицу U^* ; если он стоит в последней строке, то рассматривается матрица $P_n U$; если же нуль содержится в последнем столбце, то нужно перейти к матрице $P_n U^*$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Докажем, что в таком случае обязательно должен равняться нулю элемент α_2 . Допустим, что это не так и $\alpha_2 \neq 0$. Вернёмся к ганкелевой матрице (3.8). В силу условий

$$|\alpha_2|^2 = \overline{\alpha_1}\alpha_3, \quad |\alpha_3|^2 = \overline{\alpha_2}\alpha_4, \dots, |\alpha_{n-1}|^2 = \overline{\alpha_{n-2}}\alpha_n \quad (3.12)$$

последовательно получаем цепочку $\alpha_3 \neq 0, \alpha_4 \neq 0, \dots, \alpha_n \neq 0$, что противоречит доказанному факту наличия нуля в первой строке. Следовательно, $\alpha_2 = 0$. Но тогда можно выписать

$$\overline{\alpha_1}\alpha_3 = \overline{\alpha_2}\alpha_4 = 0, \quad \overline{\alpha_1}\alpha_4 = \overline{\alpha_2}\alpha_5 = 0, \dots, \overline{\alpha_1}\alpha_n = \overline{\alpha_2}\alpha_{n-1} = 0,$$

откуда следует $\alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Таким образом, α_1 — единственный ненулевой элемент в первой строке, а значит, $|\alpha_1| = 1$ и все внедиагональные элементы первого столбца матрицы U , в частности $u_{n1} = \beta_1$, равны нулю.

Заметим, что если бы было положено $\alpha_1 = 0$, то был бы получен фактически тот же случай. Действительно, используя соотношения (3.12), можно так же последовательно получить $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_{n-1} = 0$, что приводит к тому, что $|\alpha_n| = 1$ и этот элемент является единственным ненулевым в первой строке и последнем столбце. Этот случай можно свести к предыдущему домножением U на матрицу P_n справа. Таким образом, можно считать, что имеет место случай $\alpha_1 \neq 0$.

Перейдём теперь к матрице $B = U^*E_{nn}U$. Используя схожую

цепочку

$$|\beta_2|^2 = \overline{\beta_1}\beta_3, |\beta_3|^2 = \overline{\beta_2}\beta_4, \dots, |\beta_{n-1}|^2 = \overline{\beta_{n-2}}\beta_n$$

и полученное ранее равенство $\beta_1 = 0$, делаем вывод, что β_n — единственный ненулевой элемент в последней строке и последнем столбце. Таким образом, матрица U представима в виде

$$U = \alpha_1 \oplus U_{n-2} \oplus \beta_n,$$

где U_{n-2} — унитарная матрица порядка $n - 2$. Для $n = 3$ автоматически получаем диагональный вид матрицы U . Пусть теперь $n \geq 4$. Подобно тому, как это было сделано при исследовании множества $\text{UAut}(T_n)$, заключаем, что $U_{n-2} \in \text{UAut}(H_{n-2})$. Следовательно, к U_{n-2} при $n \geq 5$ можно применить предположение индукции, и матрица U_{n-2} должна быть диагональной или пердиагональной (т.е. произведением диагональной и перъединичной матриц). Предположим, что U_{n-2} — унитарная матрица вида

$$U_{n-2} = P_{n-2} \cdot \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-2}).$$

Но тогда матрица $U^*(E_{12} + E_{21})U = \overline{\alpha_1}\gamma_{n-2}E_{1,n-1} + \alpha_1\overline{\gamma_{n-2}}E_{n-1,1}$ не входит в множество ганкелевых матриц при $n \geq 5$, что означает, что матрица U_{n-2} , а вместе с ней и вся матрица U , обязана быть диагональной.

Осталось рассмотреть случай $n = 4$. Пусть

$$U = \alpha_1 \oplus \sigma T \oplus \beta_4 = \alpha_1 \oplus \sigma \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \oplus \beta_4,$$

где $|\sigma| = 1$, T — некоторая вещественная ортогональная матрица второго порядка. Рассмотрим матрицу

$$U^*(E_{12} + E_{21})U = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\alpha_1}\sigma t_{11} & \overline{\alpha_1}\sigma t_{12} & 0 \\ \alpha_1\overline{\sigma}t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1\overline{\sigma}t_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку она должна быть ганкелевой, а числа α_1 и σ не могут равняться нулю, то $t_{12} = 0$. Рассматривая аналогичным образом матрицу $U^*(E_{34} + E_{43})U$, получаем, что и $t_{21} = 0$. Таким образом, и в этом случае матрица U — диагональная.

Выясним теперь, какие диагональные матрицы входят в множество $\text{UAut}(H_n)$. Пусть

$$U = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_k = e^{i\psi_k}, \quad \psi_k \in \mathbb{R}.$$

Возьмём в качестве трансформируемой матрицы A матрицу, все элементы которой равны единице. Тогда для элементов матрицы $B = U^*AU$ верны соотношения

$$b_{jk} = e^{i(\psi_j - \psi_k)} = \frac{\delta_j}{\delta_k}.$$

Если $j + k = 2l$ — чётное число, то $b_{jk} = b_{ll} = 1$, откуда вытекает, что для любой пары индексов (j, k) одной чётности $\delta_j = \delta_k$. Если же j и k — числа разной чётности, то можно утверждать лишь, что $b_{jk} = b_{kj}$, что приводит к равенству $\delta_j = \pm \delta_k$. Таким образом, допустимы только два варианта: либо $U = \delta_1 I_n$, либо $U = \delta_1 \Lambda_n$. Получаем, что все матрицы из $\text{UAut}(H_n)$ представимы в виде

$$U = \sigma \Lambda_n^q P_n^r, \quad \sigma \in \mathbb{C}, \quad |\sigma| = 1, \quad q, r \in \{0, 1\}.$$

Теорема доказана.

3.3. Группа $\text{UAut}_c(T_n)$

Разберём состав множества $\text{UAut}_c(T_n)$. По определению, унитарная матрица $U \in M_n$ принадлежит множеству $\text{UAut}_c(T_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in T_n \quad U^T A U \in T_n.$$

В этом параграфе будет доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. 1. Для $n = 2$ любая матрица $U \in \text{UAut}_c(T_2)$ представима в виде σT , где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, T — элемент группы, порождённой матрицами Λ_2 , P_2 и матрицами формы

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & i \sin \phi \\ i \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

2. При $n > 2$ любая матрица $U \in \text{UAut}(H_n)$ представима в виде σT , где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, T — матрица из дискретной мультипликативной группы, образующими которой являются диагональная матрица Λ_n , определённая в теореме 3.2, и перестановочная матрица P_n .

Доказательство

Разберём случай $n = 2$. Тогда включение $U \in \text{UAut}_c(T_2)$ означает, что конгруэнция с трансформирующей матрицей U сохраняет тёплицеву структуру произвольной матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Другими словами, должны быть равны диагональные элементы матрицы $B = U^T A U$, что эквивалентно выполнению равенства

$$(u_{11}^2 + u_{21}^2)\alpha + u_{11}u_{21}(\beta + \gamma) = (u_{12}^2 + u_{22}^2)\alpha + u_{12}u_{22}(\beta + \gamma)$$

для произвольных значений α, β, γ . Поэтому для элементов матрицы U верны соотношения

$$u_{11}u_{21} = u_{12}u_{22}, \quad u_{11}^2 + u_{21}^2 = u_{12}^2 + u_{22}^2. \quad (3.13)$$

Очевидными решениями системы (3.13) являются матрицы U , содержащие нулевые элементы. С точностью до скалярного множителя модуля 1 это матрицы I_2 , Λ_2 , P_2 и $\Lambda_2 P_2$.

Найдём решения без нулевых элементов. Добавим к системе (3.13) условие ортогональности столбцов матрицы U :

$$u_{11}\overline{u_{21}} + u_{12}\overline{u_{22}} = 0. \quad (3.14)$$

Вводя отношение

$$\mu = \frac{u_{12}}{u_{11}}$$

и переписывая равенства из (3.13) и (3.14) как

$$\frac{u_{12}}{u_{11}} = \frac{u_{21}}{u_{22}}, \quad \frac{u_{12}}{u_{11}} = -\frac{\overline{u_{21}}}{\overline{u_{22}}},$$

делаем вывод $\mu = -\bar{\mu}$; поэтому $\mu = i\rho$, где $\rho \in \mathbb{R}$. Подставляя соотношения

$$u_{12} = i\rho \cdot u_{11}, \quad u_{21} = i\rho \cdot u_{22}$$

во второе уравнение (3.13), получаем $u_{11}^2 = u_{22}^2$. Умножив при необходимости U на Λ_2 , можем считать, что $u_{11} = u_{22}$. Учитывая нормированность столбцов матрицы U , получаем

$$|u_{11}|^2(1 + \rho^2) = 1.$$

Таким образом, с точностью до скалярного множителя, равного единице по модулю, матрица U должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & i \sin \phi \\ i \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

где

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}}, \quad \sin \phi = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \rho^2}}.$$

Доказательство теоремы для случая $n = 2$ завершено.

Перейдём к доказательству того, что граница матрицы U должна содержать хотя бы один нуль. Для этого воспользуемся следующим вспомогательным утверждением.

Лемма 3.1. *Пусть T — трёхлинейная матрица вида (1.1) с ненулевыми элементами. Тогда, если $\text{rg } T = 1$, то числа*

$$t_{-n+1}, t_{-n+2}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$$

образуют геометрическую прогрессию.

Доказательство леммы

Приравняем нулю все миноры второго порядка, образованные первыми двумя столбцами и любыми двумя соседними строками матрицы T . Сделаем то же самое с минорами, образованными первыми двумя строками и соседними столбцами. Это приводит к соотношениям

$$\frac{t_{-n+2}}{t_{-n+1}} = \frac{t_{-n+3}}{t_{-n+2}} = \dots = \frac{t_0}{t_{-1}} = \frac{t_1}{t_0} = \dots = \frac{t_{n-2}}{t_{n-3}} = \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}},$$

что доказывает лемму.

Предположим, что граница U не содержит нулей. Рассмотрим матрицу $B = U^T E_{1n} U$:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \beta_n \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \dots & \alpha_2 \beta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n \beta_1 & \alpha_n \beta_2 & \dots & \alpha_n \beta_n \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Здесь, как обычно, α_j и β_j — элементы первой и последней строк матрицы U . Матрица B должна быть тѐплицевой, ранга один, и по предположению, не иметь нулевых элементов. Следовательно, можно применить лемму 3.1:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}} = \dots = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \dots = \frac{\beta_{n-2}}{\beta_{n-1}} = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}.$$

Общее значение этих дробей будем обозначать как μ , тогда

$$\alpha_k = \alpha_1 \mu^{k-1}, \quad \beta_k = \beta_1 \left(\frac{1}{\mu} \right)^{k-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Из ортогональности крайних строк U следует

$$0 = \overline{\alpha_1} \beta_1 + \dots + \overline{\alpha_n} \beta_n = \overline{\alpha_1} \beta_1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\overline{\mu}}{\mu} \right)^{k-1}.$$

Это равенство возможно только в том случае, если μ — число вида

$$\mu = p e^{\frac{i\pi r}{n}}, \quad r \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Поскольку вместе с матрицей U в множестве $\text{UAut}_c(T_n)$ должна находиться и транспонированная матрица U^T , то полученный относительно строк результат можно применить и к столбцам, то есть первый и последний столбцы также должны образовывать геометрическую прогрессию:

$$u_{k1} = \alpha_1 \nu^{k-1}, \quad u_{kn} = \alpha_n \left(\frac{1}{\nu} \right)^{k-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Используем нормированность первой строки и первого столбца:

$$|\alpha_1|^2 (1 + |\mu|^2 + \dots + |\mu|^{2n-2}) = |\alpha_1|^2 (1 + |\nu|^2 + \dots + |\nu|^{2n-2}) = 1.$$

Поскольку функция $f(x) = 1 + x^2 + \dots + x^{2n-2}$ возрастает на множестве положительных чисел, то $|\mu| = |\nu|$.

Впрочем, можно уточнить, как связаны числа μ и ν . Запишем элемент $\beta_n = u_{nn}$ двумя разными способами:

$$\beta_n = \beta_1 \left(\frac{1}{\mu}\right)^{n-1} = u_{n1} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{n-1} = \alpha_1 \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{n-1},$$

$$\beta_n = u_{nn} = \alpha_n \left(\frac{1}{\nu}\right)^{n-1} = \alpha_1 \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{n-1}.$$

Таким образом, $\mu^{2n-2} = \nu^{2n-2}$. Однако, вспоминая вид числа μ , можем написать

$$\mu^{2n-2} = \mu^{2n} \mu^{-2} = |\mu^{2n}| \mu^{-2};$$

то же самое можно написать и в отношении ν^{2n-2} . Учитывая равенство модулей чисел μ и ν , получаем $\mu^2 = \nu^2$ или $\nu = \pm\mu$. Умножая матрицу U на Λ_n , можно поменять знак одного из этих чисел, поэтому можно считать, что

$$\nu = \mu = p e^{\frac{i\pi r}{n}}, \quad r \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Используем теперь элементы второй и предпоследней строк матрицы U . Положим

$$u_{2k} = x_k, \quad u_{n-1,k} = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Так как матрица $B = U^T(E_{1,n-1} + E_{2n})U$ — тёплицева и $b_{jk} = \alpha_j y_k + x_j \beta_k$, то

$$\alpha_j y_k + x_j \beta_k = \alpha_{j+1} y_{k+1} + x_{j+1} \beta_{k+1}, \quad j, k = 1, \dots, n-1. \quad (3.16)$$

Разделив эти соотношения на $\alpha_j\beta_k$, получим

$$\frac{x_j - \frac{1}{\mu}x_{j+1}}{\alpha_j} = -\frac{y_k - \mu y_{k+1}}{\beta_k}.$$

Так как левая часть полученного равенства не зависит от индекса k , а правая от j , то можно утверждать, что существует некоторое число $\xi \in \mathbb{C}$ такое, что

$$\frac{x_j - \frac{1}{\mu}x_{j+1}}{\alpha_j} = \xi, \quad \frac{y_k - \mu y_{k+1}}{\beta_k} = -\xi.$$

Решая рекуррентное уравнение

$$x_{k+1} - \mu x_k = -\mu \alpha_k \xi = -\mu^k \alpha_1 \xi$$

с начальным условием

$$x_1 = \mu \alpha_1,$$

находим

$$x_k = \alpha_1 \mu^{k-1} (\mu - (k-1)\xi). \quad (3.17)$$

Аналогичное рекуррентное соотношение

$$y_{k+1} - \frac{1}{\mu} y_k = \frac{1}{\mu} \beta_k \xi = \left(\frac{1}{\mu}\right)^k \beta_1 \xi$$

с начальным условием

$$y_1 = u_{n-1,1} = \frac{1}{\mu} \beta_1$$

имеет решение

$$y_k = \beta_1 \left(\frac{1}{\mu}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{\mu} + (k-1)\xi\right).$$

Найти неизвестное ξ можно, вычислив x_n двумя разными способами. С одной стороны, можно воспользоваться полученным решением (3.17):

$$x_n = \alpha_1 \mu^{n-1} (\mu - (n-1)\xi);$$

с другой стороны,

$$x_n = u_{2n} = \alpha_n \cdot \frac{1}{\mu} = \alpha_1 \mu^{n-2}.$$

Приравнявая и решая полученное линейное уравнение, находим

$$\xi = \frac{\mu^2 - 1}{\mu(n-1)}. \quad (3.18)$$

Используем теперь ортогональность первой и второй строк:

$$0 = \overline{\alpha_1} x_1 + \dots + \overline{\alpha_n} x_n = |\alpha_1|^2 \left(\mu \sum_{k=1}^n p^{2(k-1)} - \xi \sum_{k=1}^n (k-1) p^{2(k-1)} \right). \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что отношение ξ/μ вещественно. Перепишем (3.18) как

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - (n-1) \frac{\xi}{\mu}.$$

Следовательно, число μ^2 также вещественно. Однако само μ не может быть вещественным числом, поэтому $\mu = pi$ и

$$\xi = i \frac{p^2 + 1}{p(n-1)}. \quad (3.20)$$

Покажем сначала, что случай $p = 1$ невозможен. Действительно, в этом случае $\mu = i$ и все элементы первой строки равны по модулю

$1/\sqrt{n}$. Кроме того, $\xi = 2i/(n-1)$. Вторая строка тоже должна иметь евклидову норму, равную единице, поэтому

$$1 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = |\alpha_1|^2 \sum_{k=1}^n (\mu - (k-1)\xi)^2 = \frac{n+1}{3(n-1)}.$$

Однако дробь в правой части строго меньше единицы при $n > 2$.

