

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра газовой и волновой динамики

*На правах рукописи*

**Шамина Анастасия Александровна**

**Взаимное влияние системы трещин в  
трехмерном упругом теле**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н. проф. А.В. Звягин

Москва, 2021

## Оглавление.

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Введение                                                                                          | 3   |
| Обзор литературы                                                                                  | 9   |
| Глава 1. Численный метод моделирования систем пространственных<br>плоских трещин                  | 23  |
| 1.1. Постановка задачи и аналитический метод решения                                              | 23  |
| 1.2. Потенциалы простого и двойного слоя для плоского<br>многоугольника.                          | 28  |
| 1.3. Численный метод решения.                                                                     | 40  |
| 1.4. Методы вычисления коэффициентов интенсивности<br>напряжений (КИН).                           | 43  |
| Глава 2. Качественное исследование влияния формы трещин на<br>напряженно-деформируемое состояние. |     |
| Верификация программного кода.                                                                    | 47  |
| 2.1. Качественные исследования.                                                                   | 47  |
| 2.2. Верификация программного кода.                                                               | 57  |
| Глава 3. Взаимное влияние системы трещин.                                                         | 72  |
| 3.1. Круглые трещины.                                                                             | 72  |
| 3.2. Эллиптические трещины.                                                                       | 83  |
| 3.3. Трещины с изломом.                                                                           | 86  |
| 3.4. Трещины ветвления.                                                                           | 93  |
| 3.5. Периодические системы трещин в пространственном случае.                                      | 102 |
| Заключение.                                                                                       | 111 |
| Литература.                                                                                       | 113 |
| Приложение 1.                                                                                     | 125 |

## **Введение.**

### **Актуальность работы.**

Расчет прочности конструкции является одной из важнейших инженерных задач. Уже в середине XIX века инженеры столкнулись с проблемой возникновения концентрации напряжений в окрестности технологических отверстий, люков и т.п. Во всех этих случаях граница тела имела области с малым радиусом кривизны поверхности. Оказалось, что локальные напряжения в окрестности отверстий или инородных включений, могут многократно превышать номинальные напряжения характерные для тела без такого рода нарушений однородности. Максимальное значение отношения локального напряжения к номинальному принято называть коэффициентом концентрации напряжений. Учет этого эффекта позволял тем не менее использовать классические критерии прочности – по максимальным напряжениям или по максимальным деформациям. К началу XX века накопились теоретические и экспериментальные знания по микроструктуре тел. Оказалось, что все реальные материалы содержат достаточно большое количество микродефектов, влияние которых на прочность тела в некоторых случаях является определяющим. Более того, для таких микродефектов радиус кривизны их поверхности часто чрезвычайно мал. Чисто теоретическое решение задач в рамках упругого тела с границами нулевой кривизны приводило к парадоксальным результатам, поскольку коэффициент концентрации напряжений оказывался равным бесконечности. Возможность анализировать прочность тел с дефектами такого рода, оставаясь в рамках теории упругости, привела к необходимости предложения новых критериев, учитывающих особенности поведения напряжений в малой окрестности точек границы бесконечно малой кривизны. Новыми величинами для тел с дефектами, характеризующими прочность, стали т.н. коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). В результате возникла линейная механика разрушения.

Одним из основных объектов изучения в механике разрушения является локальное нарушение сплошности среды на некоторой части поверхности внутри тела. Этот дефект принято называть трещиной. Эволюция трещины под действием внешнего поля напряжений является одной из основных задач механики разрушения. Для анализа возможности роста поверхности трещины используется выбранный критерий. Он, как правило, тесно связан с коэффициентами интенсивности напряжений. Если с ростом размеров трещины выбранный критерий продолжает выполняться при отсутствии изменений внешнего поля напряжений, трещина называется неустойчивой. В этом случае возможен её непрогнозируемый рост и макроразрушение тела. В том случае, когда с ростом трещины, критерий перестает выполняться, трещина считается устойчивой.

Во второй половине XX века развитие математики, в особенности теории функций комплексного переменного, позволили решить аналитически множество плоских задач теории упругости о телах с трещинами. Определённые в них данные по особенностям поведения напряжений и перемещений в окрестности концов трещины являются теоретической основой справочников и пособий по механике разрушения. Но в огромном количестве реальных задач механики прочности трещины являются трёхмерными. В этом случае успехи математики в получении аналитических решений значительно скромнее. Полученные в пространственном случае аналитические решения позволяют ответить лишь на малую часть запросов практики.

Нужны современные вычислительные методы, позволяющие достаточно эффективно определять основные параметры механики разрушения (коэффициенты интенсивности напряжений, поля напряжений, поля перемещений, раскрытие берегов трещин) для систем большого количества произвольно ориентированных пространственных трещин. Это позволит ответить на многие вопросы практики. Например, на вопрос взаимного влияния трещин, в зависимости от их размеров и ориентации в пространстве.

Для некоторых технологий основой является создание самой трещины. Например, создание трещины гидроразрыва для увеличения нефтеотдачи пласта. Не менее важной задачей является оптимизация затрат на измельчение материала путём макроразрушения.

Для решения перечисленных задач необходимо проведение предсказательного моделирования критериев роста трещин, направления роста, а в некоторых случаях условия остановки этого роста.

В данной работе предложен численный метод математического моделирования системы произвольно ориентированных трещин в трёхмерном упругом теле. Метод реализован пакетом прикладных программ, Он позволяет проводить расчеты необходимых характеристик механики разрушения для большой системы пространственно ориентированных трещин, как в бесконечной упругой среде, так и в конечном упругом теле. В частном случае одной пространственной трещины пакет может быть использован для исследования и моделирования пространственной задачи гидроразрыва.

Надёжность метода была проверена сравнением с имеющимися аналитическими решениями и численными результатами других авторов. Получено хорошее качественное и количественное совпадение.

### **Цели работы.**

Одной из основных целей работы является вычисление коэффициентов интенсивности напряжений для плоских трещин. Это связано с тем, что коэффициенты интенсивности напряжений участвуют в силовых критериях возможного роста трещины. В простейшем случае считается, что если при нагрузке тела коэффициент интенсивности напряжений превышает некоторое критическое значение, то трещина начинает расти. Таким образом, знание распределения коэффициентов интенсивности напряжений вдоль границы трёхмерной трещины позволяют прогнозировать её рост и возможные направления движения.

Для системы трещин важной характеристикой является коэффициент влияния. Это отношение коэффициента интенсивности напряжений, полученное для системы трещин под заданной нагрузкой к коэффициенту интенсивности напряжений для одиночной трещины под действием той же внешней нагрузки. Знание коэффициентов влияния позволяет сделать физические выводы о прочности материала, содержащего систему трещин.

Исследование области взаимного влияния трещин позволяет на основе анализа конечной системы составить представление о бесконечной периодической системе трещин. На основе предложенной методики исследованы периодические и двояко периодические системы трещин.

Одними из мало исследованных вопросов механики разрушения являются особенности полей напряжений и перемещений для трещин ветвления. В работе рассмотрены пространственные трещины ветвления и исследован вопрос определения наиболее вероятных углов ветвления.

### **Научная новизна работы.**

В работе впервые численно исследованы задачи взаимного влияния круглых и эллиптических трещин в трёхмерном упругом пространстве. Рассмотрены разные случаи их взаимного расположения (трещины в одной плоскости, трещины, находящиеся в параллельных плоскостях). Исследованы зависимости КИН от радиусов трещин, от расстояния между ними, от взаимного сдвига центров трещин.

Предложен метод, позволяющий исследовать бесконечную периодическую систему трещин. Метод верифицирован сравнением с имеющимися аналитическими решениями.

Впервые были рассмотрены пространственные трещины с изломом и трещины ветвления.

## **Достоверность результатов**

Предложенный метод численного расчета упругой среды, ослабленной системой трещин, является методом граничных элементов. В его основе лежит разложение решения в виде линейной комбинации по определенной системе аналитически заданных функций. В качестве таких функций в данной работе выбраны решения трёх независимых задач уравнений упругости. Такой выбор гарантирует точное выполнение уравнений теории упругости внутри области. Коэффициенты разложения определяются при выполнении граничных условий в конечном множестве точек границы.

Достоверность полученных результатов установлена путём сравнения с имеющимися аналитическими решениями пространственных задач и результатами других авторов. Во всех случаях показано хорошее совпадение численных характеристик, как по полям перемещений и напряжений, так и по коэффициентам интенсивности напряжений. Проведенная верификация показала надёжность и достоверность результатов предложенного численного метода.

## **Теоретическая и практическая ценность работы.**

Диссертация имеет как теоретическую так и практическую ценность. Полученные результаты могут быть использованы в учебных целях, как пример разработки метода решения трёхмерных задач теории упругости для среды с трещинами. Прикладная ценность работы связана с возможностью её использования при оценке влияния микродефектов в форме трещин на прочность конкретных тел.

## **Положения, выносимые на защиту.**

1. Создан новый численный метод, позволяющий вычислять напряженно деформированное состояние в трехмерном упругом теле, содержащем систему произвольно ориентированных трещин. Метод позволяет решать основные задачи механики разрушения: определение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН); потоки энергии на

образование новых свободных поверхностей в случае роста трещин; коэффициенты взаимного влияния трещин.

2. В задаче о двух параллельных трещинах установлено, что определяющую роль для взаимного влияния трещин играет теневая область (если через верхнюю трещину пропустить свет, то на нижнюю будет падать тень, область тени будем называть «теневой» областью). В случае если эта область невырождена КИН в точках границы, лежащих в тени, уменьшается при сближении трещин, при этом минимальное значение КИН достигается в точке границы, которая соответствует направлению к центру другой трещины. В точках границы, удаленных от теневой области, при сближении трещин КИН возрастает. В случае вырожденной теневой области во всех точках границы КИН возрастает при уменьшении расстояния между трещинами, при этом его максимальное значение достигается в точке, соответствующей теневой области.

3. Для трещин с линией излома максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений реализуется в точках границы в окрестности линии излома. То есть, при заданных параметрах нагрузки, возможный рост будет происходить вдоль линии излома. Активная трещина с изломом более устойчива к росту, чем пассивная.

4. Для ветвящихся трещин раскрытие в точках ветвления терпит скачок, причем его величина зависит от геометрии ветвления. Толщина ветви трещины при переходе через точку ветвления может, как уменьшаться, так и увеличиваться. Проведенные расчеты позволили выявить наиболее вероятные углы ветвления для заданных параметров задачи.

5. Наличие параллельных трещин менее опасно (с точки зрения разрушения), по сравнению с единичной трещиной тех же размеров. В двоякопериодической системе трещин, когда есть в наличии и параллельные трещины и трещины, лежащие в одной плоскости, коэффициент влияния может оказаться как меньше 1, так и больше 1, в зависимости от взаимного расположения.

## Обзор литературы

### Историческая справка

Вопросы прочности материалов всегда являлись интересными и актуальными. Особую роль в исследовании прочности играет наличие микротрещин внутри материала. Данные неоднородности могут влиять на разрушение материала, как на быстрое так и медленное. Отличительной особенностью многих тел является то, что если дефект находится внутри, то визуальный осмотр невозможен и наличие можно выявить только после приложения нагрузки. В настоящее время активно разрабатываются методы диагностики наличия трещин, основанные на анализе акустических сигналов. Под трещиной понимается дефект монолитности упругой среды геометрия которого характерна тем, что его толщина пренебрежимо мала по сравнению с двумя другими размерами. В силу этого, каждый такой дефект математически моделируется элементом поверхности, который находится внутри сплошной среды, и на котором терпит разрыв поле перемещений (фактически, внутри среды, на какой-то части поверхности среда уже не является сплошной).

Механика разрушения очень разнообразна и изучает многие вопросы практической значимости, такие как, разрушение в композиционных материалах, разрушение при высоких температурах и нелинейное разрушение. В данной работе рассматриваются трещины в линейно упругой среде. Более сложные модели разрушения не рассматриваются, их описание и соответствующие ссылки на литературу можно найти в монографиях [33, 63, 64, 66, 74, 83, 84, 86].

В 1909 году Колосовым Г.В. была опубликована работа, в которой решалась задача о растяжении упругой пластины с эллиптическим отверстием. Из его решения следовало, что вблизи точек наименьшего радиуса кривизны эллипса отношение локальных напряжений к действующим номинальным напряжениям равно  $\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + 2\frac{a}{b}$ , где  $a, b$  - соответственно большая и малая

полуоси эллипса. Этот результат привел к парадоксальному выводу о бесконечных напряжениях, которые возникают при стремлении малой полуоси к нулю. Позднее то же решение было получено Инглисом в 1913 году. В настоящее время оно называется решением Колосова-Инглиса. Полученные результаты были встречены инженерным сообществом скептически. Действительно, согласно представлениям современников, бесконечные напряжения не могут существовать в силу пластических свойств материалов. В окрестности трещины должны возникнуть пластические области. Тем не менее, эти работы заставили задуматься о роли, которую микродефекты материала играют в вопросе его прочности.

В 1920 году академик А.Ф. Иоффе изучал прочность кристаллов соли. Исследования показали, что если растопить поверхностный слой, то прочность увеличится на порядки и будет стремиться к теоретической. Это объяснялось тем, что реальные материалы содержат микродефекты, которые приводят к локальной концентрации напряжений и, впоследствии, к разрушению. Поскольку материал изнашивается в основном на поверхности, то большая доля микродефектов расположена вблизи нее. При растворении поверхностного слоя значительная часть дефектов исчезает или залечивается.

В феврале 1920 года после опубликования работ Гриффитса [102, 103] произошла революция в механике твердого тела. По его представлениям, микродефекты в форме трещин являются одной из причин разрушения материалов. В соответствии с энергетическим критерием Гриффитса трещина растет, если интенсивность освобождающейся при этом потенциальной энергии достигает критического значения  $\gamma$  - плотности поверхностной энергии. Эксперименты для стекла, представленные в его работах, давали достаточно хорошее описание разрушения.

Однако оказалось, что теория Гриффитса идеально описывает только те тела, для которых область разрушения следует сразу за областью упругости. Такое разрушение принято называть хрупким. Последующие эксперименты с конструкционными материалами опровергали выводы Гриффитса. Эта теория

на достаточно долгое время была забыта, как неоправдавшая надежд. Дело в том, что у металлов в области разрушения происходит пластическая деформация, которая не описывается энергетическим критерием. Работа на пластических деформациях необратима и для многих материалов является основной частью потребления стекающей к краю трещины энергии. По этой причине возникла необходимость в иных теориях.

Ирвин [107] и Орован [117] экспериментально исследовали поведение металлов, ослабленных трещинами, и показали, что во многих случаях при приложении нагрузки пластическая деформация возникает лишь в малой окрестности трещины, поэтому весь материал в целом остаётся упругим. Впервые была сформулирована концепция квазихрупкого разрушения: так как область пластической деформации мала по сравнению с параметрами тела, то поток упругой энергии можно считать по-прежнему из упругого решения. Как и в случае хрупкой среды, разрушение происходит за счет потока упругой энергии из окрестности края трещины, но расходуется эта энергия не только на создание свободной поверхности, но и на необратимую работу создания пластических деформаций. Это позволяет сохранить общий характер критерия разрушения, внося в его константы пластические поправки. Благодаря работам Ирвина был сформулирован силовой критерий разрушения, согласно которому трещина начинает распространяться, если коэффициент интенсивности напряжений достигает критического значения  $k_c$ , характерного для данного материала.

Основными параметрами характеризующими рост трещин являются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Каждый из них характеризует определённый тип нагрузки. В настоящее время по условиям приложения нагрузки выделяют 3 основных типа трещин: трещина нормального отрыва, трещина продольного сдвига, трещина антиплоской деформации (рис. 1).

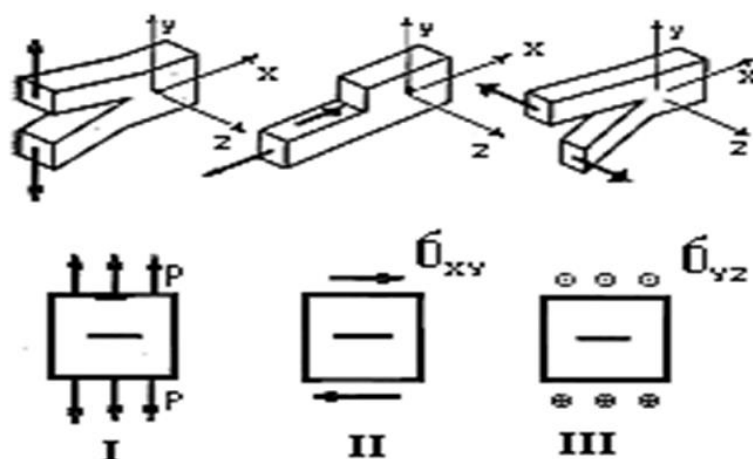


Рис 1: Различные виды трещин

В зависимости от вида приложения нагрузки выделяют соответственно первый, второй и третий коэффициенты интенсивности напряжений и обозначают  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ . Трещина начинает распространяться, если коэффициент интенсивности больше критического значения для данного материала. В плоских задачах такой параметр называется трещиностойкостью. Этот критерий можно использовать, если есть явное преобладание одного из коэффициентов интенсивности. Но в более сложных задачах удобнее пользоваться параметром  $G$  [67, 83], который представляет собой комбинацию коэффициентов интенсивности.

Наряду с теориями Ирвина и Орована предлагались и другие критерии, такие как, например, силовой критерий Г.И. Баренблатта [9-11], в котором вводится константа материала  $K$ , называемая модулем сцепления и характеризующая сопротивление материала распространению в нем трещин. Модуль интегрально характеризует поведение сил сцепления, действующих в малой окрестности конца трещины; форма трещины в этой окрестности не зависит от характера нагружения. В простейших случаях рассмотренные критерии эквивалентны, а критические значения однозначно связаны соотношением, где параметр зависит только от упругих постоянных (Реутов [69])

Следует отметить, что в настоящее время используются два определения констант разрушения, которые отличаются только множителем: коэффициент

сцепления по Г.И. Баренблатту  $K = \pi K_T$ , коэффициент интенсивности напряжений по Дж. Ирвину  $K = \sqrt{2\pi} K_T$ , где  $K_T$  - критическое значение коэффициента интенсивности напряжений. В литературе встречаются оба определения, и термин "коэффициент интенсивности напряжений" используется для обоих.

Также была опубликована работа Дж. Д. Эшльби [97], в которой была попытка связать и описать разрушение при помощи Гамильтониана. Используя сингулярность он пытался найти напряжения в угловых точках упругих тел.

Практические задачи теории трещин решались многими авторами. Так в работе М.Л. Вильямса [132] исследовалась V-образная трещина, подверженная симметричной и антисимметричной нагрузке. Было показано, что в основании трещины в направлении ее продолжения главные напряжения равны, что ведет к состоянию (двумерного) гидростатического растяжения. По мере увеличения расстояния от точки трещины энергия деформации искажения увеличивается, что указывает на возможность отклонения трещины до  $\pm 70$  градусов в стороны от её первоначального направления. Максимальное напряжение основного напряжения возникает на лучах  $\pm 60$  градусов.

В работах Кассира и Си [110, 125] также предложен критерий роста трещины. Основная идея критерия в том, что используется плотность энергии деформации на краю трещины. Главным отличием этого критерия от остальных - это то, что можно предсказать еще и направление роста трещины.

Во второй половине XX века механика разрушения из чисто теоретической науки превращается в практическую. Активно развиваются новые методы решения задач, а результаты работ начинают использоваться при исследовании прочности конструкций и в различных других приложениях. Более подробно методы изложены в работах [49, 53, 54, 62, 65, 85]. Существенно меньшее, но значительное количество работ посвящено динамике трещин [9-11, 35-37, 75-77].

Одной из распространенных практических задач механики трещин является задача о трещине гидроразрыва. Впервые задача о трещине гидроразрыва была поставлена Христиановичем и Желтовым [113]. В их работе трехмерную трещину рассматривают как двумерную, при этом в предположении о плоской деформации в горизонтальном направлении т.е. ширина трещины в вертикальной плоскости изменяется много медленнее, чем в горизонтальной. Модель трещины представлена на рис 2. Однако данной моделью тяжело было пользоваться на практике.

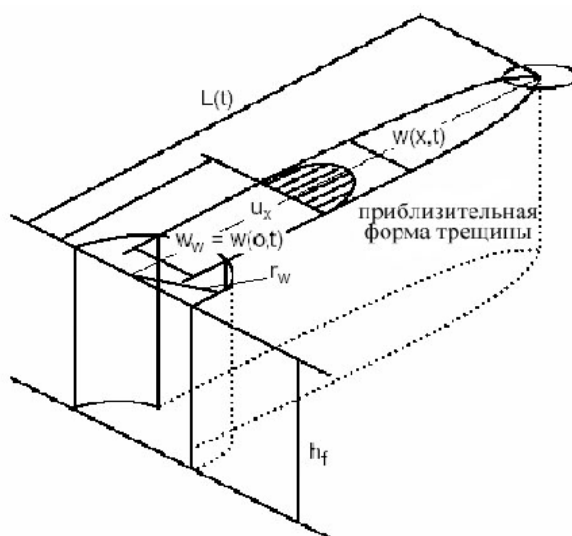


Рис 2: Модель трещины Христиановича Желтова

В теории гидравлического разрыва важную роль играет предположение о нулевом значении модуля сцепления, которое следует из условия конечности напряжений на краю трещины (гипотеза Христиановича), данного в работах [12, 13, 89]. Из этих работ также следует, что условие Христиановича соответствует условию плавного смыкания берегов трещины.

В обзоре Желтова [23] оцениваются величины силы сцепления и горного давления для трещин значительной длины (порядка десяти метров) и делается вывод о том, что силы сцепления при реальных разрывах пласта на больших глубинах не играют существенной роли.

В работе Баренблатта и Христиановича [14] обсуждается физический смысл модуля сцепления. В частности, рассматривается раскрытие двух

упругих полуплоскостей, изначально прижатых одна к другой сжимающим напряжением на бесконечности, перпендикулярным общей границе полуплоскостей и сравнивается с задачей, в которой предварительно нет разреза, и трещина растет под действием симметричных нагрузок. В этом случае показано, что для сколько нибудь значительных длин трещин (порядка десяти метров) и сжимающих напряжений порядка 100 кг/кв.см (что соответствует глубине залегания трещины порядка 40 м), в задачах механики горных пород, подобных рассмотренным в [24], влияние сил сцепления можно не учитывать.

Следует добавить, что условие нулевого модуля сцепления широко используется при моделировании роста трещин гидроразрыва. Несмотря на то, что процесс соответствует раскрытию существующего разреза или фактически распространению полости, в литературе сохраняется термин «трещина».

#### **Аналитические результаты.**

Исследования в фундаментальных задачах математики и механики XX века позволили получить аналитические решения основных краевых задач, таких как задачи Неймана, Дирихле, Римана-Гильберта и других. Их решения подробно изложены в [18, 20, 45, 48, 79]. Базовые решения этих задач были взяты за основу при решении краевых задач теории упругости для областей с разрезами, когда область пластической деформации мала по сравнению с длиной трещины. В работах [67, 85, 88] были рассмотрены разные аспекты способов определения потока энергии на конце трещины. Решение многих стационарных задач приведено в [19], а совершенно новые математические методы предложены в работе [44], также в работе [33] рассмотрены трехмерные задачи термоупругих тел с трещинами.

Аналитические методы решения пространственных задач известны лишь для трещин с простыми геометрическими свойствами и определенным характером напряженно-деформируемого состояния тела. Наиболее широко изучен круг задач с дискообразными трещинами, большинство из которых

решаются с помощью интегрального преобразования Ханкеля. Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям в плоскости, задачу сводят к дуальным интегральным уравнениям, которые решают при помощи интегрального уравнения Абеля. Качественное описание этого метода содержится в монографиях Я.С. Уфлянда [80, 81], при его помощи были вычислены коэффициенты интенсивности напряжений для дискообразной трещины, находящийся в пространстве [17, 100, 122] и полупространстве [126], а также при различных других нагрузках.

С помощью интегральных преобразований Ханкеля возможно решить аналитически неосесимметричную задачу для бесконечного тела с дискообразными трещинами, как это и сделал Я.С. Уфлянд [80]. Для этого нужно все искомые функции предварительно разложить в гармонический ряд по угловой координате и положить, что заданная на разрезе нагрузка соответствует общему члену ряда. Решение задачи также получается в виде ряда. При помощи этого метода Уэстмен [82] определил коэффициенты интенсивности напряжений для дискообразной трещины, которая находится в бесконечном теле под действием кососимметричного сдвига.

Другой метод решения неосесимметричных задач был рассмотрен В.И. Моссаковским [47]. Его основная идея состояла в том, чтобы взять за основу уравнения равновесия теории упругости в форме Папковича-Нейбера [34, 43, 51], и удовлетворить граничным условиям путем сведения к задаче теории потенциала для системы гармонических функций. Благодаря работам В.И. Моссаковского было замечено, что неосесимметричные задачи теории упругости для бесконечного тела с дискообразным разрезом можно разделить на две группы: первая - в случае заданных нормальных нагрузках, вторая - в случае внешних сдвиговых нагрузках.

С использованием интегральных преобразований Канторовича-Лебедева решалась задача о трещине в виде полуплоскости в бесконечном теле. Я.С. Уфлянд [80], а за ним Кассир и Си [111] вычислили коэффициенты

интенсивности напряжений в такой задаче при нормальных и сдвиговых нагрузках.

Наряду с преобразованиями Ханкеля в теории упругости активно используется двумерное преобразование Фурье. Используя это преобразование, удастся свести к интегральным уравнениям задачу о трещинах, находящихся в одной плоскости [21, 61]. В случае дискообразных трещин можно использовать полученные Г.Я. Поповым [60] спектральные соотношения для решения интегральных уравнений. Таким образом задача сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Большое количество работ посвящено изучению эллиптических и параболических трещин в бесконечном теле. При решении таких задач очень эффективным оказывается переход к криволинейным системам координат. Подобным образом были вычислены коэффициенты интенсивности напряжений для эллиптической [43, 101, 109, 121] и параболической [120] трещин при заданных на трещине нагрузках.

Для решения трехмерных симметричных задач для бесконечного тела с круговыми трещинами используется метод, предложенный В.В. Панасюком [52]. Опираясь на полученные М.Я. Леоновым [39-42] результаты, он нашел достаточно простой путь вычисления напряжений в квадратурах в плоскости расположения круговой трещины. Если рассматривать задачу с несколькими трещинами, расположенными в одной плоскости, то при использовании этого способа ее решение сводится к двумерным интегральным уравнениям второго рода [4-6], которые, в свою очередь, можно решить методом малого параметра.

В последнее время одним из основных методов решения задач теории упругости является метод упругих потенциалов. В работах П.И. Перлина и В.И. Самарова [58, 59] предлагается искать решение в виде суммы упругих потенциалов простого и двойного слоя первого рода. В их работе рассматривалась задача о бесконечном теле с разрезом, проведенным по произвольной поверхности Ляпунова. Опираясь на предыдущие работы [55-57] П.И. Перлин и В.И. Самаров установили, что решение данной задачи

следует искать в виде потенциала двойного слоя первого рода. Это связано со спектральными свойствами упругого потенциала. Неизвестная плотность этого потенциала есть функция смещения противоположных точек поверхности разреза. Чтобы ее найти полагают равенство напряжений на разрезе заданным внешним усилиям и тогда получается система функциональных уравнений. Метод впервые был изложен в работах [58, 59], а также в монографиях [56, 57]. Полученные функциональные уравнения предлагается решать численно. В работах [92, 128, 131] также проводились исследования концентрации напряжений в плоских задачах о трещинах.

Однако, при всем изобилии аналитических решений плоских задач о трещинах перенести полученные результаты на трехмерный случай оказалось непросто, так как неизвестно какую функцию нужно выбрать в виде соответствующего потенциала с плотностью, характеризующей смещение противоположных точек поверхностей трещины. Используя решение в форме Папковича-Нейбера, можно не заметить, что гармонические функции, входящие в это решение, представляются в виде таких потенциалов. А плотности этих потенциалов будут характеризовать смещение поверхностей трещины при деформировании тела. В настоящее время существует много учебных пособий, в которых аналитическими методами разобраны основные задачи с трещинами [8, 15, 31, 46, 71, 72].

### **Численные методы.**

В конце XX века в качестве основного инструмента решения задач о трещинах становится численный счет [38, 73, 133], а в последнее время очень выросла актуальность трехмерных задач, что привело к развитию численных методов в линейной механике разрушения. Несмотря на то, что математическая постановка задачи достаточно проста, численная реализация остается проблемой. В своем большинстве численные методы универсальны для достаточно большого класса задач, однако при их использовании нужно проверять устойчивость и точность. Кроме того, при численном счете становится тяжело выявлять закономерности в решениях. В связи с этим

необходимо для сравнения и отлаживания программного кода иметь аналитический результат, с которым будет производиться сравнение.

Существуют два различных подхода к решению пространственных задач численным способом: решать уравнения теории упругости во всем трехмерном теле (метод конечных элементов) или сводить уравнения теории упругости на границу и решать уже там граничные уравнения (метод граничных элементов). Чаще всего для решения пространственных задач с трещинами используется метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод имеет ряд преимуществ. Его основная идея состоит в разбиении тела на области, в каждой из которых решаются уравнения теории упругости. На границе областей ставятся условия равенства друг другу соответствующих величин. Таким образом данный метод практически перестает быть чувствительным к геометрии задачи. Основная проблема этого метода связана с тем, что приходится хранить большие объемы данных, а это предъявляет требования к оперативной памяти компьютера и мощности.

Для оптимизаций по различным параметрам разработаны множество вариантов МКЭ. Изначально метод не учитывал особенности решений на контуре трещин. А коэффициент интенсивности напряжений (КИН) вычислялся в узле на контуре по асимптотической формуле. Это привело к тому, что значения КИН зависели от узла и были не точны. Попытки увеличить точность привели к измельчению сетки на контуре трещины и повышению порядка уравнений, вследствие чего задача усложнилась. Решения плоских задач таким способом приведено в работах [93, 105, 133]. В более поздних работах КИН вычислялись другими методами.

Также были разработаны энергетические способы вычисления КИН. Такое название они получили, так как в основу были положены энергетические формулы Ирвина. В первом подходе основной идеей является прямое вычисление энергии деформации вблизи контура трещины. Для оптимизации расчетов была использована одинаковая сетка, как в теле с трещиной, так и без нее. Более мелкая сетка использовалась только на

множестве точек вблизи контура трещины. В качестве критерия роста трещины был принят момент смещения узловых точек. Решение пространственных задач с помощью этой идеи изложено в работах [90, 104, 115].

Во втором подходе основной идеей является расчет работы, которая требуется для закрытия малой части трещины. В качестве области закрытия выделяют область соседнюю с особой точкой контура. Для того, чтобы смоделировать закрытие, ближайшие к трещине точки искусственно нагружают настолько, насколько это необходимо. В работе [119] решалась задача определения КИН для трещин нормального и произвольного отрыва в плоском случае. Эта идея была также реализована в трехмерной задаче [91].

Еще одним энергитическим методом является вычисление параметра  $G$ . По сути параметр  $G$  представляет собой комбинацию коэффициентов интенсивности напряжений (в математическом смысле) или скорость высвобождения упругой энергии, идущей на единицу вновь образующейся поверхности (в физическом смысле). Особый интерес представляют работы, в которых вычисления параметра  $G$  сводятся к объемным интегралам. В работах [50, 116] этим методом вычислены КИН для трещин произвольного разрыва.

Большое количество статических задач теории упругости удалось решить при помощи гибридных методов конечных элементов, таких как полуэллиптическая трещина, выходящая на поверхность пластины конечной толщины; трещины, выходящие на поверхность цилиндрической полости, расположенной в пластине; пара взаимодействующих одинаковых полукруговых трещин, расположенных в параллельных плоскостях.

Несмотря на относительную простоту и популярность МКЭ, решения с его помощью динамических трехмерных задач о трещинах на данный момент не получено, нет и результатов использования МКЭ в задачах с двумя и более трещинами. Это связано с большими объемами данных, которые нужно хранить. В современных ЭВМ оперативной памяти для этого не достаточно.

По этой причине есть только несколько работ, содержащих тестовые расчеты по трещине нормального отрыва [50, 116].

В настоящее время большое количество задач механики трещин решаются с использованием метода граничных элементов (МГЭ). Как уже было сказано, его основной идеей является то, что задача аналитически сводится к интегральным или интегродифференциальным уравнениям на границе тела, а затем решаются граничные уравнения. Преимуществом этого метода по сравнению с МКЭ является то, что хранить нужно намного меньшие объемы данных, что делает возможным решать пространственные задачи с ансамблем трещин.

Переход к граничным уравнениям осуществляется при помощи тождества Соммильяна: перемещения внутри тела выражаются через перемещения и напряжения на границе, а также используя переход к пределу. Однако, в случае наличия трещины, которая моделируется как разрыв перемещений, граничные уравнения вырождаются, и требуется ввести дополнительные предположения для корректной постановки задачи.

1. Замена трещины тонким вырезом. Этот метод применялся в работе [94]. Основным недостатком такого предположения является малая точность вблизи окрестности трещины. 2. Использование симметрии в задачах при условии ее наличия как в работе [95, 96]. 3. Разбиение тела на несколько частей [114]. При этом, в границу каждой части входит только одна поверхность трещины. На границах частей ставится условие совпадения перемещений и противоположности нагрузок. 4. Деление тела на более малые области. Этот метод имеет ряд недостатков, таких как произвол деления на области, или увеличение количества уравнений, из-за условий на границе раздела областей.

Основной проблемой таких расчетов остается вычисление сингулярных интегралов. В работах [58, 59] было предложено вычислять интегралы вблизи точек границы, при этом подходя к трещине разбивая сетку все больше и больше. В силу сложности численной реализации, эта идея вычисления

сингулярных интегралов не используется в работах. В настоящее время эффективного метода нет.

### **Современное состояние исследований в этом разделе науки.**

Механика трещин активно развивается в последнее время. Увеличение численных мощностей дало возможность достаточно быстрого численного решения сложных задач. Наряду с трехмерными задачами решаются и плоские [1, 16]. Большое количество аналитических и численно-аналитических методов, а также их сравнения приведены в работе [87]. Одной из практических задач механики трещин является задача о трещине гидроразрыва. Подобные трещины также моделируют при помощи методов граничных элементов, используя триангуляцию областей [127, 130]. Современные исследования показали, что при помощи трещины гидроразрыва количество добываемой нефти практически не меняется, однако сам процесс добычи ускоряется во времени [22, 32, 108, 112]. Решение задач по взаимодействию трещин приведено в работе [106]. Несмотря на огромное количество исследований в этой области, нет эффективного метода вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. В основном определяются параметры трещин [118]. В работах [80, 98] за исследуемую величину выбирается коэффициент влияния, который вычисляется аналитически. В работах В.И. Фабриканта аналитически (методом последовательных приближений) показано, что если трещины расположены в одной плоскости, то коэффициент влияния всегда больше единицы [98, 99]. Таким образом, несмотря на многолетние исследования задач о трещинах и большое количество опубликованных работ, в этой теме остается еще много нерешенных проблем, связанных с точностью решений, недостатком оперативной памяти при численном счете и других.

## **Глава 1. Численный метод моделирования систем пространственных плоских трещин.**

В данной главе используются результаты работ [30; 25].

### **1.1. Постановка задачи и аналитический метод решения.**

Одной из актуальных задач современной механики разрушения является задача аналитических исследований концентрации напряжений в окрестности трещин в трёхмерном пространстве. В настоящее время существуют хорошо развитые эффективные методы решения двумерных задач о трещинах. Одним из таких методов является метод разрывных смещений. Преимуществом данного метода является возможность точного выполнения уравнений теории упругости. При этом граничные условия выполняются на дискретном множестве точек границы, которое можно сделать сколь угодно плотным. Для трёхмерных задач механики твёрдого деформируемого тела чаще всего используются методы конечных элементов. Но их использование для трещин в трёхмерном пространстве сталкивается с большими трудностями, поскольку построение полей напряжений и перемещений в окрестности трещин требует построения достаточно мелкой, адаптированной к геометрии трещин, сетки из конечных элементов. При наличии системы трещин сложной геометрии задача становится фактически невыполнимой. В данной работе предлагается численный метод граничных элементов, реализующий метод разрывных смещений в трёхмерном пространстве. Преимуществом данного метода является то, что на конечные элементы разбивается только поверхность трещин, моделирующая разрыв упругой среды. Это понижает размерности задачи на стадии её решения. С точки зрения математической теории, данный подход является одной из реализаций метода разложения решения по «не ортогональным» функциям.

Предлагаемый метод решения позволяет решать задачу о любом количестве произвольно ориентированных трещин. Для определённости будем рассматривать, как основную задачу, систему двух трещин, расположенных в различных плоскостях в трёхмерном пространстве (рис. 1.1).

В начальном недеформированном состоянии трещины представляют собой бесконечно тонкие круглые или эллиптические математические разрезы сплошной среды. Под действием растягивающего напряжения, направленного перпендикулярно плоскостям разрезов, упругая среда деформируется, деформируются и берега трещин. Требуется исследовать поля перемещений и напряжений, возникающие в упругой среде, а также найти все 3 значения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Часто в качестве критерия начала роста трещины в данном направлении принимается достижение коэффициентом интенсивности (или комбинацией коэффициентов интенсивности напряжений) некоторого критического значения, характерного для данного конкретного упругого материала.

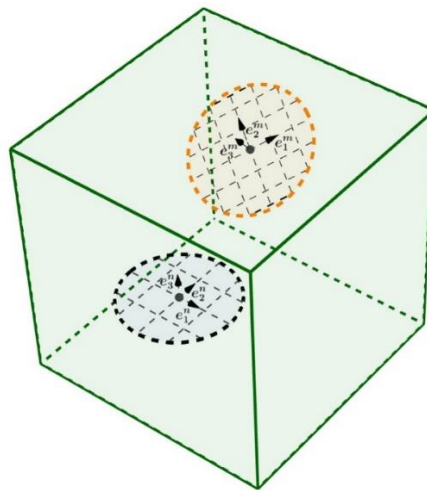


Рис. 1.1. Схематичное расположение трещин.

Рассматривается линейно упругая среда, ослабленная системой трещин. На бесконечности приложено растягивающее напряжение, перпендикулярное плоскостям трещин. Граничные условия: если совместить плоскость основной трещины с плоскостью  $xoy$ , то на берегах трещин должны быть выполнены условия равенства нулю компонент тензора напряжений:  $\sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0, \sigma_{zz} = 0$ , а на бесконечности задается одно ненулевое растягивающее напряжение:  $\sigma_{zz} = P > 0$ .

Основой метода разложения решения по не ортогональным функциям является построение системы линейно независимых решений основной системы уравнений задачи. В статической теории упругости – это уравнения равновесия.

