

УДК 517.972

АНАЛОГИ ФОРМУЛ ФЕЙНМАНА ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ ШРЁДИНГЕРА

© 2016 г. В. Ж. Сакбаев^{1,*}, О. Г. Смолянов^{2,**}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 30.06.2016 г.

Поступило 18.07.2016 г.

В сообщении изучаются представления полугруппы Шрёдингера и группы Шрёдингера с помощью итераций Фейнмана. Исследуется не сходимость, но компактность последовательности итераций Фейнмана. Изучаются аппроксимации решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера итерациями Фейнмана. Рассматриваемая задача Коши для уравнения Шрёдингера не является корректной. В сообщении это означает, что она имеет решение, понимаемое в смысле интегрального тождества, не при всех начальных данных. Корректность задачи Коши может быть восстановлена с помощью расширения оператора до самосопряженного; однако существует континуум таких расширений. Исследованы итерации Фейнмана, множеством частичных пределов которых являются решения всех задач Коши, получаемых при различных выборах самосопряженного расширения.

DOI: 10.7868/S0869565216330069

Формулами Фейнмана обычно называются [1] представления полугруппы Шрёдингера $\exp(-i\mathbf{H})$, $t > 0$, или группы Шрёдингера $\exp(it\mathbf{H})$, $t \in \mathbb{R}$, с помощью пределов интегралов (которые называются итерациями или аппроксимациями Фейнмана) по декартовым степеням конфигурационного или фазового пространства классической гамильтоновой системы, при квантовании которой получается оператор Гамильтона $\mathbf{H}$.

В случае, когда используются интегралы по декартовым степеням конфигурационного пространства, говорят о лагранжевых формулах Фейнмана, а при использовании интегралов по декартовым степеням фазового пространства — о гамильтоновых формулах Фейнмана; однако известны аналогичные формулы, также называемые формулами Фейнмана, в которых используются декартовы степени других пространств. В этой работе мы рассматриваем только лагранжевы формулы Фейнмана.

Первая лагранжева формула Фейнмана была опубликована в 1948 г. в работе [2]; первая гамильтонова формула — в 1951 г. [3]; позже сам Фейнман отмечал, что эти формулы появились

под влиянием одной работы Дирака. Сам термин формула Фейнмана был предложен в работе [11], в которой также впервые была доказана гамильтонова формула Фейнмана; в доказательстве была использована формула Чернова (первое доказательство лагранжевой формулы Фейнмана было дано Э. Нельсоном [4] с помощью формулы Троттера, являющейся частным случаем формулы Чернова).

В сообщении рассматриваются итерации Фейнмана операторнозначных функций $\mathbf{F}: [0, +\infty) \rightarrow B(H)$ со значениями в банаховом пространстве ограниченных линейных операторов $B(H)$, действующих в гильбертовом пространстве H . Последовательность итераций операторнозначной функции $\mathbf{F}: [0, +\infty) \rightarrow B(H)$ представляет собой отображение $\mathbb{N} \times [0, +\infty) \rightarrow B(H)$, определяемое равенством $\mathbf{F}(n, t) = \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n$.

В работе изучается не сходимость, но компактность последовательности итераций Фейнмана. В частности показано, что ослабление условий теоремы Чернова приводит к появлению множества частичных пределов (т.е. пределов подпоследовательностей) у последовательности итераций Фейнмана. После этого мы применяем теорему из работы [5] (см. также [6]), согласно которой из сходимости последовательности итераций следует полугрупповое свойство предельной оператор-функции.

При этом рассматривается задача Коши для уравнения Шрёдингера:

¹ Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*E-mail: fumi2003@mail.ru

**E-mail: smolyanov@yandex.ru

$$i \frac{d}{dt} u(t) = Lu(t), \quad t > 0; \quad u(+0) = u_0, \quad u_0 \in H,$$

не являющаяся корректной: в нашей ситуации это означает, что она имеет решение не при всех начальных данных. В силу вырождения или сингулярности коэффициентов гамильтониана L этот дифференциальный оператор является лишь симметрическим, но не самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве H квантовой системы. Решением задачи Коши для уравнения Шрёдингера называется непрерывное отображение u полуоси $[0, +\infty)$ в пространство H , удовлетворяющее интегральному тождеству

$$(u_0, v(0)) = i \int_0^{+\infty} (u(t), L^* v(t)) dt \\ \forall v \in C([0, +\infty], D(L^*))$$

для произвольной пробной функции v , являющейся непрерывным отображением полуоси $[0, +\infty)$ в гильбертово пространство $D(L^*)$ с ограниченным носителем (см. [7]). Здесь через $D(L^*)$ обозначено гильбертово пространство, которое представляет собой область определения замкнутого оператора L^* , снабженное нормой графика оператора.