Итак, $p \neq 1$. Для определённости будем считать, что $p > 1$. Если $p < 1$, то знаменатель прогрессии в последней строке матрицы U имеет модуль $1/p$, и мы можем поменять первую и последнюю строки местами, домножив U слева на перьединичную матрицу P_n .

Из (3.19) получаем

$$\frac{\xi}{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^n p^{2(k-1)}}{\sum_{k=1}^n (k-1)p^{2(k-1)}}.$$

Используя (3.20), находим

$$\frac{p^2 + 1}{n - 1} = \frac{(p^{2n} - 1)(p^2 - 1)}{-np^{2n-2} + (n-1)p^{2n} + 1}.$$

Упрощая последнее равенство, заключаем, что

$$(n-2)p^{2n} - np^{2n-2} + np^2 - (n-2) = 0.$$

Многочлен, стоящий в левой части, есть не что иное, как многочлен $\psi(p)$, использовавшийся в доказательстве теоремы 3.2. Там же было показано, что $\psi(p)$ не может иметь корней на множестве $p > 1$.

Итак, в обоих случаях $p = 1$ и $p \neq 1$ мы получили противоречия, указывающие на то, что граница матрицы U должна содержать нули.

Таким образом, можно считать, что среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$ есть хотя бы один ноль. Значит, один из диагональных элементов $b_{kk} = \alpha_k \beta_k$ матрицы (3.15) должен быть нулевым, а так как матрица B тёплицева, то нулю будут равны все её диагональные элементы. В частности, $b_{11} = \alpha_1 \beta_1 = 0$. Проводя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 3.1, получаем два возможных вида матрицы U : либо

$$U = \alpha_1 \oplus U_{n-2} \oplus \beta_n,$$

либо

$$U = P_n \cdot (\beta_1 \oplus U_{n-2} \oplus \alpha_n),$$

где U_{n-2} — унитарная матрица порядка $n - 2$, принадлежащая множеству $\text{UAut}_c(T_{n-2})$.

Не ограничивая общности, можно рассматривать только первый случай. Выясним, как должна выглядеть центральная подматрица U_{n-2} . Вернёмся к отношениям (3.16), подставляя $k = n - 1$ и $j = 2, \dots, n - 2$:

$$x_{j+1} \beta_n = 0, \quad j = 2, \dots, n - 2.$$

Отсюда заключаем, что x_2 — единственный ненулевой элемент второй строки матрицы U . Аналогично, подставляя в (3.16) $j = 1$

и $k = 2, \dots, n - 2$, получаем

$$\alpha_1 y_k = 0, \quad k = 2, \dots, n - 2.$$

Из этого следует, что y_{n-1} — единственный отличный от нуля элемент в предпоследней строке матрицы U . Сама матрица U имеет, таким образом, вид

$$U = \alpha_1 \oplus x_2 \oplus U_{n-4} \oplus y_{n-1} \oplus \beta_n.$$

Продолжая действовать в том же ключе, показываем, что U — диагональная матрица. В итоге доказано, что всякая матрица $U \in \text{UAut}_c(T_n)$ с точностью до матричных множителей Λ_n и P_n должна быть диагональной.

Осталось выяснить, какие диагональные матрицы входят в множество $\text{UAut}_c(T_n)$. Пусть $U \in \text{UAut}_c(T_n)$ — матрица вида

$$U = \text{diag} (\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_k = e^{i\psi_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим действие U конгруэнцией на матрицу A — матрицу порядка n , все элементы которой равны единице. Тогда для элементов матрицы $B = U^T A U$ верны соотношения

$$b_{jk} = e^{i(\psi_j + \psi_k)}, \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

В частности, для диагональных элементов имеем

$$b_{kk} = e^{2i\psi_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Так как матрица B тёплицева и вследствие этого её диагональные элементы должны быть равны, мы можем сделать вывод, что

$$\psi_j = \psi_k \pmod{\pi}, \quad 1 \leq j, k \leq n. \quad (3.21)$$

Рассматривая же равенства $b_{k,k+1} = b_{k+1,k+2}$, получаем

$$\psi_k = \psi_{k+2} \pmod{2\pi}, \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (3.22)$$

Понятно, что условиям (3.21) и (3.22) удовлетворяют только матрицы вида σI_n и $\sigma \Lambda_n$. Доказательство теоремы 3.3 завершено.

3.4. Группа $\text{UAut}_c(H_n)$

Унитарная матрица U принадлежит множеству $\text{UAut}_c(H_n)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall A \in H_n \quad U^T A U \in H_n.$$

Состав данного множества определяется следующей теоремой.

Теорема 3.4. 1. При $n = 2$ множество $\text{UAut}_c(H_n)$ совпадает с множеством всех унитарных матриц $\mathbb{U}_2$.

2. При $n > 2$ все матрицы $U \in \text{UAut}_c(H_n)$ представимы в одном из двух следующих видов:

a) $U = \sigma \cdot \text{diag} (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1});$

б) $U = \sigma P_n \cdot \text{diag} (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}).$

В обоих случаях σ и ε — комплексные числа, равные по модулю единице.

Доказательство

При $n = 2$ свойство ганкелевости матрицы совпадает со свойством симметричности. А так как симметрия сохраняется при произвольной конгруэнции, в $\text{UAut}_c(H_2)$ входят все унитарные матрицы второго порядка.

Продолжим, полагая уже $n > 2$. Проверим принадлежность матриц типа (а) и (б) из условия теоремы множеству $\text{UAut}_c(H_n)$. Конгруэнция с перъединичной матрицей в качестве трансформирующей есть отражение трансформируемой матрицы относительно центра и, следовательно, сохраняет ганкелевость, поэтому рассмотрим только матрицы первого вида. Пусть H — ганкелева матрица (1.2), в таком случае, элемент $\{U^T H U\}_{jk} = \sigma^2 \varepsilon^{j+k-2} h_{n+1-(j+k)}$ есть снова функция от суммы индексов $j + k$. Это доказывает, что матрицы обеих форм (а) и (б) действительно принадлежат множеству $\text{UAut}_c(H_n)$.

Докажем теперь от противного, что произвольная матрица $U \in \text{UAut}_c(H_n)$ обязана содержать нули на своей границе. Пусть все элементы первой и последней строк и первого и последнего столбцов матрицы U не равны нулю. Введём стандартные обозначения $u_{1k} = \alpha_k$, $u_{nk} = \beta_k$ и рассмотрим матрицы $U^T E_{11} U$ и $U^T E_{nn} U$. Нетрудно

проверить, что

$$\{U^T E_{11} U\}_{jk} = \alpha_j \alpha_k, \quad \{U^T E_{nn} U\}_{jk} = \beta_j \beta_k.$$

Поскольку обе матрицы $U^T E_{11} U P_n$ и $U^T E_{nn} U P_n$ являются тёплицевыми, имеют ранг 1 и не содержат нулевых элементов, к ним можно применить лемму 3.1. Получаем, что обе последовательности $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$ представляют собой геометрические прогрессии. То же самое можно сказать и про элементы крайних столбцов матрицы U , так как вместе с U в группу $\text{UAut}_c(H_n)$ попадает и транспонированная матрица U^T . Получаем, что для некоторых комплексных чисел $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ верны равенства

$$\alpha_k = \alpha_1 \mu_1^{k-1}, \quad \beta_k = \beta_1 \mu_2^{k-1}, \quad u_{k1} = \alpha_1 \nu_1^{k-1}, \quad u_{kn} = \alpha_n \nu_2^{k-1}.$$

Так как матрица унитарная, то первая строка и первый столбец должны иметь единичную длину. Поэтому

$$\begin{aligned} |\alpha_1|^2 (1 + |\mu_1|^2 + |\mu_1|^4 + \dots + |\mu_1|^{2n-2}) &= \\ &= |\alpha_1|^2 (1 + |\nu_1|^2 + |\nu_1|^4 + \dots + |\nu_1|^{2n-2}) = 1. \end{aligned}$$

Тот факт, что функция $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}$ является возрастающей на множестве положительных чисел, позволяет нам сделать вывод, что $|\mu_1| = |\nu_1|$. Приравнивая длины последней строки и последнего столбца, таким же образом получаем $|\mu_2| = |\nu_2|$.

Вычислим двумя способами элемент $\beta_n = u_{nn}$:

$$\beta_n = \beta_1 \mu_2^{n-1} = u_{n1} \mu_2^{n-1} = \alpha_1 (\nu_1 \mu_2)^{n-1}.$$

С другой стороны,

$$\beta_n = u_{nn} = \alpha_n \nu_2^{n-1} = \alpha_1 (\mu_1 \nu_2)^{n-1}.$$

Приравнивая правые части двух последних равенств, получаем

$$(\nu_1 \mu_2)^{n-1} = (\mu_1 \nu_2)^{n-1}. \quad (3.23)$$

Домножение матрицы U на матрицу $\sigma \cdot \text{diag} (1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1})$ справа приводит к замене знаменателя μ_1 на число $\mu_1 \varepsilon$, домножением на такую же матрицу слева можно добиться изменения нужного изменения аргумента числа μ_2 . Поэтому вместо $|\mu_1| = |\nu_1|$, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\mu_1 = \nu_1 = p \in \mathbb{R}.$$

Теперь (3.23) принимает вид

$$\mu_2^{n-1} = \nu_2^{n-1}. \quad (3.24)$$

Воспользуемся ортогональностью первой и последней строк:

$$\overline{\alpha_1} \beta_1 (1 + p\mu_2 + (p\mu_2)^2 + \dots + (p\mu_2)^{n-1}) = 0.$$

Делаем вывод, что

$$(p\mu_2)^n = 1, \quad p\mu_2 \neq 1.$$

Аналогично получаем

$$(p\nu_2)^n = 1, \quad p\nu_2 \neq 1.$$

Из двух последних равенств следует $\mu_2^n = \nu_2^n$, что вместе с (3.24) означает $\mu_2 = \nu_2$. Окончательный вид этих чисел таков:

$$\mu_2 = \nu_2 = \frac{1}{p} e^{i \frac{2\pi}{n} r}, \quad r \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Перейдём к рассмотрению второй строки матрицы U , элементы u_{2k} которой обозначим через x_k . Так как матрица $B = U^T(E_{12} + E_{21})U$ является ганкелевой, имеем

$$\begin{aligned} b_{k1} = b_{k-1,2} &: x_k \alpha_1 + x_1 \alpha_k = x_{k-1} \alpha_2 + x_2 \alpha_{k-1}, \\ b_{k+1,1} = b_{k2} &: x_{k+1} \alpha_1 + x_1 \alpha_{k+1} = x_k \alpha_2 + x_2 \alpha_k. \end{aligned}$$

Вычтем из нижнего равенства верхнее, умноженное на p . Поскольку $\alpha_k = \alpha_1 p^{k-1}$, приходим к рекуррентному соотношению

$$x_{k+1} - p x_k = p(x_k - p x_{k-1}).$$

Положим $x_2 - p x_1 = u$. По индукции можно доказать, что

$$x_k = (p x_1 + (k-1)u) p^{k-2} = \alpha_1 p^k + (k-1)u p^{k-2}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Определим теперь неизвестное u . Согласно (3.25), имеем

$$x_n = \alpha_1 p^n + (n-1)u p^{n-2}.$$

С другой стороны,

$$x_n = u_{2n} = \alpha_n \nu_2 = \alpha_1 p^{n-2} e^{i \frac{2\pi}{n} r}.$$

Приравнивая эти два выражения, находим

$$u = \frac{\alpha_1}{n-1}(e^{i\frac{2\pi}{n}r} - p^2). \quad (3.26)$$

Воспользуемся теперь ортогональностью первой и второй строк матрицы U :

$$0 = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} x_k = |\alpha_1|^2 \sum_{k=1}^n p^{2k-1} + \overline{\alpha_1} u \sum_{k=1}^n (k-1)p^{2k-3}.$$

Отсюда находим u :

$$u = -\frac{\alpha_1 \sum_{k=1}^n p^{2k-1}}{\sum_{k=1}^n (k-1)p^{2k-3}}.$$

Сравнивая это выражение с (3.26), заключаем, что число $e^{i\frac{2\pi}{n}r}$ должно быть вещественным. Это возможно лишь в том случае, если n — чётное и $e^{i\frac{2\pi}{n}r} = -1$.

Таким образом, для нечётного порядка искомое противоречие с исходной посылкой о том, что на границе матрицы U нулевые элементы отсутствуют, уже получено.

Пусть теперь n — чётное и $e^{i\frac{2\pi}{n}r} = -1$. Выпишем условие ортогональности второй и последней строк, используя при этом выражение

$$\beta_k = \beta_1 \left(-\frac{1}{p}\right)^{k-1} = (-1)^{k-1} \alpha_1 p^{n-k}.$$

Имеем

$$0 = \sum_{k=1}^n \overline{\beta_k} x_k = \overline{\alpha_1} u p^{n-2} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1) = -\frac{n}{2} p^{n-2} \overline{\alpha_1} u.$$

Тем самым, $u = 0$. Согласно (3.26), это означает

$$e^{i\frac{2\pi}{n}r} = p^2,$$

тогда как $e^{i\frac{2\pi}{n}r} = -1$. Таким образом, желаемое противоречие получено и для чётного n .

Итак, доказано, что граница U содержит нулевые элементы. Используя те же соображения, что в доказательстве теоремы 3.2, можно показать, что матрица U с точностью до домножения на перъединичную матрицу должна быть диагональной. Выясним, какие диагональные матрицы принадлежат множеству $\text{UAut}_c(H_n)$.