Введём следующие обозначения:  $(x_1, x_2, x_3)$  – декартовы координаты в некоторой системе координат с базисом  $e_1, e_2, e_3$ ;  $u_i(x_1, x_2, x_3), (i = 1, 2, 3)$  – компоненты вектора перемещений;  $\lambda, \mu, E, \nu$  – упругие модули ( $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона);  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$  – компоненты тензора деформаций и тензора напряжений; для упрощения записи воспользуемся следующим обозначением частной производной  $\partial f / \partial x_k = f_{,k}$ ; повторяющийся индекс в любом выражении будет означать операцию свёртки;  $\nabla$  – оператор градиента функции;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Известно, что в статической теории упругости каждая из компонент поля перемещений, при отсутствии массовых сил, является бигармонической функцией [51]. Рассмотрим для поля перемещений общего решения уравнений равновесия представление Треффца [51] в следующей форме

$$u_i = \varphi_i + x_3 \psi_{,i}, \quad \nabla^2 \varphi_i = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Легко проверить, что каждая компонента перемещений (1.1) является бигармонической функцией  $\nabla^2 \nabla^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$ . Данное поле перемещений будет удовлетворять уравнениям упругости, если функции связаны соотношением

$$\psi_{,3} = -\Lambda \varphi_{,k,k}, \quad \text{где} \quad \Lambda = (\lambda + \mu) / (\lambda + 3\mu) = 1 / (3 - 4\nu). \quad (1.2)$$

Рассмотрим три частных решения (1.2) уравнений теории упругости

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \varphi^{(1)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_1}, & u_2^{(1)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_2}, & u_3^{(1)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_3}; \\ u_1^{(2)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_1}, & u_2^{(2)} &= \varphi^{(2)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_2}, & u_3^{(2)} &= x_3 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_3}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$u_1^{(3)} = x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_1}, \quad u_2^{(3)} = x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_2}, \quad u_3^{(3)} = \varphi^{(3)} + x_3 \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_3}.$$

Подстановка перемещений (1.3) в условие (1.2) приводит к следующей связи введенных функций

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial x_3} = -\Lambda \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим в упругом пространстве граничный элемент в виде плоского прямоугольника  $S$ :  $x_3 = 0$ ,  $|x_1| \leq h_1$ ,  $|x_2| \leq h_2$ . Определим, каждую функцию  $\varphi^{(k)}$  как потенциал двойного слоя с плотностью  $\mu^{(k)}$

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{x}) = \iint_S \mu^{(k)} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \Big|_{\xi_3=0} dS_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (1.5)$$

Потенциал двойного слоя типа (1.5) обладает следующим свойством:

$$\varphi = -\frac{\partial g}{\partial x_3}, \quad \text{где } g(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\mu(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \Big|_{\xi_3=0} dS_{\boldsymbol{\xi}} - \text{потенциал простого слоя.} \quad (1.6)$$

Свойство (1.6) и равенства (1.4) позволяют выразить функции  $\psi^{(k)}$  в конечной форме

$$\psi^{(1)} = \Lambda \frac{\partial g^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \psi^{(2)} = \Lambda \frac{\partial g^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \psi^{(3)} = -\Lambda \varphi^{(3)}. \quad (1.7)$$

Введём выражение  $\Lambda_1 = \lambda/(2\mu) = \nu/(1-2\nu)$ . Используя (1.7), закон Гука и выражения для деформаций  $\sigma_{ji} = \lambda \delta_{ji} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ji}$ ,  $\varepsilon_{ji} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2$ , можно найти компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, соответствующие каждому решению (1.3). Для перемещений получим

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \varphi^{(1)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1^2}, \quad u_2^{(1)} = \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad u_3^{(1)} = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1}; \\ u_1^{(2)} &= \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad u_2^{(2)} = \varphi^{(2)} + \Lambda x_3 \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_2^2}, \quad u_3^{(2)} = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2}; \\ u_1^{(3)} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1}, \quad u_2^{(3)} = -\Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2}, \quad u_3^{(3)} = \varphi^{(3)} - \Lambda x_3 \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Аналогично получаются выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{11}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)+1] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^3}; & \frac{\sigma_{22}^{(1)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\
\frac{\sigma_{33}^{(1)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)-\Lambda] \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(1)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; \\
\frac{\sigma_{13}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{23}^{(1)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x_1 \partial x_2}. \\
\\
\frac{\sigma_{11}^{(2)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1^2 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{22}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)+1] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_2^3}; \\
\frac{\sigma_{33}^{(2)}}{2\mu} &= [\Lambda_1(1-\Lambda)-\Lambda] \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{12}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} + \Lambda x_3 \frac{\partial^3 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2^2}; \\
\frac{\sigma_{13}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_2}; & \frac{\sigma_{23}^{(2)}}{2\mu} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial^2 g^{(2)}}{\partial x_2^2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x_2^2}. \\
\\
\frac{\sigma_{11}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1^2}; & \frac{\sigma_{22}^{(3)}}{2\mu} &= \Lambda_1(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2^2}; \\
\frac{\sigma_{33}^{(3)}}{2\mu} &= (\Lambda_1+1)(1-\Lambda) \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_3} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_3^2}; & \frac{\sigma_{12}^{(3)}}{2\mu} &= -\Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2}; \\
\frac{\sigma_{13}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1-\Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_1} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_3}; & \frac{\sigma_{23}^{(3)}}{2\mu} &= \frac{1-\Lambda}{2} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_2} - \Lambda x_3 \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x_2 \partial x_3}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Построенные решения для перемещений стремятся к нулю на бесконечности и являются линейно независимыми. В некоторых случаях потенциалы простого и двойного слоя можно вычислить аналитически. Например, в случае постоянной единичной плотности они соответственно равны:

$$g(\mathbf{x}) = \left\{ \left[ g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) \right] \right\}_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \Bigg|_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \left\{ \left[ \varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) \right] \right\}_{\xi_1=-h_1}^{\xi_1=h_1} \Bigg|_{\xi_2=-h_2}^{\xi_2=h_2} \tag{1.10}$$

В формулах (1.10) использовано символическое равенство

$$f(\eta) \Big|_{\eta=b}^{\eta=b} = f(b) - f(a),$$

а функции  $g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$ ,  $\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)$  соответственно, представлены в аналитической форме

$$\varphi_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) = -\frac{\partial g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2)}{\partial x_3}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}
g_0(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2) &= \iint \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \Big|_{\xi_3=0} d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= (x_1 - \xi_1) \log(r + x_2 - \xi_2) + (x_2 - \xi_2) \log(r + x_1 - \xi_1) - z \operatorname{arctg} \left( \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{r x_3} \right), \\
r &= \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}.
\end{aligned}$$

Аналитическое представление базисных решений в методе граничных элементов позволяет значительно упростить процедуру решения, поскольку отпадает необходимость вычисления сингулярных интегралов в системе граничных интегральных уравнений. Построенные решения (1.8), (1.9) используются в локальной системе координат для каждого граничного элемента. Для построения численной схемы обозначим поля перемещений и напряжений, соответствующие каждому из построенных решений, следующим образом:

$$U_i^{m(k)}, \sigma_{ij}^{m(k)}, \quad (i, j = 1, 2, 3), (m = 1, 2, \dots, N) \quad (1.11)$$

В выражениях (1.11) верхний индекс  $k = 1, 2, 3$  означает номер решения, индекс  $m$  соответствует номеру граничного элемента. Каждое из решений имеет разрыв соответствующей компоненты вектора перемещения на данном граничном элементе.

## 1.2. Потенциалы простого и двойного слоя для плоского многоугольника.

**Расчётные формулы в декартовой системе координат, в которой плоскость многоугольника совпадает с плоскостью  $z = 0$ .**

Рассмотрим более подробно вычисление потенциалов простого и двойного слоев [7]. Пусть  $S$  – двумерная область, расположенная в системе координат  $Oxyz$ . Требуется найти потенциалы простого и двойного слоя в точках  $F'$  и  $F''$ . Точки  $O'$  и  $O''$  проекции точек  $F'$  и  $F''$  на плоскость, содержащую область  $S$  (рис. 1.2).

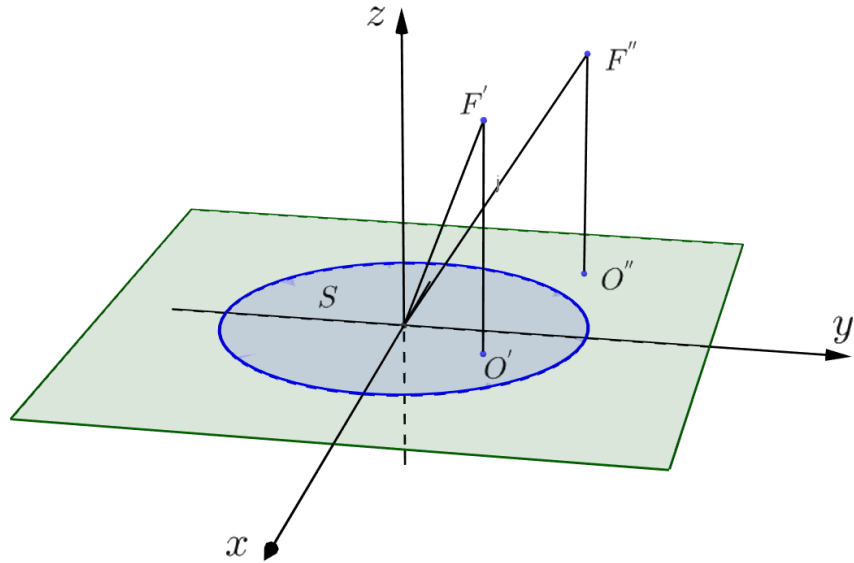


Рис.1.2. Двумерная область S. Расположение точек  $O'$  и  $O''$ .

Значения потенциалов сильно зависят от того, попадает ли проекция точки внутрь или вне области. Рассмотрим потенциалы простого и двойного слоев с плотностью  $\mu$ : потенциал простого слоя обозначен за  $V(x, y, z)$ , потенциал двойного слоя -  $U(x, y, z)$ . По определению:

$$V(x, y, z) = \iint_S \frac{\mu(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}$$

$$U(x, y, z) = \iint_S \mu(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \right]_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (1.12)$$

В случае однородного слоя с постоянной плотностью (будем считать её единицей), мы имеем интегралы

$$V_0(x, y, z) = \iint_S \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}$$

$$U_0(x, y, z) = \iint_S \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \right]_{\zeta=0} d\xi d\eta \quad (1.13)$$

$$U_0(x, y, z) = -\frac{\partial V_0}{\partial z}$$

Учитывая последнее равенство, вычисление потенциала двойного слоя сводится к вычислению потенциала простого слоя.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta, x, y, z) &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}, \\ R(\xi, \eta, x, y) &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

**Непосредственное вычисление интеграла простого слоя.** Рассмотрим случай вычисления потенциала простого слоя, если двумерная область - выпуклый многоугольник. В качестве многоугольника выберем самый простой вариант - треугольник. При этом проекция точки  $F'$  попадает в вершину треугольника. Будем считать, что мы поместили начало системы координат в данную точку (рис.1.3). Введём локальную систему координат  $O'x'y'$ , показанную на рис.1.3. Точка  $O'$ , является вершиной треугольника, в которой вычисляется потенциал. Точки  $M, N$  – две оставшиеся вершины треугольника. Ось  $O'x'$  перпендикулярна стороне  $MN$ ,  $h$  – высота треугольника, опущенная на сторону  $MN$ .

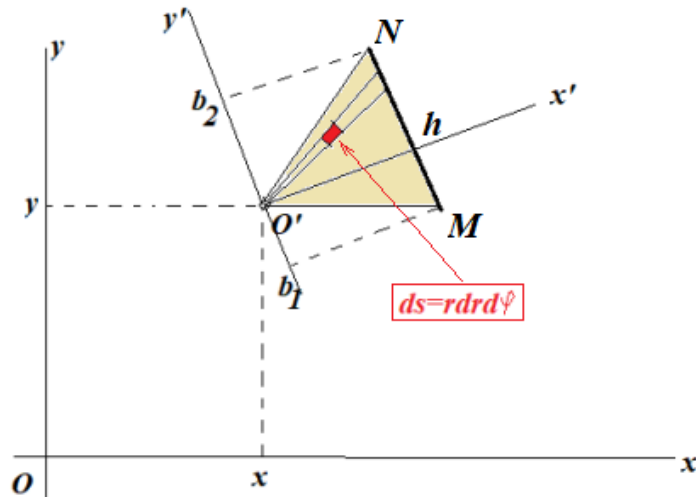


Рис.1.3. Область, в которой вычисляется потенциал.

В данной локальной системе координат вычисление потенциала простого слоя сводится к вычислению интеграла

$$V_0(0,0,z) = \iint_{S_{O'MN}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + z^2}}.$$

Перейдём в полярную систему координат с центром в точке  $O'$ . В результате получим выражение

$$\begin{aligned} V_0(0,0,z) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{h/\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \frac{1}{2} \int_0^{h/\cos\varphi} \frac{d(r^2+z^2)}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \sqrt{r^2+z^2} \right]_0^{h/\cos\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \sqrt{\frac{h^2}{\cos^2\varphi} + z^2} - |z| \right] d\varphi = \\ &= -(\varphi_2 - \varphi_1)|z| + |h| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{z^2}{h^2}} \right] d\varphi \end{aligned}$$

где  $\varphi_1 = \arctg\left(\frac{b_1}{h}\right)$ ,  $\varphi_2 = \arctg\left(\frac{b_2}{h}\right)$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$ .

В оставшемся интеграле сделаем замену

$$\tg\varphi = p, \quad \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = dp, \quad d\varphi = \frac{dp}{1+p^2}.$$

Тогда

$$\int \sqrt{1 + \frac{z^2}{h^2} + p^2} \frac{dp}{1+p^2} = \ln \left( p + \sqrt{1 + \frac{z^2}{h^2} + p^2} \right) + \frac{|z|}{h} \arctan \left( \frac{|z| \cdot p}{h \sqrt{1 + \frac{z^2}{h^2} + p^2}} \right).$$

После подстановки пределов интегрирования приходим к следующему результату

$$\begin{aligned} V_0(0,0,z) &= -(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot |z| + \\ &+ |h| \cdot \ln \left( \tan(\varphi_2) + \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi_2} + \frac{z^2}{h^2}} \right) + z \cdot \arctan \left( \frac{z \cdot \tan(\varphi_2)}{\sqrt{z^2 + h^2/\cos^2\varphi_2}} \right) - \\ &- |h| \cdot \ln \left( \tan(\varphi_1) + \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi_1} + \frac{z^2}{h^2}} \right) - z \cdot \arctan \left( \frac{z \cdot \tan(\varphi_1)}{\sqrt{z^2 + h^2/\cos^2\varphi_1}} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для подсчета (1.15) в глобальной системе координат, достаточно найти выражения величин  $\varphi_1, \varphi_2, h$  в глобальной системе координат. Введём координаты точек  $O'(x, y)$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$  и выпишем необходимые для вычислений векторы (рис.1.4):

$$\mathbf{O'M} = (x_1 - x; y_1 - y), \quad \mathbf{O'N} = (x_2 - x; y_2 - y), \quad \mathbf{MN} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

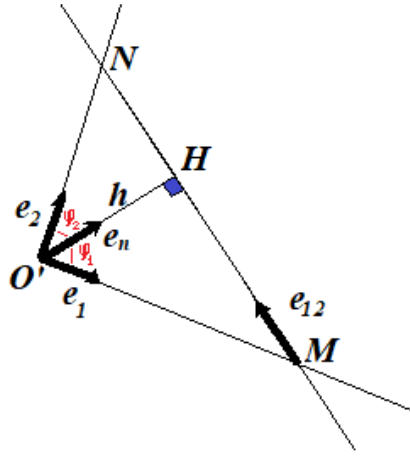


Рис. 1.4. Векторы, необходимые для вычислений.

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}, \quad r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{e}_1 = \left( \frac{x_1 - x}{r_1}; \frac{y_1 - y}{r_1} \right), \quad \mathbf{e}_2 = \left( \frac{x_2 - x}{r_2}; \frac{y_2 - y}{r_2} \right), \quad \mathbf{e}_{12} = \left( \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}; \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} \right)$$

По условиям задачи  $\mathbf{e}_n \perp \mathbf{e}_{12}$ , поэтому

$$\mathbf{e}_n = \left( \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}; -\frac{x_2 - x_1}{r_{12}} \right). \quad (1.17)$$

Это позволяет вычислить необходимые углы  $\varphi_1, \varphi_2$  и высоту  $h$ , как функции координат  $x, y$

$$\cos \varphi_1 = \frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)}{r_1 \cdot r_{12}}; \quad \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} & -\frac{x_2 - x_1}{r_{12}} & 0 \\ \frac{x_1 - x}{r_1} & \frac{y_1 - y}{r_1} & 0 \end{vmatrix} = \sin \varphi_1 \mathbf{k};$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{r_1 \cdot r_{12}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)}; \quad \varphi_1 = \arctg \frac{(y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)}.$$

(1.18)

$$\cos \varphi_2 = \frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x) - (x_2 - x_1)(y_2 - y)}{r_2 \cdot r_{12}}; \quad \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{y_2 - y_1}{r_{12}} & -\frac{x_2 - x_1}{r_{12}} & 0 \\ \frac{x_2 - x}{r_2} & \frac{y_2 - y}{r_2} & 0 \end{vmatrix} = \sin \varphi_2 \mathbf{k};$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{(y_2 - y)(y_2 - y_1) + (x_2 - x)(x_2 - x_1)}{r_2 \cdot r_{12}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(y_2 - y)(y_2 - y_1) + (x_2 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x) - (x_2 - x_1)(y_2 - y)}; \quad \varphi_2 = \arctg \frac{(y_2 - y)(y_2 - y_1) + (x_2 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x) - (x_2 - x_1)(y_2 - y)}.$$

(1.19)

$$S_{\Delta O'MN} = \frac{1}{2} |\mathbf{O'M} \times \mathbf{O'N}| = \frac{1}{2} r_{12} \cdot h$$

$$\mathbf{O'M} \times \mathbf{O'N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 - x & y_1 - y & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & 0 \end{vmatrix};$$

(1.20)

$$\mathbf{O'M} = (x_1 - x; y_1 - y), \quad \mathbf{O'N} = (x_2 - x; y_2 - y), \quad \mathbf{MN} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

$$h = \frac{(x_1 - x)(y_2 - y) - (y_1 - y)(x_2 - x)}{r_{12}} = \frac{(x_1 - x)(y_2 - y) - (y_1 - y)(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Учитывая формулы (1.15), (1.18), (1.19), (1.20), мы имеем выражение потенциала простого слоя как сложную функцию координат  $x, y, z$

$$V_0(x, y, z) = -(\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) \cdot |z| + V_{02}(\varphi_2(x, y), h(x, y), z) - V_{01}(\varphi_1(x, y), h(x, y), z), \quad (1.21)$$

$$\text{где } V_{0k} = |h| \cdot \ln \left( \operatorname{tg}(\varphi_k) + \sqrt{1 + \frac{z^2}{h^2} + \operatorname{tg}^2(\varphi_k)} \right) + z \cdot \arctg \left( \frac{z \cdot \operatorname{tg}(\varphi_k)}{|h| \sqrt{1 + \frac{z^2}{h^2} + \operatorname{tg}^2(\varphi_k)}} \right), k = 1, 2;$$

Потенциал двойного слоя можно вычислить исходя из третьего равенства (1.13)

$$U_0(x, y, z) = -\frac{\partial V_0(x, y, z)}{\partial z} = -\operatorname{sgn}(z) \cdot (\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) + U_{01}(x, y, z) - U_{02}(x, y, z),$$

$$U_{01} = \frac{\partial V_{02}(\varphi_2(x, y), h(x, y), z)}{\partial z}, \quad U_{02} = \frac{\partial V_{01}(\varphi_1(x, y), h(x, y), z)}{\partial z}.$$

(1.22)

$$U_{ok} = \frac{z}{|h|\sqrt{1+\frac{z^2}{h^2}+\operatorname{tg}^2\varphi_k} \cdot \left(\operatorname{tg}\varphi_k + \sqrt{1+\frac{z^2}{h^2}+\operatorname{tg}^2\varphi_k}\right)} + \operatorname{arctg}\left(\frac{|z|\operatorname{tg}\varphi_k}{|h|\sqrt{1+\frac{z^2}{h^2}+\operatorname{tg}^2\varphi_k}}\right) + \frac{|z| \cdot \left( \frac{\operatorname{tg}\varphi_k}{|h|\sqrt{1+\frac{z^2}{h^2}+\operatorname{tg}^2\varphi_k}} - \frac{z^2\operatorname{tg}\varphi_k}{|h|^3 \left(1+\frac{z^2}{h^2}+\operatorname{tg}^2\varphi_k\right)^{\frac{3}{2}}} \right)}{1 + \frac{z^2\operatorname{tg}^2\varphi_k}{h^2 \left(1+\frac{z^2}{h^2}+\operatorname{tg}^2\varphi_k\right)}}, \quad k=1,2.$$

Случай произвольного расположения проекции точки относительно треугольника сводится к трехкратному использованию полученных формул. При этом может быть два принципиально разных случая расположения проекции относительно треугольника. Проекция может располагаться внутри треугольника или вне треугольника.

1. Пусть точка с координатами  $F'(x, y, z)$  имеет проекцию, попадающую внутрь треугольника с координатами вершин  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  (рис.1.5).

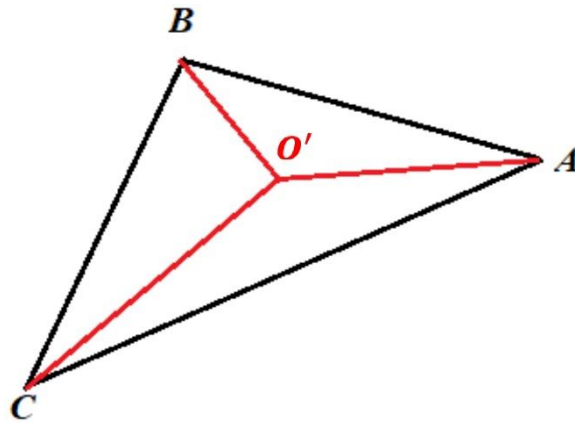


Рис. 1.5. Расположение точки внутри области.

Для подсчета потенциала в точке  $O'$  достаточно просуммировать потенциалы трёх треугольников, производя обход по часовой стрелке

$$V_{O'} = V_{\Delta O'AB} + V_{\Delta O'BC} + V_{\Delta O'CA}. \quad (1.23)$$

При этом следует иметь в виду, что:

В случае  $V_{\Delta O'AB}$  в формуле (1.21) роль точки М играет точка А, роль точки N играет точка В;

В случае  $V_{\Delta O'BC}$  в формуле (1.21) роль точки М играет точка В, роль точки N играет точка С;

В случае  $V_{\Delta O'CA}$  в формуле (1.21) роль точки М играет точка С, роль точки N играет точка А.

В рассмотренном случае для всех трёх треугольников соответствующая величина  $h$  в формуле (1.20) является положительной величиной.

2. Пусть проекция точки  $O''(x, y, z)$  находится вне треугольника с координатами вершин  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  (Рис.1.6).

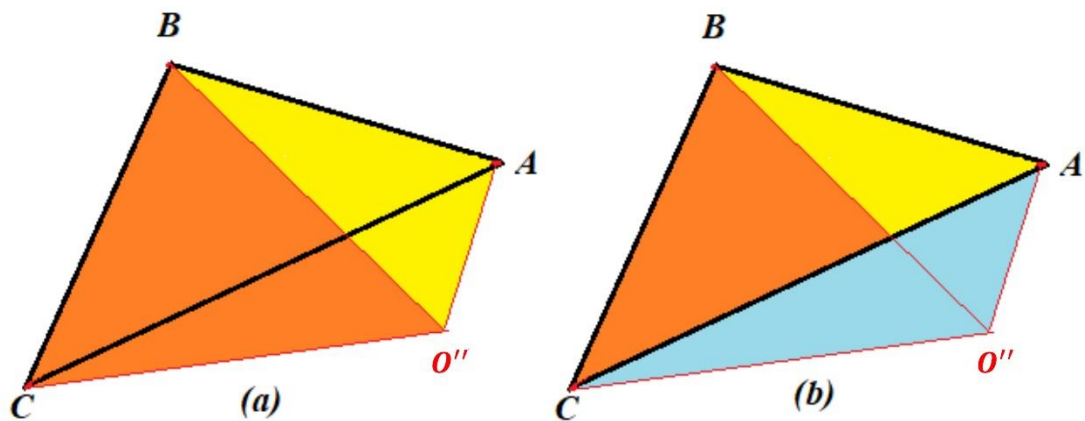


Рис.1.6. Проекция точки вне треугольника.

В рассматриваемом случае (Рис.1.6), производя обход всех пар вершин треугольника по часовой стрелке, мы имеем положительное значение величины  $h$  для треугольников  $O''AB$  и  $O''BC$ .

Если бы мы ограничились только обходом двух сторон  $AB, BC$ , то получили бы потенциал четырёхугольника  $O''ABC$ . Поэтому для получения правильного результата необходимо вычесть потенциал треугольника  $O''AC$ .

Лишнюю массу несёт закрашенный голубым цветом треугольник  $O''AC$ . Этот потенциал необходимо взять с отрицательным знаком. Оказывается, что при изменении ориентации можно пользоваться той же формулой (1.21).

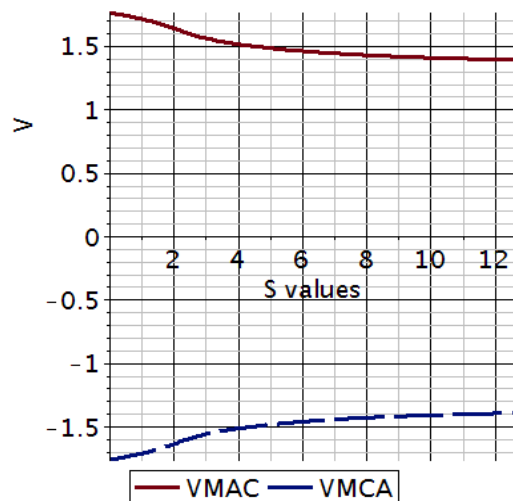
В качестве примера рассмотрим потенциал конкретного треугольника, в котором вершины  $A$  и  $C$  задаются следующими координатами (Рис.1.6):  $A(1;1), C(-1;1), O''(x, y)$

Будем сравнивать потенциалы по формуле (1.21) в двух случаях:

В первом случае рассматривается треугольник  $O'AC$ , т.е. ориентация обхода против часовой стрелки.

Во втором случае рассматривается треугольник  $O''CA$ , т.е. ориентация обхода меняется. В качестве координаты  $z = 0.1$  Найдём потенциал в первом случае  $V_{O'AC}(0,0,0.1) = 1.612723941$ . Во втором случае он будет равен  $V_{O''CA}(0,0,0.1) = -1.612723941$ . Второй случай, соответствует расположению точки  $O''$  вне треугольника.

Рассмотрим поведение данного потенциала, когда  $x \rightarrow -\infty$  или  $y \rightarrow -\infty$  или  $z \rightarrow \pm\infty$ . Потенциал должен уменьшаться по абсолютной величине. На графике приведена зависимость потенциалов  $V_{O'AC}$  и  $V_{O''CA}$  от расстояния  $t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $x = -s, y = -s, z = 0.1 + s, s \geq 0$



Заметим, что знак величины  $h$  при нормальном обходе вершин треугольника зависит от того, находится точка внутри треугольника, или вне треугольника. Если точка внутри, то все значения  $h$  положительны. Если точка находится вне треугольника, то формально может быть две ситуации:

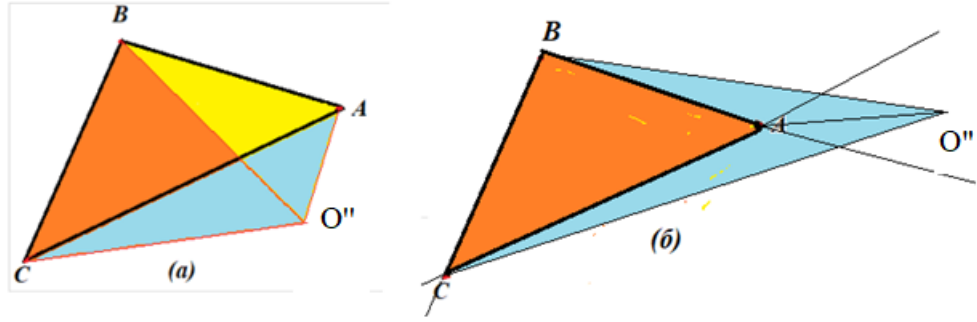


Рис. 1.7. Возможные расположения точки  $O''$ .

Ситуация, соответствующая рис. 1.7.(а) уже разобрана. Для ситуации, соответствующей рис. 1.7(б), характерно то, что для треугольников  $O''AB$  и  $O''CA$  величина  $h$  отрицательной, но и в этом случае формула

$$V_{O''} = V_{O''AB} + V_{O''BC} + V_{O''CA}$$

будет верна, поскольку для этих двух треугольников  $V_{O''AB}$  и  $V_{O''CA}$  будут принимать отрицательное значение. Ясно, что все изложенное справедливо для любого выпуклого многоугольника.

### Подведём итоги:

1. При произвольном расположении пробной точки  $M(x, y, z)$  потенциал простого слоя плоского выпуклого  $n$ -угольника с вершинами  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$  складывается из суммы  $n$  величин

$$V_{A_1 A_2 \dots A_n}(M) = V_{MA_1 A_2} + V_{MA_2 A_3} + \dots + V_{MA_{n-1} A_n} + V_{MA_n A_1}. \quad (1.24)$$

Первый потенциал суммы определяется формулой (1.21)

$$V_{MA_1 A_2}(x, y, z) = -(\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) \cdot |z| + V(\varphi_2(x, y), h(x, y), z) - V(\varphi_1(x, y), h(x, y), z),$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{(y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{(y_2 - y)(y_2 - y_1) + (x_2 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x) - (x_2 - x_1)(y_2 - y)}$$

$$V(\varphi, h, z) = |h| \cdot \ln \left( \lg \varphi + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{z^2}{h^2}} \right) + z \cdot \arctg \left( \frac{z \cdot \lg \varphi}{\sqrt{\frac{h^2}{\cos^2 \varphi} + z^2}} \right)$$

$$h = \frac{(x_1 - x)(y_2 - y) - (y_1 - y)(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

(1.25)

Остальные потенциалы суммы определяются круговой заменой в (1.25)  
 $(x_i, y_i) \rightarrow (x_{i+1}, y_{i+1})$ , при этом последний индекс заменяется так  
 $(x_n, y_n) \rightarrow (x_1, y_1)$ .

Потенциал двойного слоя определяется производной потенциала простого слоя по переменной  $z$ , взятой со знаком минус:

$$U_{A_1 A_2 \dots A_n}(M) = U_{MA_1 A_2} + U_{MA_2 A_3} + \dots + U_{MA_{n-1} A_n} + U_{MA_n A_1}. \quad (1.26)$$

Первый потенциал в сумме (1.26) определяется в виде

$$U_{MA_1 A_2}(x, y, z) = \text{sign}(z) \cdot (\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) + U(\varphi_2(x, y), h(x, y), z) - U(\varphi_1(x, y), h(x, y), z),$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{(y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{(y_2 - y)(y_2 - y_1) + (x_2 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x) - (x_2 - x_1)(y_2 - y)};$$

$$U(\varphi, h, z) = -|h| \cdot \frac{z}{h^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{z^2}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \text{tg } \varphi + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{z^2}{h^2}} \right)} - \arctg \left( \frac{z \cdot \text{tg } \varphi}{\sqrt{\frac{h^2}{\cos^2 \varphi} + z^2}} \right) - \frac{z \cdot h^2 \cdot \sin \varphi}{(h^2 + z^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

$$h = \frac{(x_1 - x)(y_2 - y) - (y_1 - y)(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

(1.27)

Остальные потенциалы суммы (1.26) получаются аналогично простому слою круговой заменой координат вершин многоугольника.

**Подсчёт производных потенциала.** Отметим, что производные потенциала по переменным  $x, y, z$  можно определять, как производную сложной функции.

Например, нам надо определить производные слагаемого  $V_{MA_1 A_2}(x, y, z)$  по переменным  $x, y, z$ . Учитывая что

$$V_{MA_1 A_2}(h, \varphi_1, \varphi_2, z) = -(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot |z| + V(\varphi_2, h, z) - V(\varphi_1, h, z),$$

$$V(\varphi, h, z) = |h| \cdot \ln \left( \text{tg } \varphi + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{z^2}{h^2}} \right) + z \cdot \arctg \left( \frac{z \cdot \sin \varphi}{\sqrt{h^2 + \cos^2 \varphi z^2}} \right) \text{ где аргументы}$$

$h, \varphi_1, \varphi_2$  – заданные функции  $(x, y)$ ,

$$h = \frac{(x_1 - x)(y_2 - y) - (y_1 - y)(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{(y_1 - y)(y_2 - y_1) + (x_1 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{(y_2 - y)(y_2 - y_1) + (x_2 - x)(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x) - (x_2 - x_1)(y_2 - y)}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{MA_1A_2}}{\partial x} &= -|z| \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( V(\varphi, h, z) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right) = \\ &= -|z| \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial h} \Big|_{\varphi=\varphi_2} - \frac{\partial V}{\partial h} \Big|_{\varphi=\varphi_1} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= \text{sign}(h) \cdot \ln \left( \frac{\sin \varphi + \sqrt{1 + \cos^2 \varphi (z/h)^2}}{\cos \varphi} \right) - \frac{2z^2 h \cos^4 \varphi}{\left( \sin \varphi + \sqrt{1 + \cos^2 \varphi (z/h)^2} \right) \left( h^2 + z^2 \cos^2 \varphi \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= |h| \cdot \frac{\cos \varphi}{\left( \sin \varphi + \sqrt{1 + \cos^2 \varphi (z/h)^2} \right)} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\left( 1 + \cos^2 \varphi (z/h)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ &+ \frac{z^2 (h^2 + z^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi}{\sqrt{h^2 + z^2 \cos^2 \varphi}} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \text{const} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= -\frac{y - y_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -\frac{y - y_2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются и вторые производные. Например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_{MA_1A_2}}{\partial x \partial y} &= -|z| \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( V(\varphi, h, z) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right) &= -|z| \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 V(\varphi, h, z)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( V_h h_x + V_\varphi \varphi_x \right) = V_{hh} h_x h_y + V_{h\varphi} (h_x \varphi_y + h_y \varphi_x) + V_{\varphi\varphi} \varphi_x \varphi_y + V_\varphi \varphi_{xy} \end{aligned}$$

Здесь нижними буквами обозначены соответствующие производные.

Например,  $V_{h\varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial \varphi}$ ,  $\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\varphi_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$

### 1.3. Численный метод решения.

Рассмотрим типичную задачу механики трещин для бесконечного пространства. В пространстве глобальной системы координат  $(X,Y,Z)$  с базисом  $(e_1; e_2; e_3)$  расположено несколько трещин, которые моделируются поверхностями разрыва перемещений (Рис.1.8а).

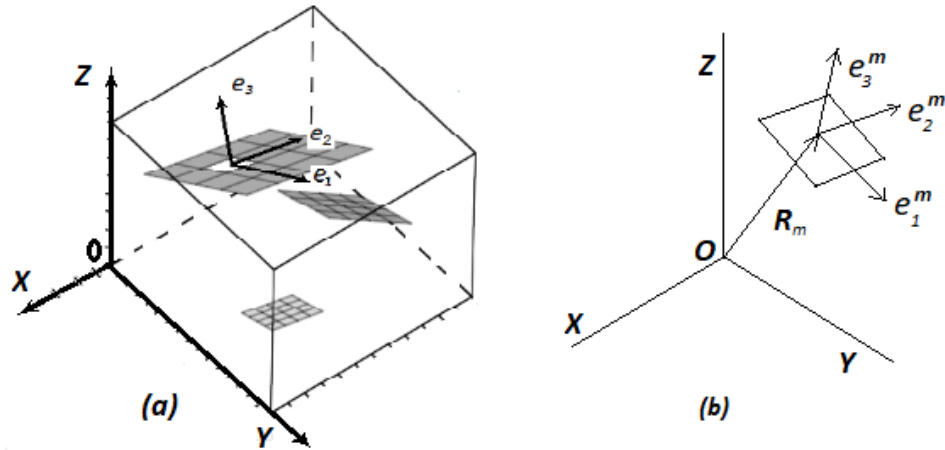


Рис.1.8а.

Будем, для определённости, ставить задачу в напряжениях. Для бесконечного пространства могут быть поставлены две типичные краевые задачи. В первой краевой задаче на бесконечности может быть задан ненулевой вектор напряжений  $\sigma_\infty$ , а на берегах трещин вектор напряжений равен нулю. Во второй краевой задаче вектор напряжений на бесконечности равен нулю, а на берегах трещин действует заданный вектор напряжений  $P_0$ . В линейном случае первая задача может быть сведена ко второй использованием суперпозиции решений.

Действительно, можно представить поле перемещений  $\mathbf{u}$  и тензор напряжений  $\sigma$  в виде суммы двух решений  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\sigma = \sigma_\infty + \tilde{\sigma}$ , где  $\mathbf{u}_\infty, \sigma_\infty$  решение для пространства с заданными условиями на бесконечности при отсутствии трещин, а решение  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\sigma}$  стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет на границах трещин условию  $\tilde{\sigma} = -\sigma_0$ .

Построение первого решения будем считать известным. Остановимся подробно на построении решения с нулевыми условиями на бесконечности и с заданным вектором напряжений на поверхности трещин.

Это означает, что на берегу трещины задан вектор напряжений, как функция точек поверхности. Пусть  $\mathbf{R}^{(m)} = (X_m, Y_m, Z_m)$  – радиус вектор центра граничного элемента с номером  $m$  в глобальной системе координат,  $(e_1^m, e_2^m, e_3^m)$  – локальный базис данного элемента (Рис.1.8b). Введём в рассмотрение ортогональные матрицы,  $F^{(m)}$ ,  $F^{(mn)}$ , позволяющие выразить векторы в глобальном базисе и переходить из одного локального базиса в другой

$$\mathbf{e}^m = F^{(m)}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^n = F^{(mn)}\mathbf{e}^m \quad (1.28)$$

Для каждого граничного элемента с номером  $n$  в его локальном базисе  $e_i^n$  можно считать заданными три компоненты вектора напряжений на площадке с нормалью  $e_3^n$ :

$$\sigma_{31} = b_1^n, \sigma_{32} = b_2^n, \sigma_{33} = b_3^n \quad (1.29)$$

Рассмотрим три поля перемещений и напряжений, соответствующих (1.1 – 1.3):

$$U_i^{m(1)}(M), U_i^{m(2)}(M), U_i^{m(3)}(M); \quad \sigma_{ij}^{m(1)}(M), \sigma_{ij}^{m(2)}(M), \sigma_{ij}^{m(3)}(M) \quad (1.30)$$

Эти поля являются решениями уравнений теории упругости в локальном базисе  $e_1^m, e_2^m, e_3^m$ . Задавая координаты пробной точки  $M$  в данном базисе, мы можем найти компоненты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений, которые возникают в этой точке от данного элемента, взятого с единичной плотностью соответствующих потенциалов простого и двойного слоя. Выражения (1.30) называются коэффициентами влияния граничного элемента в локальной системе координат данного элемента.

Выберем в качестве пробной точки – центр другого граничного элемента с номером  $n$ . Подстановка его локальных координат (в базисе  $e_i^{(m)}$ ) в формулы

(1.30), позволяет найти вклад (влияние) граничного элемента с номером  $m$  в поле перемещений и напряжений в центре граничного элемента с номером  $n$ .