Корректность задачи Коши может быть восстановлена с помощью замены оператора L на его самосопряженное расширение $\bar{L}$, однако существует континуум таких расширений. В работе исследованы итерации Фейнмана $F(n, t)$, $(n, t) \in \mathbf{N} \times [0, +\infty)$, множеством частичных пределов которых при $n \rightarrow \infty$ являются полугруппы, разрешающие задачи Коши, гамильтонианами которых являются всевозможные самосопряженные расширения оператора L .

Теорема Чернова (см. [8]). Пусть X — банахово пространство, $B(X)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов в X и пусть функция $F: [0, +\infty) \rightarrow B(X)$ удовлетворяет условию $F(0) = I$, непрерывна в сильной операторной топологии и $\|(F(t))^k\|_{B(X)} \leq Me^{\alpha kt}$ для любых $t \geq 0$ и $k \in \mathbf{N}$ при некоторых $M \geq 1$ и $\alpha \geq 0$.

Предположим, что для каждого вектора x из плотного в пространстве X линейного подпространства D существует предел $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} (F(t)x - x) \equiv Ax$.

Тогда если при некотором $\lambda_0 > \alpha$ линейное пространство $(\lambda_0 I - A)D$ плотно в пространстве X , то оператор A замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $U(t)$, $t > 0$, причем для любого $u \in X$ и любого $T > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| U(t)u - \left(F\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n u \right\|_X = 0.$$

Исследуем, к чему приведет некоторое ослабление условий теоремы Чернова на приращения оператор-функции в нуле. А именно, предположим, что лишь на некотором плотном в гильбертовом пространстве X множестве D оператор-функция F имеет правую производную в нуле $F'(0)$, замыкание которой является симметричным оператором с конечными индексами дефекта.

1. Пример. Пусть индексы дефекта оператора F' равны $(2, 2)$. В этом случае множество всех самосопряженных расширений, изоморфное пространству изометрических отображений одного двумерного комплексного линейного пространства в другое, может быть параметризовано отрезком $[0, 2\pi]$.

Пусть оператор $F' \equiv S$ является оператором второй производной на пространстве $\mathcal{C}_0^\infty$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[0, \pi]$. Оператор S замыкаем, его замыканием является пополнение $W_2^2([0, \pi])$ пространства $\mathcal{C}_0^\infty$ по норме пространства Соболева $W_2^2([0, \pi])$. Областью определения сопряженного оператора S^* является $W_2^2([0, \pi])$, следовательно, оператор S имеет равные индексы дефекта $n_- = n_+ = 2$, а его дефектные подпространства $\mathcal{N}_\pm$ являются пространствами решений однородных линейных ОДУ $u''(x) = \pm iu(x)$, т.е. $\mathcal{N}_- = \mathcal{N}_+ = \text{lin}\{e^{\frac{i\pi}{4}x}, e^{-\frac{i\pi}{4}x}\}$.

Следовательно, множество $\mathcal{M}$ самосопряженных расширений оператора S изоморфно множеству унитарных преобразований двумерного пространства. Рассмотрим замкнутую кривую $F \subset \mathcal{M}$, параметризованную отрезком $[-\pi, \pi]$ следующим образом: при каждом $\gamma \in [-\pi, \pi]$ определим оператор L_γ как сужение оператора S^* на линейное многообразие:

$$D(L_\gamma) = \{u \in W_2^2([0, \pi]) : \cos(\gamma)u'(\xi) - \sin(\gamma)u(\xi) = 0 \\ \forall \xi \in \{0, \pi\}\}.$$

Тогда при любом $\gamma \in [-\pi, \pi]$ оператор L_γ самосопряжен и обладает ортонормированным базисом из собственных векторов $\{u_{\gamma, k}\}$, где при каждом $k \in \mathbf{N}$ вектор $u_{\gamma, k}$ определен равенством

$$u_{\gamma, k}(x) = \frac{k \cos(\gamma) \cos(kx) + \sin(\gamma) \sin(kx)}{(k^2 \cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma))^{1/2}}, \\ x \in [0, \pi].$$

При этом спектр оператора L_γ не зависит от $\gamma \in [-\pi, \pi]$ и представляет собой счетное множество точек комплексной плоскости $\sigma(L_\gamma) = \{-k^2, k \in \mathbf{N}\}$.

