

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Часовских Анатолия Александровича «Полнота и выразимость в классах линейных автоматов», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Исследование проблем полноты и выразимости в классах дискретных управляющих систем предваряет разработку и оптимизацию методов построения сложных функций из заданных элементарных (базисных) функций. Классическим примером управляющей системы с решенными задачами полноты и выразимости является класс булевых функций, для которого Э. Л. Постом построена решетка замкнутых классов. Окончательное решение проблемы полноты для системы функций  $k$ -значной логики ( $k \geq 3$ ) было получено И. Розенбергом, которому удалось найти все предполные классы, количество которых для каждой многозначной логики оказалось конечным.

Для класса конечных автоматов над двухэлементным множеством с операциями композиции множество предполных классов континуально, задача проверки полноты конечных подмножеств алгоритмически неразрешима, хотя критериальная система замкнутых классов для конечных подмножеств этого класса является счетной.

Линейные автоматы над конечными полями используются для решения ряда прикладных задач, поэтому проблемы полноты и выразимости для соответствующих классов автоматов с операциями композиции, рассматриваемые в работе А.А. Часовских, привлекают как с теоретический, так и с прикладной точек зрения.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка литературы. Объем диссертации составляет 268 страниц, список литературы содержит 102 источника.

Во **введении** представлен обзор основных публикаций по теме работы, определены цели и задачи исследования, введены необходимые понятия и обозначения, сформулированы полученные результаты.

В **первой главе** линейные автоматы рассматриваются как преобразователи формальных степенных рядов, определяемые наборами коэффициентов, которые являются отношениями многочленов над рассматриваемым конечным полем. Операции композиции над линейными автоматами транслируются в операции над соответствующими наборами коэффициентов. Линейные автоматы над заданным конечным полем рассмотрены в этой главе вместе с оператором аппроксимационного замыкания. Кроме этого, исследованы алгебры одноместных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность. В этой главе представлены следующие новые результаты.

1. В классах линейных автоматов над конечными полями с оператором аппроксимационного замыкания найдены все предполные классы, множества которых образуют приведенные критериальные системы.
2. Для алгебр одноместных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, вместе с операциями, индуцированными операциями композиции в многоместном случае, найдены максимальные по включению замкнутые собственные подклассы, в соответствующих терминах получен критерий полноты в этих алгебрах.

**Во второй главе** впервые решена проблема полноты в классах линейных автоматов над конечными полями с операциями композиции. Здесь автор диссертации нашел приведенные критериальные системы, являющиеся множествами предполных классов, одна из серий которых параметризована неприводимыми приведенными многочленами и автоморфизмами рассматриваемого поля. Поиск и определение этой серии предполных классов является наиболее важным и технически наиболее трудным этапом решения проблемы полноты в классах линейных автоматов.

Для доказательства критериальности полученных систем замкнутых классов использованы результаты первой главы. Кроме того, для рассматриваемых в этой главе классов предложен новый метод проверки полноты конечных подмножеств без использования алгоритма разложения многочлена на неприводимые множители и имеющий квадратичную от максимальной степени коэффициентов автоматов из данного множества сложность.

**В третьей главе** диссертации для класса линейных автоматов над полем из двух элементов с операциями композиции получены следующие новые оригинальные результаты.

1. В соответствующей алгебре коэффициентов линейных автоматов решена задача выразимости через конечные множества, содержащие единицу в замыкании.
2. Найдена структура замкнутого класса с сумматором. Для такого класса выяснено, что при наличии в нем автомата с памятью хотя бы по одному входу возникает два возможных случая строения автоматов из этого класса.
3. Разработан алгоритм проверки выразимости заданного автомата через данное конечное множество автоматов и сумматор.
4. Разработан алгоритм проверки выразимости сумматора через конечное множество линейных автоматов из рассматриваемого класса.

Результаты этой главы получены с использованием некоторых алгебраических структур, в частности, модулей, состоящих из константных автоматов, над кольцами одноместных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, что представляет собой новый метод проверки свойств выразимости линейных автоматов.

**Четвертая глава** посвящена задаче аппроксимационной выразимости в классе линейных автоматов над полем из двух элементов. Предварительно, без каких-либо ограничений, решена задача для соответствующей алгебры отношений многочленов. Оказалось, что каждая аппроксимационно замкнутая подалгебра в ней при использовании одноместного оператора замыкания порождается некоторой дробью, равной отношению многочленов. Этот результат открывает новые возможности для исследования аппроксимационной выразимости в рассматриваемом классе.