Пусть $U = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \text{UAut}_c(H_n)$. Возьмём в качестве трансформируемой ганкелеву матрицу A , все элементы которой равны единице. Тогда для ганкелевой матрицы $B = U^T A U$ верны соотношения $b_{jk} = \delta_j \delta_k$. Выпишем условия ганкелевости $b_{k-1, k+1} = b_{kk}$, $k = 2, \dots, n-1$:

$$\delta_{k-1} \delta_{k+1} = \delta_k^2, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Очевидно, что диагональные элементы матрицы U должны образовывать геометрическую прогрессию. Полагая $\sigma = \delta_1$, $\varepsilon = \delta_2/\delta_1$, заключаем, что

$$U = \sigma \cdot \text{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}).$$

Теорема доказана.

3.5. Связь между группами унитарных автоморфизмов

Рассматривая вместе все четыре теоремы 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, можно заметить, что при $n > 2$

$$\mathrm{UAut}(T_n) = \mathrm{UAut}_c(H_n) \quad (3.27)$$

и

$$\mathrm{UAut}(H_n) = \mathrm{UAut}_c(T_n). \quad (3.28)$$

Данный параграф даёт простое объяснение этих равенств. При этом мы будем считать, что нам известны только составы групп $\mathrm{UAut}(T_n)$ и $\mathrm{UAut}(H_n)$. Используем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.2. *Для любой матрицы $U \in \mathrm{UAut}(T_n)$ произведение*

$$P_n U^T P_n U \quad (3.29)$$

есть скалярная матрица.

Доказательство

Проверим утверждение леммы для образующих элементов группы $\mathrm{UAut}(T_n)$. Если $U = P_n$, то произведение (3.29) есть, очевидно, единичная матрица I_n . Пусть теперь D — невырожденная диагональная матрица с элементами, образующими геометрическую прогрессию, то есть

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_k = \sigma \varepsilon^{k-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\{P_n D P_n D\}_{kk} = d_{n+1-k} d_k = \sigma^2 \varepsilon^{n-1}.$$

Таким образом,

$$P_n D^T P_n D = \sigma^2 \varepsilon^{n-1} I_n.$$

Предположим, что матрицы U_1 и U_2 таковы, что

$$P_n U_1^T P_n U_1 = a I_n$$

и

$$P_n U_2^T P_n U_2 = b I_n.$$

Положим $U = U_1 U_2$. Имеем

$$\begin{aligned} P_n U^T P_n U &= P_n U_2^T U_1^T P_n U_1 U_2 = \\ &= P_n U_2^T P_n (P_n U_1^T P_n U_1) U_2 = a P_n U_2^T P_n U_2 = ab I_n. \end{aligned}$$

Эта выкладка доказывает лемму.

Возьмём произвольную матрицу $U \in \text{UAut}(T_n)$. По определению этой группы для любой тёплицевой матрицы A матрица

$$B = U^* A U \tag{3.30}$$

также тёплицева. Определим ганкелевы матрицы $A_1 = A P_n$ и $B_1 = B P_n$. Тогда равенство (3.30) можно переписать в виде

$$U^* A_1 P_n U = B_1 P_n.$$

Беря от обеих частей комплексное сопряжение, получаем

$$U^T \overline{A_1} P_n \overline{U} = \overline{B_1} P_n,$$

или

$$U^T \overline{A_1} U U^* P_n \overline{U} = \overline{B_1} P_n.$$

Умножим обе части последнего равенства на $U^T P_n U$ справа:

$$U^T \overline{A_1} U = \overline{B_1} P_n U^T P_n U. \quad (3.31)$$

Согласно лемме 3.2, произведение $P_n U^T P_n U$ в правой части есть скалярная матрица. Если заставить A пробегать все пространство T_n , то матрица $\overline{A_1}$ опишет все пространство H_n . Теперь соотношение (3.31) интерпретируется таким образом: всякая унитарная матрица U , отображающая T_n в себя подобием, отображает H_n в себя конгруэнцией. Иначе говоря, доказано включение

$$\text{UAut}(T_n) \subset \text{UAut}_c(H_n).$$

Сравнение теорем 3.1 и 3.2 показывает, что $\text{UAut}(H_n)$ есть подгруппа группы $\text{UAut}(T_n)$. Поэтому лемма 3.2 применима ко всем матрицам $U \in \text{UAut}(H_n)$. Можно повторить проведенные выше рассуждения, считая теперь A и B ганкелевыми матрицами. В результате будет снова получено равенство (3.31), где на этот раз $\overline{A_1}$ и $\overline{B_1}$ — тёплицевы матрицы. Смысл этого равенства таков: всякая унитарная матрица U , отображающая H_n в себя подобием, отображает T_n в себя

конгруэнцией. Иначе говоря,

$$\mathrm{UAut}(H_n) \subset \mathrm{UAut}_c(T_n).$$

Для доказательства равенств (3.27) и (3.28) нам остается показать справедливость включений

$$\mathrm{UAut}_c(H_n) \subset \mathrm{UAut}(T_n) \tag{3.32}$$

и

$$\mathrm{UAut}_c(T_n) \subset \mathrm{UAut}(H_n). \tag{3.33}$$

Для достижения этой цели используется результат, полученный в [48, 49].

Теорема 3.5. *Пусть T — невырожденная тёплицева матрица порядка n . Обозначим через a и b вектор-столбцы размерности $n - 1$, составленные следующим образом: a состоит из поддиагональных элементов первого столбца матрицы T в их естественном порядке, а b — из внедиагональных элементов её первой строки в обращённом порядке. Матрица T^{-1} будет тёплицевой тогда и только тогда, когда векторы a и b пропорциональны.*

Таким образом, T и T^{-1} могут одновременно быть тёплицевыми матрицами только в двух случаях: (i) T и T^{-1} — (нижне- или верхне-)треугольные матрицы с ненулевой диагональю; (ii) T и T^{-1} — невырожденные ϕ -циркулянты для одного и того же числа ϕ .

Докажем включение (3.32).

Пусть U — произвольная матрица из $\text{UAut}_c(H_n)$, $n > 2$. Рассмотрим матрицу $K = U^T P_n U$. С одной стороны, так как $P_n \in H_n$, то K — тоже ганкелева; с другой стороны, $U^T, P, U \in \text{UAut}_c(H_n)$, поэтому и $K \in \text{UAut}_c(H_n)$. Кроме того, нетрудно видеть, что матрица $K^{-1} = K^* = \overline{K}$ также ганкелева. Тогда обе матрицы $T = KP_n$ и $T^{-1} = T^*$ тёплицевы и по отношению к T можно применить теорему 3.5. Поскольку матрицы T и T^* могут быть одновременно верхнетреугольными (или нижнетреугольными) только в случае, если T — скалярная матрица, то можно считать, что T — ϕ -циркулянт для некоторого числа ϕ . Таким образом, K — ганкелев ϕ -циркулянт, где $\phi \neq 0$.

Обозначим первую строку матрицы K как $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Тогда

$$\{KE_{11}K\}_{jk} = a_j a_k, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

при этом матрица $KE_{11}K = K^T E_{11} K$ обязана быть ганкелевой. Поэтому

$$a_k^2 = a_{k-1} a_{k+1}, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Рассмотрим три взаимноисключающих случая.

1. Пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$.

Тогда элементы первой строки образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\mu = \frac{a_2}{a_1}$. Рассмотрим последнюю строку матрицы K : $(a_n, \phi a_1, \phi a_2, \dots, \phi a_{n-1})$. Аналогичным образом

исследуя матрицу $KE_{nn}K$, получаем, что последняя строка матрицы K тоже состоит из ненулевых элементов и также должна состоять из последовательных элементов некоторой геометрической прогрессии.

При этом

$$\frac{\phi a_1}{a_n} = \frac{\phi a_2}{\phi a_1} = \mu.$$

Из этого следует, что каждая следующая строка матрицы K получается из предыдущей домножением на μ . Таким образом, $\text{rg } K = 1$, что невозможно, так как K — унитарная матрица.

2. Пусть $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$.

Выпишем цепочку

$$a_3^2 = a_2 a_4 = 0 \Rightarrow a_3 = 0;$$

$$a_4^2 = a_3 a_5 = 0 \Rightarrow a_4 = 0;$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{n-1}^2 = a_{n-2} a_n = 0 \Rightarrow a_{n-1} = 0.$$

Более того, $a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = 0 \Rightarrow a_n = 0$. Таким образом, $K = a_1 \oplus \phi a_1 P_{n-1}$. Но это невозможно, так как в таком случае $KE_{nn}K = \phi^2 a_1^2 E_{22} \notin H_n$, что противоречит условию $K \in \text{UAut}_c(H_n)$.

3. Пусть $a_1 = 0$.

Выписывая цепочку

$$a_2^2 = a_1 a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = 0,$$

$$a_3^2 = a_2 a_4 = 0 \Rightarrow a_3 = 0,$$

... ..

$$a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n = 0 \Rightarrow a_{n-1} = 0,$$

видим, что $K = a_n P_n$, что и является единственно возможным вариантом.

Таким образом, при $n > 2$ и $U \in \text{UAut}_c(H_n)$

$$U^T P_n U = \alpha P_n,$$

где α — некоторое комплексное число.

Пусть теперь U — произвольная матрица из группы $\text{UAut}_c(H_n)$, T — произвольная тѐплицева матрица и $H = T P_n$. Имеем

$$U^* T U = U^* H P_n U = U^* H \bar{U} U^T P_n U.$$

Произведение $U^* H \bar{U} = \overline{(U^T H U)}$ есть ганкелева матрица H_1 . Произведение же $U^T P_n U$ согласно доказанному выше есть матрица вида αP_n . Следовательно, матрица $U^* T U = \alpha H_1 P_n$ является тѐплицевой. Тем самым показано, что всякая матрица $U \in \text{UAut}_c(H_n)$ отображает подобием пространство T_n в себя. Иначе говоря, доказано включение (3.32) и, значит, равенство (3.27).

Перейдѐм к доказательству включения (3.33). Пусть на этот раз U — произвольная матрица из $\text{UAut}_c(T_n)$.

Рассмотрим матрицу $K = U^T U = U^T I_n U$. Она должна быть тѐплицевой, поскольку, очевидно, тѐплицевой является единичная матрица. Также $K \in \text{UAut}_c(T_n)$ как произведение элементов из этой

группы. Поскольку матрица $K^{-1} = K^*$ тоже тёплицева, то к ней можно применить теорему 3.5. Заключаем, что K — ϕ -циркулянт, причём $|\phi| = 1$.

Обозначим первую строку матрицы K как $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, последнюю как $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Тогда

$$b_{jk} = \{KE_{1n}K\}_{jk} = a_j b_k, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

при этом матрица $B = KE_{1n}K = K^T E_{1n}K$ обязана быть тёплицевой.

Тогда из равенства диагональных элементов получаем

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_n b_n. \quad (3.34)$$

Допустим, что $a_k b_k = \gamma \neq 0$, $k = 1, \dots, n$. Это будет означать, что все элементы первой и последней строк матрицы K ненулевые.

Рассмотрим теперь равенства $b_{12} = b_{23} = \dots = b_{n-1,n}$:

$$\gamma \frac{a_k}{a_{k+1}} = \gamma \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

Делаем вывод, что элементы первой строки матрицы K образуют геометрическую прогрессию с некоторым знаменателем μ . В силу того, что K является ϕ -циркулянтом, верны соотношения

$$b_k = \phi a_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$b_n = a_1,$$

поэтому из (3.34) следует

$$a_1 a_2 = a_2 a_3 = \dots = a_{n-1} a_n.$$

Это позволяет утверждать, что знаменатель $\mu = \pm 1$. Тогда все элементы первой строки по модулю должны быть равны $1/\sqrt{n}$. Приравняем нулю скалярное произведение первой и последней строк унитарной матрицы K :

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{a_1}b_1 + \dots + \overline{a_{n-1}}b_{n-1} + \overline{a_n}b_n = \overline{a_1} \cdot \phi a_2 + \dots + \overline{a_{n-1}} \cdot \phi a_n + \overline{a_n}a_1 = \\ &= \overline{a_1} \cdot \phi \mu a_1 + \dots + \overline{a_{n-1}} \cdot \phi \mu a_{n-1} + \overline{a_n}a_1 = \phi \mu (|a_1|^2 + \dots + |a_{n-1}|^2) + \overline{a_n}a_1. \end{aligned}$$

Получаем следующее выражение для ϕ :

$$\phi = -\frac{\overline{a_n}a_1}{\mu(|a_1|^2 + \dots + |a_{n-1}|^2)}.$$

Но тогда $|\phi| = 1/((n-1)|\mu|) = 1/(n-1)$, что строго меньше единицы, так как $n > 2$. Получили противоречие, указывающее на то, что

$$a_k b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Проводя далее анализ, совпадающий с тем, что был проделан для матрицы $U^* E_{1n} U$ в доказательстве теоремы 3.1 после получения такого же вывода, получаем, что матрица K должна быть диагональной или пердиагональной. Понятно, что второй случай не совместим с теплицевостью матрицы K , поэтому K — диагональная матрица, а значит, $K = \alpha I_n$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$. Так как K — унитарная матрица, то $|\alpha| = 1$.

Итак, какова бы ни была матрица $U \in \text{UAut}_c(T_n)$, справедливо соотношение $U^T U = \alpha I$ для некоторого числа α (по модулю равного

единице). Отсюда $U^T = \alpha U^*$, а потому $U \in \text{UAut}(T_n)$. Используя лемму 3.2, заключаем, что для всякой матрицы $U \in \text{UAut}_c(T_n)$ произведение $U^T P_n U$ является скалярным кратным перьединиичной матрицы. Нужное нам включение есть простое следствие этого факта.

Действительно, пусть U — произвольная матрица из группы $\text{UAut}_c(T_n)$, H — произвольная ганкелева матрица и $T = H P_n$. Имеем

$$U^* H U = U^* T P_n U = U^* T \bar{U} U^T P_n U.$$

Вместе с U группа $\text{UAut}_c(T_n)$ содержит матрицу $\bar{U}$. Поэтому произведение $U^* T \bar{U}$ есть тёплицева матрица T_1 . Произведение же $U^T P_n U$ согласно доказанному выше есть скалярное кратное перьединиичной матрицы: $U^T P_n U = \alpha P_n$. Следовательно, матрица $U^* H U = \alpha T_1 P_n$ ганкелева. Тем самым показано, что всякая матрица $U \in \text{UAut}_c(T_n)$ отображает подобием пространство H_n в себя. Иначе говоря, доказано включение (3.33) и, значит, равенство (3.28).

3.6. Группа $\text{UAut}(T H_n)$

Будем говорить, что унитарная матрица $U \in M_n$ принадлежит множеству $\text{UAut}(T H_n)$, если

$$\forall A \in T H_n \quad U^* A U \in T H_n.$$

Заметим, что задача описания множества $\text{UAut}(TH_n)$ имеет смысл только при $n > 2$, так как любая комплексная 2×2 -матрица представима в виде суммы тёплицевой и ганкелевой:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\text{UAut}(TH_2)$ совпадает с множеством всех унитарных матриц второго порядка.

Для матриц большего порядка необходимо простое правило проверки на принадлежность множеству TH_n . Здесь подойдёт результат, цитируемый в [45].

Теорема 3.6. *Матрица $A \in M_n$ является $(T+H)$ -матрицей тогда и только тогда, когда равенство*

$$a_{j-1,k} + a_{j+1,k} = a_{j,k-1} + a_{j,k+1} \quad (3.35)$$

выполняется для всех $2 \leq j, k \leq n-1$.

Соотношение (3.35) будем называть правилом ромба для позиции (j, k) .