В нашей постановке надо выполнить граничные условия (1.29), заданные в локальном базисе. Поэтому необходимо напряжения (1.30) пересчитать в базисе  $e_i^{(n)}$ . С этой целью необходимо воспользоваться формулами перехода от одного базиса к другому (1.28). При этом мы получим вклады от граничного элемента с номером  $m$  в поле напряжений в базисе  $e_i^{(n)}$ . Обозначим это поле напряжений от первого, второго и третьего решения, соответственно:

$$\begin{aligned} A_{ij}^{(m,n)} &= \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}_{mn}), \quad \hat{\sigma}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} e_i^{(n)} e_j^{(n)} \\ B_{ij}^{(m,n)} &= \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}_{mn}), \quad \hat{\sigma}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} e_i^{(n)} e_j^{(n)} \\ C_{ij}^{(m,n)} &= \sigma_{ij}^{(3)}(\mathbf{r}_{mn}), \quad \hat{\sigma}^{(3)} = \sigma_{ij}^{(3)} e_i^{(n)} e_j^{(n)} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Суммируя (1.31) с неопределёнными коэффициентами по всем граничным элементам, найдем в локальном базисе  $e_i^{(n)}$  суммарное поле напряжений

$$\Sigma_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^N D_l^{(1)} A_{ij}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(2)} B_{ij}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(3)} C_{ij}^{(l,n)}, \quad (1.32)$$

где  $N$  - общее количество граничных элементов,  $D_l^{(k)}, (k=1,2,3), (l=1,2,\dots,N)$  - неопределённые коэффициенты. Если нам необходимо выполнить граничные условия (1.29), получим  $3N$  уравнений

$$\Sigma_{31}^{(n)} = b_1^{(n)}, \quad \Sigma_{32}^{(n)} = b_2^{(n)}, \quad \Sigma_{33}^{(n)} = b_3^{(n)} \quad (1.38)$$

Вид матрицы полученной системы линейных уравнений будет зависеть от порядка выполнения каждого из граничных условий. Если выбрать порядок (1.29) для всех элементов, получим систему уравнений в форме

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N D_l^{(1)} A_{31}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(2)} B_{31}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(3)} C_{31}^{(l,n)} &= b_1^{(n)} \\ \sum_{l=1}^N D_l^{(1)} A_{32}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(2)} B_{32}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(3)} C_{32}^{(l,n)} &= b_2^{(n)} \\ \sum_{l=1}^N D_l^{(1)} A_{33}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(2)} B_{33}^{(l,n)} + \sum_{l=1}^N D_l^{(3)} C_{33}^{(l,n)} &= b_3^{(n)} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Введём девять матриц  $(N \times N)$  и шесть векторов-столбцов:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \{A_{31}^{(l,n)}\}, \mathbf{B}^{(1)} = \{B_{31}^{(l,n)}\}, \mathbf{C}^{(1)} = \{C_{31}^{(l,n)}\}, \\ \mathbf{A}^{(2)} &= \{A_{32}^{(l,n)}\}, \mathbf{B}^{(2)} = \{B_{32}^{(l,n)}\}, \mathbf{C}^{(2)} = \{C_{32}^{(l,n)}\}, \\ \mathbf{A}^{(3)} &= \{A_{33}^{(l,n)}\}, \mathbf{B}^{(3)} = \{B_{33}^{(l,n)}\}, \mathbf{C}^{(3)} = \{C_{33}^{(l,n)}\}, \quad l, n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\mathbf{D}^k = (D_1^k, D_2^k, \dots, D_N^k)^T, \quad \mathbf{b}^k = (b_1^k, b_2^k, \dots, b_N^k)^T, \quad k = 1, 2, 3,$$

где символ  $(\dots)^T$  означает операцию транспонирования вектора.

В обозначениях (1.39) система (1.40) может быть переписана в блочной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{C}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{B}^{(2)} & \mathbf{C}^{(2)} \\ \mathbf{A}^{(3)} & \mathbf{B}^{(3)} & \mathbf{C}^{(3)} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{D}^1 \\ \mathbf{D}^2 \\ \mathbf{D}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Решение полученной системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $D_i^k$ ,  $(k=1, 2, 3), (i=1, 2, \dots, N)$ , позволяет получить коэффициенты разложения поля перемещений по базисным функциям, т.е. фактически разрывы поля перемещений, и затем вычислить все необходимые величины в любой пробной точке тела.

#### 1.4. Методы вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН).

Основной целью работы является вычисление коэффициентов интенсивности напряжений для различных задач, особенностью которых является то, что при приближении в границе напряжения стремятся к бесконечности. Эта специфика сильно затрудняет численную реализацию. Для вычисления КИН применяются 2 методики: по асимптотикам перемещений и асимптотикам напряжений [68].

Рассмотрим их более подробно:

1. По определению коэффициенты интенсивности напряжений равны

$$K_I = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \sigma_{zz}$$

$$K_{II} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \sigma_{zn}$$

$$K_{III} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{2\pi s} \sigma_{z\tau}$$

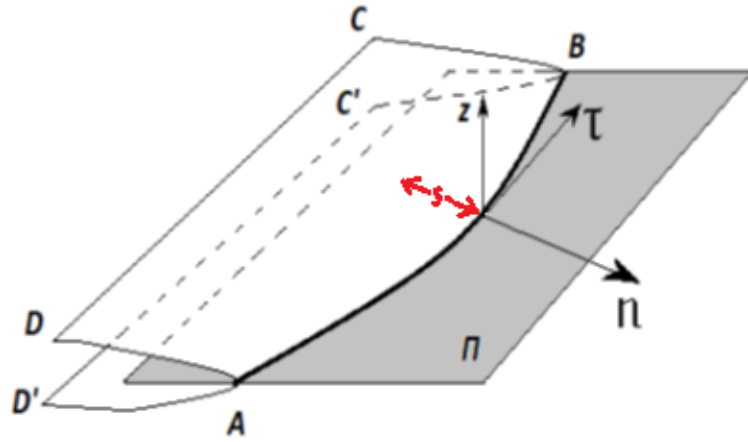


Рис. 1.9. S-расстояние от точки вычисления перемещений до границы трещины

Асимптотическое представление перемещения в окрестности трещины [68](Рис.1.10):

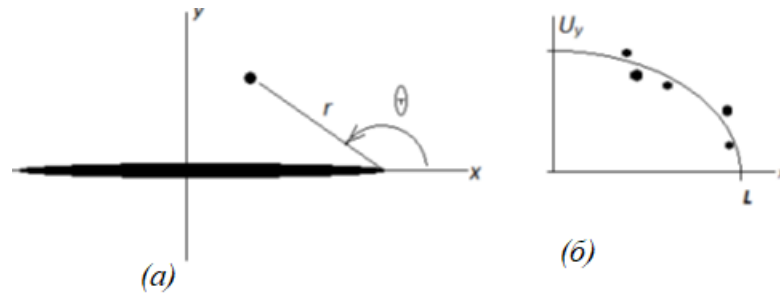


Рис.1.10.(а, б)

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \quad \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2},$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad u_x = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$u_y = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Последняя формула особенно удобна. Допустим, что мы экстраполировали раскрытие берега трещины около края:

для левого края  $r = x + L \quad x \rightarrow -L^+ \quad u_y(x) = A\sqrt{x + L}$ ;

для правого края  $r = L - x \quad x \rightarrow L^- \quad u_y(x) = B\sqrt{L - x}$ .

С другой стороны, теоретическая асимптотика имеет вид:

для левого края  $r = x + L \quad u_y = 2(1-\nu) \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$ ;

для правого края  $r = L - x \quad u_y = 2(1-\nu) \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$ .

Тогда, приравнявая коэффициенты, получим:

$$x \rightarrow -L^+ \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1-\nu)}{\mu} K_I = A \Rightarrow K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{(1-\nu)} A$$

$$x \rightarrow L^- \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1-\nu)}{\mu} K_I = B \Rightarrow K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{(1-\nu)} B$$

При помощи формул асимптотического разложения по перемещениям вычисляется КИН в нашей задаче. Численный расчет дает некий набор точек, которые наносятся на график (рис.1.10б). Затем при помощи метода наименьших квадратов строится аппроксимация корневой функцией и определяется коэффициент  $B$ . Это значит, что теперь известна функция перемещений. Поставляя это значение в выражение для перемещений, находим соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений.

2. При вычислении КИН по асимптотикам напряжений расстояние  $S$  берется на продолжении трещины (рис. 1.11.)

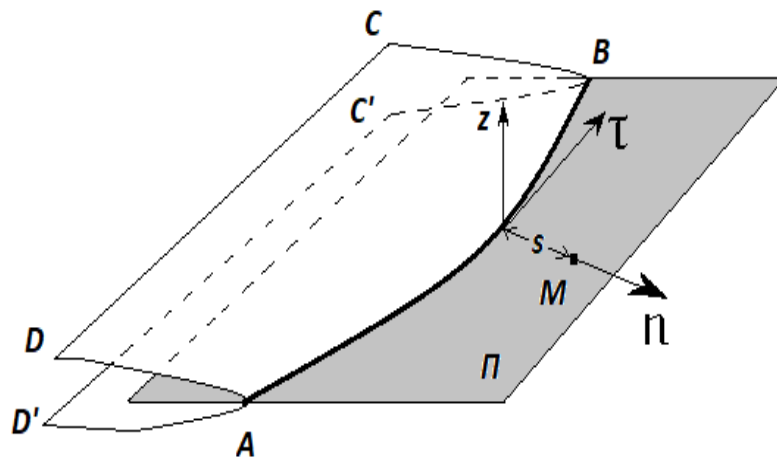


Рис. 1.11.  $S$  – расстояние на продолжении трещины.

С использованием формул

$$\sigma_{nn} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi s}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi s}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_{nz} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

Угол  $\theta = 0$ , тогда  $\sigma_{zz} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi s}}$ . Коэффициенты интенсивности

напряжений вычисляются при помощи метода наименьших квадратов, как и в случае асимптотики перемещений.

Основные выводы по главе 1.

Разработан метод, который позволяет вычислять напряжения и перемещения в произвольной точке области тела. Для вычисления КИН использованы асимптотические представления напряжений и перемещений. Преимуществом метода является то, что после решения системы линейных уравнений, перемещения и напряжения представляются в виде конечных рядов по неортогональным функциям [2,3]. Метод позволяет решать любые краевые задачи (в напряжениях, в перемещениях и смешанные).

## **Глава 2. Качественное исследование влияния формы трещин на напряженно-деформируемое состояние. Верификация программного кода.**

Предложенный в главе 1 метод был реализован в виде программы. Первая версия была написана на Maple. На грубых сетках проводились расчеты для того, чтобы понять улавливает ли программа физические эффекты задачи. При численной реализации необходимо следить за тем, не накапливается ли ошибка. С целью верификации программы проводилась проверка на симметрию, а также исследовалась погрешность при различных параметрах. В данной главе используются результаты работ [25-27; 29;137].

### **2.1. Качественные исследования.**

В данном разделе проводится качественное исследование трещин. Основная цель раздела – понять, каким образом форма, расположение, активность трещин влияют на их рост. Исследуются не численные значения КИН, а физический эффект, который можно наблюдать в этих задачах.

Как и в предыдущем случае рассматривается плоская трещина под нагрузкой. Трещина пассивна, нагрузка прикладывается на бесконечности перпендикулярно плоскости трещины (рис. 2.1). Граничные условия: берега трещины свободны от напряжений, а на бесконечности приложено растягивающее напряжение.

Все расчеты в этом разделе проводились на грубой сетке: Зелеными точками показана сплошная среда, черными – область разрыва перемещений (рис. 2.2).

#### **1) Квадратная кольцевая трещина**

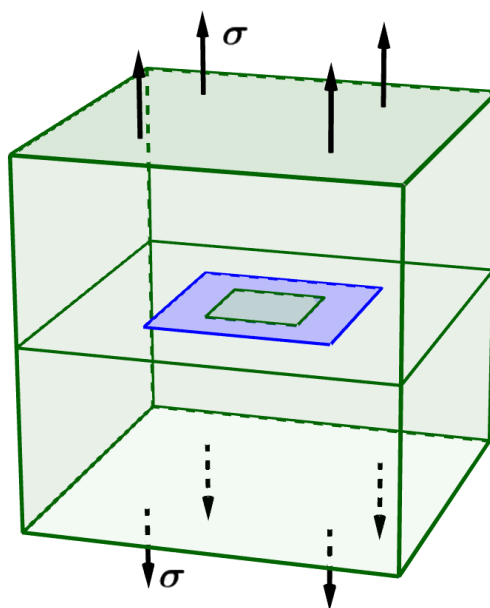


Рис. 2.1. Квадратная кольцевая трещина под нагрузкой  $\sigma$ .

Результаты расчетов на внутреннем и внешнем контуре.

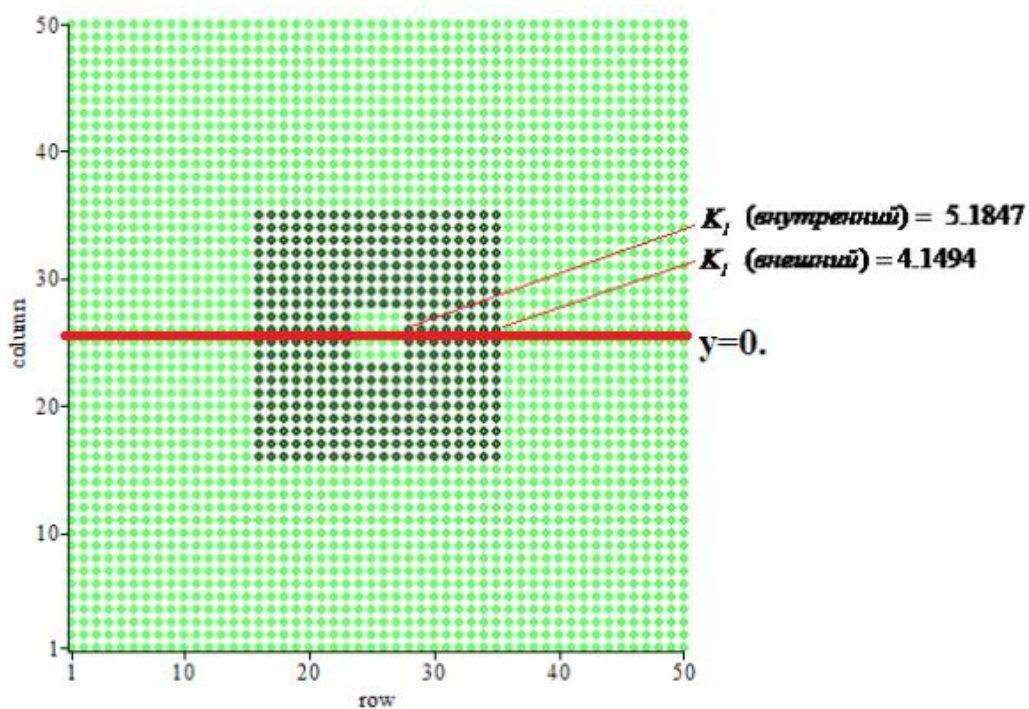


Рис.2.2. Зеленые точки – сплошная среда, черные – трещина.

Ниже представлены графики раскрытия трещины в сечении  $y=0$ .



Рис.2.3. Раскрытие трещины в сечении  $y=0$ .

Как видно из графика раскрытия, максимальный КИН достигается на внутренней границе, в области, где наибольший угол наклона касательной. Из рис. 2.2. и 2.3 видно, что на внутренней границе КИН больше, чем на внешней. Это значит, что трещина «схлопнется» внутрь. То есть область из двусвязной станет односвязной.

## 2) Кольцевая трещина.

Как и в случае выше рассматривается упругая среда, с кольцеобразной трещиной. Нагрузка приложена на бесконечности. Требуется исследовать значения КИН на внутреннем и внешнем кругах.

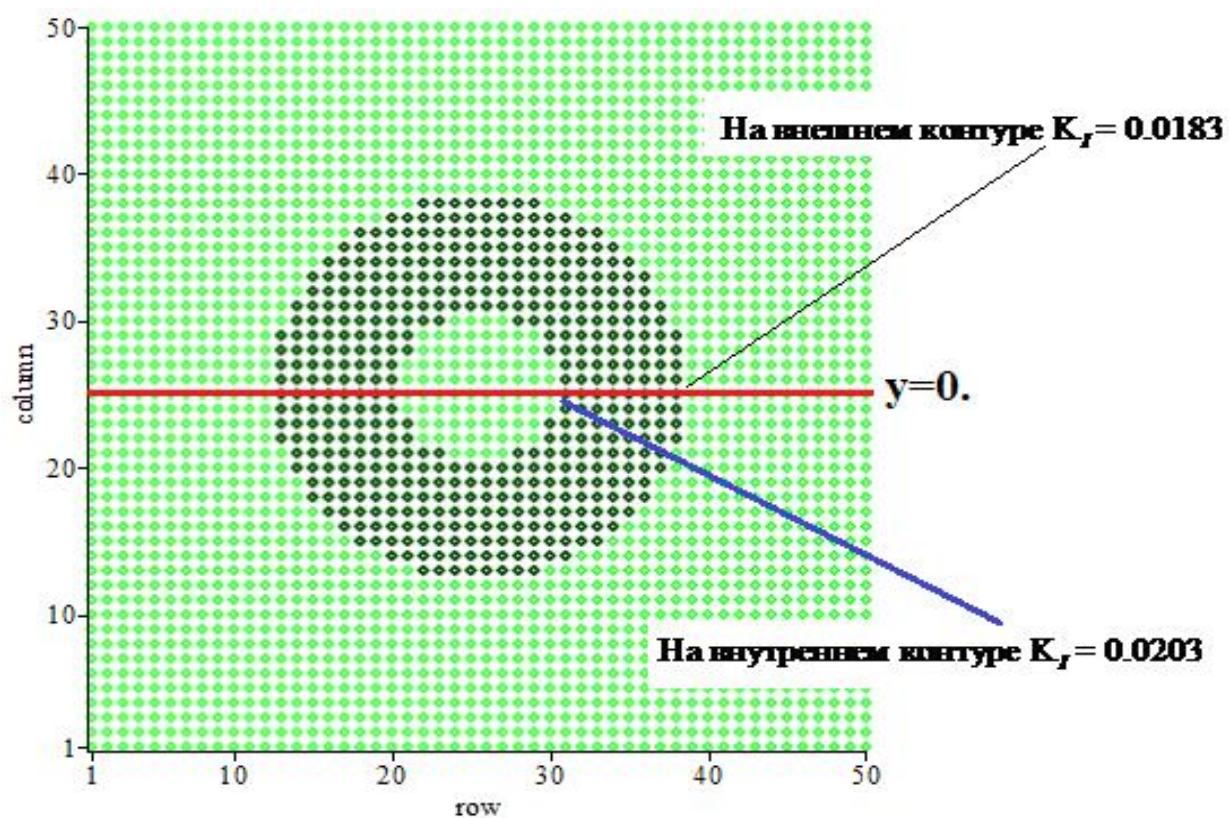


Рис.2.4. Кольцевая трещина.

Графики раскрытия в сечении  $y=0$ .

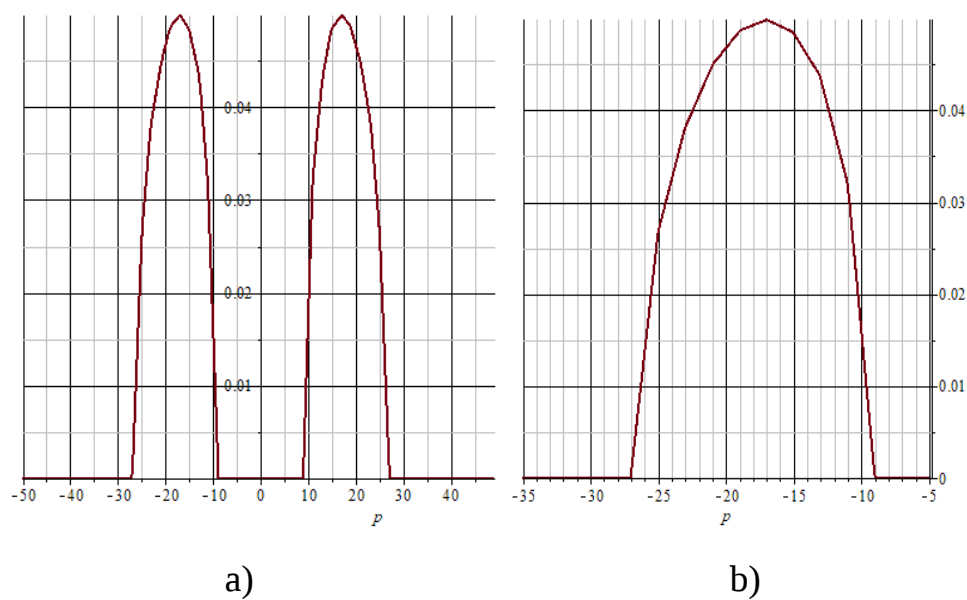


Рис.2.5. Раскрытие трещины в сечении  $y=0$ . а) полное раскрытие в сечении, б) крупно показана половина графика а).

Можно увидеть, что на внутреннем круге КИН больше, чем на внешнем. Поэтому трещина будет стремиться сначала из кольца стать кругом, а область, как и в случае квадратной трещины, из двусвязной стремится стать односвязной.

### 3) Трещина в виде полукольца.

Рассматривается упругая среда с трещиной в виде полукольца. Растягивающая нагрузка приложена на бесконечности. Требуется понять на какой из границ максимальный КИН.

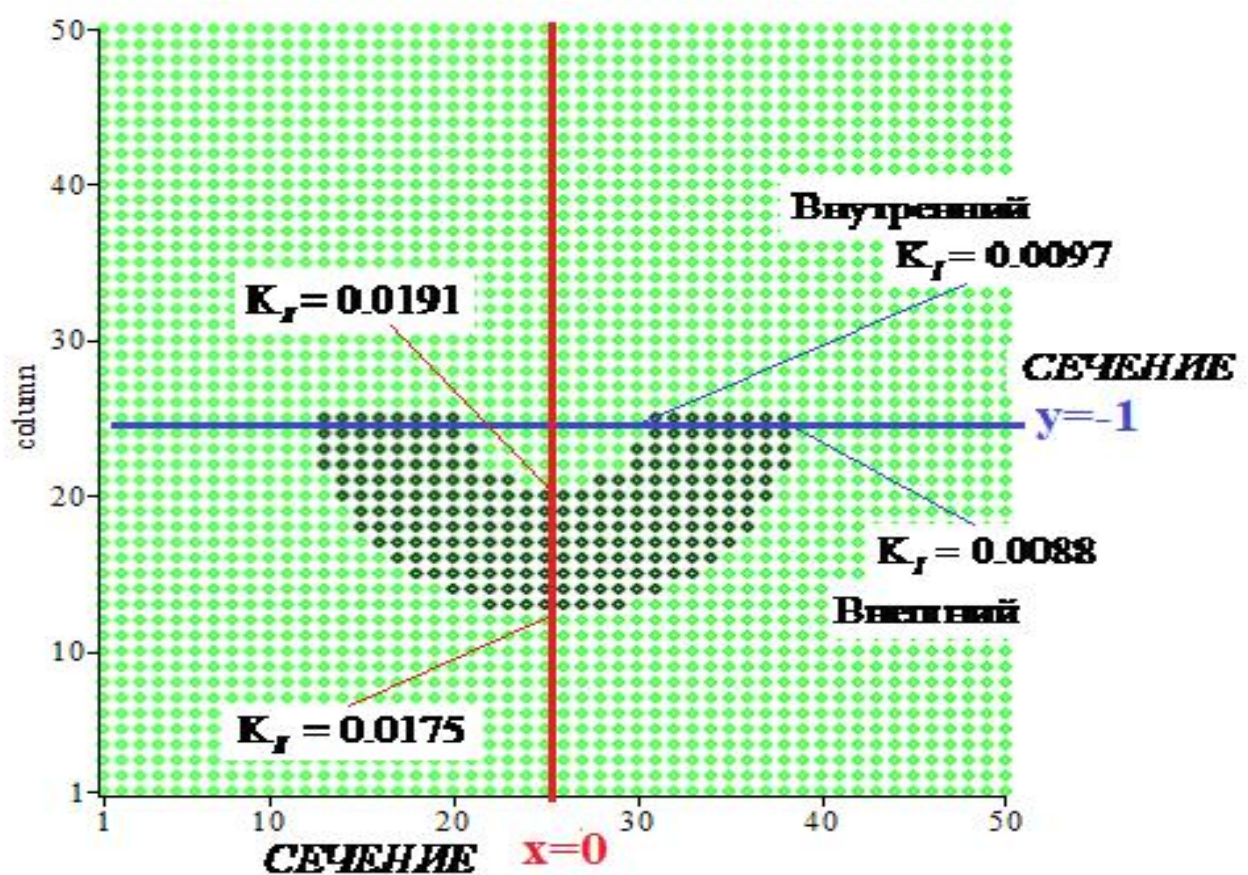


Рис.2.6. Трещина в виде полукольца.

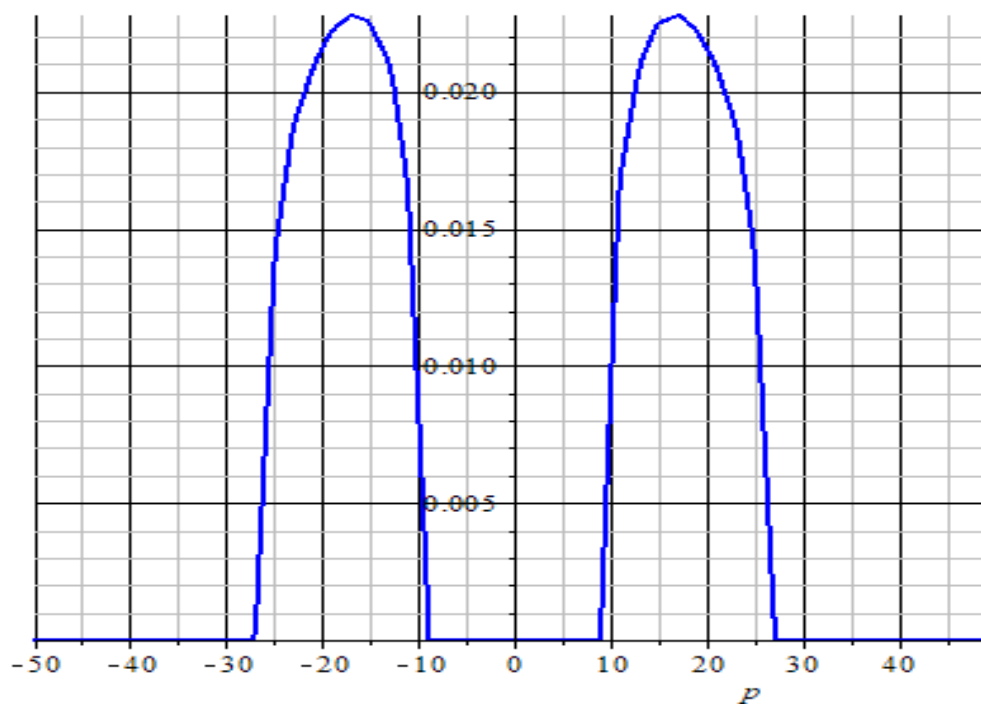


Рис.2.7. Раскрытие в сечении  $y=-1$ .

Из графика видно, что во внутренней точке трещины КИН больше, чем во внешней.

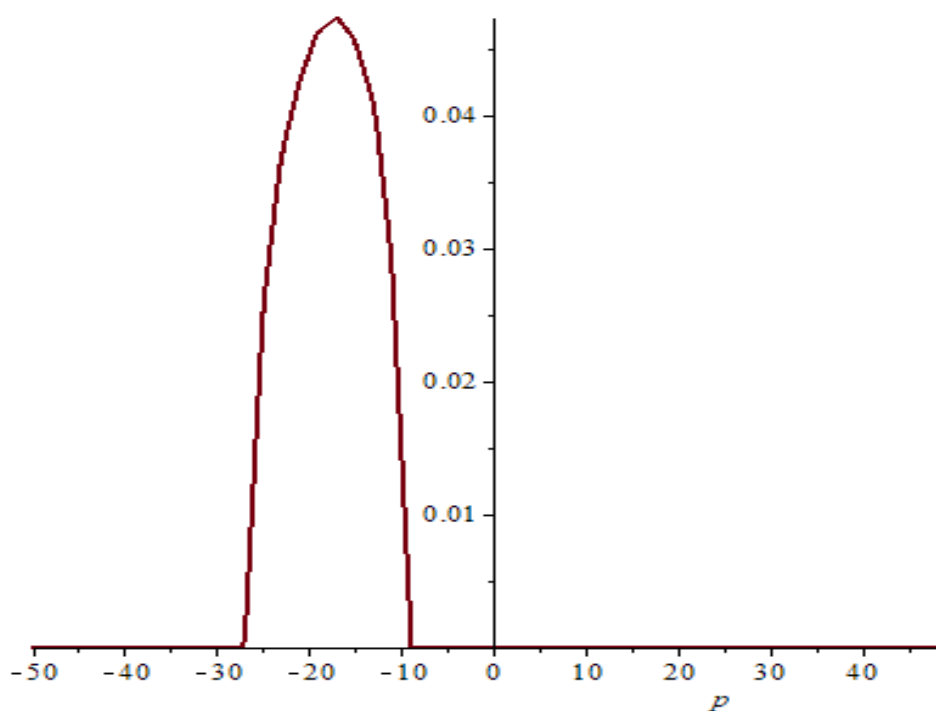


Рис.2.8. Раскрытие в сечении  $x=0$ .

При сравнении в различных сечениях КИН больше на внутреннем контуре полукруга. Это значит, что вогнутая часть трещины будет спрямляться, то есть область будет стремиться стать выпуклой.

4) Взаимодействие двух трещин: рассматривается система из двух трещин, лежащих в одной плоскости. Большая трещина активна (то есть на берегах задано давление), малая пассивна (берега свободны от нагрузки). Требуется понять, как наличие малой трещины влияет на рост большой.

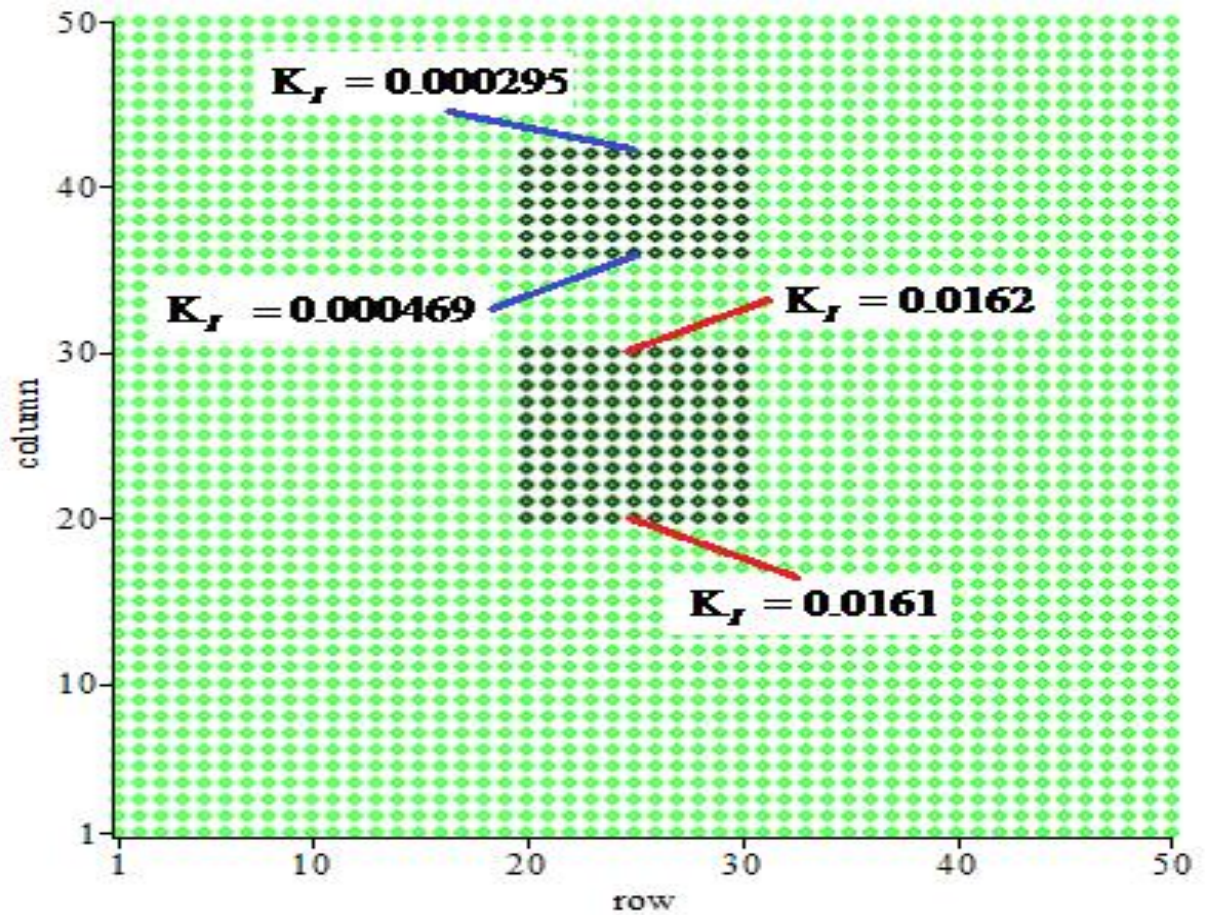


Рис. 2.9. Трещины, лежащие в одной плоскости.

Раскрытие трещин.

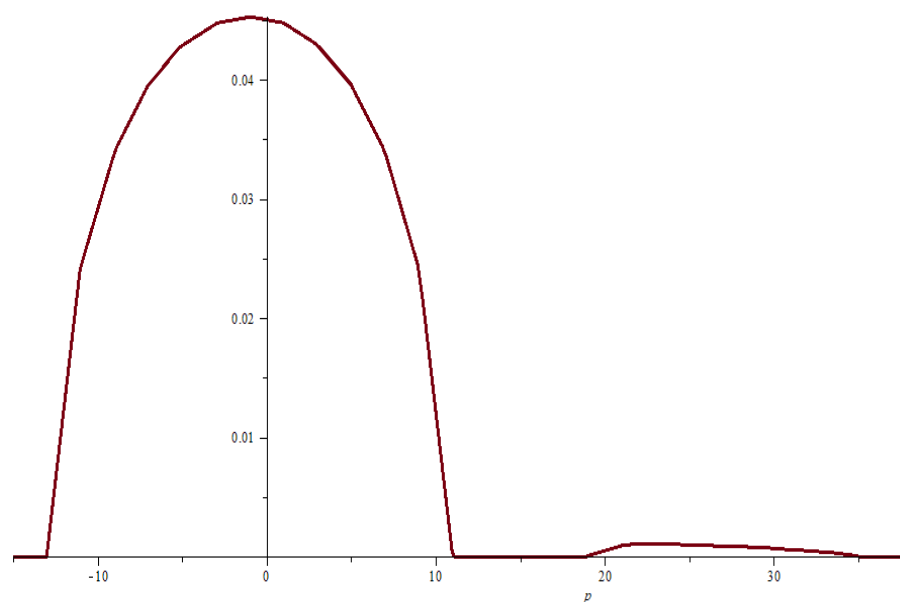


Рис.2.10. Раскрытие большой трещины в сечении  $x=0$ .

Раскрытие малой трещины.

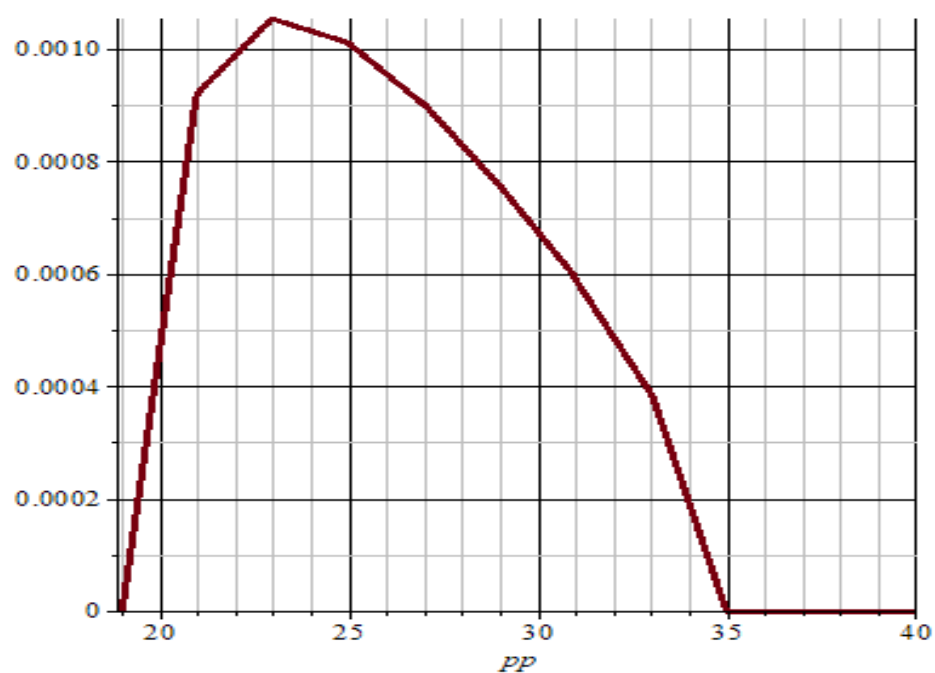


Рис.2.11. Раскрытие малой трещины в сечении  $x=0$ .

Как видно из графиков раскрытия и полученных значений КИН, активная трещина начинает расти в направлении пассивной. При этом сама по себе малая трещина не растет, но на внутреннем берегу ее КИН больше, чем на внешнем.

5) Также для качественного сравнения была выбрана задача о плоской трещине, которая находится под действием линейно возрастающего внутреннего давления  $P(x) = 0.5P(1 + x/l)$ ,  $-l \leq x \leq l$ . (Рис.2.12.)

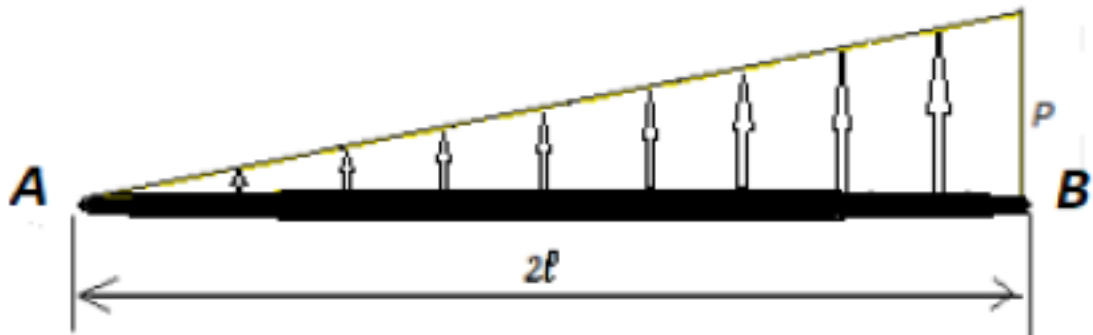


Рис.2.12. Плоская трещина длины  $2l$  под действием линейно распределенного давления  $P(x)$ ,  $P(A) = 0$ ,  $P(B) = p$

Теоретические значения КИН в данном случае соответственно равны:  $K_1 = 3p\sqrt{\pi l}/4$  в точке  $x = l$ ;  $K_1 = p\sqrt{\pi l}/4$  в точке  $x = -l$ . Для того, чтобы задача была близка к плоской, прямоугольник задавался сильно вытянутым вдоль одной оси. Проводились расчеты трехмерной трещины в виде плоского прямоугольника размера  $L_x \times L_y = 8.4 \times 2.4$ . (рис. 2.13.) Граничные элементы определялись параметрами  $h_x = 0.1$ ,  $h_y = 0.1$ . КИН определялись для сечения  $y = 0$ , соответствующего середине трещины.