При каждом $k \in \mathbf{N}$ функция $u_{\gamma, k}$ является непрерывным отображением отрезка $[-\pi, \pi]$ в пространство H .

Л е м м а 1. При любом $T > 0$ оператор-функция e^{-itL_θ} , $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, T]$, является непрерывной в сильной операторной топологии функцией на компакте $[0, 2\pi] \times [0, T]$.

Пусть $u \in H$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $\theta \in [0, 2\pi]$ найдется такое $N_0(\theta) \in \mathbb{N}$, что $\sum_{k=1}^{N_0(\theta)} |u, u_{k, \theta}|^2 \geq \|u\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}$. Собственные функции $u_{\theta, k}$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ являются непрерывными функциями аргумента θ . Поэтому для $\theta \in [0, 2\pi]$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, \theta) > 0$, что для всех $\theta' \in (\theta - \delta(\varepsilon, \theta), \theta + \delta(\varepsilon, \theta))$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{N_0(\theta)} |u, u_{k, \theta'}|^2 \geq \|u\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}$. В силу компактности отрезка $[0, 2\pi]$ существует его покрытие конечной совокупностью интервалов $(\theta_1 - \delta(\varepsilon, \theta_1), \theta_1 + \delta(\varepsilon, \theta_1)), \dots, (\theta_m - \delta(\varepsilon, \theta_m), \theta_m + \delta(\varepsilon, \theta_m))$. Тогда если положить $N_0 = \max\{N_0(\theta_1), \dots, N_0(\theta_m)\}$, то неравенство

$$\sum_{k=1}^{N_0} |u, u_{k, \theta}|^2 \geq \|u\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

справедливо при всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

Тогда для любого $\sigma > 0$ и любого $u \in H$ существует $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k > N_0} |u, u_{k, \theta}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1)$$

Спектр оператора L_γ не зависит от $\gamma \in [\pi, \pi]$, а при каждом $k \in \mathbb{N}$ отображение $\gamma \rightarrow u_{k, \gamma}$ отрезка $[-\pi, \pi] \ni \gamma$ в пространство H непрерывно. Следовательно, для каждого вектора $u \in H$ и каждого числа $N_0 \in \mathbb{N}$ вектор-функция $f_{N_0}(u, t, \gamma) = \sum_{k=1}^{N_0} e^{ik^2} (u, u_{k, \gamma}) u_{k, \gamma}$, $(\gamma, t) \in [-\pi, \pi] \times [0, +\infty)$, является непрерывным отображением любого прямоугольника $[0, 2\pi] \times [0, T]$ в пространство H . Тогда в силу оценки (1) для каждого вектора $u \in H$ вектор-функция $f(u, t, \gamma) = e^{-itL_\gamma} u = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ik^2} (u, u_{k, \gamma}) u_{k, \gamma}$, $(\gamma, t) \in [-\pi, \pi] \times [0, +\infty)$, является непрерывным отображением любого прямоугольника $[0, 2\pi] \times [0, T]$ в пространство H . Ибо для любого $\sigma > 0$, любого $u \in H$ и любой точки $(\gamma_0, t_0) \in [-\pi, \pi] \times [0, +\infty)$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f(u, t, \gamma) - f(u, t_0, \gamma_0)\| \leq e^{-it_0L_\gamma}$ при условии $|t - t_0| + |\gamma - \gamma_0| < \delta$. Следовательно, оператор-функция e^{-itL_γ} , $(\gamma, t) \in$

$[-\pi, \pi] \times [0, +\infty)$, непрерывна на том же прямоугольнике в сильной операторной топологии.

С л е д с т в и е 1. При любом $u \in H$ выполняется условие

$$\|(e^{-itL_\gamma} - I)u\|_H \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Рассмотрим оператор-функцию $F(t) = e^{-itL_{\gamma(t)}}$, $t \in (0, \pi)$, где $\gamma(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, $t \in (0, \pi)$. В силу следствия 1 существует предел в сильной операторной топологии функции F , равный I . Функция $F(t)$, $t \in [0, \pi]$, доопределенная в точке $t=0$ значением I , непрерывна как композиция непрерывных функций на промежутке $[0, \pi]$ в сильной операторной топологии. А так как $e^{-itL_\gamma} - I \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, то доопределенная единичным оператором в точке $t=0$ оператор-функция $F(t) = e^{-itL_{\gamma(t)}}$, $t \in [0, \pi]$, сильно непрерывна на промежутке $[0, \pi]$, удовлетворяет равенству $F(0) = I$ и оценке $\|F(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in [0, \pi]$.