Сформулируем теперь теорему, доказательству которой и будет в основном посвящён данный параграф.

Теорема 3.7. *1. Для $n = 3$ любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_3)$ представима в виде σT , где $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$, T — элемент группы,*

порождённой матрицами Λ_3 , P_3 , а также всеми матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \varepsilon & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\xi} \mp \varepsilon), \quad \beta = -\frac{1}{2}(e^{i\xi} \pm \varepsilon), \quad \gamma = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2}{2}},$$

$\varepsilon \in [0, 1]$ и $\xi \in (-\pi, \pi]$.

2. Для $n = 4$ любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_4)$ представима в одном из четырёх следующих видов:

а)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{pmatrix} \cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & -i \sin \gamma \\ i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma \\ -\cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma \\ -i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

где $\phi, \gamma \in [0, 2\pi]$;

б)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{pmatrix} \cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & -i \sin \gamma \\ -i \sin \gamma & \cos \gamma & -i \sin \gamma & \cos \gamma \\ -\cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma \\ i \sin \gamma & \cos \gamma & -i \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

где снова $\phi, \gamma \in [0, 2\pi]$;

в) $U = e^{i\phi}(\cos \psi \cdot I_4 + i \sin \psi \cdot P_4)$, где $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$;

г) $U = e^{i\phi}(\cos \psi \cdot I_4 + i \sin \psi \cdot P_4)\Lambda_4$, где $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$.

3. Для $n \geq 5$ любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_n)$ представима в одном из двух следующих видов:

а) $U = e^{i\phi}(\cos \psi \cdot I_n + i \sin \psi \cdot P_n)$, где $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$;

б) $U = e^{i\phi}(\cos \psi \cdot I_n + i \sin \psi \cdot P_n)\Lambda_n$, где $\phi, \psi \in [0, 2\pi]$.

Перед доказательством этой теоремы введём вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3. При $n > 2$ любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_n)$ центросимметрична либо косоцентросимметрична, причём косоцентросимметричной она может быть только при чётном n .

Доказательство леммы

Пусть $n \geq 3$. Определим множество матриц $S_n = \{S \in TH_n \mid \forall X \in TH_n \quad SX \in TH_n, XS \in TH_n\}$. Очевидно, что при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ матрицы вида $\alpha I_n + \beta P_n$ принадлежат множеству S_n . Докажем, что другие матрицы в этом множестве не содержатся.

Утверждение 3.1. Верно соотношение

$$S_n = \{K = \alpha I_n + \beta P_n \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Пусть K — произвольная матрица из S_n . Тогда $KE_{11} \in TH_n$, в то время как в этой матрице все столбцы, кроме первого, нулевые, а

первый столбец совпадает с первым столбцом матрицы K . Применяя правило ромба, получаем, что в матрице KE_{11} , а значит, и в матрице K , все элементы первого столбца, кроме угловых, обязаны быть нулевыми. Например, $\{KE_{11}\}_{21} = \{KE_{11}\}_{12} + \{KE_{11}\}_{32} - \{KE_{11}\}_{23} = 0$. Рассмотрев матрицу $E_{11}K$, заключаем, что и в первой строке все элементы, кроме угловых, нулевые. То же самое получаем для последней строки и последнего столбца. (Для этого рассматриваются матрицы KE_{nn} и $E_{nn}K$.) Тем самым матрица K выглядит так:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 & k_{1n} \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & K' & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ k_{n1} & 0 & \dots & 0 & k_{nn} \end{pmatrix},$$

где K' — матрица порядка $n - 2$. Докажем, что $K' \in S_{n-2}$. Пусть X' — произвольная матрица из TH_{n-2} . Можно построить такую матрицу X из TH_n , что она содержит X' как главную подматрицу, расположенную на пересечении строк и столбцов с номерами $2, \dots, n - 1$. Чтобы доказать это, запишем X' как сумму тёплицевой и ганкелевой матриц. Пусть $X' = X'_1 + X'_2 P_{n-2}$, где матрицы X'_1, X'_2 — тёплицевы. Пространство тёплицевых матриц T_n линейно, и каждую матрицу из T_n можно представить в виде

линейной комбинации матриц Z_{nq} , $q = -n + 1, \dots, n - 1$, где

$$Z_{nq} = \begin{cases} J_n^q(0) & \text{при } q = 0, \dots, n - 1 \\ (J_n^{-q}(0))^T & \text{при } q = -n + 1, \dots, -1 \end{cases}.$$

Здесь $J_n(0)$ — жорданова клетка порядка n с собственным значением 0. Тогда, если

$$X'_1 = \sum_{q=-n+3}^{n-3} \mu_q Z_{n-2,q}, \quad X'_2 = \sum_{q=-n+3}^{n-3} \nu_q Z_{n-2,q},$$

то матрицы

$$X_1 = \sum_{q=-n+1}^{n-1} \mu_q Z_{nq}, \quad X_2 = \sum_{q=-n+1}^{n-1} \nu_q Z_{nq},$$

будут содержать X'_1 и X'_2 соответственно как подматрицы при любых значениях μ_q, ν_q , $n - 3 < |q| \leq n - 1$. Это следует из аналогичного соотношения между матрицами Z_{nq} и $Z_{n-2,q}$ при $q = -n + 3, \dots, n - 3$. Таким образом, искомая тёплицева матрица $X = X_1 + X_2 P_n$ найдена.

Пусть $L = KX \in TH_n$, тогда подматрица L' , составленная вышеописанным образом, обязана содержаться в TH_{n-2} . При этом $L' = K'X'$. Аналогично доказывается, что и $X'K' \in TH_{n-2}$. Следовательно, $K' \in S_{n-2}$.

Применяя к матрице K' те же рассуждения, что и к матрице K , и повторяя этот процесс редукции порядка, в конце концов получаем, что $K = D_1 + D_2 P_n$, где D_1, D_2 — диагональные матрицы. Однако K обязана быть (Т+Н)-матрицей, и поэтому можно применить правило

ромба к ней самой. При чётном n легко получается

$$k_{22} = k_{33} = \dots = k_{n-1,n-1} = \alpha,$$

$$k_{2,n-1} = k_{3,n-2} = \dots = k_{n-1,2} = \beta,$$

и K можно представить в виде $K = \alpha I_n + \beta P_n + \gamma_{11} E_{11} + \gamma_{1n} E_{1n} + \gamma_{n1} E_{n1} + \gamma_{nn} E_{nn}$.

Если $n = 2l + 1 > 3$ — нечётное число, то

$$k_{22} = k_{33} = \dots = k_{ll} = \alpha_1, \quad k_{l+2,l+2} = k_{l+3,l+3} = \dots = k_{2l,2l} = \alpha_2,$$

$$k_{2,2l} = k_{3,2l-1} = \dots = k_{l,l+2} = \beta_1, \quad k_{l+2,l} = k_{l+3,l-1} = \dots = k_{2l,2} = \beta_2.$$

Выписывая правило ромба для элементов $(l, l+1)$, $(l+2, l+1)$, $(l+1, l)$, $(l+1, l+2)$, получаем $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = k_{l+1,l+1}$.

Следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad k_{l+1,l+1} = \alpha + \beta,$$

и снова верно представление $K = \alpha I_n + \beta P_n + \gamma_{11} E_{11} + \gamma_{1n} E_{1n} + \gamma_{n1} E_{n1} + \gamma_{nn} E_{nn}$.

Наконец, если $n = 3$, то K приобретает тот же вид при коэффициентах $\alpha = 0$, $\beta = k_{22}$, $\gamma_{11} = k_{11}$, $\gamma_{33} = k_{33}$, $\gamma_{13} = k_{13} - k_{22}$, $\gamma_{31} = k_{31} - k_{22}$.

Итак, в любом случае найдутся комплексные константы α , β , γ_{11} , γ_{1n} , γ_{n1} , γ_{nn} , для которых имеет место соотношение

$$K = \alpha I_n + \beta P_n + \gamma_{11} E_{11} + \gamma_{1n} E_{1n} + \gamma_{n1} E_{n1} + \gamma_{nn} E_{nn}.$$

Тогда $K(E_{12} + E_{21}) = (\alpha I_n + \beta P_n)(E_{12} + E_{21}) + \gamma_{11}E_{12} + \gamma_{n1}E_{n2} \in TH_n$, так что при $n > 3$ имеем $\gamma_{11} = \gamma_{n1} = 0$, поскольку $\gamma_{11}E_{12} + \gamma_{n1}E_{n2} \in TH_n$. Рассмотрев аналогичным образом матрицу $K(E_{n,n-1} + E_{n-1,n})$, заключаем, что и $\gamma_{1n} = \gamma_{nn} = 0$ при $n > 3$. Следовательно, в этом случае $K = \alpha I_n + \beta P_n$.

Если же $n = 3$, то две рассмотренные выше матрицы дают лишь равенства $\gamma_{11} = -\gamma_{31}$ и $\gamma_{13} = -\gamma_{33}$. Однако, применив правило ромба к матрице $(E_{12} + E_{21})K$, получим ещё одно соотношение: $\gamma_{11} = -\gamma_{13}$. Но тогда $K = (\alpha + \gamma_{11})I_3 + (\beta - \gamma_{11})P_3$ и, значит, наше утверждение верно и в этом случае. Таким образом, утверждение 3.1 доказано.

Докажем ещё одно вспомогательное утверждение, которое поможет нам в описании множества $\text{UAut}(TH_n)$.

Утверждение 3.2. *Если $U \in \text{UAut}(TH_n)$, $S \in S_n$, то $U^*SU \in S_n$.*

Пусть $U^*SU = \tilde{S}$, $\tilde{X}$ — произвольная матрица из TH_n . Тогда найдётся матрица $X \in TH_n$ такая, что $U^*XU = \tilde{X}$. Поэтому $\tilde{S}\tilde{X} = U^*SU \cdot U^*XU = U^*SXU \in TH_n$, так как $U \in \text{UAut}(TH_n)$, а $SX \in TH_n$. Аналогично доказывается, что $\tilde{X}\tilde{S} \in TH_n$. Утверждение доказано.

Пусть теперь U — произвольная матрица из $\text{UAut}(TH_n)$. Тогда $U^*P_nU = K_0 \in S_n$ ввиду утверждения 3.2. По утверждению 3.1 получаем, что $K_0 = \alpha I_n + \beta P_n$. Кроме того, нам известно, что $K_0^2 = I_n$ и спектры матриц K_0 и P_n совпадают. Таким образом, $K_0 = \pm P_n$, причём при нечётном n возможен только верхний знак. Рассмотрим

случай $K_0 = P_n$. Тогда $U = P_n U P_n$ — центросимметричная матрица. В случае же $K_0 = -P_n$ получаем $U = -P_n U P_n$, и матрица U — косоцентросимметричная. Доказательство леммы 3.3 завершено.

Приступим к самой теореме.

Доказательство теоремы для $n = 3$

Пусть $U \in \text{UAut}(TH_3)$. По лемме 3.3 матрица U центросимметрична, поэтому она имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \delta & \varepsilon & \delta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Элементарными матрицами будем называть матрицы

$$\begin{aligned} T_0 &= I_3, & T_1 &= E_{12} + E_{23}, & T_{-1} &= E_{21} + E_{32}, \\ T_2 &= E_{13}, & T_{-2} &= E_{31}, \\ H_0 &= P_3, & H_1 &= E_{12} + E_{21}, & H_{-1} &= E_{23} + E_{32}, \\ H_2 &= E_{11}, & H_{-2} &= E_{33}. \end{aligned}$$

Отметим, что необходимым и достаточным условием принадлежности матрицы U множеству $\text{UAut}(TH_3)$ можно считать следующее требование: для всякой элементарной матрицы A трансформированная матрица $U^* A U$ должна быть (Т+Н)-матрицей.

Так как условия ромба для матриц третьего порядка сводятся к единственному соотношению

$$a_{12} + a_{32} = a_{21} + a_{23},$$

то должна получиться система из десяти уравнений относительно элементов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ по числу элементарных матриц. Впрочем, её можно свести к эквивалентной, состоящей из всего трёх уравнений:

$$(\alpha + \beta)\bar{\gamma} = \overline{(\alpha + \beta)}\gamma, \quad \delta\bar{\varepsilon} = \bar{\delta}\varepsilon, \quad (3.39)$$

$$\overline{(\alpha + \beta)}\varepsilon + 2\gamma\bar{\delta} = (\alpha + \beta)\bar{\varepsilon} + 2\bar{\gamma}\delta. \quad (3.40)$$

Поскольку вместе с матрицей U в множестве $\text{UAut}(TH_3)$ должна содержаться и транспонированная матрица U^T , то эти же равенства должны выполняться и при замене γ на δ и наоборот.

$$(\alpha + \beta)\bar{\delta} = \overline{(\alpha + \beta)}\delta, \quad \gamma\bar{\varepsilon} = \bar{\gamma}\varepsilon, \quad (3.41)$$

$$\overline{(\alpha + \beta)}\varepsilon + 2\bar{\gamma}\delta = (\alpha + \beta)\bar{\varepsilon} + 2\gamma\bar{\delta}. \quad (3.42)$$

Кроме того, строки и столбцы унитарной матрицы U подчинены условиям ортогональности:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1, \quad (3.43)$$

$$2|\delta|^2 + |\varepsilon|^2 = 1, \quad (3.44)$$

$$2|\gamma|^2 + |\varepsilon|^2 = 1, \quad (3.45)$$

$$(\alpha + \beta)\bar{\delta} + \gamma\bar{\varepsilon} = 0, \quad (3.46)$$

$$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + |\gamma|^2 = 0. \quad (3.47)$$

Заметим, что из (3.40) и (3.42) следует

$$\gamma\bar{\delta} = \bar{\gamma}\delta, \quad (3.48)$$

а из (3.44) и (3.45) можно сделать вывод, что

$$|\gamma| = |\delta|. \quad (3.49)$$

Полученные соотношения (3.48) и (3.49) влекут за собой более простое равенство

$$\delta = \pm\gamma. \quad (3.50)$$

Последующее доказательство будет проведено отдельно для разных случаев. Начнём со случая $\varepsilon = 0$.

Тогда из (3.44) следует $|\gamma| = |\delta| = 1/\sqrt{2}$. Умножая U на $e^{-i\arg\gamma}$, можем считать, что $\gamma = 1/\sqrt{2}$ и $\delta = \pm 1/\sqrt{2}$. Равенство (3.46) принимает вид $\alpha = -\beta$. Из (3.43) находим $|\alpha| = 1/2$. Таким образом, в данном случае матрица U имеет одну из двух возможных форм:

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{i\xi} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}e^{i\xi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}e^{i\xi} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}e^{i\xi} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

или же

$$U = \Lambda_3 \cdot \text{матрица (3.51)}.$$

Нетрудно убедиться, что все необходимые условия для включения в множество $\text{UAut}(TH_3)$ для таких матриц выполняются и обе формы действительно удовлетворяют описанию в условии теоремы.

Перейдём к случаю $\varepsilon \neq 0$, $\gamma = \delta = 0$.

Тогда из (3.43) и (3.47) следует, что

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha \bar{\beta} = -\bar{\alpha} \beta.$$

Последнее соотношение означает, что число $\alpha \bar{\beta}$ чисто мнимое.