Представление трехмерной поверхности трещины кривыми ее пересечения с плоскостями  $y = \text{const}$  приведено на рис. 2.13.

Поверхность берега трещины после раскрытия

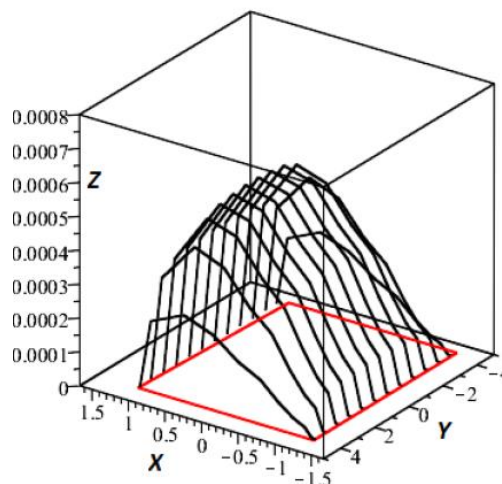


Рис.2.13. Поверхность верхнего берега трещины представлена кривыми пересечения верхнего ( $z = 0^+$ ) берега трещины с плоскостями  $y = \text{const}$

Сечения верхнего берега ( $z = 0^+$ ) трещины приведены на рис.2.14.

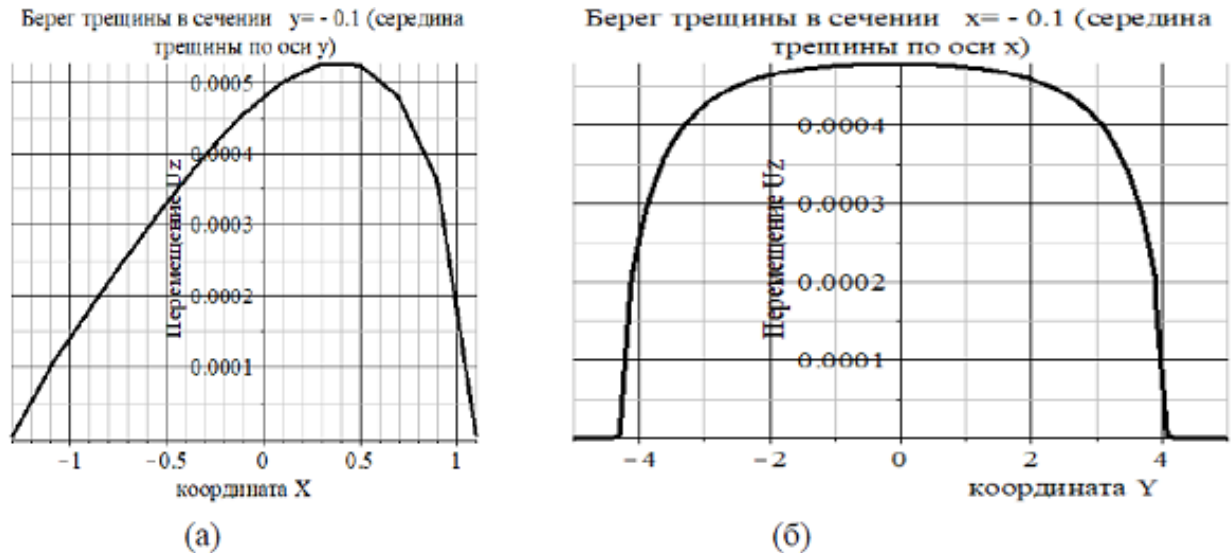


Рис. 2.14. Сечения верхнего берега ( $z = 0^+$ ) плоской трещины, находящейся под действием нарастающего по оси  $x$  внутреннего давления: а) сечение  $y = 0$  ; б) сечение  $x = 0$

Из графиков раскрытия видно, что в сечении по оси  $y$  явная несимметрия, так как нагрузка приложена неравномерно. А вдоль другой оси практически симметрия, это значит, что ошибка не накапливается в процессе счета.

В таблице 1 приведены сравнения по КИН.

| Т а б л и ц а 1.          |                  |                 |
|---------------------------|------------------|-----------------|
| $K_1/\mu, \text{м}^{1/2}$ | В точке $x = -l$ | В точке $x = l$ |
| Расчет                    | 0,00053          | 0,00149         |
| Теория                    | 0,00048          | 0,00139         |

Видно, что получены величины одного порядка и достаточно точные.

Анализируя качественные результаты, можно сказать, что кольцеобразные трещины различной формы имеют тенденцию внутреннего прорастания.

Трещины в виде полуколец также растут внутрь, то есть область стремится стать выпуклой. Активные трещины растут в направлении пассивной, лежащей в этой же плоскости.

Подводя итоги, можно сказать, что программа хорошо поддерживает проверку на симметрию и улавливает физические эффекты. Эти два факта указывают на корректность работы программы.

## 2.2. Верификация программного кода.

После удовлетворительных качественных результатов программа была переписана на язык C++, что дало возможность считать намного быстрее и на более мелких сетках. Для проверки корректности работы программного кода проводится верификация. Программа была тестирована путём сравнения с известными аналитическими решениями.

1. В качестве первой задачи для верификации была взята круглая плоская трещина радиуса  $R = a$ , которая находится под внутренним давлением  $p$  и расположена в плоскости  $z = 0$ . (рис. 2.15.)

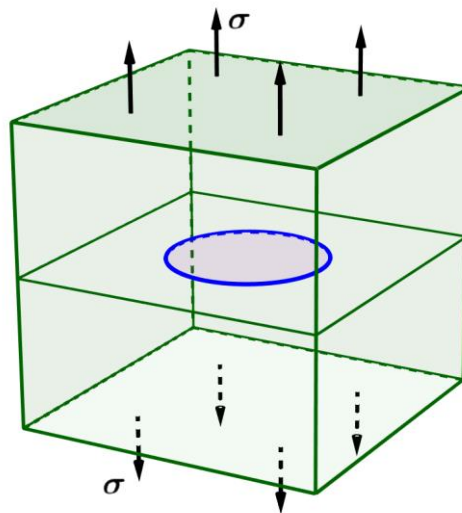


Рис. 2.15. Круглая плоская трещина под нормальной нагрузкой.

Теоретическое решение [80,81] для компоненты напряжений  $\sigma_0(r) = \sigma_{zz}(r, z)|_{z=0}$  на продолжении трещины  $r > a$  имеет вид

$$r > a \quad \sigma_0(r) = \frac{2pa}{\pi\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{2p}{\pi} \arcsin \frac{a}{r} \quad (2.1)$$

Перейдем в цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  (трещине соответствует диск  $z = 0, 0 \leq r \leq R$ ) и в данной задаче имеем граничные условия:  $z = 0, 0 \leq r \leq R, \sigma_{zz} = -p, \sigma_{rz} = 0$ . Как уже было сказано выше, основной характеристикой линейной механики разрушения является КИН, который по определению равен  $K_1 = \lim_{r \rightarrow R} \sigma_{zz} \sqrt{2\pi(r - R)}$ . В аналитическом решении для круглой трещины его величина равна

$$K_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi R}} \int_0^R \frac{r \sigma_{zz}(r) dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Эта задача решалась численно в трехмерной постановке, а результаты сравнивались с аналитическими. Проводились расчеты для двух значений радиусов. Результаты сравнения численных результатов с аналитическими приведены в табл. 2.

| Т а б л и ц а 2.          |               |        |
|---------------------------|---------------|--------|
| $K_1/\mu, \text{м}^{1/2}$ | $R, \text{м}$ |        |
|                           | 20            | 25     |
| Численное значение        | 0,0063        | 0,0074 |
| Теоретическое значение    | 0,0051        | 0,0056 |

В механике трещин наиболее интересным является поведение параметров задачи в окрестности границ трещин. В качестве примера приведём результаты сравнения напряжения  $\sigma_{zz}$  в плоскости круглой трещины на её продолжении по нормали к границе. На Рис. 2.16 представлены результаты сравнения с численным решением для трещины.

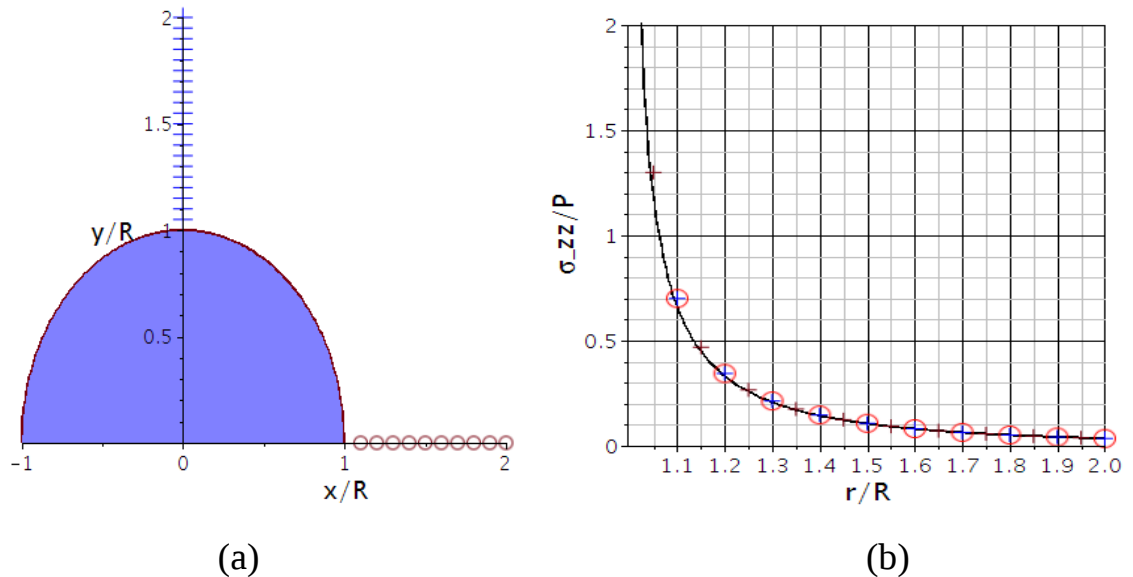


Рис.2.16. (а) – символом «круг» и символом «крест» отмечены точки, в которых вычислялось напряжение  $\sigma_{zz}$ ; (б) – График зависимости безразмерного напряжения  $\sigma_{zz}/p$  от безразмерного радиуса  $r/R$ . Сплошная линия соответствует теоретическому решению [80,81]. Символом круга отмечены расчетные точки на продолжении трещины вдоль оси  $x$ , символом крест расчетные значения на продолжении трещины вдоль оси  $y$ .

Следует отметить, что программа очень хорошо выдерживает проверку на симметрию. В точках, одинаково удаленных от границы трещины, значения напряжения совпадают (рис.2.16).

На Рис. 2.17 представлены результаты сравнения аналитического решения (2.1) с численным решением для трещины с параметрами  $a=1, p=0.1: \left( z=0, r=\sqrt{x^2+y^2} < a \right)$ . Значения компоненты напряжений  $\sigma_{zz}$  вычислялись в точках прямой линии  $y=0, z=0$ , расположенных на продолжении трещины ( $x > 1$ ).

На рис.2.17(а) представлены графики зависимости напряжения  $\sigma_{zz}/2\mu$  от расстояния  $s$  до края трещины. Сплошная линия соответствует кривой аналитического решения для функции  $\sigma_{zz}^{(T)}/2\mu$ . Точечная кривая – соответствует численным результатам  $\sigma_{zz}^{(N)}/2\mu$ . Напряжения определялись в

плоскости трещины  $z=0$  для точек с координатами  $M(x,0,0)$ ,  $x>1$ . На рис.2.17(b) приведена зависимость относительной ошибки  $\delta = (\sigma_{zz}^{(N)} - \sigma_{zz}^{(T)}) / \sigma_{zz}^{(T)}$ , от расстояния  $s$ . Ошибка растет с уменьшением расстояния до края трещины, но не превышает 3.5 %. Как видим, она максимальна около края трещины и уменьшается с ростом расстояния от края трещины.

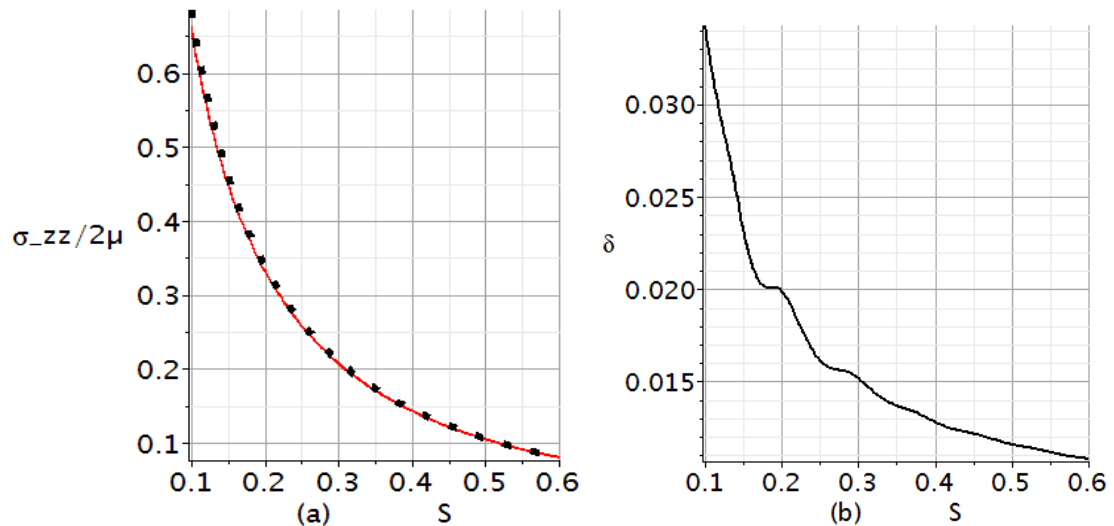


Рис.2.17

На Рис.2.18(a) приведены численные значения  $K_I$ , найденные по определению для разных значений расстояния  $s$  (рис.1.9). Сплошная линия соответствует теоретическому решению  $K_I^{(T)}$ , точечная кривая – расчетным значениям  $K_I^{(N)}(s)$ , определенным для разных расстояний  $s$ . На рис.2.18(b) показаны значения относительной ошибки  $\delta(s) = (K_I^{(N)}(s) - K_I^{(T)}) / K_I^{(T)}$ , в зависимости от величины  $s$ . Видно, что дальняя асимптотика является более точной. С уменьшением расстояния до края трещины ошибка растет, но не превышает 3.5 %. Как видим, численные значения  $K_I$  всегда больше, чем теоретические.

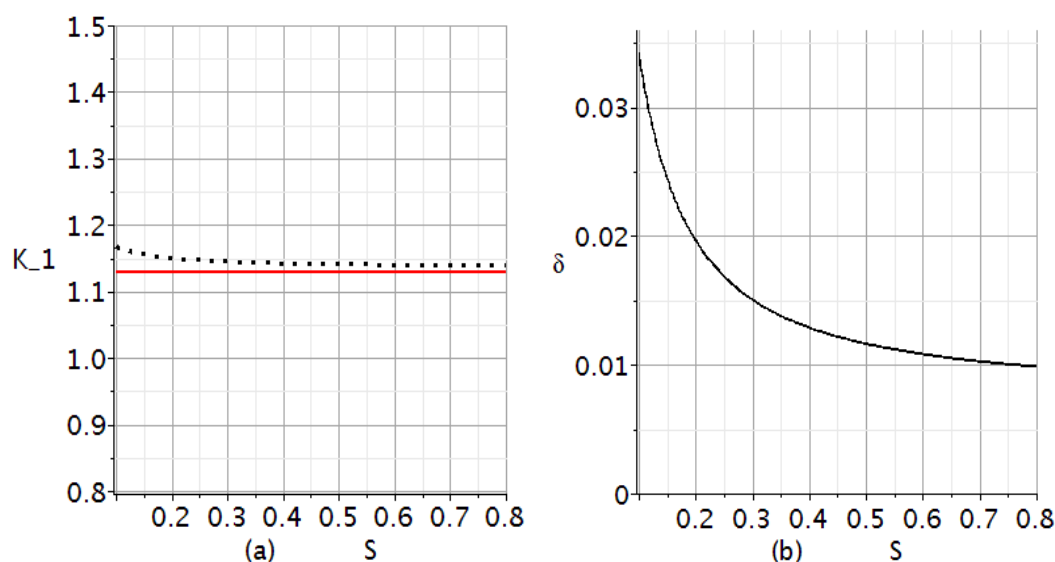


Рис.2.18

2) В качестве еще одной задачи для сравнения была выбрана эллиптическая трещина под давлением. Постоянная внешняя нагрузка  $\sigma$  действует в направлении ортогональном плоскости трещины. Для этой задачи существует аналитическое решение [78], где  $K_I$  выражается следующей формулой

$$K_I = \frac{\sigma}{E(k)} \left( \frac{\pi b}{a} \right)^{1/2} \left( a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta \right)^{1/4} = \frac{\sigma}{E(k)} \left( \frac{\pi b}{a} \right)^{1/2} \left[ \frac{a^2 (a/b)^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}{1 + (a/b)^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \right]^{1/4}, \quad (2.2)$$

где  $a, b$  – полуоси эллипса,  $a \geq b$ ,  $k = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ ,  $\theta = \operatorname{arctg}[(b/a) \operatorname{tg} \beta]$ ,  $E(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода. Связь углов  $\theta$  и  $\beta$  показана на рис. 2.19

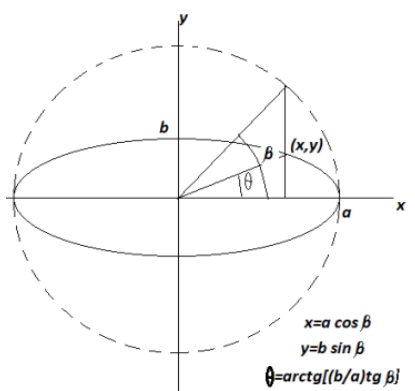


Рис.2.19. Связь углов  $\theta$  и  $\beta$

В качестве сравниваемой величины был выбран безразмерный коэффициент  $K_{-1} = K_I / \sigma \sqrt{\pi b}$ .

Проводились расчеты для различных значений полуосей. На рис. 2.20 показано сравнение кривых зависимости коэффициента интенсивности  $K_I$  вдоль границы эллиптической трещины в упругом пространстве. Сплошные кривые соответствуют аналитическому решению (2.2), а пунктирные кривые – численным расчетам. Пары кривых соответствуют разному отношению полуосей: рис.2.20(a) –  $a/b=1$ ; рис.2.20(b) –  $a/b=2$ ; рис.2.20(c) –  $a/b=5$ .

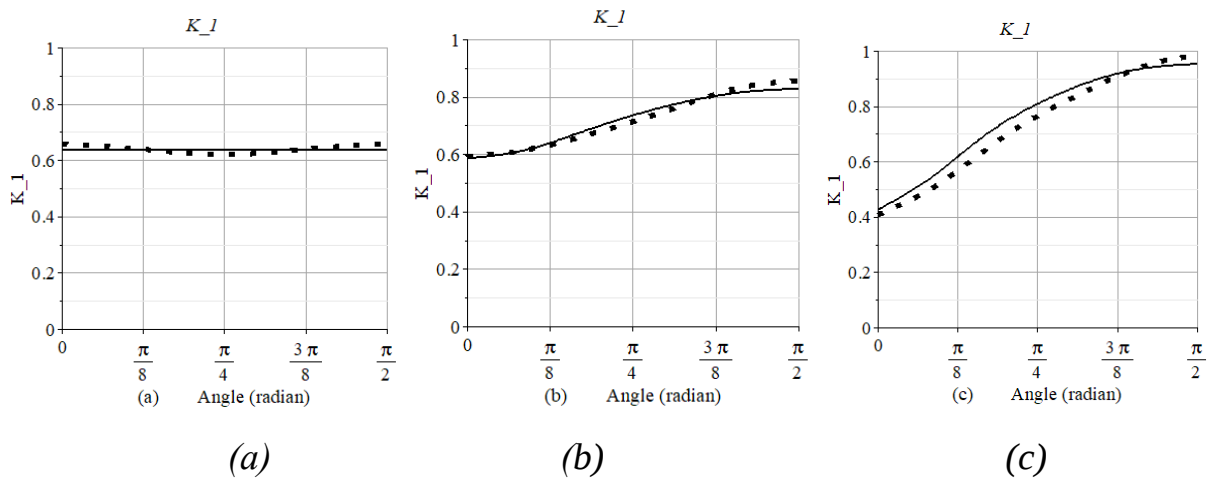


Рис.2.20. Сравнение численных и аналитических результатов.

Видно, что для сравнительно малых значений величины  $a/b \leq 2$  кривые почти совпадают (отличие составляет менее 1%). Для значений отношения  $a/b \geq 2$  ошибка мала для углов  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi/2$ , но для промежуточных углов начинает увеличиваться (максимальное значение ошибки равно 10%). Возрастание ошибки, по нашему мнению, связано с использованной в расчетах одинаковой сеткой граничных элементов. По всей вероятности, увеличение кривизны кривой границы трещины требует модификации сетки в сторону уменьшения размера граничных элементов.

3) После исследования одной трещины мы решили посмотреть, как программа будет работать в более сложных системах. Например, задача для двух круглых плоских параллельных, одноосных трещин одинакового радиуса  $R = a$ , которые находятся под давлением  $P$  на расстоянии  $2h$  друг от друга (рис.2.21).

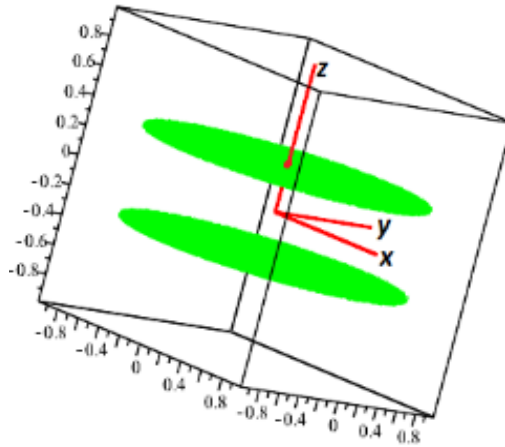


Рис. 2.21. трещины радиуса  $R = 1$  расположены параллельно плоскости  $z = 0$  строго одна над другой на расстоянии  $2h = 0.6$  между их плоскостями.

Обе трещины находятся под внутренним давлением  $P = 0,1$ .

Эта задача рассматривалась Я.С. Уфляндом в монографиях [80,81]. Её решение сведено к системе двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_1(x, t) \varphi(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^a L_1(x, t) \psi(t) dt &= -\frac{4}{\pi} P \\ \psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_2(x, t) \tau(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^a L_2(x, t) \psi(t) dt &= \frac{4}{\pi} P \end{aligned} \quad (2.3),$$

где константа  $c$  определяется дополнительным условием  $\int_0^a \psi(t) dt = 0$ , а ядра уравнений даются следующими формулами

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= \frac{16h^3}{((t+x)^2+4h^2)^2} + \frac{16h^3}{((t-x)^2+4h^2)^2} - \frac{16h^3}{((a+x)^2+4h^2)^2} - \frac{16h^3}{((a-x)^2+4h^2)^2} \\ L_1(x, t) &= 4h^3 \frac{4h^2-3(t+x)^2}{((t+x)^2+4h^2)^3} + 4h^3 \frac{4h^2-3(t-x)^2}{((t-x)^2+4h^2)^3} \\ K_2(x, t) &= -\frac{4h(t+x)^2}{((t+x)^2+4h^2)^2} - \frac{4h(t-x)^2}{((t-x)^2+4h^2)^2} \\ L_2(x, t) &= \frac{2h}{(t+x)^2+4h^2} + \frac{2h}{(t-x)^2+4h^2} - \frac{2h}{(a+x)^2+4h^2} - \frac{2h}{(a-x)^2+4h^2} \end{aligned}$$

Напряжение на продолжении трещины  $r > 1$  выражается формулой

$$\sigma_0(r) = \int_0^a \varphi(t) \Phi(r, t) dt + \int_0^a \psi(t) \Psi(r, t) dt$$

где функции  $\Phi, \Psi$  равны следующим выражениям:

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} \right] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h + it)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h + ia)^2}} \right] +$$

$$+ h \operatorname{Re} \left[ \frac{2h + it}{(\sqrt{r^2 + (2h + it)^2})^3} - \frac{2h + ia}{(\sqrt{r^2 + (2h + ia)^2})^3} \right]$$

$$\Psi(r, t) = h^2 \operatorname{Re} \left( \frac{3(2h + t)^2}{(\sqrt{r^2 + (2h + it)^2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{r^2 + (2h + ia)^2})^3} \right)$$

После решения интегральных уравнений становится возможно определить функции  $\varphi, \psi$  и восстановить аналитическую зависимость напряжения  $\sigma_0 = \sigma_{zz}(r, z)|_{z=0}$  для значений параметров  $R = 1, 2h = 0,6, p = 0,1$ . В работах Уфлянда отсутствует решение интегральных уравнений. Поэтому авторами была разработана программа, которая их решает. Результаты сравнения аналитического (полученного при помощи формул (2.3)) и численного (полученного при помощи программы) решений для напряжений представлены на рисунке ниже

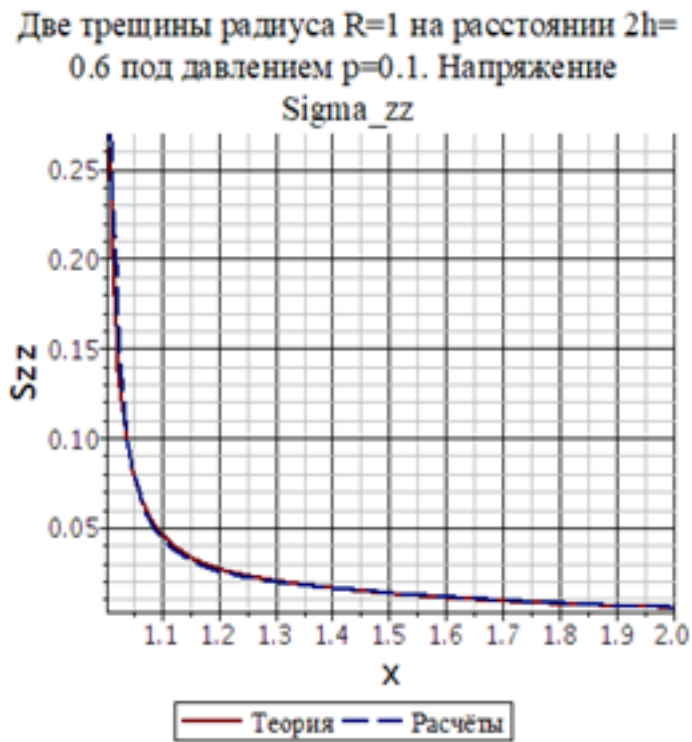


Рис. 2.22. зависимость напряжения  $\sigma_{zz}(x)$  на продолжении трещины.

На рис.2.23(а) показаны результаты сравнения аналитического  $\sigma_{zz}^{(T)}/2\mu$  и численного решения  $\sigma_{zz}^{(N)}/2\mu$ . На оси абсцисс отложена координата  $s$ , на оси ординат – значение напряжения. Сплошная линия соответствует теоретическому решению, точечная кривая – численным расчетам.

Зависимость относительной ошибки  $\Delta\sigma/\sigma = (\sigma_{zz}^{(N)} - \sigma_{zz}^{(T)})/\sigma_{zz}^{(T)}$  от координаты  $s$  приведена на рис.2.23(b).

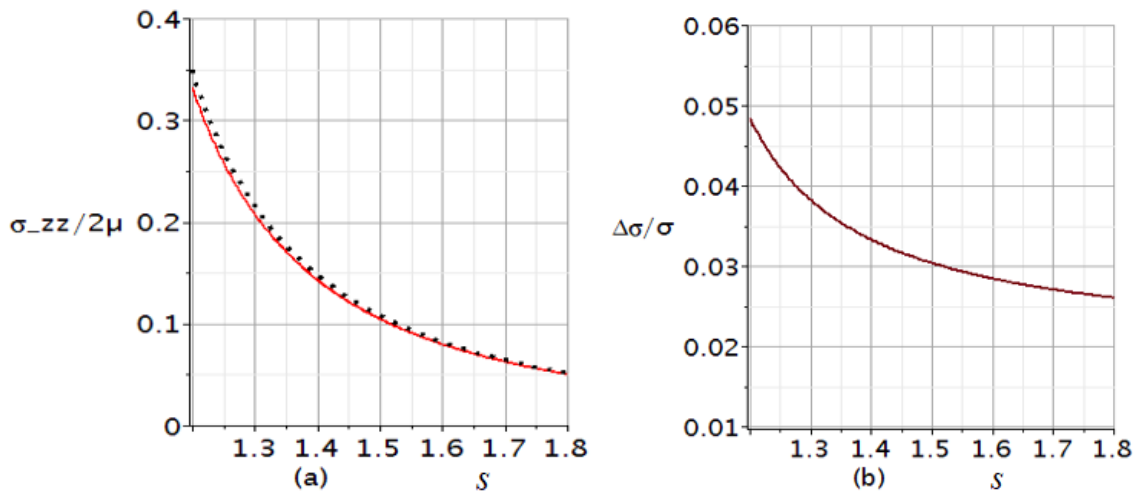


Рис.2.23.

Как и в случае одиночной трещины, ошибка нарастает с приближением к краю трещины (координата края  $s=1$ ). Для данного расчета максимальное значение ошибки не превышает 5 %.

4) Коэффициент влияния для двух круглых параллельных трещин. В работах Уфлянда [80] и В.И. Фабриканта [98,99] вводится понятие коэффициента влияния. Величина коэффициента влияния  $k^{(1)}$  равна отношению КИН  $K_I$  для двух трещин к КИН для одиночной трещины. В работе [98], наряду с более общими результатами, приведена полученная аналитическая зависимость коэффициента влияния двух круглых одноосных трещин радиуса  $a$ , в зависимости от расстояния  $z$  между их плоскостями

$$k^{(1)} = 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{2a}{z}\right) - \frac{2az}{4a^2 + z^2} \right]. \quad (2.4)$$

На рис.2.24 приведены результаты сравнения. На оси абсцисс отложено безразмерное расстояние между трещинами  $z/a$ , на оси ординат – коэффициент влияния  $k^{(1)}$ . Сплошная кривая соответствует формуле (2.4), точечная кривая – результатам наших расчетов. Кружками приведены три значения коэффициентов влияния, полученные Я.С. Уфляндом [80].

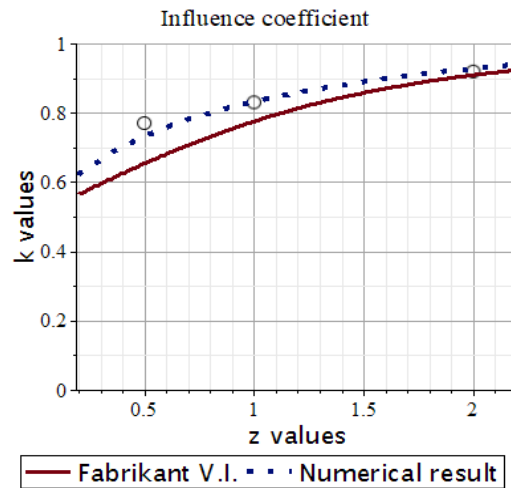


Рис.2.24. Сравнение коэффициентов влияния.

В [98] также приведена аналитическая формула для предельного значения коэффициента влияния, когда расстояние между трещинами стремится к нулю

$$k = \lim_{z \rightarrow 0} k^{(1)} = \frac{6\pi^2}{4 + 9\pi^2} = 0.638.$$

Численный метод не позволяет нам приблизить трещины на бесконечно близкое расстояние. Он ограничен характерным размером используемого граничного элемента (в наших расчетах использовался размер 0.05). Предельное расстояние достоверности результатов для данного масштаба граничного элемента  $z = 0.1$ . Численное значение коэффициента влияния для данного расстояния получилось равным  $k^{(1)} = 0.594$ .

5) Рассматривается задача о двух плоских трещинах, лежащих в одной плоскости. В работе [99] приведены значения коэффициентов влияния для системы из двух круглых трещин, которые находятся в одной плоскости. Также в этой работе приводится аналитическое доказательство того, что для трещин в одной плоскости коэффициент влияния всегда больше единицы.

Для выделенной трещины коэффициент влияния является функцией угла, который составляет радиус вектор точки границы трещины с линией центров. Трещины находятся под действием растягивающей нагрузки, направленной по нормали к их плоскости расположения. Помимо угла коэффициент влияния

зависит от расстояния между трещинами. В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть углы диапазоне  $[0^\circ; 180^\circ]$ .

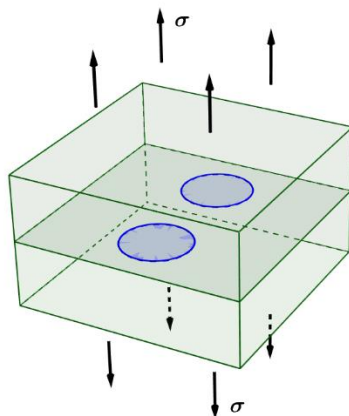


Рис. 2.25. Трещины в одной плоскости.

В таблицах 3, 4 представлены результаты сравнения коэффициентов влияния для указанного набора углов. В строке  $k_f$  приведены значения коэффициента влияния из работы [99], в строке  $k_n$  – наши результаты. Таблица 3 составлена для расстояния между трещинами, равного  $0.2a$ . Таблица 4 – соответствует расстоянию  $0.1a$ .

Таблица 3. Расстояние между трещинами  $0.2a$

| Угол  | $0^\circ$ | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ | $90^\circ$ | $105^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $175^\circ$ | $180^\circ$ |
|-------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $k_f$ | 1.167     | 1.138      | 1.092      | 1.060      | 1.042      | 1.031      | 1.024      | 1.0198      | 1.017       | 1.015       | 1.014       | 1.013       | 1.013       |
| $k_n$ | 1.192     | 1.151      | 1.083      | 1.053      | 1.035      | 1.023      | 1.020      | 1.016       | 1.015       | 1.014       | 1.011       | 1.014       | 1.015       |
| %     | 2.14      | 1.14       | 0.82       | 0.66       | 0.67       | 0.77       | 0.39       | 0.37        | 0.20        | 0.09        | 0.29        | 0.099       | 0.197       |

Таблица 4. Расстояние между трещинами  $0.1a$

| Угол  | $0^\circ$ | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ | $90^\circ$ | $105^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $175^\circ$ | $180^\circ$ |
|-------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $k_f$ | 1.288     | 1.213      | 1.126      | 1.077      | 1.052      | 1.037      | 1.028      | 1.023       | 1.020       | 1.018       | 1.016       | 1.016       | 1.015       |
| $k_n$ | 1.347     | 1.250      | 1.108      | 1.043      | 1.023      | 1.026      | 1.017      | 1.018       | 1.017       | 1.016       | 1.008       | 1.017       | 1.018       |
| %     | 4.5       | 3.05       | 1.59       | 3.15       | 2.75       | 1.06       | 1.07       | 0.49        | 0.29        | 0.20        | 0.79        | 0.09        | 0.29        |

При расстоянии  $0.2a$  (таблица 3), для всего диапазона углов, за исключением угла  $0^\circ$ , соответствующего самым близким точкам границ двух трещин, относительная ошибка не превышает 1.2%. Для угла  $0^\circ$  ошибка максимальна и составляет 2.14%.

При уменьшении расстояния до  $0.1a$  (таблица 4), ошибка возрастает, её максимальное значение, как и в первом случае, реализуется в точке, соответствующей углу  $0^\circ$ . Значение максимальной относительной ошибки равно 4.5%.

б) Аналогичное сравнение было проведено с результатами работы [98], где приведены значения коэффициентов влияния для двух одинаковых трещин в одной плоскости в случае касательной нагрузки. (Рис. 2.26.)

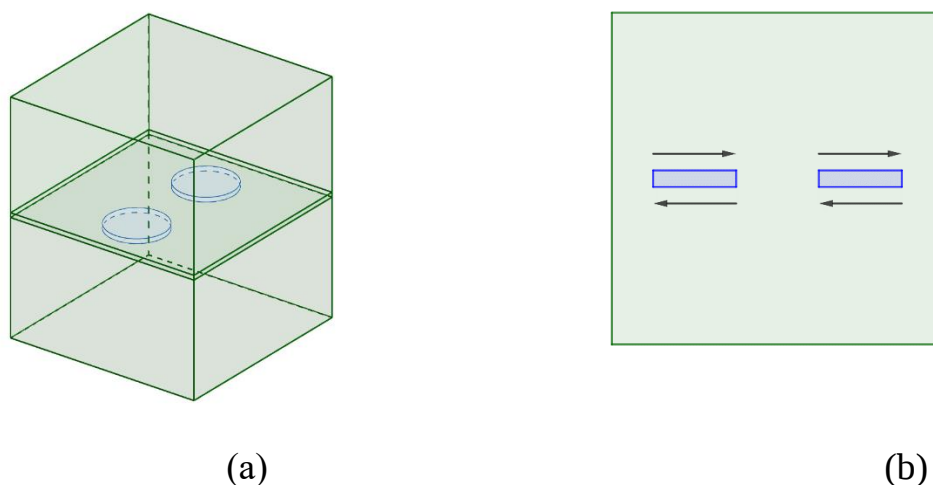


Рис. 2.26. Трещины под касательной нагрузкой: (a) – расположение трещин; (b) – приложение нагрузки

Результаты сравнения даны в таблицах 5, 6. Таблица 5 соответствует расстоянию  $0.2a$ , таблица 6 – расстоянию  $0.1a$ . Как и ранее, в строке  $k_f$  приведены результаты работы [98], в строке  $k_n$  – результаты авторов данной работы.

В строке «%» приводится относительная ошибка в процентах.