Таким образом, все условия леммы Чернова (см. [8]) выполнены, но условия теоремы Чернова выполнены не все: хотя для любого u_0 из плотного в пространстве H линейного пространства $D(S) = \dot{W}_2^2([0, \pi])$ существует предел $\frac{F(t) - I}{t} u_0 = Su_0$, но замыкание оператора S не является генератором сильно непрерывной полугруппы.

Последовательность итераций Фейнмана $\left\{ \left(F\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \right\}$ не является сходящейся, но она содержит сходящиеся в точках полуоси $[0, +\infty)$ подпоследовательности. Действительно, фиксируем некоторое число $t_0 > 0$, например, $t_0 = \frac{2}{\pi}$. Тогда

$$\left(F\left(\frac{t_0}{n}\right) \right)^n = \left(e^{-i\frac{2}{\pi n} L_{\frac{\pi n}{2}}} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \text{Тогда при } n_k = 4k + 1$$

имеет место сходимость подпоследовательности $\left\{ \left(F\left(\frac{t_0}{n_k}\right) \right)^{n_k} \right\}$ к унитарному оператору $e^{-it_0L_{\frac{\pi}{2}}}$, а при $n_l = 4l$ имеет место сходимость подпоследовательности

$$\left\{ \left(F\left(\frac{t_0}{n_l}\right) \right)^{n_l} \right\} \text{ к унитарному оператору } e^{-it_0L_{2\pi}}.$$

При любом $t > 0$ последовательность чисел $\left\{ \left(\frac{n}{t} \right)_{\text{mod}(2\pi)} \right\}$ имеет сходящиеся подпоследовательности. Поэтому если последовательность чисел $\left\{ \left(\frac{n_k}{t} \right)_{\text{mod}(2\pi)} \right\}$ сходится к числу $\theta \in [0, 2\pi)$, то при

любом $u_0 \in D(L_0)$ последовательность векторов

$$\frac{F\left(\frac{t}{n_k}\right) - I}{\frac{t}{n_k}} u_0 \text{ имеет предел } -iL_0 u_0.$$

2. Граф-пределы и теорема Чернова. Множество $\Gamma \subset H \oplus H$ называется сильным граф-пределом последовательности операторов $\{L_n\}$, если

1) для любого $(u, v) \in \Gamma$ найдется такая последовательность $\{u_n\}$, что $u_n \in D(L_n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u - u_n\| + \|v - L_n u_n\|) = 0$;

2) если последовательность $\{u_n\}$ такова, что $u_n \in D(L_n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и выполняются условия $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in H$, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n u_n = v \in H$, то $(u, v) \in \Gamma$.

Если сильный граф-предел последовательности операторов $\{L_n\}$ является графиком некоторого оператора A , то последовательность операторов $\{L_n\}$ называется сходящейся к оператору A в топологии сильной граф-сходимости.

Пусть подпоследовательность $\{A_n\}$ сходится в топологии сильной граф-сходимости к некоторому оператору A . Тогда:

1) для любого $(u, v) \in \Gamma_A$ найдется такая последовательность $\{u_n\}$, что $u_n \in D(A_n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u - u_n\| + \|v - A_n u_n\|) = 0$;

2) если последовательность $\{u_n\}$ такова, что $u_n \in D(A_n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и существуют такие векторы $u, v \in H$, что выполняются условия $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in H$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n u_n = v \in H$, то $(u, v) \in \Gamma_A$.

3. Компактность итераций Фейнмана.

Теорема (1-я теорема Троттера–Като) (см. [8]). Пусть $(T(t))_{t \geq 0}$ и $(T_n(t))_{t \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, — сильно непрерывные полугруппы в банаховом пространстве X , A и A_n , $n \in \mathbb{N}$, — их генераторы. Пусть существуют постоянные $M \geq 1$ и $\omega \geq 0$ такие, что выполнены неравенства

$$\|T(t)\|_{B(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \|T_n(t)\|_{B(X)} \leq M e^{\omega t} \quad (2) \\ \forall t \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда следующие три условия эквивалентны:

а) $A = \text{st.gr.} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ (где st.gr. — сильная граф-сходимость);

б) $R(\lambda, A_n)x \rightarrow R(\lambda, A)x$ при $n \rightarrow \infty \forall x \in X, \forall \lambda > \omega$;

в) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|T_n(t) - T(t)\|_H = 0 \quad \forall x \in X, \forall T > 0$.