Поэтому числа α и β имеют вид

$$\alpha = \cos \zeta \cdot e^{i\psi}, \quad \beta = i \sin \zeta \cdot e^{i\psi}.$$

Пользуясь равенством (3.42), заключаем, что $(\alpha + \beta)\bar{\varepsilon}$ является вещественным числом. Однако ввиду соотношений

$$|\alpha + \beta| = |\cos \zeta \cdot e^{i\psi} + i \sin \zeta \cdot e^{i\psi}| = |e^{i(\psi+\zeta)}| = 1$$

и выведенного из (3.44) равенства $|\varepsilon| = 1$, заключаем, что должно быть $\alpha + \beta = \pm \varepsilon$. Тогда матрица U имеет одну из двух следующих форм:

$$U = e^{i(\psi+\zeta)} \begin{pmatrix} \cos \zeta \cdot e^{-i\zeta} & 0 & i \sin \zeta \cdot e^{-i\zeta} \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin \zeta \cdot e^{-i\zeta} & 0 & \cos \zeta \cdot e^{-i\zeta} \end{pmatrix} = e^{i\psi} (\cos \zeta \cdot I_3 + i \sin \zeta \cdot P_3) \quad (3.52)$$

или

$$U = \text{матрица (3.52)} \cdot \Lambda_3.$$

Оба вида матрицы U также удовлетворяют описанию из условия теоремы, если положить $\varepsilon = 1$, $\xi = -2\zeta$.

Рассмотрим последний случай $\varepsilon \neq 0$, $\gamma, \delta \neq 0$. Из равенств (3.39) и (3.41) следует

$$\arg \gamma = \arg \delta = \arg \varepsilon \pmod{\pi}.$$

Без ограничения общности можно считать, что ε — положительное вещественное число. Тогда вещественными должны быть и элементы γ и δ . Поскольку $\delta \neq 0$, то из (3.46) можно выразить сумму $\alpha + \beta$:

$$\alpha + \beta = -\frac{\gamma}{\delta}\varepsilon = \mp\varepsilon.$$

Отметим при этом, что, вычитая из равенства (3.43) равенство (3.47), получаем соотношение $|\alpha - \beta| = 1$. Тогда, полагая $\alpha - \beta = e^{i\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$, находим

$$\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\xi} \mp \varepsilon), \quad \beta = -\frac{1}{2}(e^{i\xi} \pm \varepsilon). \quad (3.53)$$

С помощью прямой подстановки снова убеждаемся, что выбранные таким образом элементы действительно удовлетворяют всем необходимым условиям. Таким образом, в случае $\varepsilon \neq 0$ существуют четыре двухпараметрические семейства решений, которые можно описать следующим образом: выберем значение параметра ε в интервале $(0, 1)$ и положим

$$\gamma = \delta = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2}{2}}.$$

Затем выберем произвольное ξ в полуинтервале $(-\pi, \pi]$ и определим α и β формулами (3.53). В результате получим семейство матриц

вида

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \gamma & \varepsilon & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Остальные три семейства соответствуют произведениям

$$\Lambda_3 U, \quad U \Lambda_3, \quad \Lambda_3 U \Lambda_3,$$

где U — матрица вида (3.54). Доказательство теоремы для случая $n = 3$ завершено.

Перед продолжением доказательства для больших порядков установим ещё одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.4. *При $n \geq 4$ унитарная матрица U , для которой $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \dots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$, тогда и только тогда принадлежит множеству $\text{UAut}(TH_n)$, когда существуют нижнетреугольная вещественная тёплицева матрица R и числа $\alpha \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{R}$ такие, что $U^* R U = S + \tilde{E}$, где $\tilde{E} = \alpha E_{11} + \bar{\alpha} E_{nn} + p E_{1n} + q E_{n1}$, а S — трёхдиагональная тёплицева матрица с нулём на главной диагонали и единицей на двух соседних с ней.*

Доказательство леммы

Пусть U — произвольная матрица из $\text{UAut}(TH_n)$, $n > 3$, причём среди элементов $u_{12}, u_{13}, \dots, u_{1,n-1}$ не все нулевые.

Тогда для любого $p = 1, \dots, n$ справедливо включение $U^*(E_{1p} + E_{2,p-1} + \dots + E_{p1})U \in TH_n$, так как $E_{1p} + E_{2,p-1} + \dots + E_{p1}$ — ганкелева матрица.

В частности, $U^*E_{11}U \in TH_n$; следовательно, эта матрица подчиняется правилу ромба. Применяя равенства (3.35) к матрице $U^*E_{11}U$, получаем

$$\bar{u}_{1i}u_{1,k-1} + \bar{u}_{1i}u_{1,k+1} = \bar{u}_{1,i-1}u_{1k} + \bar{u}_{1,i+1}u_{1k}, \quad i, k = 2, \dots, n-1. \quad (3.55)$$

Зафиксируем произвольное k . Пусть $u_{1k} \neq 0$, тогда при всех $u_{1i} \neq 0$ (3.55) можно поделить на $\bar{u}_{1i}u_{1,k}$. В частности, это возможно и при $i = k$. Получаем

$$\frac{u_{1,k-1} + u_{1,k+1}}{u_{1k}} = \overline{\left(\frac{u_{1,i-1} + u_{1,i+1}}{u_{1i}} \right)}, \quad i, k = 2, \dots, n-1 : u_{1i} \neq 0, u_{1k} \neq 0. \quad (3.56)$$

Рассмотрим сначала случай $i = k$. Тогда (3.56) даёт

$$\frac{u_{1,k-1} + u_{1,k+1}}{u_{1k}} \in \mathbb{R}, \quad k = 2, \dots, n-1 : u_{1k} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{u_{1,k-1} + u_{1,k+1}}{u_{1k}} = \frac{u_{1,i-1} + u_{1,i+1}}{u_{1i}}, \quad i, k = 2, \dots, n-1 : u_{1i} \neq 0, u_{1k} \neq 0.$$

Слева в последнем равенстве зависимость только от k , справа — только от i , и поэтому обе части равны какой-то константе. Обозначим её r_1 . В таком случае $r_1 \in \mathbb{R}$ и верно следующее равенство:

$$u_{1,k-1} + u_{1,k+1} = r_1 u_{1k}, \quad k = 2, \dots, n-1 : u_{1k} \neq 0. \quad (3.57)$$

Пусть теперь $u_{1k} = 0$. Тогда из (3.55) следует, что $(u_{1,k-1} + u_{1,k+1})\bar{u}_{1i} = 0$ для всех $i = 2, \dots, n-1$. По предположению можно

подобрать такое i , что $u_{1i} \neq 0$. Поэтому $u_{1,k-1} + u_{1,k+1} = 0 = r_1 u_{1k}$. Таким образом, равенство (3.57) оказывается верным и в случае $u_{1k} = 0$. Аналогичным способом можно показать, что существуют такие $r_2, r_3 \in \mathbb{R}$, что

$$u_{2,k-1} + u_{2,k+1} = r_1 u_{2k} + r_2 u_{1k}, \quad (3.58)$$

$$u_{3,k-1} + u_{3,k+1} = r_1 u_{3k} + r_2 u_{2k} + r_3 u_{1k}. \quad (3.59)$$

Для этого надо рассматривать матрицы $U^*(E_{12} + E_{21})U$ и $U^*(E_{13} + E_{22} + E_{31})U$. Однако оказывается, что верна общая формула

$$u_{j,k-1} + u_{j,k+1} = r_1 u_{jk} + r_2 u_{j-1,k} + \dots + r_j u_{1k} = \sum_{t=1}^j r_t u_{j+1-t,k},$$

$$j = 1, \dots, n, \quad k = 2, \dots, n-1. \quad (3.60)$$

Доказательство проведём методом математической индукции. Базис индукции уже имеется. Предположим теперь, что (3.60) верно для $j = 1, \dots, p-1$. Рассмотрим матрицу $X = U^*(E_{1p} + E_{2,p-1} + \dots + E_{p1})U \in TH_n$. Нетрудно видеть, что $x_{ik} = \sum_{s=1}^p \bar{u}_{si} u_{p+1-s,k}$. Снова применяем правило ромба:

$$\sum_{s=1}^p (\bar{u}_{s,i-1} + \bar{u}_{s,i+1}) u_{p+1-s,k} = \sum_{s=1}^p \bar{u}_{si} (u_{p+1-s,k-1} + u_{p+1-s,k+1}).$$

От левой суммы отделим слагаемое, соответствующее $s = p$, от правой — слагаемое, соответствующее $s = 1$, а в оставшихся суммах

применим верное по нашему предположению равенство (3.60).

$$\begin{aligned}
& (\bar{u}_{p,i-1} + \bar{u}_{p,i+1})u_{1k} + \sum_{s=1}^{p-1} \left(\sum_{t=1}^s r_t \bar{u}_{s+1-t,i} \right) u_{p+1-s,k} = \\
& = \bar{u}_{1i}(u_{p,k-1} + u_{p,k+1}) + \sum_{s=2}^p \bar{u}_{si} \left(\sum_{t=1}^{p+1-s} r_t u_{p+2-s-t,k} \right) \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Обозначим полученные двойные суммы через σ_1 и σ_2 и выделим в каждой из них коэффициент при r_t :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{s=1}^{p-1} \left(\sum_{t=1}^s r_t \bar{u}_{s+1-t,i} \right) u_{p+1-s,k} = \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=t}^{p-1} \bar{u}_{s+1-t,i} u_{p+1-s,k} \right) = \\
&= \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=1}^{p-t} \bar{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right), \\
\sigma_2 &= \sum_{s=2}^p \bar{u}_{si} \left(\sum_{t=1}^{p+1-s} r_t u_{p+2-s-t,k} \right) = \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=2}^{p+1-t} \bar{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right).
\end{aligned}$$

Видно, что σ_1 и σ_2 отличаются лишь индексами во внутренних суммах. Подставим полученные значения обратно в (3.61):

$$\begin{aligned}
& (\bar{u}_{p,i-1} + \bar{u}_{p,i+1})u_{1k} + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=1}^{p-t} \bar{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right) = \\
& = \bar{u}_{1i}(u_{p,k-1} + u_{p,k+1}) + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=2}^{p+1-t} \bar{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right)
\end{aligned}$$

Вычтем из обеих частей величину $\sum_{t=1}^{p-1} r_t \left(\sum_{s=2}^{p-t} \bar{u}_{si} u_{p+2-s-t,k} \right)$. Тогда от

каждой из внутренних сумм останется лишь одно слагаемое:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_{p,i-1} + \bar{u}_{p,i+1})u_{1k} + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \bar{u}_{1i} u_{p+1-t,k} = \\ = \bar{u}_{1i}(u_{p,k-1} + u_{p,k+1}) + \sum_{t=1}^{p-1} r_t \bar{u}_{p+1-t,i} u_{1k}. \end{aligned}$$

Пусть $u_{1k} \neq 0$. Тогда при всех $u_{1i} \neq 0$ в последнем равенстве можно поменять суммы местами, а затем поделить преобразованное равенство на $\bar{u}_{1i}u_{1,k}$:

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{u_{p,i-1} + u_{p,i+1}}{u_{1i}} - \sum_{t=1}^{p-1} \frac{r_t u_{p+1-t,i}}{u_{1i}} \right)} = \frac{u_{p,k-1} + u_{p,k+1}}{u_{1k}} - \sum_{t=1}^{p-1} \frac{r_t u_{p+1-t,k}}{u_{1k}}, \\ i, k = 2, \dots, n-1 : u_{1i} \neq 0, u_{1k} \neq 0 \end{aligned}$$

Руководствуясь теми же соображениями, что и выше, заключаем, что существует такое $r_p \in \mathbb{R}$, что

$$\frac{u_{p,k-1} + u_{p,k+1}}{u_{1k}} - \sum_{t=1}^{p-1} \frac{r_t u_{p+1-t,k}}{u_{1k}} = r_p, \quad k = 2, \dots, n-1 : u_{1k} \neq 0.$$

Это соотношение эквивалентно (3.60) при $j = p$. Пусть теперь $u_{1k} = 0$. Тогда

$$\sum_{t=1}^{p-1} r_t \bar{u}_{1i} u_{p+1-t,k} = \bar{u}_{1i}(u_{p,k-1} + u_{p,k+1}), \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Снова подбираем такое i , что $u_{1i} \neq 0$, и делим данное равенство на $\bar{u}_{1i}$. Это даёт

$$u_{p,k-1} + u_{p,k+1} = \sum_{t=1}^{p-1} r_t u_{p+1-t,k} = \sum_{t=1}^{p-1} r_t u_{p+1-t,k} + r_p u_{1k} = \sum_{t=1}^p r_t u_{p+1-t,k}.$$

Таким образом, (3.60) верно и в этом случае.

Ясно, что равенства (3.60) суть необходимые условия для включения $U \in \text{UAut}(TH_n)$. Однако можно показать, что эти же равенства являются достаточными условиями. Понятно, что $U \in \text{UAut}(TH_n)$ тогда и только тогда, когда $U^*XU \in TH_n$ для всех матриц X , относящихся хотя бы к одному из следующих четырёх классов:

- 1) $X = E_{1p} + E_{2,p-1} + \dots + E_{p1}, p = 1, \dots, n;$
- 2) $X = E_{np} + E_{n-1,p+1} + \dots + E_{pn}, p = 1, \dots, n;$
- 3) $X = E_{1p} + E_{2,p+1} + \dots + E_{n-p+1,n}, p = 1, \dots, n;$
- 4) $X = E_{np} + E_{n-1,p-1} + \dots + E_{n-p+1,1}, p = 1, \dots, n.$

Это верно, так как любую $(T+H)$ -матрицу можно представить в виде линейной комбинации указанных матриц, причём первые два матричных множества соответствуют ганкелевым компонентам $(T+H)$ -матриц, а два последних множества — их тёплицевым компонентам. (Кроме того, стоит отметить, что данная система избыточна, то есть не является базисом TH_n , так как $\dim TH_n = 4n - 4$, в то время как в четырёх выписанных классах содержится $4n$ матриц.) Нетрудно видеть, что для матрицы X первого класса матрица $P_n X$ попадает в четвёртый класс, матрица $X P_n$ — в третий, а матрица $P_n X P_n$ — во второй. При этом выполнение (3.60) соответствует включению $U^*XU \in TH_n$ для всех матриц X из первого класса. Ввиду центросимметричности матрицы U (или

её косоцентросимметричности) имеем $U^*(AP_n)U = \pm U^*AU \cdot P_n$, $U^*(P_nA)U = \pm P_n \cdot U^*AU$. Следовательно, (3.60) является необходимым и достаточным условием для включения $U \in \text{UAut}(TH_n)$, поскольку умножение на перьединичную матрицу слева или справа не выводит матрицу из множества TH_n .

Запись (3.60) можно упростить. Пусть S — трёхдиагональная тёплицева матрица с нулём на главной диагонали и единицами на двух соседних диагоналях, а R — (вещественная) нижнетреугольная тёплицева матрица с первым столбцом $(r_1, r_2, \dots, r_n)^T$. Для таких R и S левая часть соотношения (3.60) равна элементу матрицы US , стоящему в позиции (j, k) , а правая — элементу матрицы RU в той же позиции. Таким образом, это соотношение допускает следующую эквивалентную формулировку:

Унитарная матрица U , для которой $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \dots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$, тогда и только тогда принадлежит множеству $\text{UAut}(TH_n)$, когда существует такая нижнетреугольная вещественная тёплицева матрица R , что матрицы RU и US совпадают всюду, кроме, быть может, первого и последнего столбцов. Другими словами, $\{RU\}_{jk} = \{US\}_{jk}$ для $j = 1, \dots, n$ и $k = 2, \dots, n-1$.