Таблица 5. Расстояние между трещинами  $0.2a$

| Угол  | $0^\circ$ | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $75^\circ$ | $90^\circ$ | $105^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $175^\circ$ | $180^\circ$ |
|-------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $k_f$ | 1.918     | 1.494      | 1.241      | 1.139      | 1.094      | 1.071      | 1.059      | 1.051       | 1.047       | 1.044       | 1.042       | 1.041       | 1.041       |
| $k_n$ | 1.913     | 1.555      | 1.109      | 1.121      | 1.060      | 1.005      | 1.049      | 1.008       | 1.020       | 1.025       | 1.001       | 1.025       | 1.020       |
| %     | 0.26      | 4.08       | 10.6       | 2.46       | 3.10       | 6.16       | 0.94       | 4.09        | 2.57        | 1.82        | 2.97        | 1.54        | 2.02        |

В случае касательной нагрузки наименьшее отклонение (менее 1%) отмечается для угла  $0^\circ$ , т.е. в наиболее близких точках границ трещин. Для

остальных углов ошибка более существенна (в пределах 11% для расстояния  $0.2a$  и в пределах 13% для расстояния  $0.1a$ ).

Таблица 6. Расстояние между трещинами  $0.1a$

| Угол                 | 0°    | 15°   | 30°   | 45°   | 60°   | 75°   | 90°   | 105°  | 120°  | 135°  | 150°  | 175°  | 180°  |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>k<sub>f</sub></b> | 2.142 | 1.529 | 1.249 | 1.143 | 1.090 | 1.073 | 1.060 | 1.053 | 1.048 | 1.045 | 1.043 | 1.042 | 1.042 |
| <b>k<sub>n</sub></b> | 2.149 | 1.669 | 1.093 | 1.139 | 1.062 | 1.003 | 1.058 | 1.002 | 1.021 | 1.028 | 1.001 | 1.028 | 1.021 |
| <b>%</b>             | 0.32  | 9.15  | 12.49 | 0.35  | 2.56  | 6.52  | 0.18  | 4.84  | 2.58  | 1.63  | 4.03  | 1.44  | 2.02  |

При сближении трещин ошибка возрастает, но не превосходит 13%. Подобная тенденция наблюдается при приложении как нормальной, так и касательной нагрузки.

5). Коэффициент влияния двух эллиптических трещин, лежащих в одной плоскости. В работах [80], [104] проведено взаимное влияние двух эллиптических трещин, лежащих в одной плоскости. Данная задача решалась численно. Показано, что наибольшее влияние характерно для такого взаимного расположения, когда большие полуоси эллипсов параллельны (Рис.2.27(a)), а две другие полуоси расположены на одной прямой. На рис.2.27(b) приведены результаты сравнения с работой [129]. На оси абсцисс отложено приведённое расстояние между трещинами  $d = t / (2b)$  (Рис.2.27(a)). По оси ординат отложен коэффициент влияния  $F = K_I(B) / K_{I0}(B)$ , где  $K_{I0}(B)$  – значение коэффициента интенсивности напряжений для одной эллиптической трещины в точке  $B$ ,  $K_I(B)$  – соответствующее значение коэффициента интенсивности напряжений для двух трещин. Символом «круг» отмечены точки, приведенные в [129], символом «крест» обозначены наши результаты. Расхождение результатов растёт по мере сближения трещин, но максимальная ошибка составляет 4%. Как видим, результаты наших расчетов соответствуют работе [129].

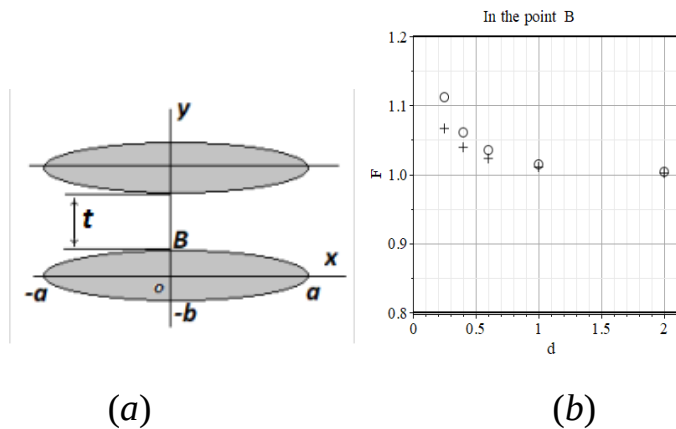


Рис.2.27. Две эллиптические трещины в одной плоскости.

Существенной особенностью метода является то, что матрица системы линейных уравнений для определения скачков поля перемещений является всюду плотной. У неё нет глобального преобладания диагональных элементов. Для решения системы использовался итерационный метод, предложенный в работе [135] – «стабилизированный метод бисопряжённых градиентов».

Подводя итоги, можно считать, что предлагаемый метод расчетов напряженно-деформированного состояния упругой среды для системы трехмерных трещин дает возможность достаточно точно определять поле перемещений и напряжений. Сравнение коэффициентов интенсивности с известными аналитическими результатами показало, что и количественные характеристики вполне приемлемы.

Основные выводы по главе 2.

- Проведен качественный анализ влияния формы контура трещин на возможные направления ее роста. Показано, что в случае вогнутых участков границы, они спрямляются, и трещина стремится стать выпуклой. В случае многосвязных областей схлопывание происходит внутрь (область стремится стать односвязной).
- При взаимодействии активной и пассивной трещин, находящихся в одной плоскости, активная трещина будет расти в сторону пассивной, стремясь к слиянию.
- В случае линейно возрастающего внутреннего давления максимум раскрытия трещины смещается в сторону большего давления. В

ортогональном направлении раскрытие остается симметричным, что подтверждает хорошее соответствие численных результатов симметрии задачи.

- Тестовые расчеты по верификации работы программы проведены для одиночных трещин (круглых и эллиптических), для системы двух параллельных одноосных круглых трещин, для круглых и эллиптических трещин, находящихся в одной плоскости. Расчеты проводились как для нормальной, так и для касательной нагрузки.
- Все вышеперечисленные задачи являются параметрическими. Роль параметра в случае параллельных трещин выполняло расстояние между плоскостями трещин. В случае расположения трещин в одной плоскости расстояние между ближайшими точками.
- Во всех случаях формы и расположения трещин расчеты показали вполне удовлетворительное количественное и качественное совпадение численных и аналитических результатов, как для напряжений, так и для коэффициентов интенсивности напряжений.
- Для верификации потребовалось проведение большой серии расчетов. Проведенная работа показала высокую эффективность по скорости расчетов и обработке полученных численных результатов.

### Глава 3. Взаимное влияние систем трещин.

После проверки эффективности метода, были исследованы новые задачи, решения которых еще не были получены. Моделировались 2 круглые трещины разных радиусов, 2 эллиптические трещины, трещины с изломом, трещины ветвления, а также периодическая система трещин. В данной главе используются результаты работ [28, 29, 123, 124, 134, 136, 138, 139].

#### 3.1. Круглые трещины.

Рассматриваются 2 плоские трещины, расположенные в параллельных плоскостях. Нагрузка приложена перпендикулярно плоскостям трещин. Центр первой трещины лежит в начале координат и неподвижен, а центр второй сдвигается по оси  $Oy$  на величину  $d$ . Также меняется расстояние  $z$  между плоскостями трещин. Исследована зависимость КИН от радиуса подвижной трещины, расстояния между плоскостями трещин и от положения центра подвижной трещины [25-30].

В качестве результатов представлена комбинация коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами. Под комбинацией коэффициентов понимается величина параметра:  $G = \frac{1-\nu}{2\mu} K_I^2 + \frac{1-\nu}{2\mu} K_{II}^2 + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2$ . На графиках представлено отношение величины параметра  $G$  к величине  $G_t$  – комбинации коэффициентов для одиночной трещины (без наличия второй). Расстояние между плоскостями трещин берется в радиусах неподвижной трещины, а различные серии решений отличаются сдвигом центра подвижной трещины по оси  $Oy$ . Если через верхнюю трещину пропустить свет, то на нижнюю будет падать тень, область тени будем называть «теневой» областью. Результаты расчетов показаны ниже:

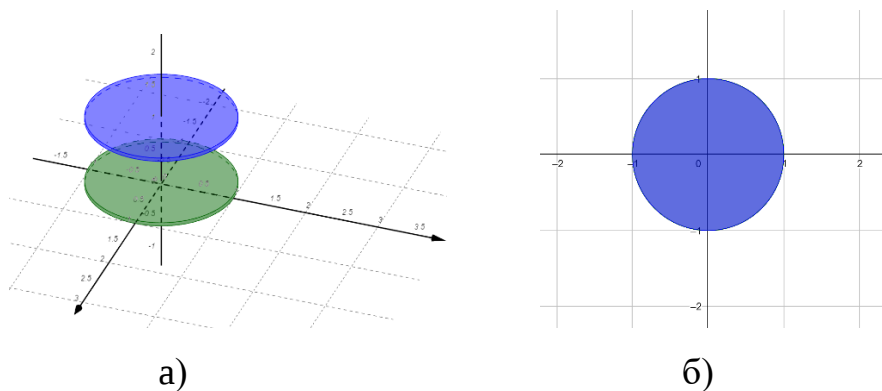


Рис. 3.1: а) Две трещины радиуса 1 расположены соосно; б) «Теневая» область.

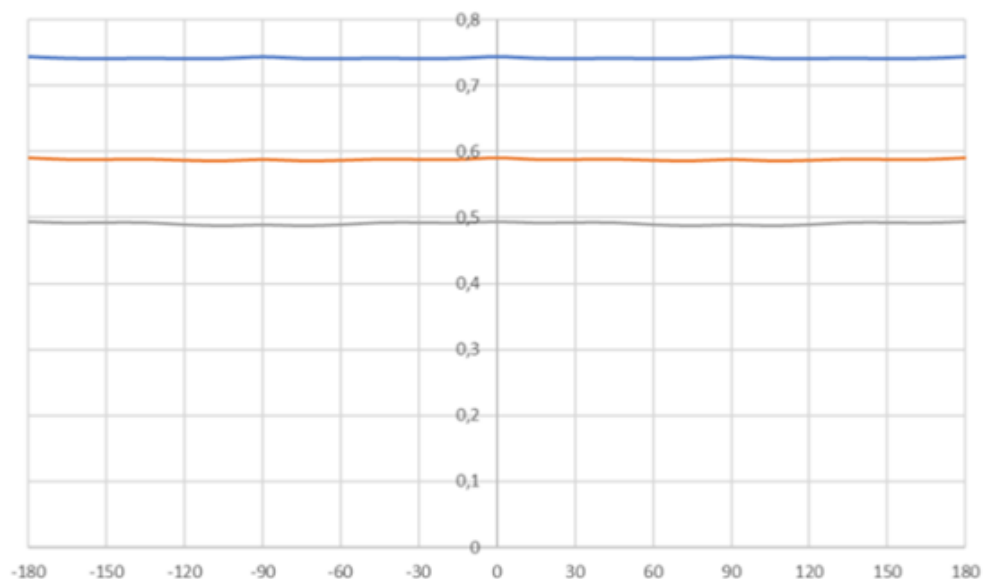


Рис. 3.2: Параметр  $G$  для расстояния  $d = 0$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 0,8; оранжевая – 0,5; серая – 0,3

Как видно из графиков, при сближении трещин одинакового радиуса, параметр  $G$  убывает, то есть наличие подвижной трещины ослабляет рост первой. Такой эффект можно объяснить тем, что две трещины распределяют приложенную нагрузку между собой, поэтому на каждой из них КИН меньше, чем на одиночной.

Две трещины в параллельных плоскостях, центр подвижной трещины в точке  $(0; 0,25; z)$  (рис. 3.3).

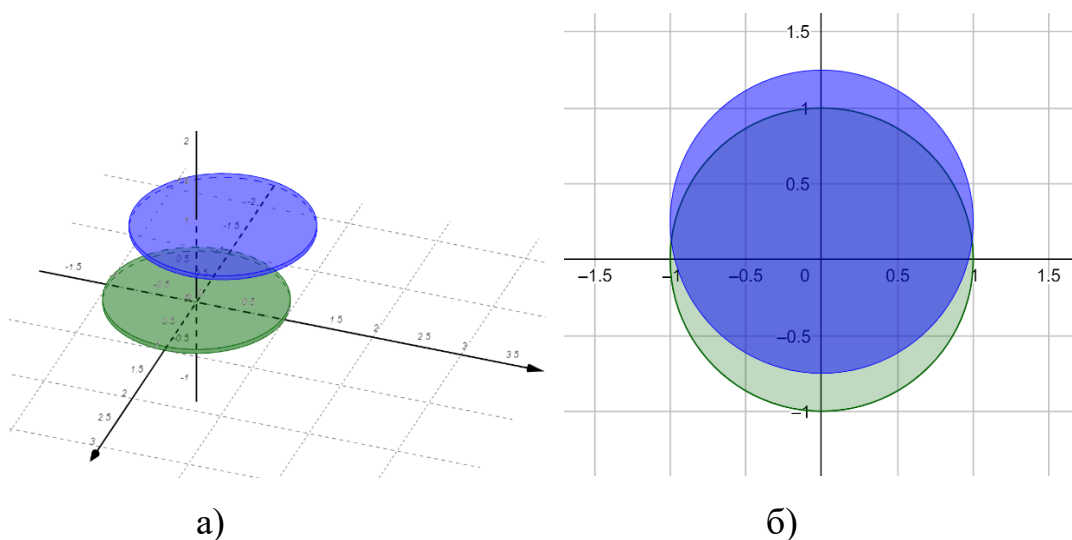


Рис. 3.3: а) центр подвижной трещины в точке  $(0; 0,25; z)$ ; б) Вид сверху, «теневая» область.

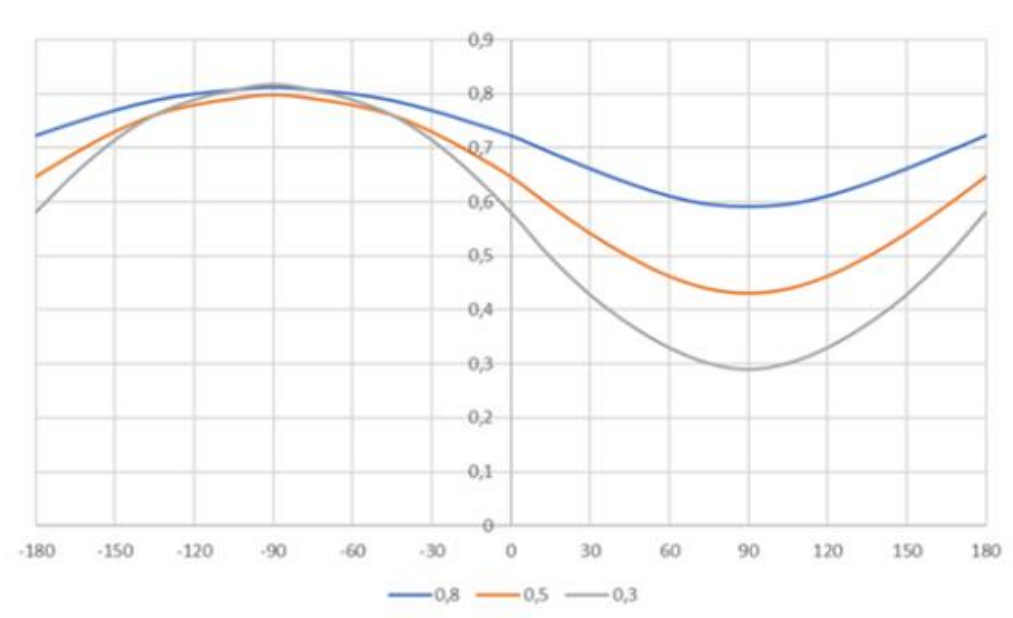
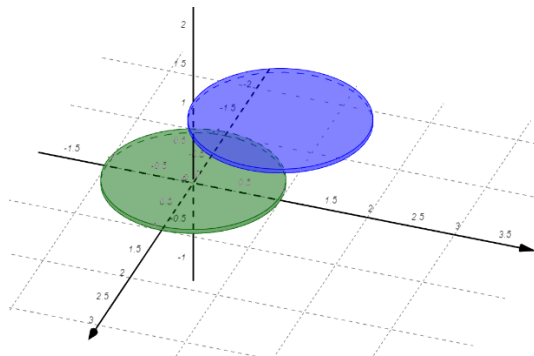


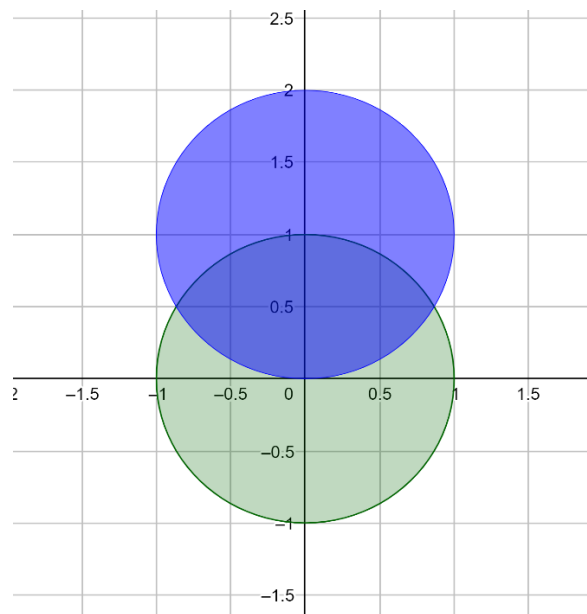
Рис.3.4: Параметр  $G$  для расстояния  $d = 0,25$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 0,8; оранжевая – 0,5; серая – 0,3

Видно, что в «теневой» области границы параметр  $G$  уменьшается, а на остальной части – увеличивается.

Две трещины в параллельных плоскостях, центр подвижной трещины в точке  $(0; 1; z)$  (рис.3.5).



а)



б)

Рис.3.5: а) центр подвижной трещины в точке  $(0; 1; z)$ ; б) Вид сверху, «теневая» область.

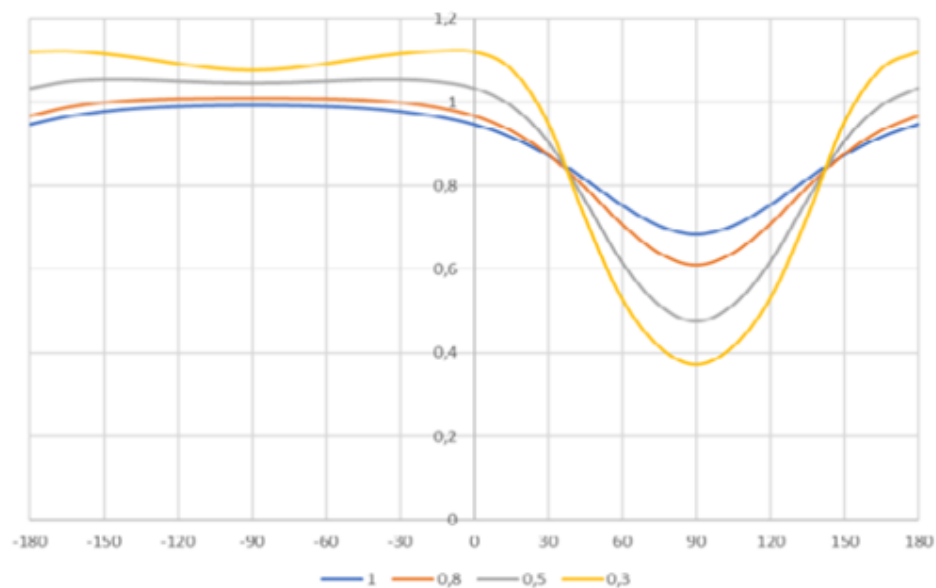


Рис.3.6: Параметр  $G$  для расстояния  $d = 1$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 1; оранжевая – 0.8; серая – 0.5; желтая – 0.3

Две трещины в параллельных плоскостях, центр подвижной трещины в точке  $(0; 1,5; z)$ .

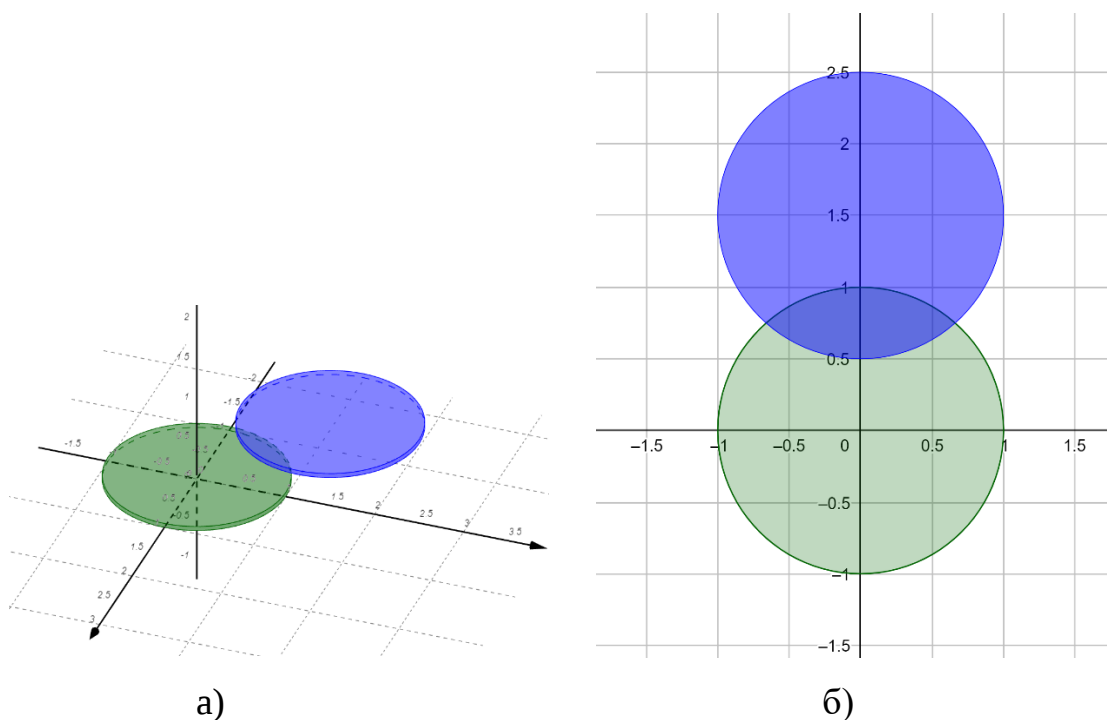


Рис.3.7: а) центр подвижной трещины в точке  $(0; 1; z)$ ; б) Вид сверху, «теневая» область.

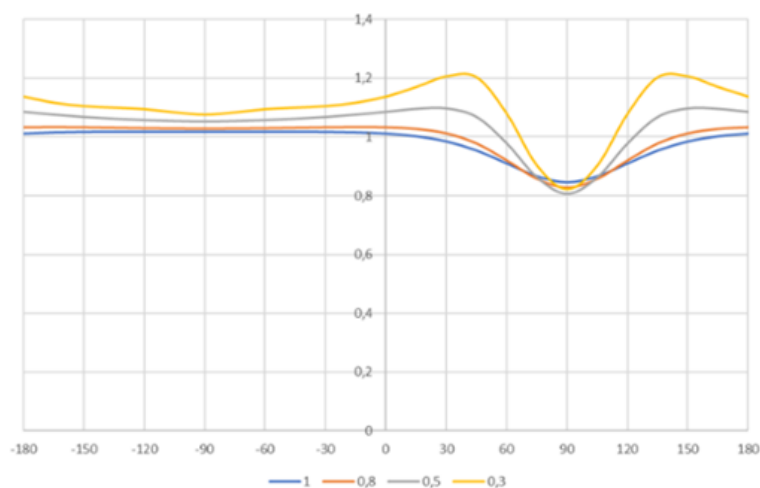


Рис. 3.8: Параметр  $G$  для расстояния  $d = 1,5$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 1; оранжевая – 0.8; серая – 0.5; желтая – 0.3

Отмеченная на рис.3.4 тенденция уменьшения параметра  $G$  в «теневой» области и увеличения - в остальной, нарастает с увеличением сдвига  $d$ .

Две трещины в параллельных плоскостях, центр подвижной трещины в точке  $(0; 2; z)$  (рис. 3.9).

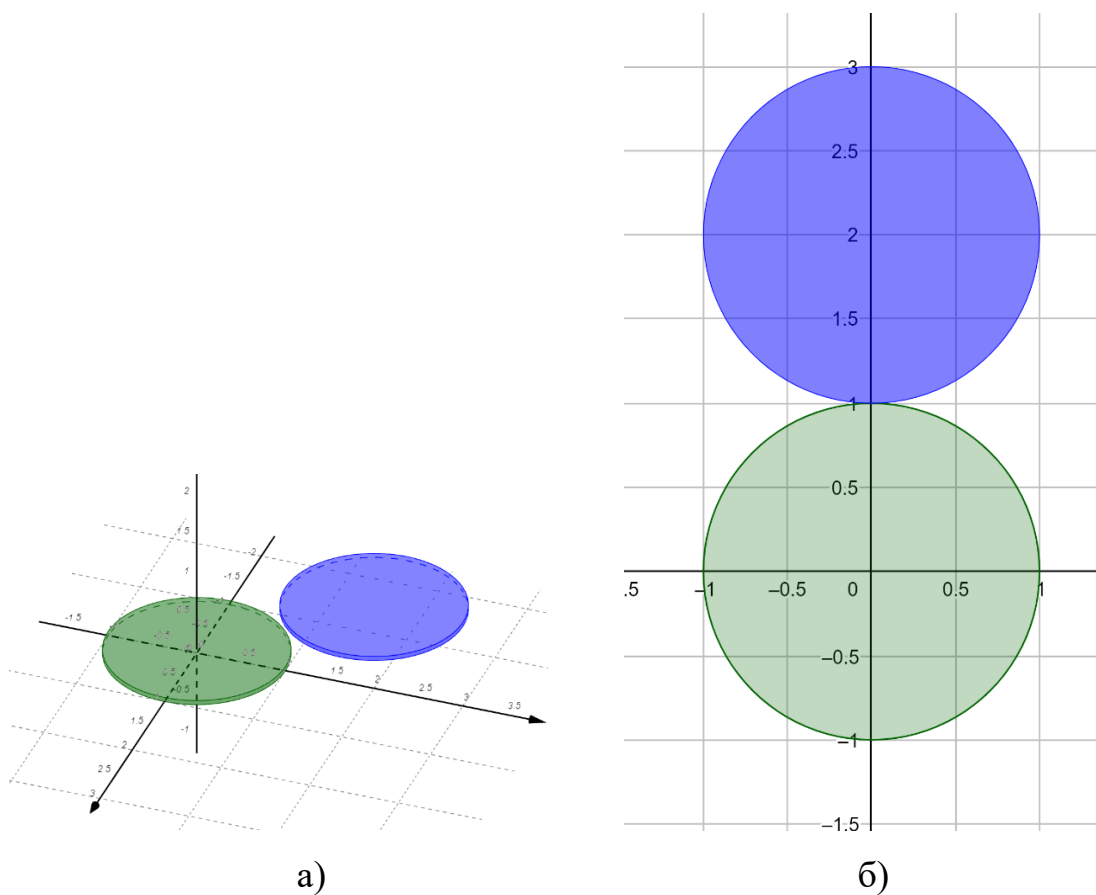


Рис.3.9: а) центр подвижной трещины в точке  $(0; 2; z)$ ; б) «теневая» область, состоящая из одной точки

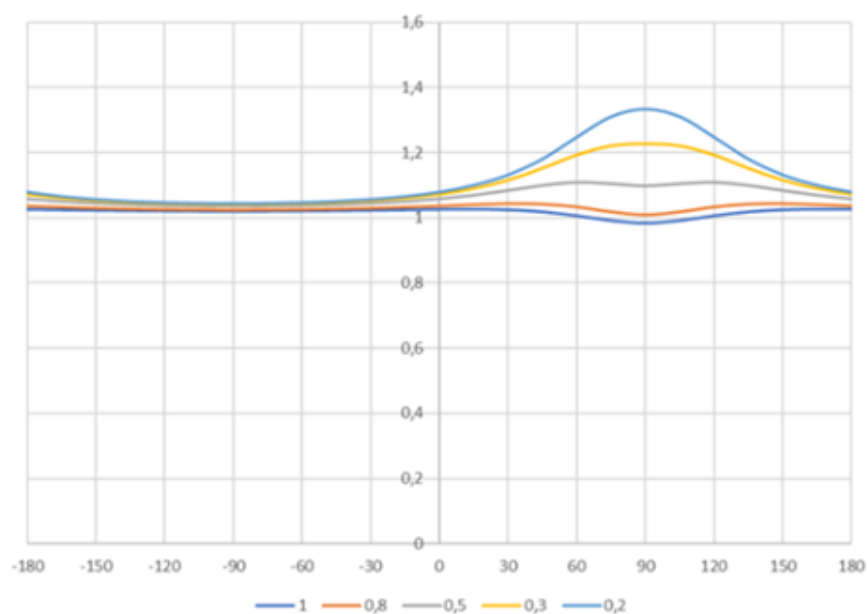


Рис.3.10: Параметр  $G$  для расстояния  $d = 2$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 1; оранжевая – 0.8; серая – 0.5; желтая – 0.3; голубая – 0.2

Наиболее сильным взаимное влияние трещин будет при наименьшем значении расстояния  $z$ . В работе [98] показано, что для трещин, лежащих в одной плоскости, значение коэффициента влияния всегда больше единицы. Аналогичная тенденция проявляется и для трещин, лежащих в близких параллельных плоскостях. Уже при расстояниях  $z \leq 0.5$  максимальное значение параметра реализуется для угла, соответствующего «теневой» области и оно также становится больше единицы.

### ***Трещины разного радиуса***

Две трещины разных радиусов, радиус неподвижной трещины 1, радиус подвижной - 0,5. Центр подвижной трещины в точке  $(0; 0; z)$  (рис. 3.11).

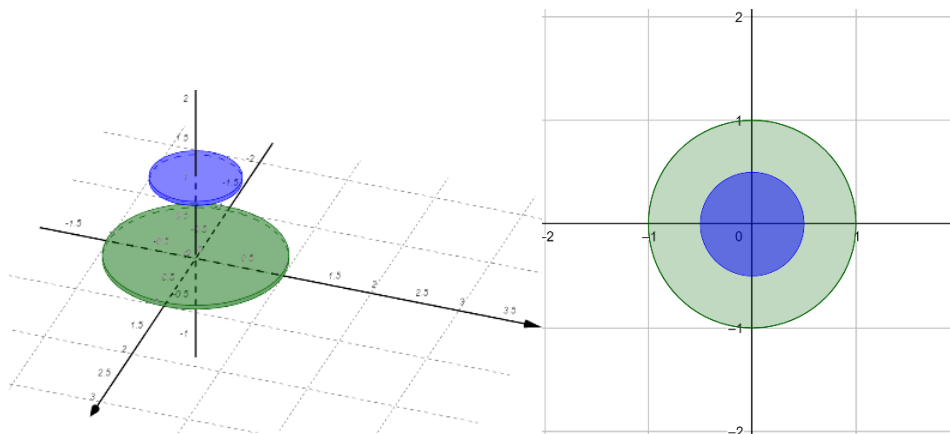


Рис.3.11: Две трещины разных радиусов, расположенных соосно.

Зависимость параметра  $G$  для сдвига  $d = 0$  приведена на рис. 3.12.

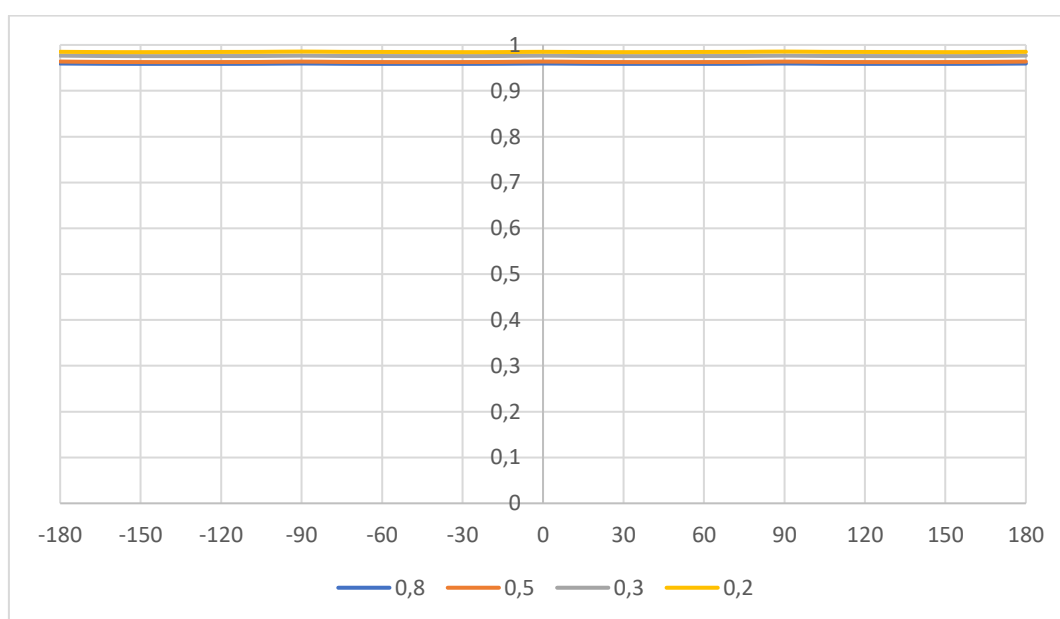


Рис.3.12. Две трещины разных радиусов, радиус неподвижной трещины 1, радиус подвижной - 0,5. Центр подвижной трещины в точке (0; 0; z). Зависимость параметра G от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 0.8; оранжевая – 0.5; зеленая – 0.3; фиолетовая – 0.2

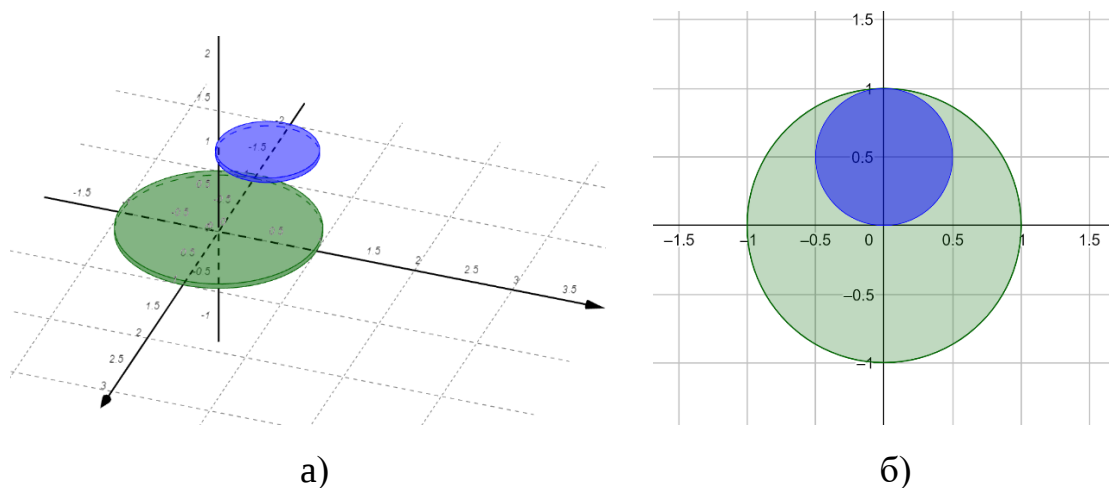


Рис.3.13: а) Центр подвижной трещины в точке (0; 0,5; z) б) «теневая область»

Зависимость параметра G для сдвига  $d = 0,5$  приведена на рис. 3.14.

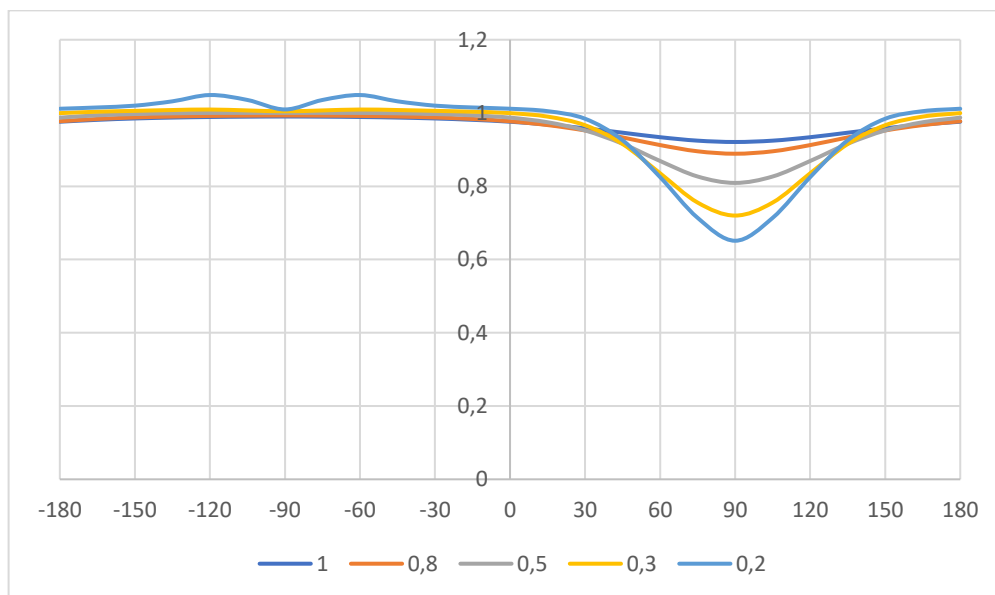


Рис.3.14: Параметр G для сдвига  $d = 0,5$  в зависимости от от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 1; красная – 0.8; зеленая – 0.5; фиолетовая – 0.3; голубая – 0.2

Две трещины разных радиусов, радиус неподвижной трещины 1, радиус подвижной - 0,5. Центр подвижной трещины в точке (0; 1; z) (рис. 3.15).