Теорема 1 ([10], см. также [9, 11]). Пусть X — банахово пространство, $B(X)$ — банахово про-

странство линейных ограниченных операторов в X и пусть функция $F: [0, +\infty) \rightarrow B(X)$ удовлетворяет условию $F(0) = I$, непрерывна в сильной операторной топологии, удовлетворяет оценке $\|F(t)\|_{B(X)} \leq e^{\alpha t}$, $t \geq 0$ при некотором $\alpha \geq 0$.

Тогда если последовательность операторов $A_t \equiv \frac{F(t) - I}{t}$, $t > 0$, $t \rightarrow +\infty$, сходится в топологии сильной граф-сходимости к оператору A , который замыкаем, и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы сжимающих операторов $U(t)$, $t > 0$, то для любых $u \in X$ и $t \geq 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| U(t)u - \left(F\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n u \right\|_X = 0.$$

Доказательство. Как отмечено в доказательстве теоремы Чернова (см. [10]), для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha = 0$, т.е. когда $\|F(t)\| \leq 1$. Согласно лемме Чернова для любых $u \in H$, $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left\| \left(F\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n - e^{\left(F\left(\frac{t}{n}\right) - I\right)n} \right\|_H \leq \left\| \left(F\left(\frac{t}{n}\right) - I \right) u \right\|_H. \quad (3)$$

Заметим, что поскольку $\|F(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$, то $\left(u, \left(F\left(\frac{t}{n}\right) - I \right) u \right) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, n \in \mathbb{N}, u \in H$, поэтому при каждом $t \geq 0$ и каждом $n \in \mathbb{N}$ ограниченный

оператор $A_{\frac{t}{n}} \equiv \frac{F\left(\frac{t}{n}\right) - I}{\frac{t}{n}}$ — является генератором сжимающей полугруппы $\{e^{\frac{A_{\frac{t}{n}} s}{n}}, s \geq 0\}$. Таким образом, полугруппы $e^{\frac{A_{\frac{t}{n}} s}{n}}, s \geq 0$, и $e^{As}, s \geq 0$, удовлетворяют условию (2) 1-й теоремы Троттера–Като при $M = 1$ и $\omega = 0$.

Поскольку последовательность ограниченных операторов $\{A_{\frac{t}{n}}\}$ сходится в топологии сильной граф-сходимости к оператору A , то согласно 1-й теореме Троттера–Като [8] последовательность полугрупп $\{e^{\frac{A_{\frac{t}{n}} s}{n}}, s \geq 0\}$ сходится в сильной операторной топологии равномерно на каждом отрезке к полугруппе $U(s)$, $s > 0$. В частности, при $s = t$ последовательность операторов $\left\{ e^{\left(F\left(\frac{t}{n}\right) - I\right)n} \right\}$ сходится в сильной операторной топологии к оператору $U(t)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| e^{\left(F\left(\frac{t}{n}\right) - I\right)n} u - U(t)u \right\|_H = 0 \quad (4)$$

для любого $u \in H$. Пусть $u \in D(\mathbf{A})$. Тогда для любого $t > 0$ существует такая последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in H$, что выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u - u_n\| + \|\mathbf{A}u - \mathbf{A}_{\frac{t}{n}}u_n\|) = 0. \quad (5)$$

Согласно (3) для любых $u \in D(\mathbf{A})$, $t \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\left\| \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)^n - e^{\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) - \mathbf{I}\right)n} \right) u \right\|_H \leq 2\|u - u_n\|_H + \sqrt{n} \left\| \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) - \mathbf{I} \right) u_n \right\|_H. \quad (6)$$

В силу условия (5) при достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) - \mathbf{I} \right) u_n &= \frac{t}{n} \mathbf{A}_{\frac{t}{n}} u_n = \\ &= \frac{t}{n} [\mathbf{A}u + (\mathbf{A}_{\frac{t}{n}}u_n - \mathbf{A}u)] \leq 2\|\mathbf{A}u\|_H \frac{t}{n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, в силу соотношений (4), (6), (7), для любого $u \in D(\mathbf{A})$ и любого $t \geq 0$ выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)^n - \mathbf{U}(t) \right) u \right\|_H = 0, \quad (8)$$

а в силу плотности $D(\mathbf{A})$ в H и неравенств $\left\| \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)^n - \mathbf{U}(t) \right) u \right\|_{B(H)} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ равенство (8) справедливо при любом $u \in H$.