Полученное утверждение можно улучшить. Все столбцы матрицы $RU - US$, кроме первого и последнего, нулевые; следовательно, то же самое можно сказать про матрицу $\tilde{E} =$

$U^*(RU - US) = U^*RU - S$. Однако $\tilde{E} \in TH_n$, так как R и S — тѐплицевы, а, следовательно, являются и (Т+Н)-матрицами. Снова воспользовавшись правилом ромба, получаем, что $\tilde{E} = \alpha_{11}E_{11} + \alpha_{1n}E_{1n} + \alpha_{n1}E_{n1} + \alpha_{nn}E_{nn}$ для каких-то комплексных α_{11} , α_{1n} , α_{n1} , α_{nn} . Тем самым, в матрице $\tilde{E}$ ненулевыми могут быть только угловые элементы. Например, $\{\tilde{E}\}_{21} = \{\tilde{E}\}_{12} + \{\tilde{E}\}_{32} - \{\tilde{E}\}_{23} = 0$.

Итак, $U^*RU = S + \tilde{E}$. Поэтому $(S + \tilde{E})^* = S + \tilde{E}^* = (U^*RU)^* = U^*R^TU$, откуда выводим $U^*(R + R^T)U = 2S + \tilde{E} + \tilde{E}^*$ и $U^*(R - R^T)U = \tilde{E} - \tilde{E}^*$. Заметим, что матрица $R + R^T$ — центросимметрична; значит, центросимметрична и матрица $2S + \tilde{E} + \tilde{E}^*$. Это верно, так как матрицы U и U^* одновременно центросимметричны или косоцентросимметричны. Те же соображения применимы и к матрице $R - R^T$: она косоцентросимметрична; значит, косоцентросимметрична и матрица $\tilde{E} - \tilde{E}^*$. Получаем следующие равенства:

$$\alpha_{11} + \bar{\alpha}_{11} = \alpha_{nn} + \bar{\alpha}_{nn}, \quad \alpha_{1n} + \bar{\alpha}_{n1} = \alpha_{n1} + \bar{\alpha}_{1n},$$

$$\alpha_{11} - \bar{\alpha}_{11} = -(\alpha_{nn} - \bar{\alpha}_{nn}), \quad \alpha_{1n} - \bar{\alpha}_{n1} = -(\alpha_{n1} - \bar{\alpha}_{1n}).$$

Решения данной системы имеют вид $\alpha_{11} = \alpha$, $\alpha_{nn} = \bar{\alpha}$, $\alpha_{1n} = p$, $\alpha_{n1} = q$, где $p, q \in \mathbb{R}$. Следовательно, лемма 3.4 доказана.

Доказательство теоремы для $n > 3$

Используем только что доказанную лемму для построения всех матриц $U \in \text{UAut}(TH_n)$, обладающих свойством $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \dots +$

$|u_{1,n-1}|^2 > 0$. Начнём со случая $n = 4$.

Пусть $U \in \text{UAut}(TH_4)$, $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 > 0$. Тогда $U^*RU = \tilde{S}$, где

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & r_1 & 0 & 0 \\ r_3 & r_2 & r_1 & 0 \\ r_4 & r_3 & r_2 & r_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = S + \tilde{E} = \begin{pmatrix} x + iy & 1 & 0 & p \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ q & 0 & 1 & x - iy \end{pmatrix}.$$

Матрицы R и $\tilde{S}$ подобны. Используем вначале равенство характеристических многочленов этих матриц:

$$\begin{aligned} (\lambda - r_1)^4 &= \lambda^4 - 2x\lambda^3 + (-3 - pq + x^2 + y^2)\lambda^2 + \\ &+ 4x\lambda - q + pq + 1 - p - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Приравнявая одноимённые коэффициенты найденных многочленов, получаем систему уравнений относительно вещественных чисел r_1 , x , y , p и q :

$$-4r_1 = -2x, \tag{3.62}$$

$$6r_1^2 = -3 - pq + x^2 + y^2, \tag{3.63}$$

$$-4r_1^3 = 4x, \tag{3.64}$$

$$r_1^4 = -q + pq + 1 - p - x^2 - y^2. \tag{3.65}$$

Из (3.62) и (3.64) следует, что $r_1 = 0$ и $x = 0$. Складывая (3.63) и (3.65), находим $p + q = -2$. Если положить $p = -1 + t$, $q = -1 - t$, то (3.63) даёт $y^2 = 4 - t^2$. Делая замену $t = 2 \cos \psi$, имеем $p = -1 + 2 \cos \psi$, $q = -1 - 2 \cos \psi$, $x = 0$, $y = 2 \sin \psi$, $r_1 = 0$.

Чтобы найти остальные коэффициенты r_2, r_3, r_4 матрицы R , воспользуемся критерием Шпехта-Пирси.

Теорема 3.8. (*Шпехт, Пирси, [50]*) Матрицы $A, B \in M_n$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*)$$

для всякого слова

$$W(s, t) = s^{m_1} t^{n_1} s^{m_2} t^{n_2} \dots s^{m_k} t^{n_k}$$

длиной не выше $2n^2$.

Этот критерий применим к R и $\tilde{S}$, поскольку матрица U в соотношении $U^* R U = \tilde{S}$ унитарна. В частности, справедливы равенства

$$\operatorname{tr} R^T R = 3r_2^2 + 2r_3^2 + r_4^2 = 16 = \operatorname{tr} \tilde{S}^* \tilde{S},$$

$$\operatorname{tr} R^2 R^T = 2r_2 r_3 (r_2 + r_4) = 0 = \operatorname{tr} \tilde{S}^2 \tilde{S}^*,$$

$$\operatorname{tr} R^3 R^T = r_2^3 r_4 = -16 = \operatorname{tr} \tilde{S}^3 \tilde{S}^*.$$

Решая эту систему, находим два решения

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) = \pm(0, 2, 0, -2).$$

Перепишав уравнение $U^* R U = S + \tilde{E}$ в виде

$$U \tilde{S} = R U \tag{3.66}$$

и приравняв элементы левой и правой части в позициях (1,2) и (1,3), получим (с учётом равенства $r_1 = 0$)

$$u_{11} + u_{13} = u_{12} + u_{14} = 0. \quad (3.67)$$

Положим $u_{11} = a$ и $u_{12} = b$, тогда первая строка матрицы U примет вид $(a, b, -a, -b)$.

Для определённости предположим, что U — центросимметричная матрица. В этом случае её последняя строка должна иметь вид $(-b, -a, b, a)$. Вместе с U группа $\text{UAut}(TH_4)$ содержит обратную матрицу U^* и для неё выполняются соотношения, аналогичные (3.67). Это даёт равенства $u_{11} + u_{31} = u_{21} + u_{41} = 0$. Снова учитывая центральную симметрию, запишем U в виде

$$U = \begin{pmatrix} a & b & -a & -b \\ b & c & d & -a \\ -a & d & c & b \\ -b & -a & b & a \end{pmatrix}.$$

Найдём коэффициенты c и d . Ещё раз используем матричное соотношение (3.66), приравняв в нём на этот раз элементы в позициях (4,2) и (4,3). Получаем равенства $\pm 2(d-b) = 0$ и $\pm 2(c+a) =$

0, откуда $c = -a$ и $d = b$. Итак, U должна быть матрицей вида

$$U = \begin{pmatrix} a & b & -a & -b \\ b & -a & b & -a \\ -a & b & -a & b \\ -b & -a & b & a \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы имеют единичную длину и попарно ортогональны. Отсюда выводим $2(|a|^2 + |b|^2) = 1$ и $a\bar{b} \in i\mathbb{R}$ (ортогональность первой и четвёртой строк). Записывая a в виде $a = (1/\sqrt{2})e^{i\phi} \cos \gamma$, имеем $b = i(1/\sqrt{2})e^{i\phi} \sin \gamma$. Окончательный вид матрицы U таков:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \begin{pmatrix} \cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & -i \sin \gamma \\ i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma \\ -\cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma \\ -i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Другими словами, все центросимметричные матрицы U из группы $\text{UAut}(TH_4)$, удовлетворяющие условию $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 > 0$, описываются формулой (3.68), где параметры ϕ и γ пробегают отрезок $[0, 2\pi]$.

Рассматривая косоцентросимметричные матрицы U , можно

аналогичным образом показать, что

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} \begin{pmatrix} \cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & -i \sin \gamma \\ -i \sin \gamma & \cos \gamma & -i \sin \gamma & \cos \gamma \\ -\cos \gamma & i \sin \gamma & -\cos \gamma & i \sin \gamma \\ i \sin \gamma & \cos \gamma & -i \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили две формы из четырёх для случая четвёртого порядка.

Рассмотрим матрицы большего порядка. Докажем от противного, что $\text{UAut}(TH_n)$ не содержит матриц выше четвёртого порядка, содержащих хотя бы один ненулевой элемент среди чисел $u_{12}, \dots, u_{1,n-1}$.

Пусть $U \in \text{UAut}(TH_n)$, где порядок $n \geq 5$, причём элементы первой строки матрицы U удовлетворяют соотношению $|u_{12}|^2 + |u_{13}|^2 + \dots + |u_{1,n-1}|^2 > 0$. Снова можно применить лемму 3.4. Таким образом, матрицы R и $\tilde{S} = S + (x + iy)E_{11} + (x - iy)E_{nn} + pE_{1n} + qE_{n1}$ должны быть подобны для некоторых значений вещественных чисел $r_1, \dots, r_n, p, q, x, y$.

Как известно, коэффициент при λ^{n-k} характеристического многочлена произвольной матрицы A с точностью до знака $(-1)^k$ равен сумме Δ_k^A всех её главных миноров k -го порядка. Поэтому для любых двух подобных матриц A и B порядка n выполняются равенства $\Delta_k^A = \Delta_k^B$, $k = 1, \dots, n$. Значения Δ_k^R вычисляются тривиально, так как все главные миноры k -го порядка матрицы

R равны r_1^k . Таким образом, $\Delta_k^R = C_n^k r_1^k$, где C_n^k — биномиальный коэффициент при $a^k b^{n-k}$ в разложении $(a+b)^n$.

Вычислим теперь $\Delta_k^{\tilde{S}}$ для $k = 1, 2, 3, 4$. Сумма главных миноров первого порядка любой квадратной матрицы есть не что иное, как её след:

$$\Delta_1^{\tilde{S}} = \text{tr } \tilde{S} = 2x.$$

Сумму главных миноров второго порядка разобьём на следующие слагаемые:

$$\Delta_2^{\tilde{S}} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} M_{ij} = M_{1n} + \sum_{j=2}^{n-1} M_{1j} + \sum_{i=2}^{n-1} M_{in} + \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} M_{ij}.$$

Здесь и далее $M_{i_1, \dots, i_k}$ — главный минор k -го порядка матрицы $\tilde{S}$, расположенный на пересечении строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$. Рассмотрим каждое из слагаемых искомой суммы, кроме третьего, отдельно:

$$M_{1n} = \begin{vmatrix} x + iy & p \\ q & x - iy \end{vmatrix} = x^2 + y^2 - pq;$$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} x + iy & \delta_2^j \\ \delta_2^j & 0 \end{vmatrix} = -\delta_2^j, \quad j = 2, \dots, n-1;$$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{i+1}^j \\ \delta_{i+1}^j & 0 \end{vmatrix} = -\delta_{i+1}^j, \quad 2 \leq i < j \leq n-1.$$

Здесь δ_i^j — символ Кронекера. Так как все элементы матрицы $\tilde{S}$, кроме двух угловых на позициях $(1, n)$ и $(n, 1)$, расположенные

симметрично относительно её центра, взаимно сопряжены, то миноры $\tilde{S}$ подчиняются условию $M_{i_1, \dots, i_k} = \overline{M_{n+1-i_k, \dots, n+1-i_1}}$ при $(i_1-1)^2 + (n-i_k)^2 > 0$. Таким образом, третье слагаемое вычисляемой суммы равно сопряжённому второму. Окончательно получаем для $\Delta_2^{\tilde{S}}$ выражение

$$\Delta_2^{\tilde{S}} = (x^2 + y^2 - pq) - 1 - 1 - (n - 3) = x^2 + y^2 - pq - (n - 1).$$

Для суммы главных миноров третьего порядка используется аналогичное разбиение:

$$\begin{aligned} \Delta_3^{\tilde{S}} &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} M_{ijk} = \\ &= \sum_{j=2}^{n-1} M_{1jn} + \sum_{2 \leq j < k \leq n-1} M_{1jk} + \sum_{2 \leq i < j \leq n-1} M_{ijn} + \sum_{2 \leq i < j < k \leq n-1} M_{ijk}. \end{aligned}$$

Слагаемые первой, второй и четвёртой сумм равны

$$M_{1jn} = \begin{vmatrix} x + iy & \delta_2^j & p \\ \delta_2^j & 0 & \delta_j^{n-1} \\ q & \delta_j^{n-1} & x - iy \end{vmatrix} = -(x + iy)\delta_j^{n-1} - (x - iy)\delta_2^j, \\ j = 2, \dots, n - 1,$$

$$M_{1jk} = \begin{vmatrix} x + iy & \delta_2^j & 0 \\ \delta_2^j & 0 & \delta_{j+1}^k \\ 0 & \delta_{j+1}^k & 0 \end{vmatrix} = -(x + iy)\delta_{j+1}^k, \quad 2 \leq j < k \leq n - 1,$$

$$M_{ijk} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{i+1}^j & 0 \\ \delta_{i+1}^j & 0 & \delta_{j+1}^k \\ 0 & \delta_{j+1}^k & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 2 \leq i < j < k \leq n-1.$$

Третья сумма, как и раньше, сопряжена второй. Получаем

$$\Delta_3^{\tilde{S}} = -2x - (n-3)(x+iy) - (n-3)(x-iy) + 0 = -2(n-2)x.$$

И, наконец, сумма главных миноров четвёртого порядка записывается как

$$\begin{aligned} \Delta_4^{\tilde{S}} = \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} M_{ijkl} = & \sum_{2 \leq j < k \leq n-1} M_{1jkn} + \sum_{2 \leq j < k < l \leq n-1} M_{1jkl} + \\ & + \sum_{2 \leq i < j < k \leq n-1} M_{ijkn} + \sum_{2 \leq i < j < k < l \leq n-1} M_{ijkl} \end{aligned}$$