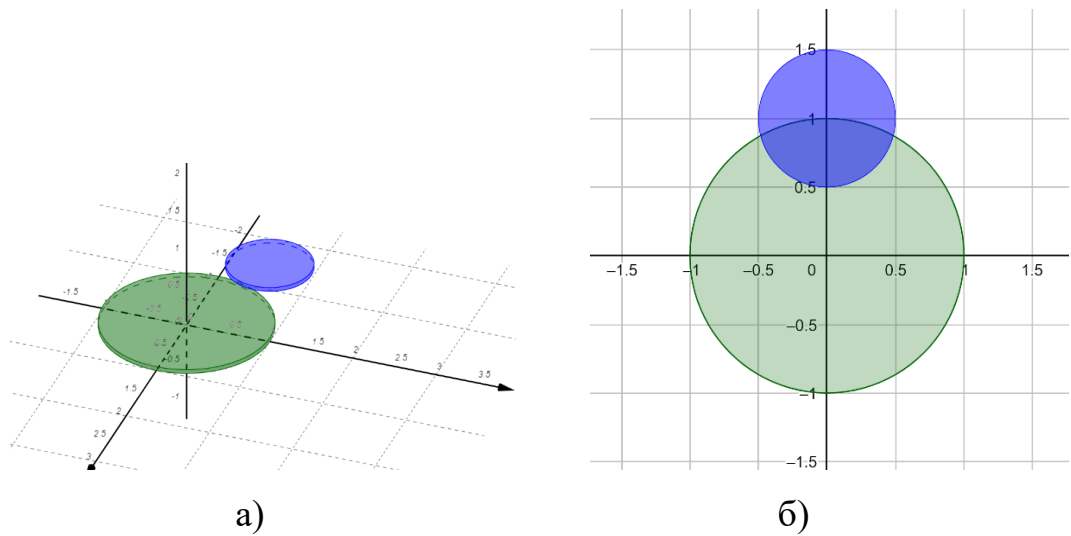


Рис.3.15: а) Центр подвижной трещины в точке (0; 1; z); б) «теневая» область

Зависимости параметров  $G$  для сдвига  $d = 1$  представлена на рис. 3.16

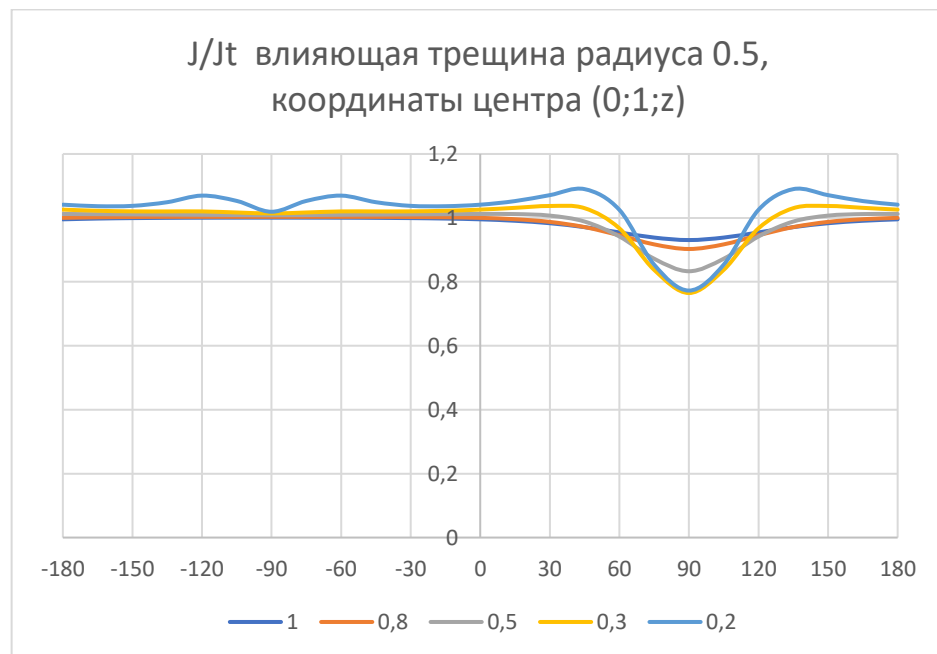


Рис.3.16. Параметр  $G$  для сдвига  $d = 1$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 1; красная – 0.8; зеленая – 0.5; фиолетовая – 0.3; голубая – 0.2.

Две трещины разных радиусов, радиус неподвижной трещины 1, радиус подвижной - 0,5. Центр подвижной трещины в точке (0; 1,5; z) (рис. 3.17).

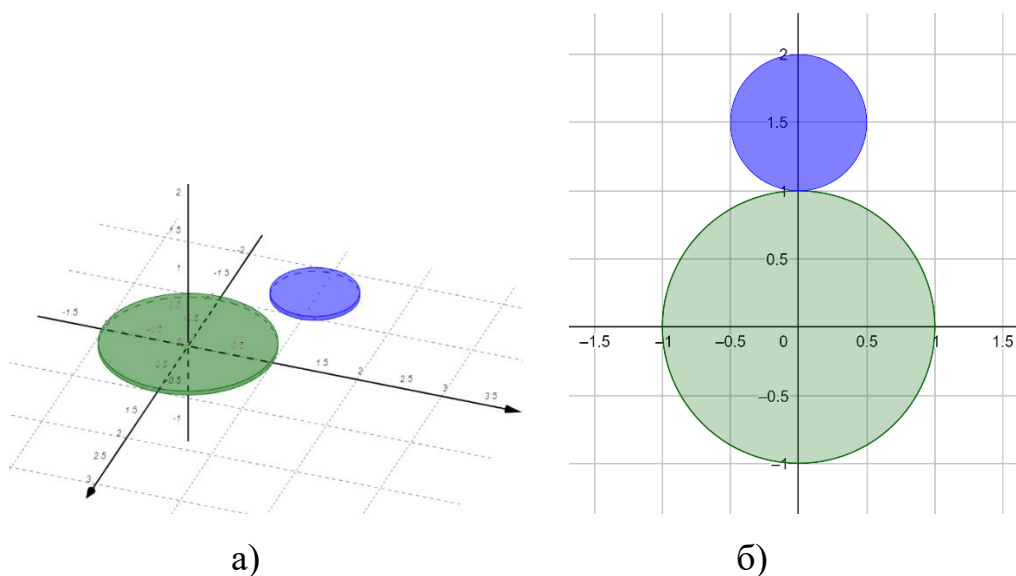


Рис.3.17: а) Центр подвижной трещины в точке  $(0; 1,5; z)$  б) «теневая» область, состоящая из одной точки

Зависимости параметра  $G$  для сдвига  $d = 1,5$  приведены на рис. 3.18.

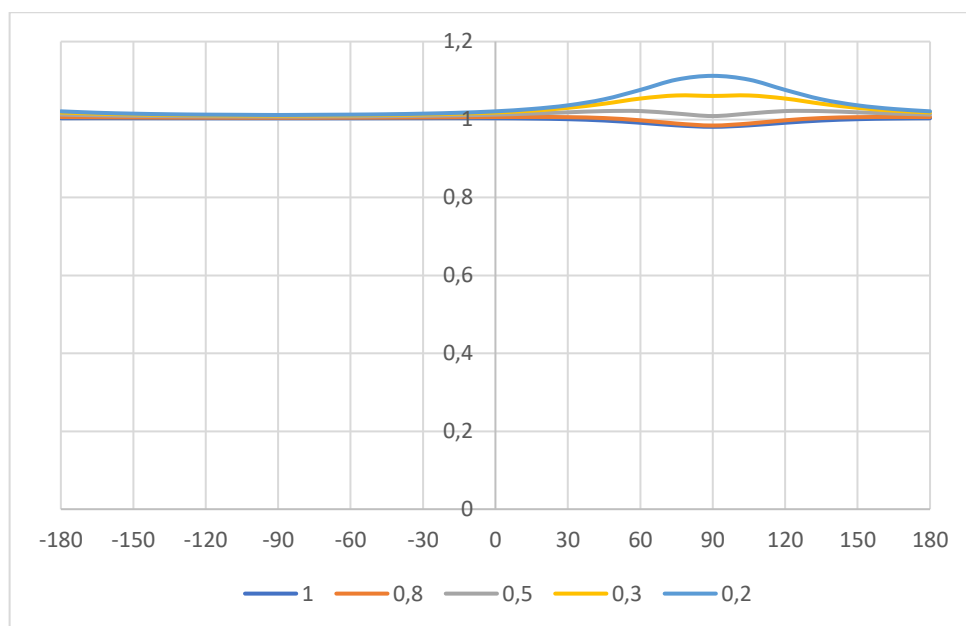


Рис.3.18: Параметр  $G$  для сдвига  $d = 1,5$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 1; красная – 0.8; зеленая – 0.5; фиолетовая – 0.3; голубая – 0.2.

Две трещины разных радиусов, радиус неподвижной трещины 1, радиус подвижной - 0,5. Центр подвижной трещины в точке  $(0; 2; z)$  (рис.3.19).

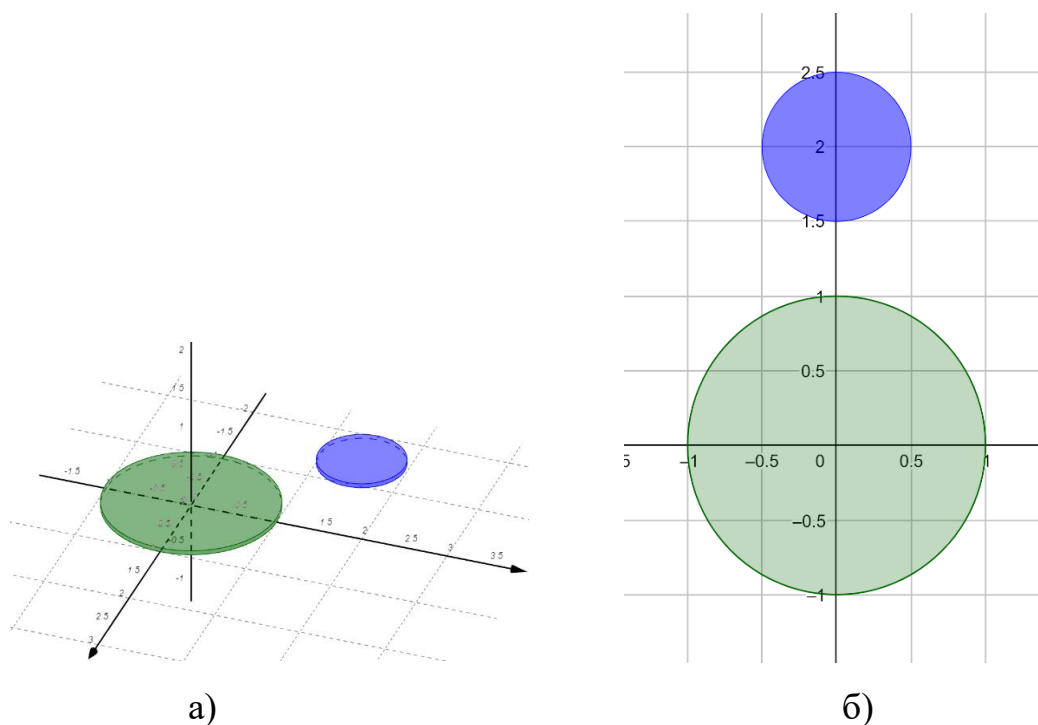


Рис.3.19: а) Центр подвижной трещины в точке  $(0; 2; z)$ , б) отсутствие «теневой» области

Зависимости параметров  $G$  для сдвига  $d = 2$  представлены на рис. 3.20

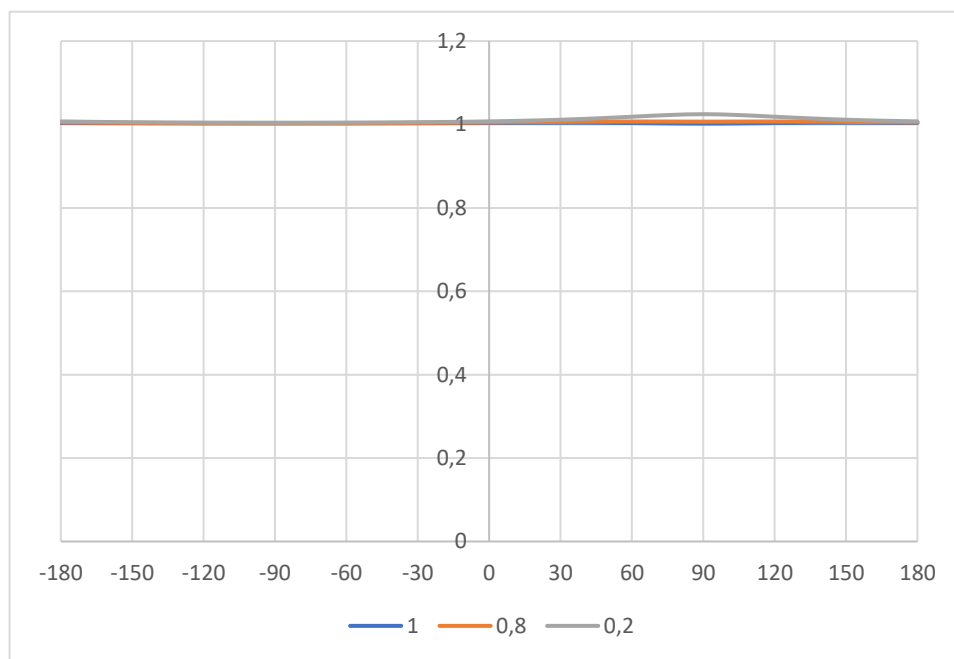


Рис. 3.20. Параметр  $G$  в зависимости от угловой координаты для различных расстояний между трещинами: синяя кривая – 1; красная – 0.8; зеленая – 0.2

Как видно из графиков, при таких параметрах задачи, трещина малого радиуса не оказывает сильного влияния на рост большой трещины. При

соосном расположении комбинация коэффициентов интенсивности напряжений падает, также эта величина убывает в области затенения. Когда «теневая» область отсутствует, малая трещина уже не влияет на большую.

### 3.2. Эллиптические трещины.

Рассматривается система из двух одинаковых эллиптических трещин с полуосями  $a = 1, b = 0,5$  под нормальной нагрузкой. Трещины расположены в параллельных плоскостях. Центр первой находится в начале координат и неподвижен. Вторая трещина сдвигается по оси  $Oy$  на величину  $d$ . Расстояние между плоскостями эллипсов обозначим за  $h$ . Для эллиптических трещин воспользуемся формулой, приведенной в работе [78] для расчета коэффициента интенсивности напряжений

$$K_I = \frac{\sigma}{E(k)} \left( \frac{\pi b}{a} \right)^{1/2} (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4} = \frac{\sigma}{E(k)} \left( \frac{\pi b}{a} \right)^{1/2} \left[ \frac{a^2 (a/b)^2 \operatorname{tg}^2 \theta + b^2}{1 + (a/b)^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \right]^{1/4},$$

где  $a, b$  - полуоси эллипса,  $a \geq b$ ,  $k = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ ,  $\theta = \arctg[(b/a) \operatorname{tg} \beta]$ ,  $E(k)$  - полный эллиптический интеграл второго рода.

В работе [21] исследован случай, взаимного влияния двух одинаковых эллиптических трещин, лежащих в одной плоскости. Показано, что наибольшее взаимное влияние соответствует случаю, когда трещины имеют параллельные большие полуоси, а их меньшие полуоси находятся на одной прямой. Исходя из этого, мы рассмотрели аналогичную геометрическую конфигурацию, но в пространстве (см. рис. 3.21) [124].

Здесь вводится безразмерный коэффициент

$$K_{-1} = K_I / \sigma \sqrt{\pi b}.$$

Исследуем, как коэффициент  $K_{-1}$  зависит от расстояния между эллипсами  $h$  и положения верхнего эллипса  $d$  (см. рис. 3.21).

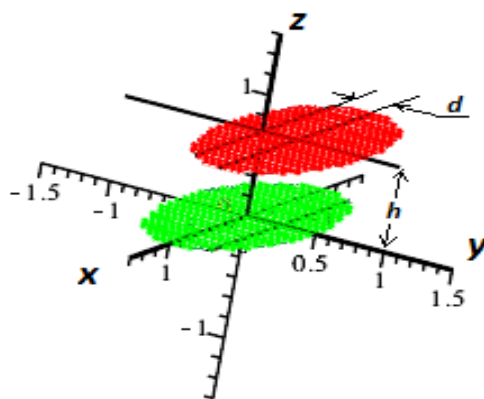
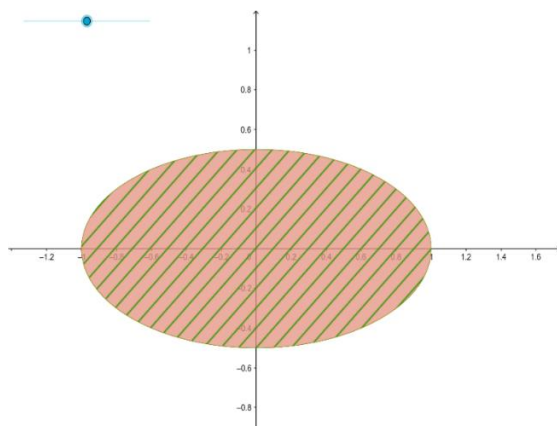
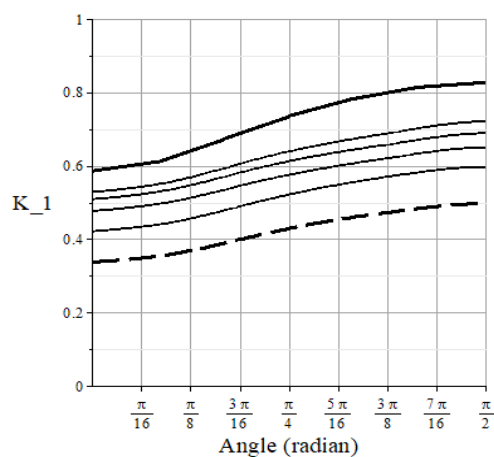


Рис. 3.21. Расположение эллиптических трещин в пространстве. Первая трещина расположена в плоскости  $z=0$ , вторая – в плоскости  $z=h$ . Полуоси эллипса равны  $a=1, b=0.5$ , сдвиг центра второй трещины происходит по оси  $y$  на величину  $d$ .

На рис. 3.22-3.24 показаны коэффициенты  $K_1$  для разных значений сдвига: жирная верхняя кривая соответствует одиночной трещине, пунктирная линия соответствует двум трещинам, находящимся на расстоянии  $h=0,1$ , остальные кривые -  $0,2 \leq h \leq 0,9$ .



а)



б)

Рис. 3.22. а) сдвиг  $d=0$ , штриховкой показана «теневая» область; б)  $K_1(\alpha)$  для сдвига  $d=0$ .

Для одноосных эллиптических трещин характерна тенденция, наблюдавшаяся для круглых трещин. Для каждого угла  $\alpha$  параметр  $K_1(\alpha)$  меньше, чем для единичной трещины. При сближении трещин параметр монотонно уменьшается.

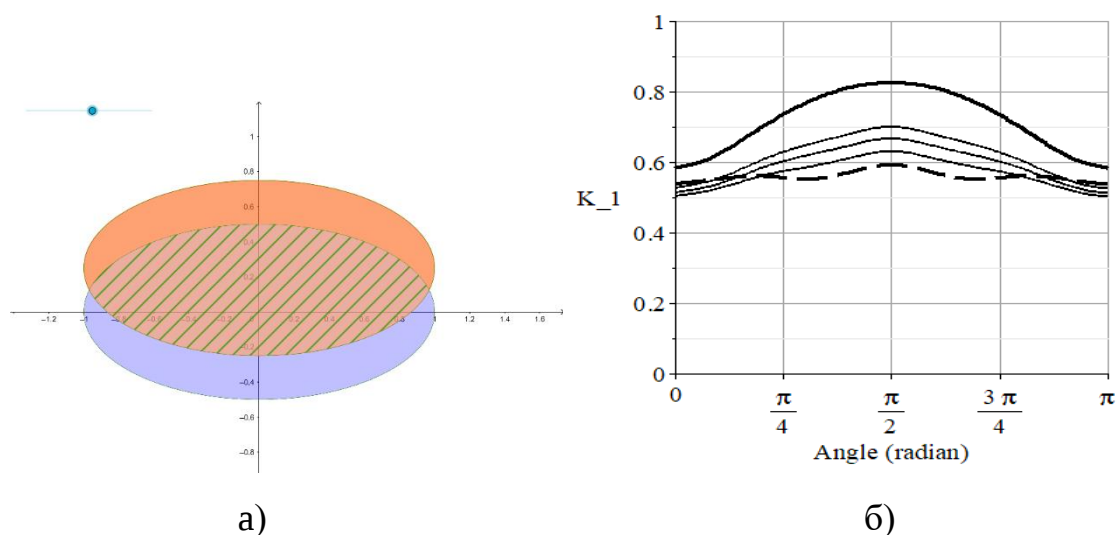


Рис. 3.23. а) сдвиг  $d = 0,25$ , штриховкой показана «теневая» область; б)  $K_1(\alpha)$  для сдвига  $d=0,25$ .

Для больших расстояний  $h$  монотонность, характерная для одноосных трещин, сохраняется. При сближении трещин ( $h = 0.1$ ) пунктирная кривая становится немонотонной (появляются локальные максимумы и минимумы).

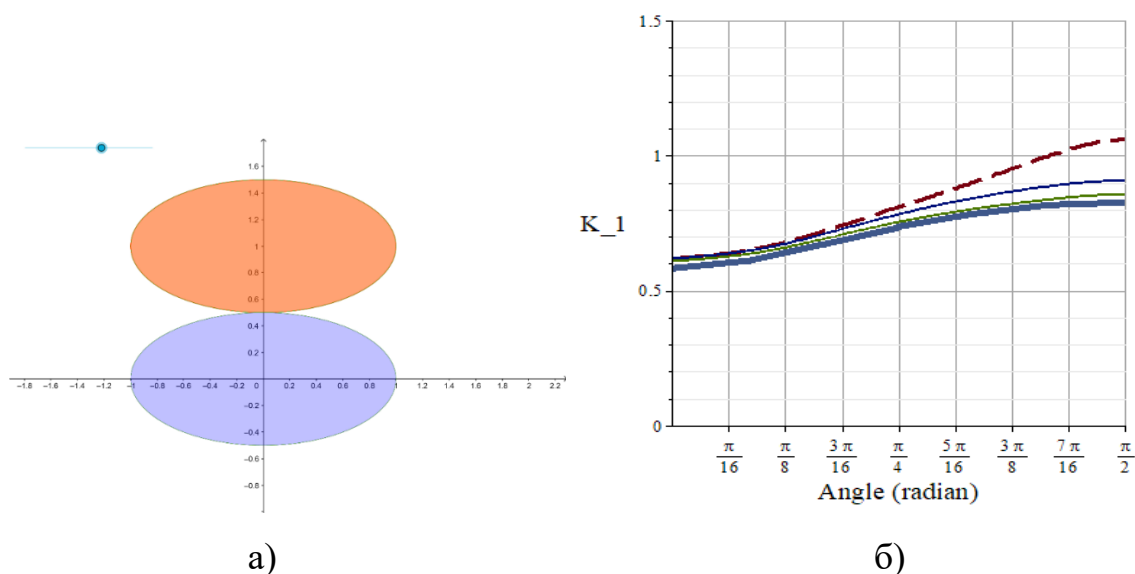


Рис. 3.24. а) сдвиг  $d = 1$ , штриховкой показана «теневая» область; б)  $K_1(\alpha)$  для сдвига  $d=1$ .

При данном сдвиге «теневая» область состоит из одной точки. Как и в случае круговых трещин, при заданных параметрах резко увеличивается взаимное влияние трещин. Как видно из рис.3.24, все кривые находятся выше жирной сплошной кривой, которая соответствует одиночной эллиптической

трещине. На графиках видно, что если эллиптическая трещина выходит за границу существующей трещины, коэффициент влияния увеличивается.

### **3.3. Трещины с изломом.**

**1. Круглая трещина с изломом (угол излома  $30^\circ$ ) находится под внутренним давлением  $p = 0.1$ .**

Для пространственных трещин представляют определенный практический интерес трещины, поверхность которых имеет излом (угол между плоскостями отдельных сегментов трещины отличен от нуля). Такая геометрическая конфигурация может возникнуть при слиянии двух отдельных плоских трещин. В линейной теории упругости наличие любых скачков в граничных условиях приводит к возникновению особенностей решения. Поскольку сама модель трещины (поверхность разрыва поля перемещений) несёт особенность решения, интересно исследовать влияние возможного излома ее поверхности на изменение распределения напряжений в окрестности края трещины.

Рассматривается упругая среда, ослабленная трещиной с изломом. Трещина является активной, то есть она нагружена внутренним давлением  $P$ , как показано на рис. 3.25. Геометрически поверхность трещины представляет собой два полукруга одного радиуса, плоскости которых расположены под заданным углом друг к другу. Требуется исследовать, в каком направлении наиболее вероятен рост трещины [123].

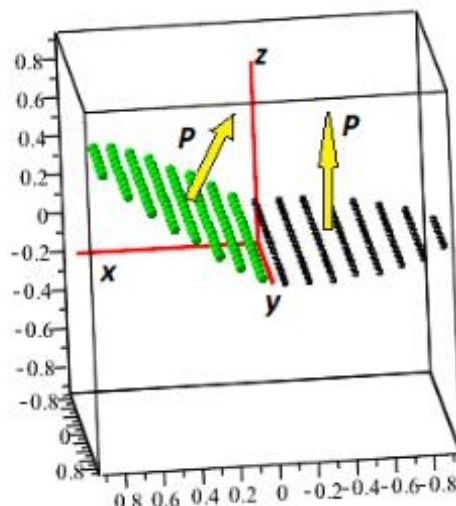


Рис.3.25 Трещина с изломом под внутренним давлением, направленным по нормали к берегам трещины.

Как и в предыдущих задачах будем исследовать параметр  $G$

$$G = \frac{1-\nu}{2\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2.$$

Поскольку в рассматриваемой геометрической конфигурации две половины трещины равноправны, исследовался край той половины трещины, которая расположена в плоскости  $xy$  (рис.3.25). В расчетах использованы безразмерные величины: единицей длины считается радиус полукруга каждой половины трещины; напряжения и давление отнесены к величине  $2\mu$ , коэффициент Пуассона выбран равным  $\nu = 0.25$ . В качестве внутреннего давления принята величина  $p = P/2\mu = 0.1$ . Такое нереально большое давление выбрано для удобства визуализации раскрытия трещины. Назовём углом излома - угол между плоскостями двух плоских полукруглых сегментов трещины. В работе для сравнения приведены расчеты для двух углов излома величиной  $30^\circ$  и  $60^\circ$ .

На рис.3.26 представлены графики зависимости величины  $G$  от угла. Угол отсчитывается вдоль дуги круглого края трещины и изменяется в пределах  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Нулевая величина угла соответствует точке  $x = -1, y = 0, z = 0$  (рис.3.25), величина угла  $\pi/2$  - соответствует точке с

координатами  $x=0, y=1, z=0$ , угол  $-\pi/2$  – точке с координатами  $x=0, y=-1, z=0$ . Две последних точки находятся на линии излома, которая является частью оси  $y$  (рис.3.25). На рис. 3.26а приведена зависимость  $G$  для угла излома  $30^\circ$ , на рис. 3.26b – для угла излома  $60^\circ$ .

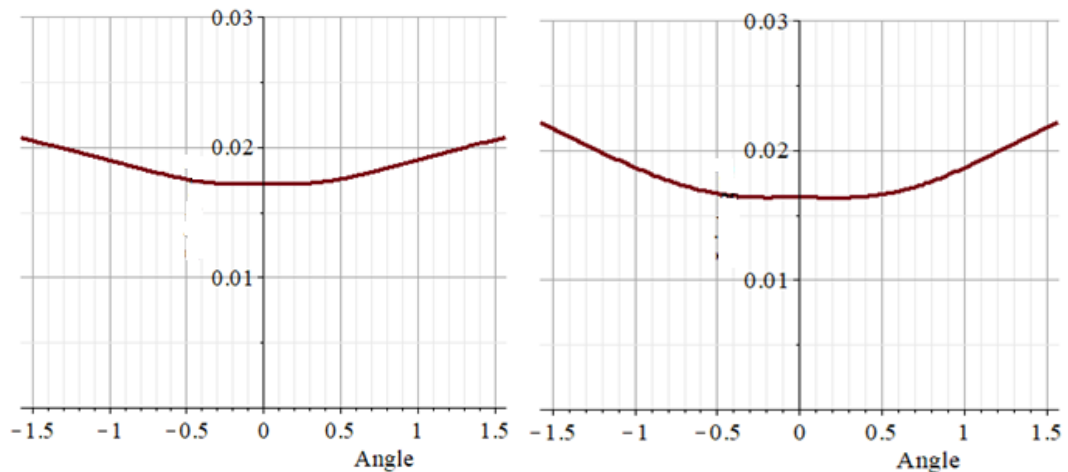


Рис. 3.26 Параметр  $G$  на интервале  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , а – для угла излома  $30^\circ$ , б – для угла излома  $60^\circ$ .

Как следует из изображенных на рис.3.26а и 3.26b зависимостей максимальные значения  $G$  для обоих углов достигаются в точках, лежащих на линии излома, т.е. на оси  $y$ . Это означает, что возможный рост трещины будет развиваться в направлениях линии излома при заданных параметрах трещины. С увеличением угла излома увеличился максимум  $G$  и уменьшился минимум. Влияние величины угла излома на качественный вид кривой распределения  $G$  незначительно.

На рис. 3.27 представлено раскрытие трещины в сечении излома  $x=0$ ; рис.3.27а и 3.27b соответствуют трёхмерному раскрытию половины трещины (точки разного цвета соответствуют верхнему и нижнему берегу) соответственно для углов излома  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Сплошная кривая показывает положение точек в сечении излома. Как видим, влияние угла излома на раскрытие также незначительно.

На рис.3.28 показано раскрытие всей трещины в сечении  $y=0$  (рис.3.28а – соответствует углу излома  $30^\circ$ , рис.3.28b –углу излома  $60^\circ$ ).

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о том, что раскрытие трещины в основном определяется давлением и слабо зависит от угла излома.

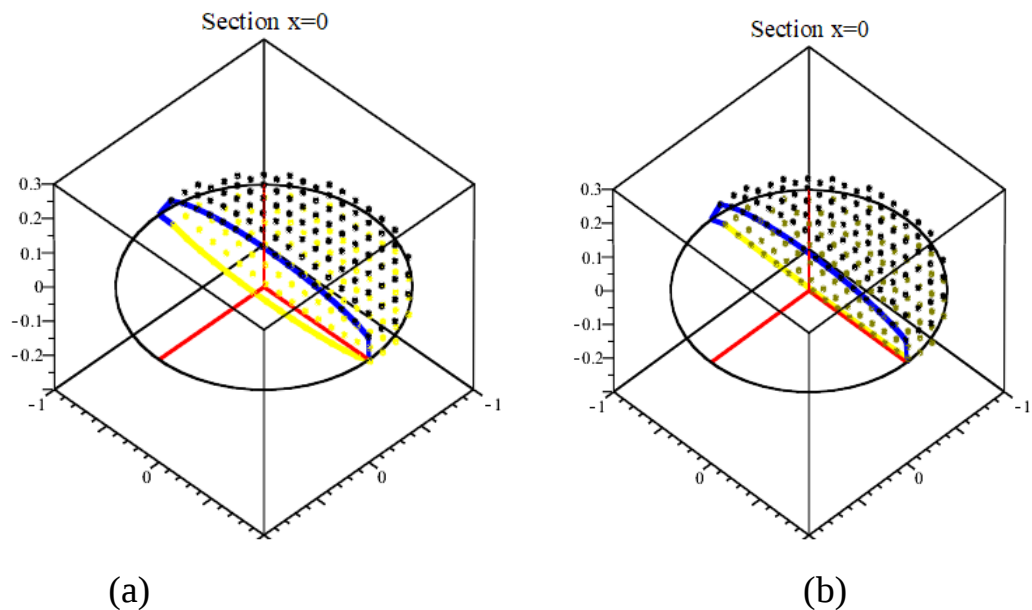


Рис.3.27 Раскрытие трещины в пространстве (а – угол излома  $30^\circ$ , б – угол излома  $60^\circ$ ). Сплошная кривая соответствует точкам сечения  $x = 0$ .

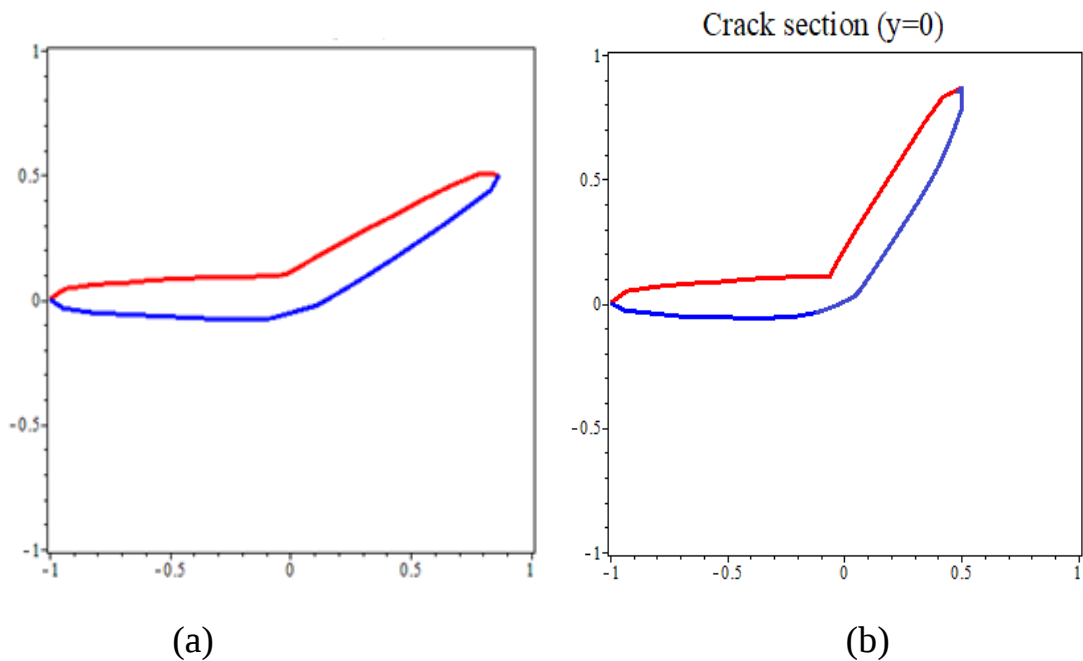


Рис.3.28 Раскрытие трещины в сечении  $y = 0$  (а – угол излома  $30^\circ$ , б – угол излома  $60^\circ$ ).

Из графиков (рис.3.27 – рис.3.28) видно, что максимальное раскрытие достигается в сечении излома  $x = 0$ . Это соответствует результатам

расположения максимальных значений параметра  $G$  и направлениям возможного роста трещины вдоль оси  $y$ .

Как известно, в окрестности границы трещины напряжения имеют особенность  $\sigma \sim C/\sqrt{s}$ , где  $s$  – расстояние до края трещины, а  $C = const$ . Для контроля напряжений был произведен их расчёт в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  для углов  $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ , соответствующих границе полуокружности  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x \leq 0$ . В качестве значения радиуса была взята величина  $R = 1.01$ . Это соответствует значению расстояния  $s$  до границы равному  $s = 0.01$ .

Графики распределения напряжений по краю трещины, в зависимости от угловой координаты  $\phi$  в полярной системе координат, показаны на рис.3.29 (а – соответствует углу излома  $30^\circ$ , b – углу излома  $60^\circ$ ).

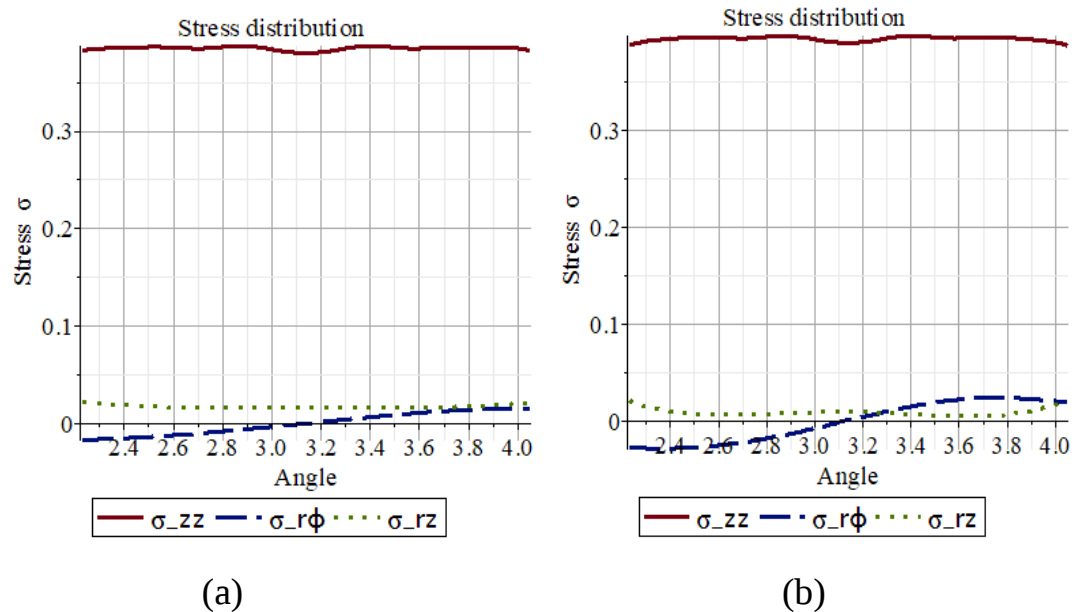


Рис.3.29 Графики зависимости напряжений  $\sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}$  от угловой координаты  $\varphi$  вдоль границы трещины в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ ,  $r = 1.01$ ,  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ ,  $z = 0$  (а- угол излома  $30^\circ$ , b – угол излома  $60^\circ$ ).

Видно (рис.3.29(a) и 3.29(b)), что напряжения  $\sigma_{zz}$  фактически не зависят от угла излома. Наиболее сильно отличаются напряжения  $\sigma_{rz}$ . То есть данные расчеты показывают, что рост параметра  $G$  при приближении к излому

в основном обеспечивается ростом напряжения  $\sigma_{rz}$ . Таким образом, трещина, при выполнении критерия разрушения, будет расти в направлении линии излома.

Для того, чтобы проверить влияние способа нагрузки трещины, были произведены расчеты, в которых берега трещины свободны от нагрузок, при этом упругое пространство подвержено растяжению напряжениями, действующими на бесконечности вдоль оси  $z$ . То есть, рассматривается упругая среда, ослабленная пассивной трещиной с изломом. Угол излома известен и равен 30 градусов. На бесконечности перпендикулярно плоскости одной из частей трещин приложена растягивающая нагрузка  $\sigma = 0.1$ , как показано на рис. 3.30.

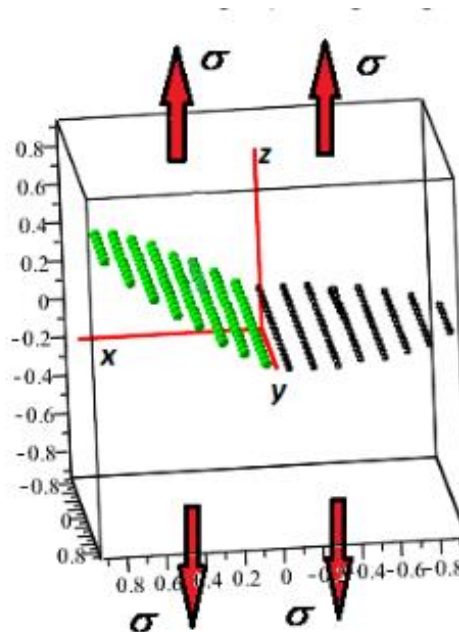


Рис.3.30. Трещина с изломом 30 градусов, нагрузка приложена в направлении оси OZ.

На рис.3.31а,б,в приведены графики коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  соответственно. Коэффициенты интенсивности вычислялись по методу перемещений с использованием асимптотических формул

$$u_z = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$u_x = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$u_y = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

На графиках представлена зависимость соответствующих коэффициентов на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Нулевой угол соответствует точке граница трещины  $x=-1, y=0, z=0$ , углы  $(-\pi/2, \pi/2)$  – соответствуют точкам излома границы.