Определение. Множество $\mathcal{S}$ замкнутых операторов (секвенциально) компактно в топологии сильной граф-сходимости, если из любой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сильный граф-предел которой является оператором из множества $\mathcal{S}$.

Последовательность $\{\mathbf{A}_n\}$ компактна в топологии сильной граф-сходимости и имеет множество предельных точек $\mathbf{G} \in H \oplus H$, если

1К) для любой пары $(u, v) \in \mathbf{G}$ найдется такая последовательность $\{u_k\}$, что $u_k \in D(\mathbf{A}_k)$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|u - u_k\| + \|v - \mathbf{A}_k u_k\|) = 0;$$

2К) если последовательность $\{u_k\}$ такова, что $u_k \in D(\mathbf{A}_k)$ при любом $k \in \mathbb{N}$, и существуют такие векторы $u, v \in H$, что выполняются условия $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u \in H$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_k u_k = v \in H$, то $(u, v) \in \mathbf{G}$.

Теорема 2 [7]. Пусть H — гильбертово пространство и $\mathbf{L}$ — симметрический оператор с конечными индексами дефекта $n_- = n_+ \in \mathbb{N}$. Пусть Θ — множество самосопряженных расширений опе-

ратора $\mathbf{L}$. Тогда множество Θ компактно в топологии сильной резольвентной сходимости и в топологии сильной граф-сходимости.

Теорема 3. Пусть оператор $\mathbf{L}$ и множество Θ определены в теореме 2. Пусть функция $\mathbf{F} \in C_s(R_+, B(H))$ такова, что $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$; $\|\mathbf{F}(t)\| \leq e^{at}$ при некотором $a \geq 0$, а оператор-функция $\mathbf{A}(t) = \frac{\mathbf{F}(t) - \mathbf{I}}{t}$, $t \in (0, 1]$, имеет предкомпактное в топологии сильной граф-сходимости множество значений и сильный граф-предел $\mathbf{G} = \text{st.gr.} \lim_{t \rightarrow +0} \mathbf{A}(t)$ принадлежит множеству $\Gamma = \bigcup_{\theta \in \Theta} \Gamma_{\mathbf{L}_\theta}$, где $\Gamma_{\mathbf{L}_\theta}$ — график оператора $\mathbf{L}_\theta$.

Тогда для любого $t \geq 0$ последовательность итераций $\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)^n \right)$ компактна в сильной операторной топологии, а множество ее предельных точек принадлежит множеству $\bigcup_{\theta \in \Theta} e^{-it\mathbf{L}_\theta}$.

Действительно, для каждого $t > 0$ последовательность $\left\{ \mathbf{A}\left(\frac{t}{n}\right) \right\}$ содержит сходящуюся в топологии сильной граф-сходимости к некоторому оператору

$\mathbf{A}$ подпоследовательность $\left\{ \mathbf{A}\left(\frac{t}{n_k}\right) \right\}$. Согласно условию $\mathbf{G} \subset \Gamma$, оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным расширением оператора $\mathbf{L}$ и, следовательно, генератором сжимающей полугруппы. Применяя к по-

следовательности $\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n_k}\right)^{n_k} \right)$ рассуждения доказательства теоремы 1, получим утверждение теоремы 3.

Авторы благодарят Г.Г. Амосова, Ю.Н. Орлова, Е.Т. Шавгулидзе и Н.Н. Шамарова за многочисленные полезные замечания.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 14-01-00516.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman Path Integrals via the Chernoff Formula // J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 10. P. 5161–5171.
2. Feynman R.P. Space-Time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367–387.
3. Feynman R.P. An Operation Calculus Having Applications in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108–128.
4. Nelson E. Feynman Integrals and the Schrodinger Equation // J. Math. Phys. 1964. V. 5. № 3. P. 332–343.

5. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Тр. Мат. ин-та РАН. 2014. Т. 285. С. 232–243.
6. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. 2017. Т. 81. № 1.
7. Сакбаев В.Ж. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций // СМФН. 2012. Т. 43. С. 3–174.
8. Engel K.J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equation. B.: Springer, 2000.
9. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. М., 2009.
10. Chernoff P. Note on Product Formulas for Operator Semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 84. P. 238–242.
11. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. М., 2015.