Находим слагаемые сумм в правой части:

$$M_{1jkn} = \begin{vmatrix} x+iy & \delta_2^j & 0 & p \\ \delta_2^j & 0 & \delta_{j+1}^k & 0 \\ 0 & \delta_{j+1}^k & 0 & \delta_k^{n-1} \\ q & 0 & \delta_k^{n-1} & x-iy \end{vmatrix} = \delta_2^j \cdot \delta_k^{n-1} - \delta_{j+1}^k (x^2 + y^2 - pq),$$

$$2 \leq j < k \leq n-1,$$

$$M_{1jkl} = \begin{vmatrix} x+iy & \delta_2^j & 0 & 0 \\ \delta_2^j & 0 & \delta_{j+1}^k & 0 \\ 0 & \delta_{j+1}^k & 0 & \delta_{k+1}^l \\ 0 & 0 & \delta_{k+1}^l & 0 \end{vmatrix} = \delta_2^j \cdot \delta_{k+1}^l, \quad 2 \leq j < k < l \leq n-1,$$

$$M_{ijkl} = \begin{vmatrix} 0 & \delta_{i+1}^j & 0 & 0 \\ \delta_{i+1}^j & 0 & \delta_{j+1}^k & 0 \\ 0 & \delta_{j+1}^k & 0 & \delta_{k+1}^l \\ 0 & 0 & \delta_{k+1}^l & 0 \end{vmatrix} = \delta_{i+1}^j \cdot \delta_{k+1}^l, \quad 2 \leq i < j < k < l \leq n-1.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \Delta_4^{\tilde{S}} &= (1 - (n-3)(x^2 + y^2 - pq)) + (n-4) + (n-4) + \frac{(n-4)(n-5)}{2} = \\ &= -(n-3)(x^2 + y^2 - pq) + \frac{n^2 - 5n + 6}{2}. \end{aligned}$$

Получаем следующую систему из четырёх уравнений относительно неизвестных вещественных чисел r_1, p, q, x, y :

$$\Delta_1^R = nr_1 = 2x = \Delta_1^{\tilde{S}}, \quad (3.69)$$

$$\Delta_2^R = \frac{n(n-1)}{2}r_1^2 = x^2 + y^2 - pq - (n-1) = \Delta_2^{\tilde{S}}, \quad (3.70)$$

$$\Delta_3^R = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}r_1^3 = -2(n-2)x = \Delta_3^{\tilde{S}}, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \Delta_4^R &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}r_1^4 = \\ &= -(n-3)(x^2 + y^2 - pq) + \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \Delta_4^{\tilde{S}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Покажем, что она несовместна. Из (3.69) и (3.71) следует, что

$$r_1 = x = 0.$$

Теперь уравнения (3.70) и (3.72) принимают вид

$$y^2 - pq = n - 1$$

и

$$y^2 - pq = \frac{n-2}{2}$$

соответственно. Получаем противоречие, указывающее на то, что при $n \geq 5$ для любой матрицы $U \in \text{UAut}(TH_n)$ выполняются равенства

$$u_{12} = u_{13} = \dots = u_{1,n-1} = 0.$$

Тогда $|u_{11}|^2 + |u_{1n}|^2 = 1$, но матрица U обязана быть центросимметричной либо косоцентросимметричной, поэтому $|u_{n1}| = |u_{1n}|$, $|u_{11}| = |u_{nn}|$. Таким образом, при $n \geq 5$ всякая матрица $U \in \text{UAut}(TH_n)$ имеет форму

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & u_{1n} \\ 0 & U_{n-2} & 0 \\ u_{n1} & 0 & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где U_{n-2} — унитарная матрица порядка $n-2$. Подобно тому, как это делалось в доказательстве теоремы 3.1, легко доказывается, что $U_{n-2} \in \text{UAut}(TH_{n-2})$.

Если $n \geq 7$, то $n-2 \geq 5$ и всё вышесказанное можно применить к матрице U_{n-2} . Повторяя процесс редукции порядка, мы в конечном счете придём к центральной главной подматрице порядка 3, если n нечётное, или порядка 4, если n чётное. Такую подматрицу будем называть ядром матрицы U .

Возникает вопрос: может ли ядро матрицы $U \in \text{UAut}(TH_n)$

иметь форму (3.36) при нечётном n или одну из форм (3.37) и (3.38) при чётном n ? Покажем, что это невозможно.

Допустим, что матрица вида (3.36) U' является ядром матрицы $U \in \text{UAut}(TH_5)$. Тогда U ввиду своей центросимметричности и унитарности выглядит так:

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos \psi & 0 & 0 & 0 & ie^{i\varphi} \sin \psi \\ 0 & \alpha & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & \gamma & \varepsilon & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & \alpha & 0 \\ ie^{i\varphi} \sin \psi & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi} \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Вычислим (Т+Н)-матрицу $B = U^*(E_{12} + E_{21})U$ и применим к ней правило ромба для позиций (2,3) и (4,3):

$$\gamma \cos \psi = 0, \quad \gamma \sin \psi = 0.$$

Отсюда следует, что $\gamma = 0$, а значит, любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_5)$ (и следовательно, любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_n)$ при нечётном n) представима в виде $D_1 + D_2 P_n$, где D_1 и D_2 — диагональные матрицы.

Предположим теперь, что матрица U' вида (3.37) является ядром центросимметричной матрицы $U \in \text{UAut}(TH_6)$. (Косоцентросимметричный вариант рассматривается абсолютно так

же.) Матрица U тогда снова имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos \psi & 0 & \dots & 0 & ie^{i\varphi} \sin \psi \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & U' & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ ie^{i\varphi} \sin \psi & 0 & \dots & 0 & e^{i\varphi} \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Как и в случае нечётного порядка, исследуем $(T+H)$ -матрицу $B = U^*(E_{12} + E_{21})U$. Выпишем правила ромба для этой матрицы относительно позиций $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(5, 3)$ и $(5, 4)$:

$$\begin{aligned} \cos \psi \cos \gamma &= 0, & \cos \psi \sin \gamma &= 0, \\ \sin \psi \cos \gamma &= 0, & \sin \psi \sin \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Возводя в квадрат эти равенства и затем суммируя, получаем противоречие. Таким образом, любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_6)$ (и следовательно, любая матрица $U \in \text{UAut}(TH_n)$ при чётном n) также представима в виде $D_1 + D_2 P_n$, где D_1 и D_2 — диагональные матрицы.

Окончательно получаем, что кроме матриц форм (3.36), (3.37) и (3.38) в множество $\text{UAut}(TH_n)$ могут входить только матрицы вида $D_1 + D_2 P_n$.

Вид диагональных матриц D_1 и D_2 описывается следующим утверждением, доказательство которого завершит доказательство основной теоремы.

Утверждение 3.3. Если $n \geq 3$, $U \in \text{UAut}(TH_n)$ — матрица вида $D_1 + D_2 P_n$, где D_1, D_2 — диагональные матрицы, то существуют такие $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, что $U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_n + i \sin \psi \cdot P_n)$ или $U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_n + i \sin \psi \cdot P_n) \Lambda_n$.

Доказательство утверждения

Используем метод математической индукции. Для случая $n = 3$ исследование таких матриц уже было проведено. Матрицы форм (3.52) и $(3.52) \cdot \Lambda_3$ действительно соответствуют описанию.

Рассмотрим теперь случай четвёртого порядка. Используя теорему 3.3, делаем вывод, что матрица $U = D_1 + D_2 P_4$ должна быть центросимметричной или косоцентросимметричной. Для определённости положим, что U — центросимметричная матрица. Случай косоцентросимметричной матрицы U рассматривается аналогично.

Центросимметричная унитарная матрица $U = D_1 + D_2 P_4$ должна иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} \cos \psi_1 & 0 & 0 & ie^{i\varphi_1} \sin \psi_1 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \cos \psi_2 & ie^{i\varphi_2} \sin \psi_2 & 0 \\ 0 & ie^{i\varphi_2} \sin \psi_2 & e^{i\varphi_2} \cos \psi_2 & 0 \\ ie^{i\varphi_1} \sin \psi_1 & 0 & 0 & e^{i\varphi_1} \cos \psi_1 \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$, $\psi_1, \psi_2 \in [0, 2\pi)$. Более того, можно даже считать, что $\psi_1, \psi_2 \in [0, \pi)$,

так как

$$e^{i\varphi} \cos \psi = e^{i(\varphi+\pi)} \cos (\psi + \pi), \quad e^{i\varphi} \sin \psi = e^{i(\varphi+\pi)} \sin (\psi + \pi).$$

Снова выпишем правила ромба для матрицы $U^*(E_{12} + E_{21})U$:

$$(2, 2) : \quad e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \cos \psi_1 \cos \psi_2 = e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \cos \psi_1 \cos \psi_2; \quad (3.73)$$

$$(2, 3) : \quad ie^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \sin \psi_1 \cos \psi_2 = ie^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \cos \psi_1 \sin \psi_2; \quad (3.74)$$

$$(3, 2) : \quad -ie^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \cos \psi_1 \sin \psi_2 = -ie^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \sin \psi_1 \cos \psi_2; \quad (3.75)$$

$$(3, 3) : \quad e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \sin \psi_1 \sin \psi_2 = e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \sin \psi_1 \sin \psi_2. \quad (3.76)$$

Вычитаем из (3.73) равенство (3.76) и из (3.74) равенство (3.75), что дает

$$e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \cos (\psi_1 + \psi_2) = e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \cos (\psi_1 + \psi_2);$$

$$ie^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \sin (\psi_1 + \psi_2) = ie^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \sin (\psi_1 + \psi_2).$$

Складываем два последних равенства и делим на ненулевой общий множитель; получаем $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}$. Значит, $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} = \pm 1$. Теперь из соотношения (3.74) следует, что $\sin (\psi_1 - \psi_2) = 0$, а, следовательно, $\psi_1 = \psi_2$. Таким образом, имеем $\varphi_1 = \varphi_2 \bmod \pi$, $\psi_1 = \psi_2$. Это приводит к двум разным случаям: либо

$$U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_4 + i \sin \psi \cdot P_4),$$

либо

$$U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_4 + i \sin \psi \cdot P_4)\hat{D},$$

где $\hat{D} = \text{diag} (-1, 1, 1, -1)$. Первое верно при $\varphi_1 = \varphi_2 \bmod 2\pi$, второе — при $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi \bmod 2\pi$.

Видно, что матрицы первого типа действительно принадлежат множеству $\text{UAut}(TH_4)$. Докажем, что матрицы второго типа там не содержатся. Для этого достаточно показать, что сама матрица $\hat{D}$ не сохраняет $(T+H)$ -структуру при подобии с этой матрицей в качестве трансформирующей:

$$E_{13} + E_{22} + E_{31} \in TH_4,$$

$$\hat{D}^*(E_{13} + E_{22} + E_{31})\hat{D} = -E_{13} + E_{22} - E_{31} \notin TH_4.$$

Знак $\notin$ в последнем отношении объясняется тем, что правило ромба нарушается для этой матрицы, например, в позиции $(2, 3)$.

Таким образом, должно быть $U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_4 + i \sin \psi \cdot P_4)$. Схожий анализ случая косоцентросимметричной матрицы U привёл бы к виду $U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_4 + i \sin \psi \cdot P_4)\Lambda_4$.

Получение этих матриц заодно завершает доказательство основной теоремы для случая $n = 4$.

Пусть теперь $n \geq 5$ и утверждение верно для $k = n - 2$. Для определённости будем считать, что U — центросимметричная

матрица. Такую матрицу можно записать в виде

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} \cos \psi_1 & 0 & \dots & 0 & ie^{i\varphi_1} \sin \psi_1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & U' & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ ie^{i\varphi_1} \sin \psi_1 & 0 & \dots & 0 & e^{i\varphi_1} \cos \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1, \psi_1 \in \mathbb{R},$$

где $U' \in \text{UAut}(TH_{n-2})$. По предположению индукции U' имеет одну из форм $U' = e^{i\varphi_2}(\cos \psi_2 \cdot I_{n-2} + i \sin \psi_2 \cdot P_{n-2})$ или $U' = e^{i\varphi_2}(\cos \psi_2 \cdot I_{n-2} + i \sin \psi_2 \cdot P_{n-2})\Lambda_{n-2}$. Для определённости будем считать, что имеет место первый случай. Аналогично разбору случая четвёртого порядка, можем считать, что $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi)$, $\psi_1, \psi_2 \in [0, \pi)$.

Выписывая правила ромба для матрицы $U^*(E_{12} + E_{21})U$ относительно позиций $(2, 2)$, $(2, n-1)$, $(n-1, 2)$, $(n-1, n-1)$, получаем ту же систему (3.73)–(3.76), что и при $n = 4$. Повторяя те же рассуждения, заключаем, что матрица U должна иметь форму $U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_n + i \sin \psi \cdot P_n)$. При рассмотрении случая $U' = e^{i\varphi_2}(\cos \psi_2 \cdot I_{n-2} + i \sin \psi_2 \cdot P_{n-2})\Lambda_{n-2}$ было бы получено $U = e^{i\varphi}(\cos \psi \cdot I_n + i \sin \psi \cdot P_n)\Lambda_n$. Аналогично рассматривается случай косоцентросимметричной матрицы U . Таким образом, утверждение 3.3 доказано, а вместе с ним и теорема 3.7.

Заключение

Диссертация посвящена задаче повышения эффективности спектральных вычислений для нормальных матриц умеренного порядка, обладающих тёплицевой или ганкелевой структурой. Рассмотрены также некоторые классы (Т+Н)-матриц.

Предложенные в диссертации методы реализованы программами на языке Matlab. Приведено их сравнение со встроенной функцией Matlab'a *eig*, предназначенный для вычисления всех собственных значений матриц, полностью хранимых в оперативной памяти. Эта функция реализует QR-алгоритм, считающийся в настоящее время наиболее эффективным средством решения таких задач.

Некоторые из исследованных в диссертации классов сводятся к тёплицевым циркулянтам. Неспособность функции *eig* различать циркулянтную структуру позволяет в таких случаях на порядок повысить скорость решения спектральных задач применением быстрого преобразования Фурье. Для класса (Т+Н)-циркулянтов, структура которых совсем не очевидна и выявляется посредством $O(n^2)$ арифметических операций, также предлагается алгоритм нахождения собственных значений с асимптотической сложностью $O(n \log n)$.

Если не принимать во внимание подобные крайние случаи, то

для большинства матричных классов, рассмотренных в диссертации, предложены методы, повышающие эффективность спектральных вычислений по меньшей мере в 7–8 раз.

Особенно любопытен класс нормальных тёплицевых матриц, не являющихся φ -циркулянтами. Спектральная задача для таких матриц легко сводится к эрмитовому случаю. Эрмитовость матрицы очень эффективно используется QR-алгоритмом, но от использования тёплицевой структуры приходится отказаться. На помощь приходит приём, предложенный в 1991 г. в [39] и остающийся, к сожалению, малоизвестным. Оказывается, что простым унитарным подобием эрмитову тёплицеву матрицу можно перевести в вещественную симметричную $(T+H)$ -матрицу. Это позволяет получить дополнительный выигрыш от перехода на вещественную арифметику. Суммарный коэффициент выигрыша для данного матричного класса составляет 9–10 раз.

В связи с упомянутым выше приёмом возникает ряд важных и интересных вопросов теоретического плана. Какие ещё унитарные матрицы, кроме указанных в [39], могут использоваться для овеществления тёплицевых, ганкелевых и $(T+H)$ -матриц? Каковы унитарные автоморфизмы этих матричных классов? Аналогичные вопросы возникают при вычислении псевдособственных значений, когда унитарные подоби́я заменяются унитарными же конгруэнциями. На все эти вопросы даны ответы в

3 главе диссертации.

В заключение я хотел бы выразить благодарность В.Н. Чугунову за полезные указания, постановку некоторых задач и постоянное внимание к моей работе.

Основные выводы

В работе предлагаются численные алгоритмы, решающие спектральную задачу для нормальных тёплицевых, ганкелевых и некоторых классов $(T+H)$ -матриц. Для всех алгоритмов предлагается теоретическое обоснование. Экспериментально подтверждается эффективность этих алгоритмов. Достижение выигрыша в каждом алгоритме основано на использовании специальной структуры матриц.