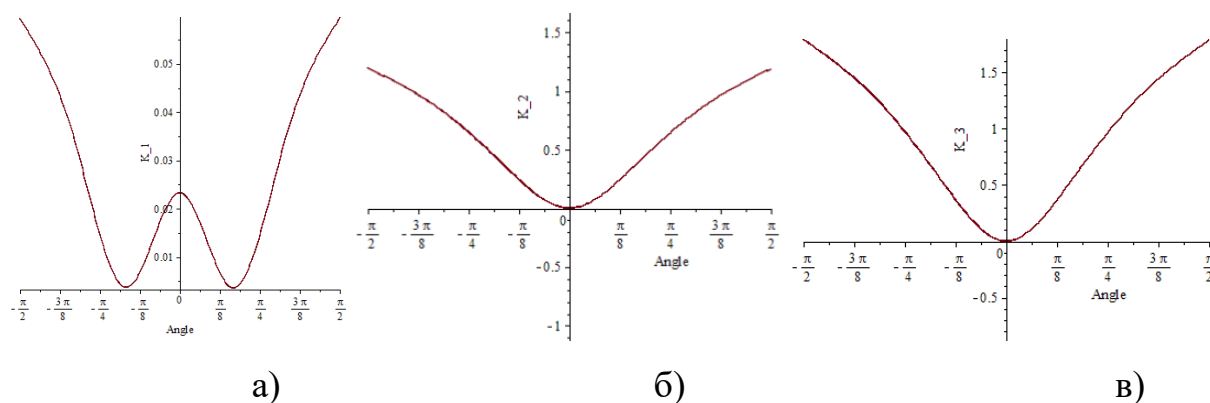


Рис. 3.31. Зависимость коэффициентов интенсивности а -  $K_I$ , б -  $K_{II}$ , в -  $K_{III}$  от угла

Параметр  $G$  и распределение напряжений вдоль границы сегмента трещины перпендикулярного оси  $z$  в цилиндрической системе координат представлены на рис.3.32а,б соответственно. Как и в предыдущих случаях использована величина расстояния до края трещины  $s = 0.01$ .

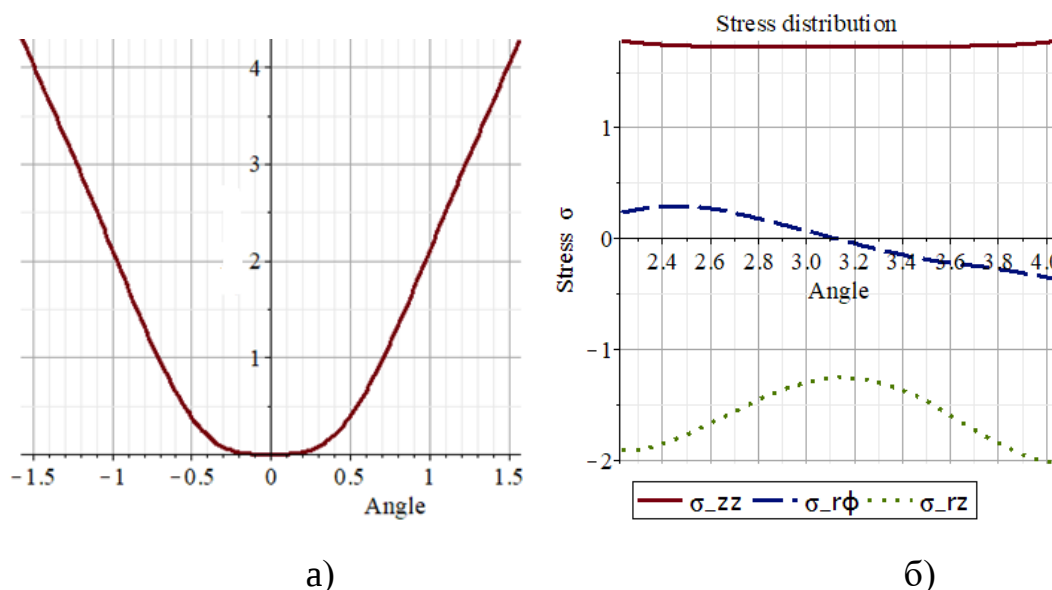


Рис 3.32. а) Параметр  $G$ , б) напряжения

Приведенные расчёты показывают очень сильную зависимость задачи от характера нагрузки и от параметров задачи. При этом пассивная трещина менее устойчива, чем активная, что очевидно в задачах гидроразрыва: чтобы трещина росла нужно постоянно создавать давление. В связи с этим рассматриваются трещины ветвления.

### 3.4. Трещины ветвления.

Рассматривается ветвящаяся трещина, находящаяся под внутренним давлением (трещина активна). Основная цель – найти наиболее вероятный угол ветвления трещины (в предположении, что угол ветвления одинаковый для всех ветвей) [134].

*Сборка геометрической конфигурации пространственной трещины ветвления.* В качестве внутренних элементов используются плоские прямоугольники, треугольники и части эллипса. Например, простейшая трещина ветвления (рис.3.33а) состоит из основной квадратной (часть поверхности  $z = 0, |x| < 1, |y| < 1$ ), которая ветвится в форме двух прямоугольных трещин с общей границей излома  $z = 0, x = 1, |y| < 1$ . Мы можем менять длину прямоугольных трещин и углы наклона ветвей. Проведено исследование, когда углы наклона двух ветвей к плоскости  $xy$  равны  $\pm\alpha$  и все трещины являются квадратами. Но можно реализовать и другую геометрическую форму, когда ветвь представляет собой часть эллипса. (рис.3.33б). На рис.3.33 квадратная трещина ветвится в форме двух половин окружности. В общем случае из вышеуказанных элементов можно собрать достаточно геометрически сложную конструкцию с многими ветвями.

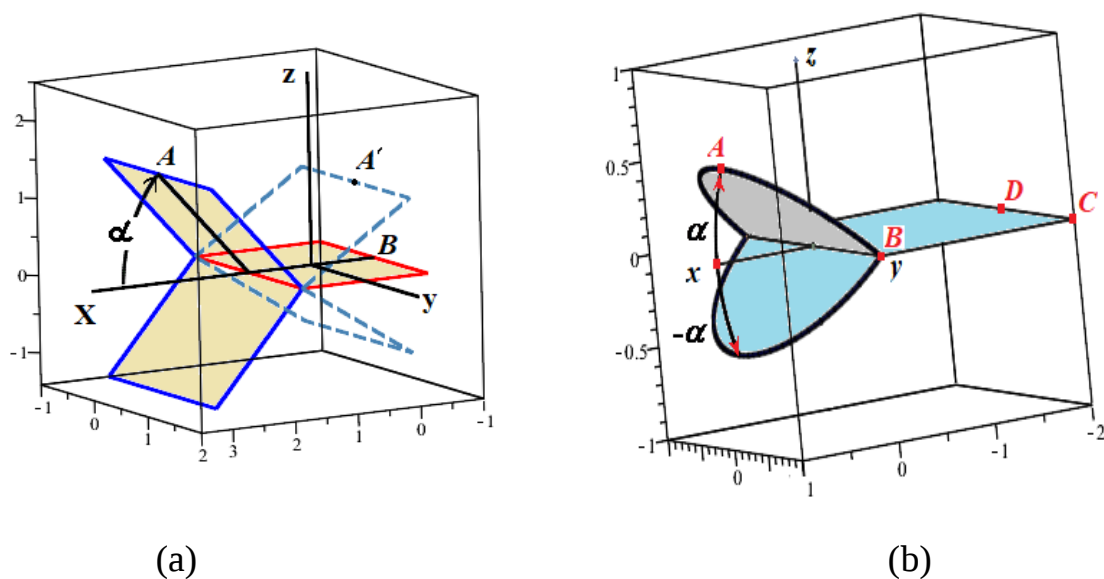


Рис.3.33 – Простейшие геометрические формы трещин ветвления.

Все расчеты проводились для упругой среды с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.33$ . В качестве единицы длины принята половина длины основной квадратной трещины (рис.3.33). На берегах трещины было задано постоянное давление  $P$ . Для проверки расчетов были использованы результаты работы [70], в которой для плоской задачи всестороннего растяжения упругой плоскости, содержащей трещину ветвления (рис.3.34), приведены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от угла раствора в характерных точках  $A, B$ .

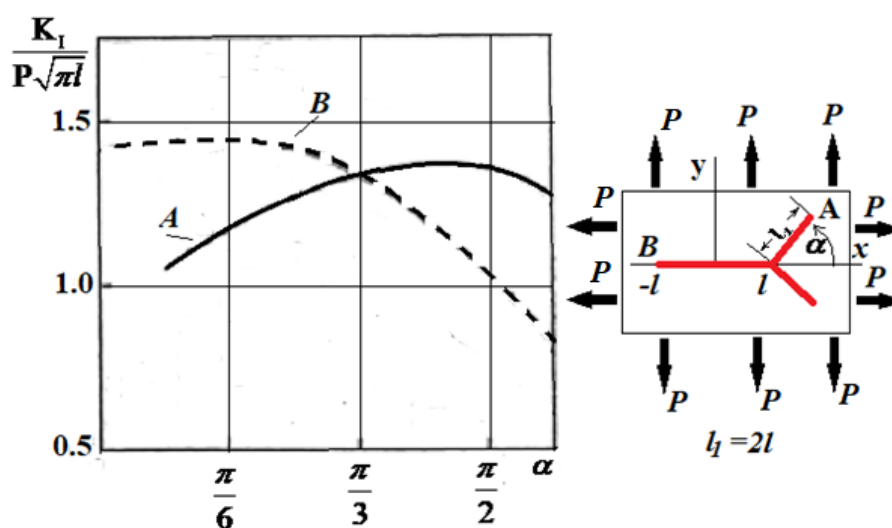


Рис.3.34 Результаты работы [70]. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от угла  $\alpha$  для двух характерных точек  $A$  и  $B$ .

С целью проверки качества работы трёхмерной программы была решена геометрически похожая, но трёхмерная задача, для ветвящейся пространственной трещины (рис.3.33а). Результаты приведены на рис.3.35. На оси абсцисс отложен угол  $\alpha$ , который изменялся в пределах  $10^\circ \leq \alpha \leq 170^\circ$ . На оси ординат отложены значения безразмерного коэффициента интенсивности напряжений  $k = K_I / (P\sqrt{\pi l})$  для точек А и В соответственно (рис.3.33а). Сплошная линия соответствует точке А, точечная кривая – точке В. Можно отметить, что результаты качественно одинаковы. С ростом угла  $\alpha$  растет значение  $k$  до некоторого максимального значения, затем происходит монотонное уменьшение  $k$ . Вместе с тем видно, что количественные значения  $k$  и точка реализации его максимального значения существенно отличаются. В этом состоит основное различие пространственной и плоской задач. В плоском случае ширина трещины бесконечна, для пространственной задачи она конечна (в данном случае в безразмерных единицах она равна 2). Как и следовало ожидать, максимальное значение  $k$  и угол его реализации в пространственном случае меньше. Если принять достаточно правдоподобную гипотезу о том, что трещина ветвится по направлениям, соответствующим максимальному значению коэффициента интенсивности напряжений, то угол раствора трещины ветвления в пространственном случае меньше, чем в плоском случае.

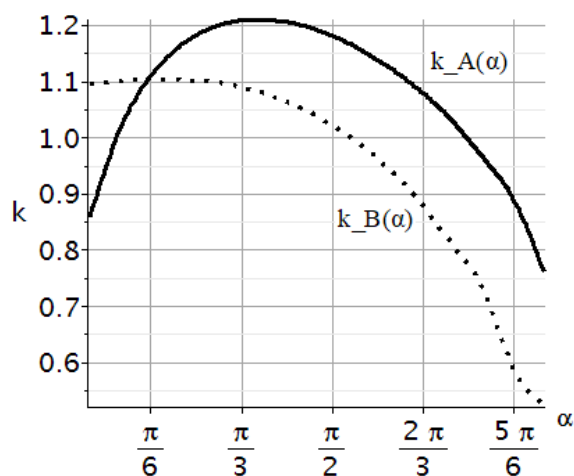


Рис.3.35. Результаты трёхмерных расчетов  $k = K_I / (P\sqrt{\pi l})$  для трещины

ветвления (Рис.3.33а)

Для проверки влияния геометрической формы ветвей трещины были проведены серии расчетов для двух случаев. В первом случае основная квадратная трещина размером  $1 \times 2$  ветвится на две трещины. Ветви представляют собой половины окружностей радиуса 1 (Рис.3.33b). Во втором случае основная трещина также является половиной окружности радиуса 1 (рис.3.36).

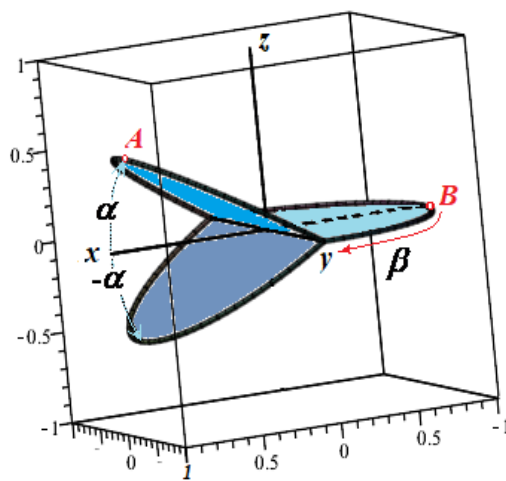


Рис.3.36. Ветвление трещины в форме трёх половин окружности.

Графики зависимости  $k(\alpha)$  в точке A для двух геометрических конфигураций трещины ветвления приведены на рис.3.37. Сплошная линия – соответствует конфигурации рис.3.33b, точечная кривая – рис.3.36. Полученные зависимости показывают, что геометрия существенно влияет на количественные характеристики, оставляя схожей качественную картину. Угол реализации максимального значения коэффициентом интенсивности напряжений в случае трёх полукруглых ветвей увеличился.

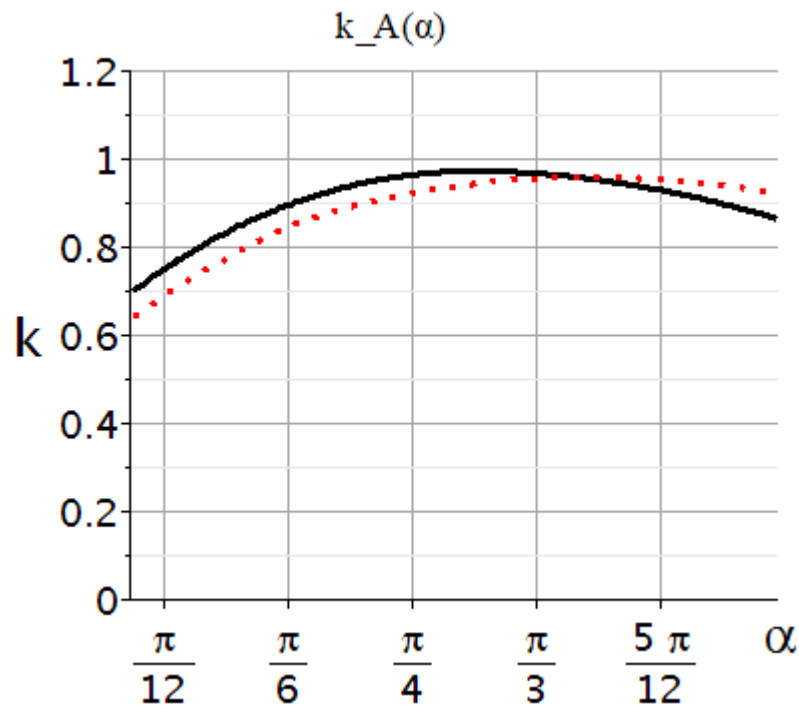


Рис.3.37. Зависимость коэффициента  $k_A = K_I / (P\sqrt{\pi R})$  от угла  $\alpha \in [0, \pi/2]$ .

Направление изменения угла показано на рис.3.36. Сплошная линия – соответствует квадрату с ветвлением в форме двух половин окружности (рис.3.33b); точечная линия – соответствует трем половинам окружностей (рис.3.36).

Для случая трёх полукруглых ветвей (рис.3.36) было определено распределение коэффициента интенсивности напряжений в точке В при фиксированном угле  $\alpha = \pi/4$  в зависимости от положения точки В на границе трещины. Это положение определяется углом  $\beta$ . В силу симметрии задачи угол изменялся в диапазоне  $0 \leq \beta < \pi/2$ . Значение  $\beta = \pi/2$  соответствует точке ветвления. График зависимости представлен на рис.3.38.

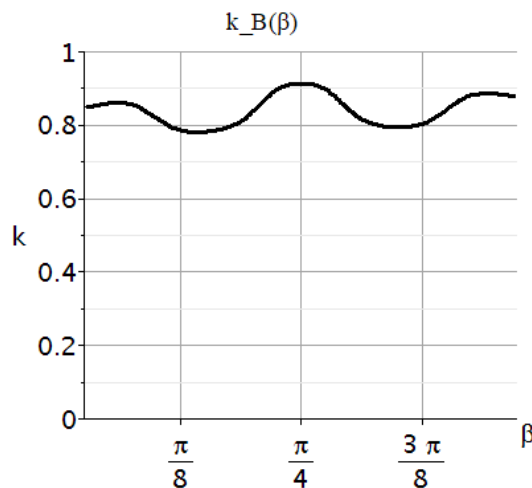


Рис.3.38. Угол  $\alpha = \pi / 4$  фиксирован. Зависимость коэффициента  $k_B = K_I / (P\sqrt{\pi R})$  от угла  $\beta \in [0, \pi / 2)$ . Направление изменения угла показано на рис.3.36.

Коэффициент интенсивности напряжений имеет три локальных максимума, один из которых соответствует окрестности точки излома. Три угла, соответствующие локальным максимумам, являются направлениями возможного роста основной трещины.

Ещё одна серия расчетов была проведена для трещин с тремя отрезками ветвления. На рис.3.39 показаны две проекции данной трещины, одна из проекций – 3.39а фактически совпадает с сечением трещины плоскостью  $y = 0$ . Квадратные участки трещин имели размеры  $2 \times 2$ , полукруглые ветви имели радиус 1. В каждом варианте угол ветвления  $2\alpha$  был одинаковым. Рассмотрены следующие углы ветвления:  $\alpha = 15^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ$ . Для определённости ссылок, каждый из участков пронумерован.

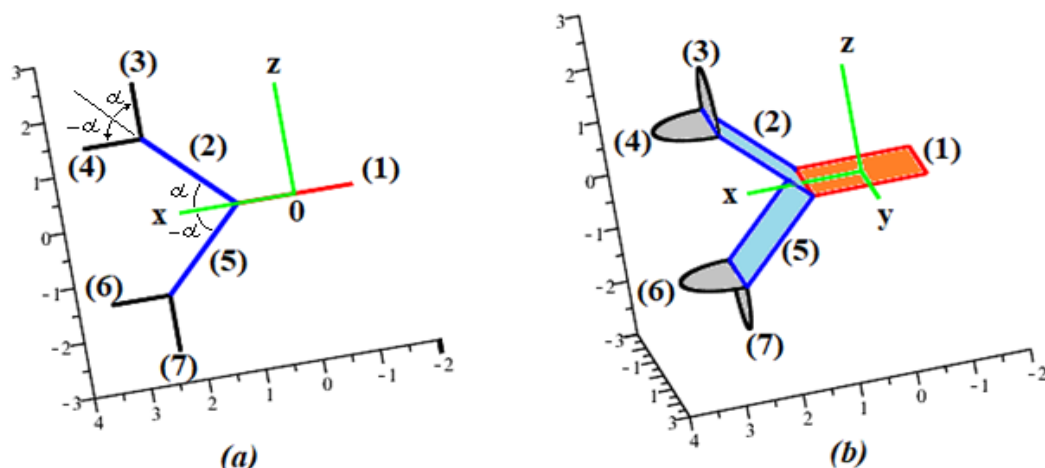


Рис.3.39. Две проекции трещины ветвления, 3.39а – соответствует сечению плоскостью  $y = 0$ . Угол ветвления одинаков, в данном конкретном случае он равен  $\alpha = 45^\circ$ .

В каждом случае анализировались значения коэффициентов интенсивности напряжений в четырёх точках  $A, B, C, D$  (рис.3.40). Значения коэффициентов интенсивности для разных углов  $\alpha$  приведены в табл. 7. С ростом угла  $\alpha$  участки (6)-(7) трещины все меньше влияют на участки (3)-(4). Например, для угла  $\alpha = 60^\circ$  это влияние отсутствует, поскольку коэффициенты интенсивности в точках  $A, B$  совпадают.

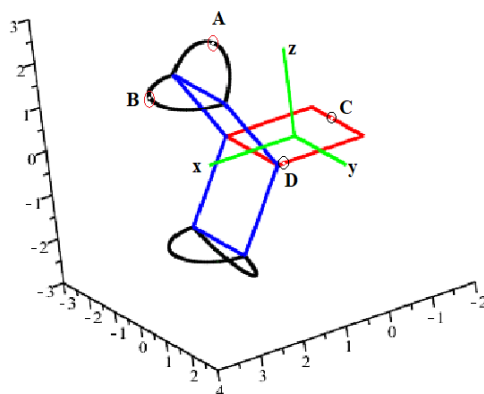


Рис.3.40  $\alpha = 60^\circ$ . Значение коэффициента интенсивности напряжений определялось в точках  $A, B, C, D$ .

Следует обратить внимание на то, что максимальные значения коэффициента интенсивности напряжений для всех углов реализуются в точке

$D$ , которая лежит в окрестности точки ветвления (рис.3.40). Аналогичные выводы присутствуют в работе [70].

Помимо коэффициентов интенсивности напряжений было проанализировано раскрытие трещины  $[u_n] = u_n^+ - u_n^-$  в среднем сечении  $y = 0$ . Раскрытие существенно зависит от величины давления, приложенного к берегам трещины.

| Таблица 7.     |        |        |        |        |
|----------------|--------|--------|--------|--------|
| $\alpha^\circ$ | $k_A$  | $k_B$  | $k_C$  | $k_D$  |
| 15             | 0.7498 | 0.5043 | 1.1088 | 1.3792 |
| 30             | 0.9152 | 0.7535 | 1.1136 | 1.3842 |
| 45             | 0.9293 | 0.8822 | 1.1055 | 1.3190 |
| 60             | 0.9369 | 0.9067 | 1.0784 | 1.2062 |

Приводимые результаты соответствуют безразмерной величине

$$h = \frac{\mu}{P} \frac{[u_n]}{L},$$

где  $\mu$  – модуль сдвига материала. В силу симметрии задачи, раскрытие  $h(S)$ ,  $S_C \leq S \leq S_A$  выводилось вдоль участков трещины (1)-(2)-(3) и (1)-(2)-(4) (Рис.3.39а). Исходя из длины участков, параметр  $s$  изменяется в пределах  $-1 \leq s \leq 4$ . Соответствующие графики зависимости  $h(S)$  приведены на рис.3.41 для двух значений угла: (а) –  $\alpha = 45^\circ$ , (b) –  $\alpha = 60^\circ$ .

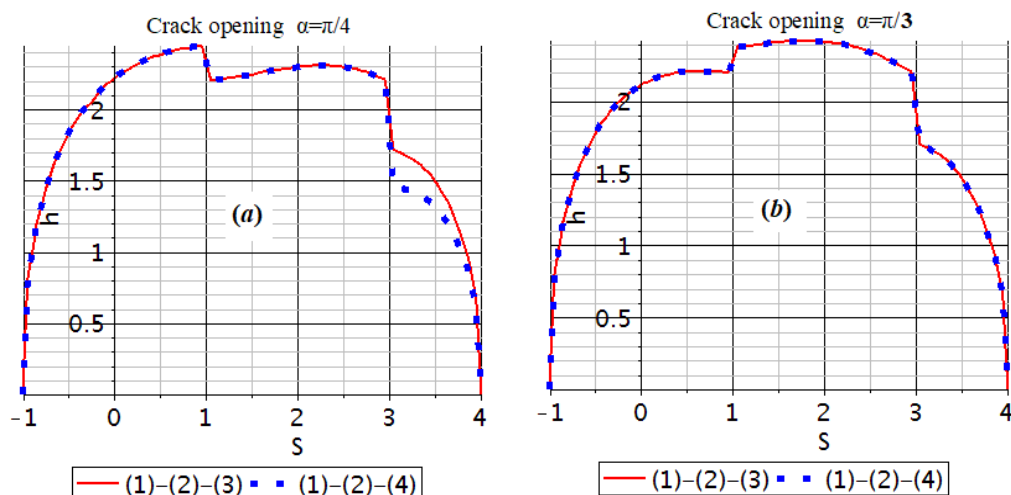


Рис.3.41 Раскрытие трещины  $h = \mu[u_n]/(PL)$ : сплошная линия соответствует участкам (1)-(2)-(3); точечная кривая соответствует участкам (1)-(2)-(4) (Рис.3.40);(a) –  $\alpha = 45^\circ$ ; (b) –  $\alpha = 60^\circ$ .

Интересно отметить, что при каждом изломе трещины её раскрытие претерпевает скачек. Точкам излома соответствуют координаты  $S=1$ ,  $S=3$ . Для угла  $\alpha = 45^\circ$  и меньших углов является характерным уменьшение раскрытия при переходе через точку ветвления, для угла  $\alpha = 60^\circ$  в первой точке  $S=1$  излома раскрытие увеличивается, а во второй точке  $S=3$  уменьшается. В случае углов  $\alpha \leq 45^\circ$  раскрытие внешней ветви трещины больше, чем раскрытие внутренней ветви. Для угла  $\alpha = 60^\circ$  внешняя и внутренняя ветви трещины фактически равноправны (ветви (5)-(6), (5)-(7) не влияют на симметричную половину трещины). В табл. 8 приведены численные значения скачков раскрытия в точках ветвления  $\Delta h = h^+ - h^-$  для разных углов  $\alpha$  и соответствующих ветвей трещины. Столбец  $\Delta h$  (1)–(2) соответствует скачку раскрытия трещины в точке ветвления между первой и второй частью трещины (Рис.3.39a). Аналогично трактуются обозначения в столбцах  $\Delta h$  (2)–(3),  $\Delta h$  (2)–(4).

| Таблица 8.     |                    |                    |                    |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\alpha^\circ$ | $\Delta h$ (1)–(2) | $\Delta h$ (2)–(3) | $\Delta h$ (2)–(4) |
| 15             | -0.98158           | -0.16121           | -1.189523          |
| 30             | -0.6446            | -0.37174           | -0.77281           |
| 45             | -0.24006           | -0.50048           | -0.75534           |
| 60             | 0.17765            | -0.50862           | -0.50862           |

Таким образом, проведенные расчеты позволили выявить наиболее вероятные углы ветвления, которые зависят от материала, формы и геометрии трещины в момент ветвления.

### 3.5. Периодические системы трещин в пространственном случае.

При исследовании горных пород можно заметить, что трещины образуют определенную периодическую структуру. Рассмотрим систему «трещин», образующую некоторую регулярную периодическую структуру в неограниченной упругой среде, которая находится под действием напряжений, заданных на бесконечности (рис.3.42). Понятно, что множество периодических структур бесконечно. На рис. 3.42 представлены примеры двух периодических и одной двоякопериодической систем трещин.

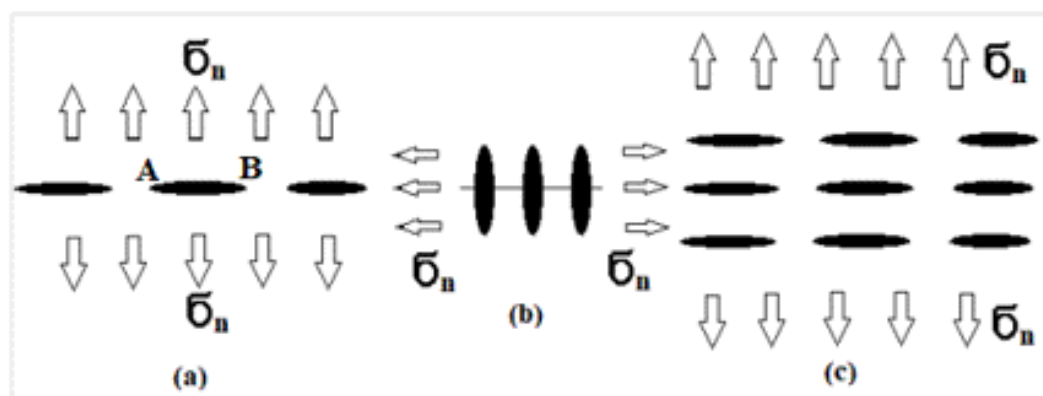


Рис. 3.42. Системы трещин под действием внешних напряжений  $\sigma_n$ : (a) - периодическая система трещин, лежащих в одной плоскости; (b) - периодическая система одноосных параллельных трещин; (c) - двояко периодическая система трещин.

В работе [129] приведены аналитические решения двух плоских задач. В первой рассмотрено взаимное влияние двух прямолинейных трещин одинаковой длины, расположенных на одной прямой. Во второй рассмотрено взаимное влияние трещин для бесконечной периодической системы, расположенных вдоль прямой. Задачи интересны тем, что мы можем, с одной стороны, протестировать наш численный метод сравнением с аналитическими решениями, с другой стороны, проверить насколько быстро увеличение количества трещин приводит к значениям, характерным для бесконечной периодической системы трещин (рис.3.42а). На рис.3.43а приведены результаты расчетов и их сравнение с аналитическими решениями [129]. На оси абсцисс отложен безразмерный параметр  $2a/D$ , где  $2a$  - длина трещины,

$D$  - расстояние между их центрами. На оси ординат отложены значения коэффициента влияния. Нижняя сплошная кривая и близкая к ней пунктирная кривая – соответствуют аналитическому и численному решению для системы двух трещин. Сплошная кривая (2) соответствует аналитическому решению для бесконечной периодической системы трещин, точечная кривая – это численные результаты для системы 20 трещин, расположенных вдоль прямой.

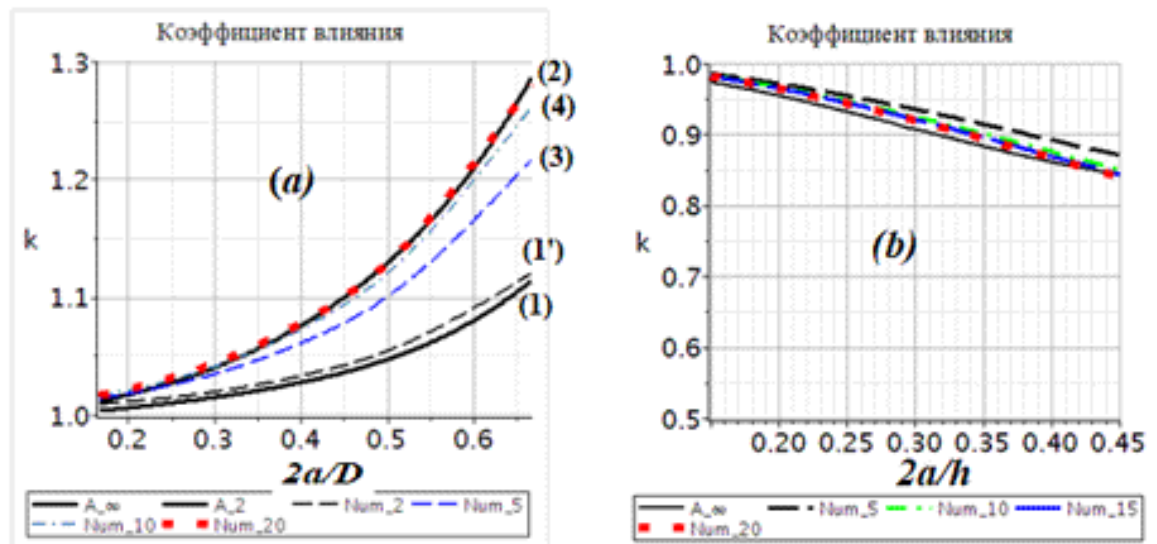


Рис. 3.43(a) - система трещин, расположенных вдоль прямой линии, (b) - система параллельных трещин.

Кривые (1'), (3), (4) построены для возрастающего количества трещин в системе, соответственно для 2, 5, 10. С ростом количества трещин мы получаем кривые все более близкие к аналитической кривой (2) для бесконечной системы трещин. Все коэффициенты влияния больше единицы, т.е. система трещин в рассматриваемом случае ослабляет среду.

На рис.3.43b построены графики зависимости коэффициента влияния для системы параллельных, одинаковых прямолинейных трещин (рис.3.42b). По оси абсцисс отложено отношение длины трещины к расстоянию между соседними параллельными трещинами  $2a/h$ . Сплошная кривая соответствует аналитическому решению [129], точечная кривая – системе из 20 трещин. В этом случае коэффициенты влияния меньше единицы. Система трещин увеличивает прочность тела, по сравнению с прочностью среды при наличии

единичной трещины. Но в этом случае влияние количества трещин системы невелико.

Рассмотрим систему круглых трещин радиуса  $R$  под внутренним давлением  $\sigma_n = -P$ , расположенную в одной плоскости (рис.3.42.а). Все центры трещин расположены на одной прямой и находятся попарно на одинаковом расстоянии  $(2R + d)$  друг от друга. Известно, что в данной задаче трещины, взаимодействуя, ослабляют материал, т.е. коэффициент влияния больше единицы [98]. Расчеты проводились для разного числа трещин в системе. Для выделения средних трещин они нумеровались целыми отрицательными и положительными числами. Так, для 5-ти трещин нумерация следующая:  $[-2, -1, 0, 1, 2]$ . Поскольку точки границ трещин не равнозначны, коэффициент влияния определялся для совокупности точек типа А и типа В (рис.3.43а).



Рис. 3.44. Коэффициент влияния для разных трещин в точках А и В.

На рис.3.44 представлено значение коэффициента влияния  $k = K_{IN}/K_I$  для системы из 11 трещин, для которых отношение  $d/R = 0.2$ . На оси абсцисс отложены номера трещин, на оси ординат соответствующее значение коэффициента влияния. Кругами отмечены значения в точках типа А, квадратами в точках типа В. Как видим, все коэффициенты влияния для средних трещин, за исключением трёх крайних, имеют практически одно

значение, которое соответствует коэффициенту влияния периодической системы.

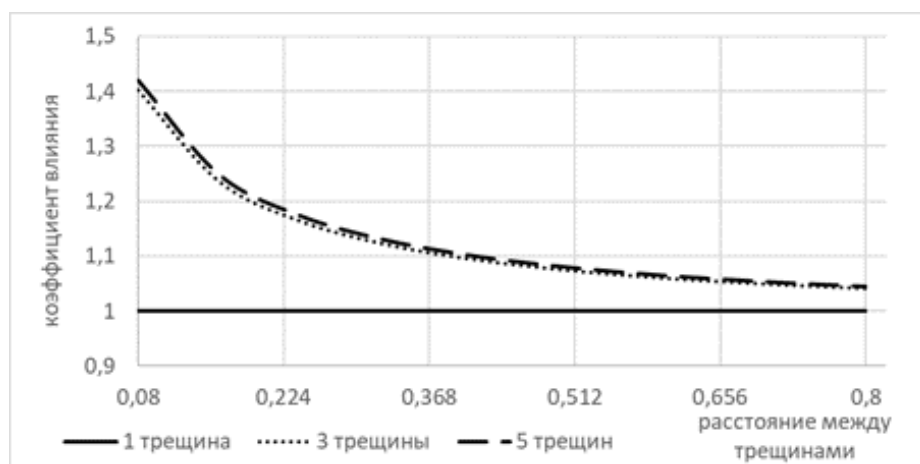


Рис. 3.45. Зависимость коэффициента влияния от расстояния между трещинами и их количества в плоском случае.

Отметим, что полученное значение коэффициента влияния очень слабо зависит от количества трещин. Главным образом оно определяется параметром  $d/R$ , которое назовём расстоянием между трещинами. Зависимость коэффициента влияния от данного безразмерного расстояния между трещинами для разного количества трещин представлена на рис.3.45. С ростом расстояния, коэффициент стремится к единице сверху.

Пусть теперь круглые одноосные трещины радиуса  $R$  расположены в параллельных плоскостях (рис.3.42b), расстояние между которыми равно  $d$ , и нагружены одинаковым внутренним давлением. Как показано в [99], коэффициент влияния в такой системе меньше 1. Количество таких трещин в системе увеличивалось от двух до девяти. Как и в предыдущем случае трещины нумеровались нечетным образом так, чтобы при нечетном количестве средняя трещина имела нулевой номер. В каждом численном эксперименте определялся коэффициент влияния каждой трещины.

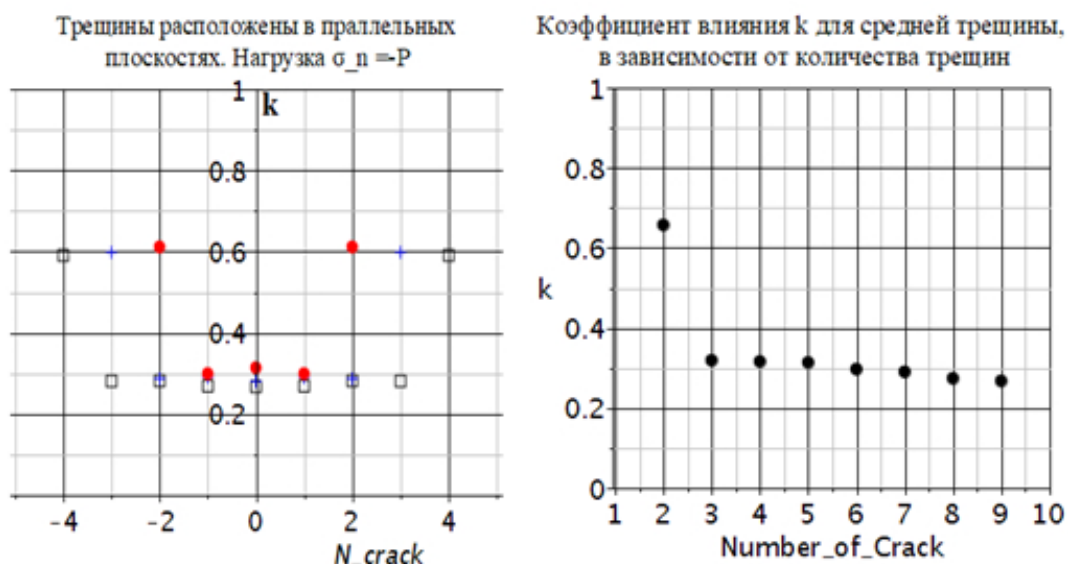


Рис. 3.46. а) зависимость коэффицента влияния для систем из 5,7 и 9 трещин; б) зависимость коэффицента влияния для средней трещины от количества трещин.

На рис.3.46а представлено значение коэффицента влияния  $k = K_{IN}/K_I$  для систем из 5, из 7 и из 9 трещин, для которых отношение  $d/R = 0.2$ . На оси абсцисс отложен номер трещины, на оси ординат значение коэффицента влияния. Значения коэффицента влияния для системы из 5 трещин отмечено круглыми значками, для системы 7 трещин – крестиками, для системы из 9 трещин – квадратами. Из (рис.3.46а) видно, что для средних трещин, значение коэффицента влияния уменьшается с ростом количества трещин в системе и достаточно быстро сходится к предельной величине, которая и является коэффицентом влияния рассматриваемой периодической системы трещин. Отметим, что программа трёхмерных расчетов очень точно отражает симметрию задачи.