С его помощью далее автором получены следующие ранее не известные оригинальные результаты.

1. Разработан алгоритм проверки аппроксимационной выразимости через конечные множества линейных автоматов, содержащие существенный автомат (то есть автомат, значение на выходе которого в начальный момент зависит не менее чем от значений двух входов), а также в аппроксимационном замыкании которых содержатся все константные автоматы.
2. Показано, как по конечному множеству автоматов из рассматриваемого класса и существенному автоматау проверить выразимость всех константных автоматов.
3. Найдены некоторые достаточные условия аппроксимационной выразимости.
4. Выполнено сравнение операторов аппроксимационного замыкания и замыкания по операциям композиции на множествах, содержащих сумматор.
5. Показана конечная порожденность невырожденных аппроксимационно замкнутых классов, содержащих сумматор.

В **пятой главе** в классе линейных автоматов над полем из двух элементов с операциями суперпозиции впервые найдены все предполные классы и выполнено сравнение предполных классов для трех операторов замыкания: аппроксимационного, по суперпозиции и по композиции. Кроме этого, новым результатом является решение задачи полноты в классе линейных 2-адических автоматов.

В **заключении** диссертации представлены основные ее результаты.

Теоремы 1.1.1 и 1.1.2 первой главы работы соискателя представляют известные факты, о чём указано в диссертации. Остальные теоремы принадлежат её автору, для них приведены строгие математические доказательства.

В диссертации А.А. Часовских разработан новый оригинальный аппарат исследования (лишь на начальных шагах опирающийся на известные результаты), с помощью которого получено окончательное решение проблемы полноты для классов линейных автоматов в классической постановке, что является существенным продвижением в теории автоматов.

К диссертации и автореферату имеются несколько замечаний.

1. На странице 12 диссертации при изложении результатов, полученных при анализе аппроксимационной выразимости, не указано, что

речь идет о классе линейных автоматов над полем из двух элементов, а применено обозначение, используемое для классов линейных автоматов в общем случае над конечным полем.

2. На странице 15 диссертации, 14 строка сверху (в автореферате страница 14, строка 7 снизу) содержится опечатка в следующей части фразы «...или, что равносильно, не содержит единицу». Соответствующее утверждение станет верным в следующей редакции: «...или, что равносильно, содержит единицу».

3. Наличие небольшого числа опечаток, например, в автореферате на странице 10, строка 16 снизу строки, в слове «Рассматривается...»; на странице 33, строка 11 снизу дважды написан предлог «в», строка 16 снизу в слове «операторов».

Отмеченные недостатки не являются существенными, не снижают уровень полученных в работе результатов.

Диссертация имеет ясную структуру, все полученные в ней новые результаты строго доказаны, опубликованы в ведущих математических изданиях соответствующего профиля, прошли серьезную и успешную аprobацию на международных конференциях, семинарах, симпозиумах. Ошибок в обосновании результатов не выявлено. Все используемые в работе известные факты и методы снабжены соответствующими ссылками. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

**Заключение по диссертации.** Диссертация Часовских А.А. является законченным научным исследованием, выполненным на актуальную тему. При обосновании полученных результатов диссертант преодолел целый ряд значительных трудностей, разработал математический аппарат, позволивший использовать средства дискретной математики и алгебры для решения поставленных задач, обобщил известные методы, а также предложил новые методы и подходы. Многие из результатов его диссертации дают существенное продвижение по сравнению с ранее известными результатами и получены впервые.

На основании выполненных А.А. Часовских исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в теории конечных автоматов.

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 работах, 15 из которых опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика».

Работа Часовских Анатолия Александровича на тему «Полнота и выразимость в классах линейных автоматов» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к докторским диссертациям. Тема и содержание диссертации соответствуют паспорту специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика» (физико-математические науки),

а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В Ломоносова, при этом оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о докторской совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Сискатель Часовских Анатолий Александрович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика» (физико-математические науки).

Официальный оппонент  
доктор физико-  
математических наук,  
профессор, зав. кафедрой  
«Математика и физика»  
Пензенского  
государственного  
технологического  
университета

М. А. Алехина

Контактные данные:

тел. +79613543240, e-mail: [alekhina@penzgtu.ru](mailto:alekhina@penzgtu.ru) Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.09 – «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Адрес места работы: 440039 г. Пенза, проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1 а/1, Пензенский государственный технологический университет (ПензГТУ)

Подпись М. А. Алехиной удостоверяю.

Ученый секретарь ученого  
совета Пензенского  
государственного  
технологического университета

Бетрунина

августа 2021 г.