Получены полные описания групп унитарных автоморфизмов $U\text{Aut}_c(T_n)$, $U\text{Aut}_c(H_n)$, $U\text{Aut}(TH_n)$.

Рекомендации по применению результатов

Результаты, полученные в данной работе, могут быть применены в задачах прикладной математики, в которых требуется найти спектр структурированных матриц. Подобные задачи встречаются во многих приложениях, например: в статье [35], посвящённой вычислению экстремальных собственных значений тёплицевых матриц, указывается, что такие матрицы используются в задачах обработки цифрового сигнала; в работе [51] показывается применение последовательностей тёплицевых матриц в случайных

процессах; согласно [52], тёплицевы матрицы можно найти и в статистической физике, а именно, при построении двумерной модели Изинга, описывающей природу ферромагнетиков; в [53] показывается возможность использования тёплицевых матриц при одном из способов нанесения водяных знаков на цифровые изображения; кроме того, трёхдиагональные тёплицевы матрицы появляются при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [54], при анализе временных рядов [55] и в методе регуляризации Тихонова при решении некорректно поставленных задач [56]. Так же широк спектр приложений задач на собственные значения ганкелевых матриц; так, применение ганкелевым матрицам и преобразованиям, соответствующим конечномерным ганкелевым операторам, можно найти: в задачах идентификации и реализации динамических систем [57], в анализе магнитного поля соленоидов [58], в обратной задаче томографии [59], а также в задачах теории кодирования и комбинаторики [60]. Согласно [61], список приложений структурированных матриц типа тёплицевых можно пополнить задачами, связанными с электродинамикой, акустикой и гидродинамикой.

Список литературы

1. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989.
2. George A., Ikramov Kh.D., Matushkina E.V., Tang W.-P. On a QR-like algorithm for some structured eigenvalue problems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1995. Vol. 16, no. 4. P. 1107–1126.
3. Камалванд М. Гасеми. Сопряжённо-нормальные матрицы и методы конгруэнтного типа для систем линейных алгебраических уравнений: Кандидатская диссертация / МГУ имени М.В. Ломоносова. 2009.
4. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. О некоторых приёмах ускорения при вычислении собственных значений нормальных тёплицевых матриц // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 12. С. 1835–1838.
5. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. О вычислении собственных значений для некоторых классов ганкелевых матриц // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2014. № 1. С. 5–10.
6. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. О собственных значениях $(T+H)$ -циркулянтов и косых $(T+H)$ -циркулянтов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 111–124.

7. Abdikalykov A.K., Chugunov V.N., Ikramov Kh.D. Unitary congruence automorphisms of the space of Toeplitz matrices // Linear and Multilinear Algebra. 2015. Vol. 63, no. 6. P. 1195–1203.
8. Абдикалыков А. К., Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. Унитарные конгруэнции и ганкелевы матрицы // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 457, № 5. С. 507–509.
9. Абдикалыков А. К. Центросимметричность унитарных матриц, сохраняющих множество $(T+H)$ -матриц путём подобия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 739–741.
10. Абдикалыков А. К. Об унитарных автоморфизмах пространства $(T+H)$ -матриц // Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 428. С. 5–12.
11. Икрамов Х. Д., Абдикалыков А. К., Чугунов В. Н. Унитарные автоморфизмы пространства $(T+H)$ -матриц порядка 3 // Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 428. С. 137–151.
12. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Москва: Физматгиз, 1963.
13. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1970.
14. Голуб Дж., Лоун Ч. Ван. Матричные вычисления. Москва: Мир, 1999.
15. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и

- приложения. Москва: Мир, 2001.
16. Уоткинс Д. С. Основы матричных вычислений. Москва: БИНОМ, 2012.
 17. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Москва: Мир, 1983.
 18. Икрамов Х. Д. Несимметричная проблема собственных значений. Москва: Наука, 1991.
 19. Higham N.J., Tisseur F. Bounds for eigenvalues of matrix polynomials // Linear Algebra and its Applications. 2003. Vol. 358, no. 1–3. P. 5–22.
 20. Atkinson F.V., Mingarelli A.B. Multiparameter Eigenvalue Problems: Sturm-Liouville Theory. CRC Press, 2010.
 21. Андреев В. Б. Численные методы. Учебное пособие. Москва: МАКС Пресс, 2013. 336 с.
 22. Calvetti D., Reichel L., Xu H. A CS decomposition for orthogonal matrices with application to eigenvalue computation // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 476. P. 197–232.
 23. Иохвидов И. С. Ганкелевы и тёплицевы матрицы и формы. Москва: Наука, 1974.
 24. Bini D.A., Pan V. Polynomial and Matrix Computations. Volume 1: Fundamental Algorithms. Basel: Birkhäuser, 1994.
 25. Davis P.J. Circulant Matrices. New York: Wiley-Interscience, 1979.
 26. Böttcher A., Silbermann B. Analysis of Toeplitz Operators. Berlin:

Springer, 2006.

27. Böttcher A., Silbermann B. Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices. New York: Springer, 1999.
28. Gray R.M. On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices // IEEE Transactions on Information Theory. 1972. Vol. 18. P. 725–730.
29. Widom H. On the singular values of Toeplitz matrices // Z. Anal. Anwendungen. 1989. Vol. 8. P. 221–229.
30. Trench W. F. Asymptotic distribution of the even and odd spectra of real symmetric Toeplitz matrices // Linear Algebra and its Applications. 1999. Vol. 302–303. P. 155–162.
31. Heinig G., Rost K. Fast algorithms for Toeplitz and Hankel matrices // Linear Algebra and its Applications. 2011. Vol. 435, no. 1. P. 1–59.
32. Chen W.W., Hurvich C.M., Lu Yi. On the Correlation Matrix of the Discrete Fourier Transform and the Fast Solution of Large Toeplitz Systems for Long-Memory Time Series // Journal of the American Statistical Association. Vol. 101, no. 174.
33. Chandrasekaran S., Gu M., Sun X. et al. A Superfast Algorithm for Toeplitz Systems of Linear Equations // SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 29, no. 4.
34. Trench W.F. On the eigenvalue problem for Toeplitz band matrices // Linear Algebra and its Applications. 1985. Vol. 64. P. 199–214.

35. Melman A. Extreme eigenvalues of real symmetric Toeplitz matrices // Math. Comput. 2001. Vol. 70, no. 234. P. 649–669.
36. Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычислительные процессы с тёплицевыми матрицами. Москва: Наука, 1987.
37. Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. Критерий нормальности комплексной тёплицевой матрицы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 2. С. 3–10.
38. Чугунов В. Н. Классификация нормальных и сопряжённо-нормальных тёплицевых и ганкелевых матриц: Докторская диссертация / Институт вычислительной математики РАН. 2011. 170 с.
39. Wilkes D.M., Morgera S.D., Noor F., Hayes M.H. A Hermitian Toeplitz matrix is unitary similar to a real Toeplitz-plus-Hankel matrix // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. Vol. 39, no. 9. P. 2146–2148.
40. Икрамов Х. Д. Об унитарном подобии эрмитовых тёплицевых матриц вещественным (Т+Н)-матрицам // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1994. Т. 34, № 2. С. 301–305.
41. Collar A. On centrosymmetric and centroskew matrices // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1962. Vol. 15. P. 265–281.
42. Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. Несколько замечаний о тёплицевых и ганкелевых циркулянтах // Записки научных

- семинаров СПб Отделения Академии Наук. 2006. Т. 334. С. 121–127.
43. Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н. О способах характеристики $(T+H)$ -матриц и $(T+H)$ -циркулянтов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 7–10.
 44. Bozzo E. Algebras of higher dimension for displacement decompositions and computations with Toeplitz plus Hankel matrices // Linear Algebra and its Applications. 1995. Vol. 230. P. 127–150.
 45. Bevilacqua R., Bonannie N., Bozzo E. On Algebras of Toeplitz Plus Hankel Matrices // Linear Algebra and its Applications. 1995. Vol. 223/224. P. 99–118.
 46. Икрамов Х. Д. Унитарные автоморфизмы пространства тёплицевых матриц // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 456, № 4. С. 389–391.
 47. Икрамов Х. Д. Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 5. С. 687–696.
 48. Huang N.M., Cline R.E. Inversion of persymmetric matrices having Toeplitz inverses // J. ACM. 1972. Vol. 19. P. 437–444.
 49. Greville T.N.E. Toeplitz matrices with Toeplitz inverses revisited // Linear Algebra and its Applications. 1983. Vol. 55. P. 87–92.
 50. Percy C. A complete set of unitary invariants for operators gener-

- ating finite W^* -algebras of type I // Pacific J. Math. 1962. Vol. 12. P. 1405–1416.
51. Gray R.M. Toeplitz and Circulant Matrices: A Review // Foundations and Trends in Communications and Information Theory. 2006. Vol. 2, no. 3. P. 155–239.
 52. Dai H., Geary Z., Kadanoff L.P. Asymptotics of eigenvalues and eigenvectors of Toeplitz matrices // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2009. Vol. 2009, no. 5. P. 05012.
 53. Sathik M.M., Sujatha S.S. Application of Toeplitz matrix in watermarking for image authentication // Computer, Communication and Electrical Technology (ICCCET), 2011 International Conference. 2011. P. 55–59.
 54. Diele F., Lopez L. The use of the factorization of five-diagonal matrices by tridiagonal Toeplitz matrices // Appl. Math. Lett. 1998. Vol. 11. P. 61–69.
 55. Luati A., Proietti T. On the spectral properties of matrices associated with trend filters // Econometric Theory. 2010. Vol. 26. P. 1247–1261.
 56. Hansen P.C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Philadelphia: SIAM, 1998.
 57. Fazel M., Pong Ting Kei, Sun D., Tseng P. Hankel Matrix Rank Minimization with Applications to System Identification and Realization // SIAM. J. Matrix Anal. and Appl. 2013. Vol. 34, no. 3.

- P. 946–977.
58. Nachamkin J., Maggiore C.J. A fourier bessel transform method for efficiently calculating the magnetic field of solenoids // Journal of Computational Physics. 1980. Vol. 37, no. 1. P. 41–55.
 59. Higgins W.E., Munson D.C. A Hankel transform approach to tomographic image reconstruction // IEEE Trans. Med. 1988. Vol. 7, no. 1. P. 59–72.
 60. Tamm U. Some Aspects of Hankel Matrices in Coding Theory and Combinatorics // The Electronic Journal of Combinatorics. 2001. Vol. 8, no. 1. P. A1.
 61. Тыртышников Е. Е. Тёплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. Москва: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1989.

Приложение

В приложении приводится реализация на языке Matlab двух из описанных алгоритмов. Функция `norm_topl1_eig` предназначена для решения спектральной задачи нормальных тёплицевых матриц класса 1. Функция `norm_hank6b_eig` предназначена для решения спектральной задачи нормальных ганкелевых матриц класса 6б. В обоих случаях предполагается, что матрица принадлежит соответствующему классу.

Функция `norm_topl1_eig`

```
function varargout = norm_topl1_eig(mat)
n = size(mat,2);
tol = 1e-8;
beta1 = 0;
for q = 2:n
    rr = mat(1, q) + mat(q, 1);
    if (abs(rr) > tol)
        beta1 = rr / abs(rr);
        break;
    end;
    rr = mat(1, q);
    if (abs(rr) > tol)
        beta1 = rr / abs(rr) * 1i;
```

```

        break;
    end;
end;
R = zeros(n);
for p = 1:n-1
    for q = p+1:n
        a = mat(p, q) / beta1;
        R(p, q) = a;
        R(q, p) = conj(a);
    end;
end;
B = real(R) + imag(R(1:n, n:-1:1));
alpha = mat(1, 1);
varargout{1} = alpha + eig(B) * beta1;

```

Функция norm_hank6b_eig

```

function varargout = norm_hank6b_eig(mat)
tol = 1e-8;
n = size(mat,2);
p = mat(1, n-1:-1:1);
q = mat(n:-1:2, n);
p1 = real(p); p2 = imag(p);
q1 = real(q); q2 = imag(q);

```

```

ind = 1;
for j = 2:n-1
    if abs(q1(j)) > abs(q1(ind))
        ind = j;
    end;
end;
xi = 0;
for j = 1:n-1
    uu = p1(j)*p2(ind) - p1(ind)*p2(j);
    if abs(uu) > tol
        t = (q2(ind)*p1(j) + q1(j)*p2(ind) -
            q1(ind)*p2(j) - q2(j)*p1(ind))/uu;
        xi = (t + sqrt(t * t - 4)) / 2;
        break;
    end;
end;
a_p = zeros(1, n - 1);
a_m = zeros(1, n - 1);
b_p = zeros(1, n - 1);
b_m = zeros(1, n - 1);
a_0 = 0;
b_0 = 0;
delta = 1 / (xi * xi - 1);

```

```

for j = 1:n-1
    cc1 = p1(j);
    cc2 = q1(j);
    zz1 = delta * (xi * cc2 - cc1);
    a_p(j) = zz1;
    b_p(j) = cc1 - zz1;
    zz2 = xi * zz1;
    a_m(j) = zz2;
    b_m(j) = cc2 - zz2;
end;
for j = 2:n
    zz = b_m(n + 1 - j) - a_p(j - 1);
    if abs(zz) > tol
        s = 0;
        for k = 2:j-1
            s = s + a_p(k - 1) * b_m(n + k - j);
        end;
        for k = j+1:n
            s = s + a_p(k - 1) * b_p(k - j);
        end;
        a_0 = -(s + real(mat(1, n)) * a_p(j - 1)) / zz;
        b_0 = real(mat(1, n)) - a_0;
        break;
    end
end

```

```

        end;
    end;
    H1 = zeros(n);
    H2 = zeros(n);
    for j = 1:n-1
        for k = 1:n-j
            H1(j, n + 1 - j - k) = a_p(k);
            H2(j, n + 1 - j - k) = b_p(k);
        end;
    end;
    for j = 2:n
        for k = 1:j-1
            H1(j, n + 1 - j + k) = a_m(n - k);
            H2(j, n + 1 - j + k) = b_m(n - k);
        end;
    end;
    for j = 1:n
        H1(j, n + 1 - j) = a_0;
        H2(j, n + 1 - j) = b_0;
    end;
    a_p1 = zeros(1, n - 1);
    b_p1 = zeros(1, n - 1);
    for j = 1:n-1

```

```

    cc1 = p2(j);
    cc2 = q2(j);
    zz1 = delta * (xi * cc2 - cc1);
    a_p1(j) = zz1;
    b_p1(j) = cc1 - zz1;
end;
k1 = dot(a_p1, a_p) / dot(a_p, a_p);
k2 = dot(b_p1, b_p) / dot(b_p, b_p);
lambda1 = eig(H1);
lambda2 = eig(H2);
res = zeros(n, 1);
cur = 1;
for j = 1:n
    a = lambda1(j);
    if (abs(a) < tol)
        while (true)
            a = lambda2(cur);
            cur = cur + 1;
            if (abs(a) > tol)
                res(j) = a * (1 + k2 * 1i);
                break;
            end;
        end;
    end;
end;

```

```
    else
        res(j) = a * (1 + k1 * 1i);
    end;
end;
varargout{1} = res;
```