Ещё более отчетливо это показывает зависимость, приведенная на рис.3.46б. Здесь по оси абсцисс откладывается количество трещин в системе, а на оси ординат – коэффицент влияния для средней трещины. Как видно из данной зависимости, уже начиная с трёх трещин, коэффицент влияния фактически имеет одну и ту же величину (очень слабо убывает). Для систем из 8 и 9 трещин его значение отличается менее, чем на 0.1%, что можно считать

вполне удовлетворительным для инженерных расчетов. Как и в плоском случае величина коэффициента влияния определяется расстоянием между трещинами.

На рис.3.47 показана зависимость коэффициента влияния средней трещины от расстояния между трещинами для разного количества трещин в системе. Видно, что при увеличении количества трещин кривые быстро сдвигаются к предельному значению.

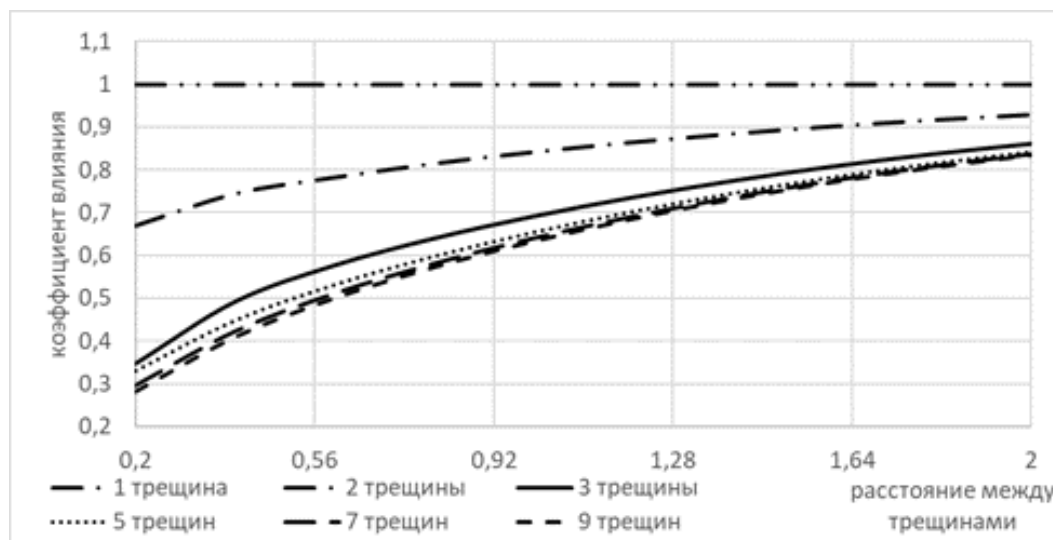


Рис. 3.47. Зависимость коэффициента влияния от расстояния между трещинами в пространственном случае.

Главным результатом для систем периодических трещин является факт ослабления прочности среды (увеличение коэффициента влияния) для трещин, расположенных в одной плоскости, и наоборот увеличение прочности среды системой параллельных трещин (уменьшение коэффициента влияния).

Двойкопериодические трещины в плоскости и в пространстве. Выявленные закономерности поведения коэффициента влияния одновременно присутствуют в системе двойко периодических трещин. Исследование таких систем предлагаемым нами методом осуществимо только тогда, когда имеется возможность расчета большого числа трещин. Приведенные ниже результаты получены для системы рис.3.42с, где было взято 11 слоёв параллельных трещин по 5 трещин в каждом слое (т.е. всего 55 трещин).

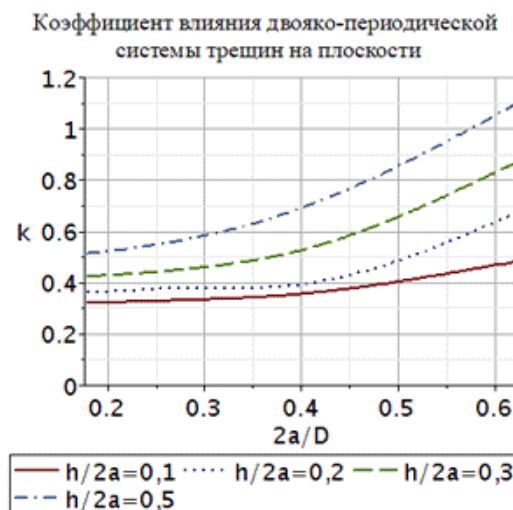


Рис. 3.48. Зависимость коэффициента влияния для системы двоякопериодических трещин.

На рис.3.48 представлены результаты расчетов в двумерном случае. На оси абсцисс отложено отношение длины трещины  $2a$  к расстоянию между центрами трещин  $D$  для каждого слоя. На оси ординат отложено значение коэффициента влияния «средней» трещины. Каждая кривая соответствует определенному значению параметра  $h/2a$ , где  $h$  расстояние между слоями трещин. Отчетливо прослеживается противоборство двух тенденций. Для малых расстояний между слоями, коэффициент влияния меньше единицы. С увеличением этого расстояния наступает ситуация, когда коэффициент влияния становится больше единицы.

На рис.3.49 приведен график зависимости коэффициента влияния (сплошная кривая), в зависимости от величины  $h/R$ , где  $h$  - расстояние между слоями,  $R$  - радиус отдельной трещины. Расчеты соответствуют постоянному значению отношения  $d/R = 0,1$ , где  $d$  расстояние между краями двух соседних трещин в слое.

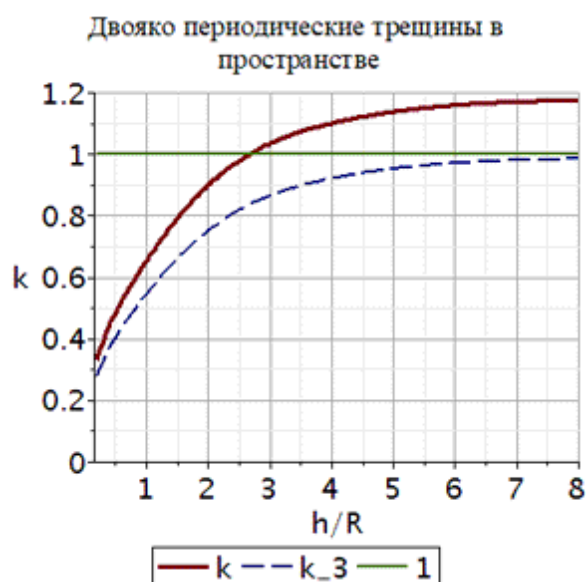


Рис. 3.49. Коэффициент влияния для системы двоякопериодических трещин.

Как и в плоском случае, с ростом расстояния между параллельными слоями, коэффициент влияния увеличивается и для некоторого значения расстояния начинает превышать единицу. Пунктирная кривая на рис.3.49 представлена для отношения коэффициента интенсивности напряжений «средней» трещины к коэффициенту интенсивности напряжений для периодической системы с трещинами, расположенными в одной плоскости (рис.3.49а). По логике уже полученных результатов, это отношение должно быть всегда меньше единицы, что подтверждается расчетами. Можно отметить, что «упрочняющее» действие параллельных трещин в пространственном случае нормального растяжения намного больше, чем в плоской задаче.

Подводя итоги, можно утверждать, что предложенный метод, позволяет достаточно эффективно определять численные значения коэффициентов влияния периодических и двояко периодических систем трещин. Для конечной системы трещин основную нагрузку берут на себя трещины, расположенные на краях системы. Это подтверждается практикой. При деформировании конечного упругого тела с трещинами, прежде всего, начинается рост краевых дефектов. Интересно отметить и тот факт, что

наличие параллельных трещин приводит к большей прочности тела, по сравнению с единичной трещиной тех же размеров.

Основные выводы по главе 3.

- При одноосном расположении трещин коэффициент влияния меньше 1. То есть ситуация становится менее опасной, чем для одиночной трещины. С уменьшением расстояния коэффициент влияния уменьшается, стремясь к некоторой предельной величине.
- В случае если теневая область не вырождена, КИН в точках, принадлежащих теневой области уменьшается при сближении трещин, при этом минимальное значение КИН достигается в точке теневой области, которая соответствует направлению к центру другой трещины. В точках, удаленных от теневой области, при сближении трещин КИН возрастает.
- В случае вырожденной теневой области во всех точках КИН возрастает при уменьшении расстояния между трещинами, при этом максимальное значение КИН достигается в точке, соответствующей теневой области.
- Во всех проведенных расчетах максимальное значение коэффициента интенсивности напряжений реализуется в точках границы в окрестности линии излома, то есть возможный рост будет происходить вдоль линии излома, независимо от вида нагрузки.
- Если трещина с изломом находится под давлением, то ее раскрытие слабо зависит от угла излома (оно чуть больше при большем угле излома).
- Поле напряжений существенно зависит от характера приложенной внешней нагрузки (трещина активна или пассивна).
- Трещина под нагрузкой, приложенной на бесконечности, менее устойчива. Это следует из сравнения величины комбинации коэффициентов интенсивности напряжений для трещины под давлением и для трещины в пространстве, подвергнутой растяжению на бесконечности.

Ветвящиеся трещины.

- В пространственных задачах ветвящихся трещин достаточно четко проявляется область взаимного влияния отдельных частей. «Дальние» ветви по отношению к выделенным ветвям практически не влияют на поле напряжений и перемещений контролируемой окрестности.
- Раскрытие на отрезках ветвления терпит скачок, причем его величина зависит от геометрии ветвления. Толщина ветви трещины при переходе через точку ветвления может, как уменьшаться, так и увеличиваться. Это особенно важно для трещин гидравлического разрыва.
- Расчеты показали возможность определения коэффициента влияния для бесконечной системы периодических трещин, из рассмотрения конечной, но достаточно большой системы трещин.
- Наличие параллельных трещин менее опасно (с точки зрения разрушения), по сравнению с единичной трещиной тех же размеров.
- В двоякопериодической системе трещин, когда есть в наличии и параллельные и трещины, лежащие в одной плоскости, коэффициент влияния может оказаться как меньше 1, так и больше 1, в зависимости от параметров задачи.

### **Заключение.**

Подводя итоги, можно утверждать, что разработан метод расчета коэффициентов интенсивности напряжений в трехмерных телах, ослабленных системой плоских трещин. Метод был реализован в виде программы на языке C++. Проведена верификация программного кода, результаты сравнены с аналитическими. Относительная ошибка заключена в пределах от 1% до 13% в зависимости от параметров задачи. Программа хорошо поддерживает проверку на симметрию.

После исследования, рассмотренных в работе задач, можно сказать, что если эллиптические трещины расположены соосно, то КИН убывает при сближении трещин, если «теневая» область состоит из одной точки, то КИН

максимальный. В промежуточных случаях КИН имеет локальный максимум и минимум в зависимости от расположения подвижной трещины. При уменьшении радиуса одной трещины, ее влияние на исследуемую ослабевает.

Если трещины объединились и получилась трещина с изломом, то ее рост будет происходить вдоль линии излома, причем активная трещина более устойчива чем пассивная.

При исследовании трещин ветвления удалось выявить наиболее вероятные углы ветвления. Для трещины, состоящей из полуокружностей, угол ветвления меньше, чем для трещины, состоящей из прямоугольников. Толщина ветви трещины при переходе через точку ветвления может, как уменьшаться, так и увеличиваться.

Для периодической системы трещин показано – если трещины расположены в одной плоскости, то ситуация более опасна для разрушения по сравнению с тем случаем, когда трещины лежат в параллельных плоскостях. Для двоякопериодической системы трещин при расстоянии в плоскости равном радиусу трещин, и расстояниях между слоями сравнимыми с радиусом трещин, коэффициент влияния становится больше 1.

## Литература.

- [1] Акулич А. В., Звягин А. В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 43–49.
- [2] Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. - М.: Наука. 1978. 351 с.
- [3] Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. - М.: Наука. 1991. 352 с.
- [4] Андрейкив А.Е., Панасюк В.В. Упругое равновесие тела, ослабленное системой круговых трещин, расположенных вдоль одной оси. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197 №2 с. 312-314.
- [5] Андрейкив А.Е., Панасюк В.В. Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговыми линиями раздела краевых условий // Изв. АН СССР. МТТ 1972. №3 с. 26-32.
- [6] Андрейкив А.Е., Панасюк В.В., Стадник М.М. Разрушение хрупких призматических брусьев, ослабленных внутренними круговыми трещинами // Пробл. прочности 1972. №10 с. 37-41.
- [7] Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб, С-Петербургский гос. университет, 2008, 207с.
- [8] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Прикладные задачи механики разрушения. Учеб. пособие. - Самара: Изд-во Самар. ун-та, 1999. 195 с.
- [9] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ 1959. т. 23, №3. с. 434-444.
- [10] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинках ПММ. 1959. т. 23, №4. с. 706-721.
- [11] Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С.3-56.

[12] Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва пласта // Прикл. матем. и мех. 1956 а. Т.20. №4. С.475-486 — РЖМех. 1984. 8В549.

[13] Баренблатт Г.И. Об образовании горизонтальных трещин при гидроразрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд. техн. н. 1956 б. №9. С.101-105. — РЖМех. 1959. 4320.

[14] Баренблатт Г.И., Христианович С.А. О модуле сцепления в теории трещин // МТТ. 1968. №2. С. 70-75.

[15] Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. 494 с.

[16] Богданов А. И., Звягин А. В., Тьерсилен М. Взаимное влияние системы трещин на коэффициент интенсивности напряжений // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2004. — № 6. — С. 44–49.

[17] Бородачев Н.М. Термоупругая задача для бесконечного тела с осесимметричной трещиной.// Прикл. механика. 1966 т.2 №2. с. 93-99.

[18] Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. - М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

[19] Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.

[20] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. 640 с.

[21] Гольдштейн Р.В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. - 1979. - № 3. С. 111-126

[22] Душин В.Р., Никитин В.Ф., Скрылева Е.И. «Вычислительное моделирование вытеснения флюида из пористой среды» // Вестник кибернетики, издательство СурГУ (Сургут), том 4, № 28. 2017

[23] Желтов Ю.П. О моделировании в нефтепромысловой механике (обзор) // ПМТФ. 1962. №4. 134–151.

[24] Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтяного пласта // Изв. АН СССР. Отд. техн. н. 1955. №5. С.3-41. — РЖМех. 1958. 11341.

[25] Звягин А. В., Лужин А. А., Панфилов Д. И., Шамина А. А. Численный метод разрывных смещений в пространственных задачах механики трещин. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2021. — № 1. — С. 148–162

[26] Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. Взаимное влияние трёхмерных трещин в упругом теле // В сборнике: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019 года. Расширенные тезисы докладов. Изд. РИЦ БашГУ Уфа, 2019.

[27] Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. Взаимное влияние трёхмерных трещин в упругом теле // В сборнике Триггерные эффекты в геосистемах: тезисы докладов V-й Международной конференции, Москва, 4-7 июня 2019 г, Изд. ГЕОС (Москва), 2019, с. 76-77

[28] Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. Взаимодействие эллиптических трещин с границей упругого тела. // в сборнике Материалы XXV Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова, Изд. ООО «ТРП»( М), 2019, Т. 1, с. 108-111

[29] Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А. Трёхмерные трещины в упругом теле. // В сборнике СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ, серия Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, Изд. МАКС Пресс (М), 2019, с. 701-703

[30] Звягин А.В., Панфилов Д.И., Шамина А.А. Взаимное влияние дискообразных трещин в трехмерном упругом пространстве. // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, Изд-во Моск. Ун-та (М.), 2019, № 4, с. 34-41

[31] Керштейн И.М., Ключников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А. Основы экспериментальной механики разрушения - М.: Изд-во МГУ, 1989. 140 с.

[32] Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Скрылева Е.И., Тюренкова В.В. Влияние трещины ГРП и взаимного расположения скважин на интенсивность и качество извлечения нефти.// В сборнике Технологии будущего нефтегазодобывающих регионов : сборник статей Первой международной научно-практической конференции молодых ученых и специалистов, состоявшейся в рамках мероприятий Первого междунар. молодежного науч.-практ. форума «Нефтяная столица», место издания УНиИ СурГУ Сургут, с. 88-95, 2018

[33] Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. - Киев: Науковадумка, 1989. 288 с.

[34] Коваленко А.Д. Основы термоупругости.-Киев: Наук.думка, 1970, 307с.

[35] Костров Б. В. Осесимметрическая задача о распространении трещины нормального разрыва // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 644-652.

[36] Костров Б.В. Распространение трещин с переменной скоростью // ПММ. 1974. Вып.3. С. 551-560.

[37] Костров Б.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М. // МТТ. 1969. № 3. С. 112-125.

[38] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер.с англ. - М.: Мир, 1987. 328 с.

[39] Леонов М. Я. К теории расчета упругих оснований // Прикладная математика и механика. 1939. Т. 3, 2. С. 53—78.

[40] Леонов М. Я. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство. // Прикладная математика и механика. 1953. Т 17, №1. С. 87—98.

[41] Леонов М. Я. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала // Укр.мат.журн. 1953. Т 5, №1. С. 50-57.

[42] Леонов М. Я. Метод инверсии в контактных задачах теории упругости // Науч.зап. Ин-та машиноведения и автоматики 1953. Т 1, С. 99-109.

[43] Лурье А.И. Теория упругости. - М.:Физматгиз, 1970. 940с.

[44] Миклашевич И.А. Микромеханика разрушения в обобщенных пространствах. - М: Изд-во Логвинов, 2003. 208 с.

[45] Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. - М.: Гос. изд-во. техн.-теор. литературы, 1950. 428 с.

[46] Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Граничные интегральные уравнения и задачи теории упругости. Учеб. пособие. - Л., 1986. 88 с.

[47] Моссаковский В. И. Первая основная задача теории упругости для пространства с плоской круглой щелью Прикладная математика и механика. 1955. т. 19, М 4. с. 443-452.

[48] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. - М.: Наука, 1966. 707 с.

[49] Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. - Новосибирск: Наука, 1979. 271 с.

[50] Никишков Г. П. Расчет энергетического интеграла методом эквивалентного объемного интегрирования.—В кн.: Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури.—М.: Мир, 1990. С. 365—382.

[51] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

[52] Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев: Наукова думка, 1968. 246с.

[53] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. - М.: Наука, 1974. 416 с.

[54] Партон В.З. Механика разрушения. От теории к практике. - М.: Наука, 1990. 240с.

[55] Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения основных пространственных и плоских задач упругого равновесия // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. - 1975. т.8 84с.

[56] Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости.—М.: Наука, 1977. 312с.

[57] Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости.—М.: Наука, 1981. 688с.

[58] Перлин П. И., Самаров В. Н. Применение теории обобщенного потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами и оценке хрупкого разрушения конструкций сложной формы Изв. АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. 1974. 5. С. 72, 73.

[59] Перлин П. И., Самаров В. Н. Применение теории потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами / Прикладные проблемы прочности и пластичности. 1977. Вып. 6. с. 42-46.

[60] Попов Г.Я. О методике ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости // ПММ. - 1969. т.33.№3 с. 519-531.

[61] Попов Г.Я., Шумихин С.А. Концентрация напряжений в неограниченной упругой среде возле круговых трещин, лежащих в одной плоскости // Актуальные проблемы механики деформируемых тел.- Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та. - 1979. с. 168-173.

[62] Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. - М.: Наука, 1986. 328 с.

[63] Работнов Ю.А. Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. 752 с.

[64] Работнов Ю.А. Введение в механику разрушения. - М.: Наука, 1987. 80 с.

[65] Райнхарт Дж.С., Пирсон Дж. Поведение металлов при импульсивных нагрузках . - М.: ИЛ, 1958. 296 с.

[66] Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Разрушение структурно неоднородных тел. - Рига: Зинатне, 1989. 224 с.

[67] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. Т.2. С. 204-335.

[68] Рахматулин Х.А., Шемякин Е.И., Демьянов Ю.А., Звягин А.В. Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках. М.Логос, 2008.621с.

[69] Реутов В.А. Гидравлический разрыв пласта. // Итоги н. и т., Мех. деф. тв. т. 1989. Т. 20. С.84-188.

[70] Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин, Отв. Редактор Панасюк В.В. АН УССР. Физ.-мех. Ин-т имени Г.В. Карпенко. – Киев: Наук. думка, 1989. 248 С.

[71] Седов Л.И. Механика сплошной среды. 4-е изд. - М: Наука, 1983. Т. 1. 528 с.

[72] Седов Л.И. Механика сплошной среды. 4-е изд. - М: Наука, 1984. Т. 2. 560 с.

[73] Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения: Пер.с японск. - М: Мир, 1986. 334 с.

[74] Слепьян Л.И. Механика трещин. - М., 1990. 296 с.

[75] Слепьян Л.И. О волне хрупкого разрушения // МТТ. 1968. № 4. С. 190-192.

[76] Слепьян Л.И. Приближенная модель динамики трещин. Динамика сплошной среды. - Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР. М., 1974. Вып. 19. С. 101-110.

[77] Слепьян Л.И. Динамика хрупкого разрушения в средах со структурой // МТТ. 1984. № 6. С. 121-130.

[78] Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В двух томах. Т. 2: Пер. с англ./Под ред. Ю., Мураками. – М.: Изд. Мир, 1990. – 1016 с.

[79] Уайэтт О., Дью-Хьюз Д. Металлы, керамики, полимеры. - М.: Атомиздат, 1979. 580 с.

[80] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - Л.: Наука, 1967. 420 с.

[81] Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. - Л.: Наука, 1977. 220 с.

- [82] Уэстмен Р.А. Несимметричные краевые задачи смешанного типа для упругого полупространства. // Прикл.механика. - 1965. т. 32, № 3, с. 178-185.
- [83] Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. - М.: Наука, 1983. 296 с.
- [84] Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. - М.: Недра, 1987. 308 с.
- [85] Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. - М.: Наука, 1974. 640 с.
- [86] Черных К.Ф., Литеиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 254 с.
- [87] Шифрин Е.И. Пространственные задачи линейной механики разрушения. М. Физмалит., 2002. 368 с.
- [88] Atkinson C., Eshelby J.D. The flow of energy into the tip of moving crack // Int. J. Fracture Mechanics. 1968. V. 4. № 1. P. 3-18.
- [89] Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Adv. Appl. Mech. 1962.VII. P.55-129.
- [90] Blackburn W. S., Hellen T. K. Calculation of stress intensity factors in three dimensions by finite element methods // International journal for numerical methods in engineering. 1977. V. 11, Ne 2. P. 211—229.
- [91] Buchholz F.G., Grébner H., Dreyer K.H., Krome H. 2D- and 3Dapplications of the improved and generalized modified crack closure integral method.// Computational Mechanics'88. Theory and applications. Proc. of the Int. conference, 1988.—Atlanta, USA: Springer-Verlag, 1988. V. 1. P. 1411-1414.
- [92] Bui H. D. An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape. // Journal of the mechanics and physics of solids. 1977. V. 25, NE 1. P. 29-39.
- [93] Chan S. K., Tuba I. S. , Wilson W. K. On the finite element method in linear fracture mechanics.// Engineering fracture mechanics. 1970. V. 2, I. P. 1-17.

[94] Cruse T. A. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis // Computers and structures. 1973. V. 3, 3. P. 509-527

[95] Cruse T.A., Meyers G. J. Three-dimensional fracture mechanics analysis // Proceedings of the ASME. Journal of the structural division. 1977. V. 103, ST2. P. 309-320.

[96] Cruse T.A., Wilson R. B. Advanced applications of boundary-integral equation methods.// Nuclear engineering and design. 1978. V. 46, I. P. 223—234.

[97] Echelby J.D. The force on an elastic singularity. // Philos. Trans. Roi. Soc., 1951.V.A244.P. 87-111.

[98] Fabrikant V.I. Close interaction of coplanar circular cracks under shear loading.// Computational Mechanics (1989) 4, 181 – 197

[99] Fabrikant V.I. Interaction of a parallel circular cracks subjected to arbitrary loading in transversely isotropic elastic space.// Applicable Analysis.1997. Vol. 66. pp. 275 – 290

[100] Fu W.S. Thermal stress in an elastic solid weakened by two complanar circular cracks // Int.J.Eng.Sci. - 1973. V.11, №3 p. 317-330.

[101] Green A. E., Sneddon I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid // Proceedings of the Cambridge Phylosophical Society. 1950. V. 46. P. 159—164.

[102] Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. // Philos.Trans. of Roy.Soc.of London.-1920.-Ser.A,V.221.-P.163-198.

[103] Griffith A. A. The theory of rupture. // Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics.—Delft, 1924. P. 55—63.

[104] Hall C.A., Raymund M., Palusamy S. A macro element approach to computing stress intensity factors for three dimensional structures// International journal of fracture. 1979. V. 15, №3. P. 231—245.

[105] Hilton P. D., Sih G. C. Applications Of the finite element method to the calculation of stress intensity factors.// Mechanics of fracture. V. 1. Methods of analysis and solutions of crack problems / Ed. G.C. Sih.—Leyden, 1973. P. 426-473.

[106] Hongzhuo Fan, Sanbai Li, Xia-Ting Feng & Xinyue Zhu. A high-efficiency 3D boundary element method for estimating the stress/displacement field induced by complex fracture networks.// Journal of Petroleum Science and Engineering, Vol. 187, 2020, 106815

[107] Irwin G. R. Fracture dynamics.// Fracturing of metals.—Cleveland: ASM, 1948. P. 147-166.

[108] Kairui L., Smirnov N. N., Pestov D. A. et al. An approximate analytical solution for hydraulic fracture opening under non-uniform internal pressure.// Materials Physics and Mechanics. — 2020. — no. 44. — P. 288–305.

[109] Kassir M. K. On the problem of an external elliptic crack in an infinite solid // Journal of applied mechanics. 1968. V. 35, 2. P. 422-431.

[110] Kassir M. K., Sih G. C. Three dimensional crack problems. V. 2. A new selection of crack problems in three dimensional elasticity.—Leyden: Noordhoff, 1975. 452c.

[111] Kassir M. K., Sih G. C. Application of Papkovitch-Neuber potentials to a crack problem.// Int.J.Solids and Struct.- 1973 V 9, N 5, p. 643-654.

[112] Kiselev A. B., Kay-Zhui L., Smirnov N. N., Pestov D. A. Simulation of fluid flow thorough a hydraulic fracture of heterogeneous fracture-tough reservoir in the planar 3d formulation.// Fluid Dynamics. — 2021. — Vol. 56, no. 2. — P. 164–177

[113] Kristianovich S. A., Zheltov Y. P. Formation of Vertical Fractures by Means of Highly Viscous Fluids.// Proceedings of the 4th World Petroleum Congress, vol. 2, Rome, 1955. 579-586

[114] Lac hat J. C., Watson J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics// International journal for numerical methods in engineering. 1976. V. 10, №5. P. 991-1005.

[115] McGowan J. J., Raymund M. Stress intensity factor solutions for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loadings.// Fracture mechanics. ASTM STP 677 / Ed. C.W. Smith.— American Society for Testing and Materials, 1979. P. 365—380.

[116] Nikishkov G.P., Atluri S. N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain

integral' method // International journal for numerical methods in engineering. 1987. V. 24, 9. P. 1801-1821.

[117] Orowan E.O. Energy criteria of fracture // The welding journal. 1955. V. 34, 3. P. 1576-1606.

[118] Pramoda A.L.N., Ean Tat Ooi, Chongmin Song, Sundararajan Natarajan. Numerical estimation of stress intensity factors in cracked functionally graded piezoelectric materials. A scaled boundary finite element approach.// Composite Structures. Vol. 206, 2018, Pages 301-312.

[119] Rybicki E. F. , Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral// Engineering fracture mechanics. 1977. V. 9, 4. P. 931-938.

[120] Shah R. C, Kobayashi A. S. On the parabolic crack in an elastic solid // Eng.Fract.Mech.-1968. V. 1, NE 2. P. 309-325.

[121] Shah R. C, Kobayashi A. S. Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of semiinfinite solid // International journal of fracture. 1973. V. 9, №2. P. 133-146.

[122] Shail R. Some thermoelastic stress distributions in an infinite solids and a thick plate containing penny-shaped crack // Mathematica. - 1964. V.11 N 2. p. 102-118.

[123] Shamina A.A., Zvyaguin A.V., Akulich A.V., Tyurenkova V.V., Smirnov N.N. The study of the strength of structures weakened by a system of cracks. // Acta Astronautica. 2020. Vol. 176. P. 620 – 627

[124] Shamina A. A., Zvyaguin A. V., Luzhin A. A. Stress intensity coefficients for elliptic and round cracks // Proceedings of 71st International Astronautical Congress (IAC) – The CyberSpace Edition, 12-14 October 2020. — 2020. — P. IAC–20–A2.2.16. x58860.

[125] Sih G. C. Ed. Mechanics of fracture. V. 4. Elastodynamic crack problems.— Leyden: Noordhoff, 1977. 352 p.

[126] Srivastava K.N., Palaiya R.M. The distributions of thermal stress in a semi-infinite elastic solid containing a penny-shaped crack // Int.J.Eng.Sci. - 1969 V.7 N 7. p. 641-666.

[127] Supriyono M. H. Ali Abadi. Dual boundary element method for elastoplastic fracture mechanics of shear deformable plate.// Engineering Analysis with Boundary Elements.2020, Vol. 117, p. 132-142

[128] Tan C. L. , Fenn er R. T. Elastic fracture mechanics analysis by the boundary integral equation method// Proceedings of the Royal Society (London). Series A. 1979. V. 369, 1737. P. 243-260.

[129] Tsang D.K.L., Oyadiji S.O., Leung A.Y.T. Multiple penny-shaped cracks interaction in a finite body and their effect on stress intensity factor. // Engineering Fracture Mechanics 70 (2003) 2199–2214

[130] Wan Cheng, Yan Jin, Hong Li, Mian Chen. A novel linear triangular element of a three-dimensional displacement discontinuity method.// Engineering Analysis with Boundary Elements, 2015 Vol. 59 p. 89-96

[131] Weaver J. Three-dimensional crack analysis International journal of solids and structures. 1977. V. 13, N' 4. P. 321-330.

[132] Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. // Journal of applied mechanics, 1957, march, 109-114.

[133] Wilson W. K. Finite element methods for elastic bodies containing cracks.// Mechanics of fracture. V. I. Methods of analysis and solutions of crack problems /Ed. G.C. Sih.—Leyden, 1973. P. 484-515.

[134] Zvyagin A. V., Luzhin A. A., Smirnov N. N., Shamina A.A. et al. Stress intensity factors for branching cracks in space structures.// Acta Astronautica. — 2021. — Vol. 180. — P. 66–72

[135]. Henk A. van der Vorst. Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems. Cambridge University Press 2003. 219 p.

[136] Zvyaguin A.V., Smirnov N.N., Luzhin A.A., Shamina A.A. Displacement discontinuity method in 3-D problems of fracture mechanics. в сборнике Bulletin of Xiangtan University, издательство Xinghua University Press (China), том 6

[137] Звягин А.В., Панфилов Д.И., Лужин А.А., Шамина А.А. Метод определения коэффициентов интенсивности напряжений для пространственных трещин в журнале Вестник Московского университета.

[138] Shamina A.A., Zvyagin A.V., Smirnov N.N., Luzhin A.A., Panfilov D.I., Udalov A.S. Computational modeling of cracks different forms in three-dimensional space // Acta Astronautica, 2021, V. 186, p. 289-302

[139] Цифровые технологии предсказательного моделирования в подземной гидродинамике. Смирнов Н.Н., Звягин А.В., Стамов Л.И., Никитин В.Ф., Скрылева Е.И., Пестов Д.А., Шамина А.А. Москва, ИЗД. ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2021, ISBN 978-5-93838-087-5, 144с

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

В этом разделе приведены графики коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от угловой координаты для круглых трещин одинакового радиуса. По оси абсцисс откладывается величина угла, по оси ординат – соответствующее значение  $K_I, K_{II}, K_{III}$ . Сдвиг по оси  $y$  равен  $d$ , разный цвет кривых соответствует различным расстояниям между плоскостями трещин. Расстояние берется в радиусах неподвижной трещины (к главе 3 раздел 3.1).

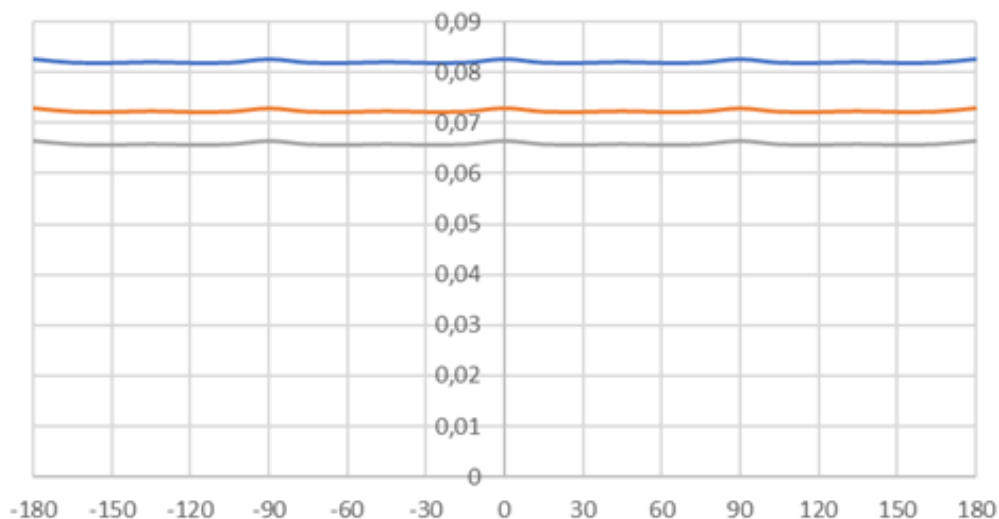


Рис. 1.  $K_I$  при  $d = 0$ . Синяя кривая – расстояние между плоскостями 0,8; оранжевая – 0,5; серая 0,3.

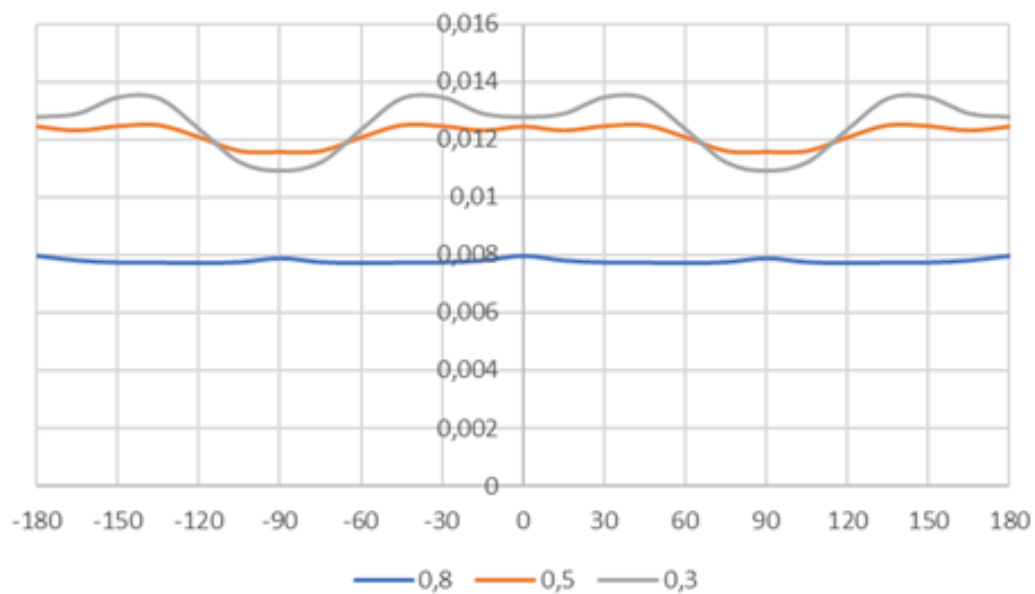


Рис. 2.  $K_{II}$  при  $d = 0$ .

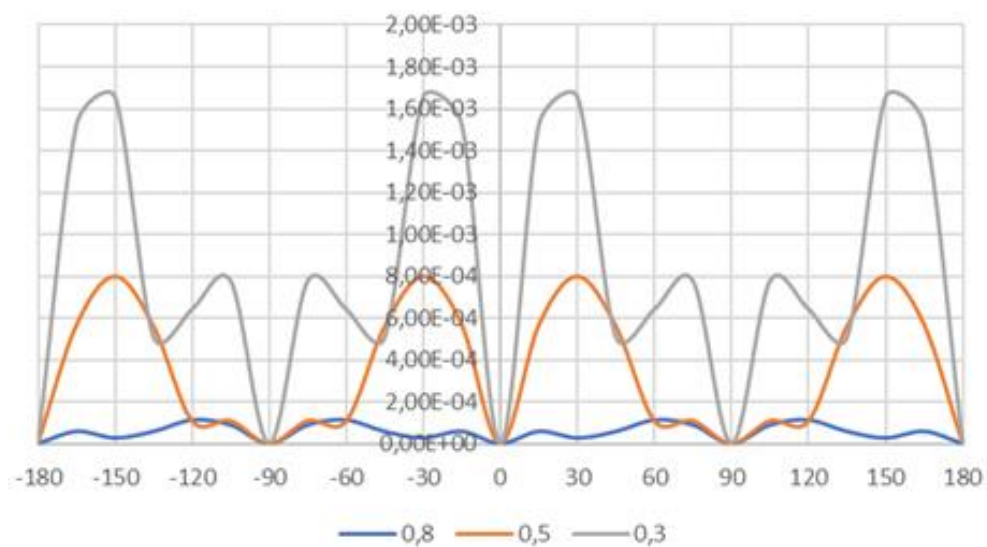


Рис. 3.  $K_{III}$  при  $d = 0$ .

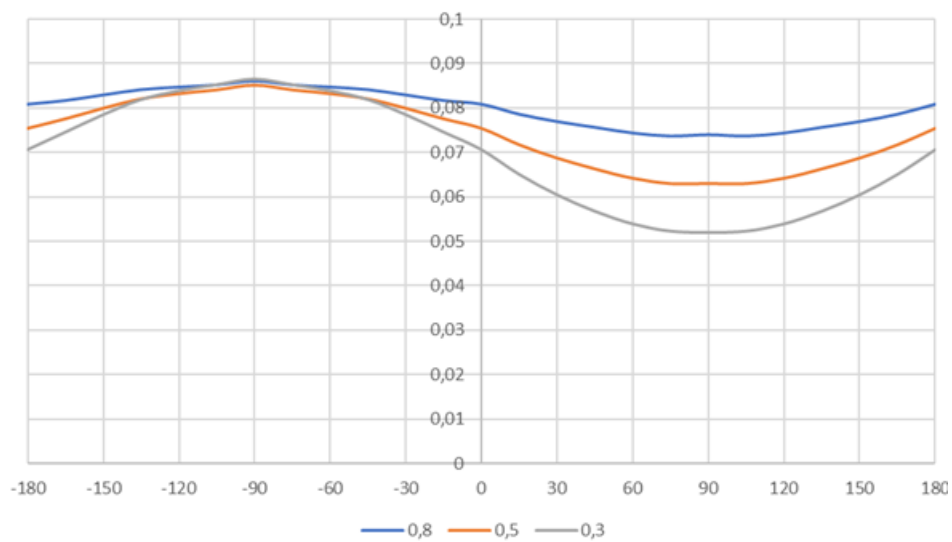


Рис. 4.  $K_I$  при  $d = 0.25$ .

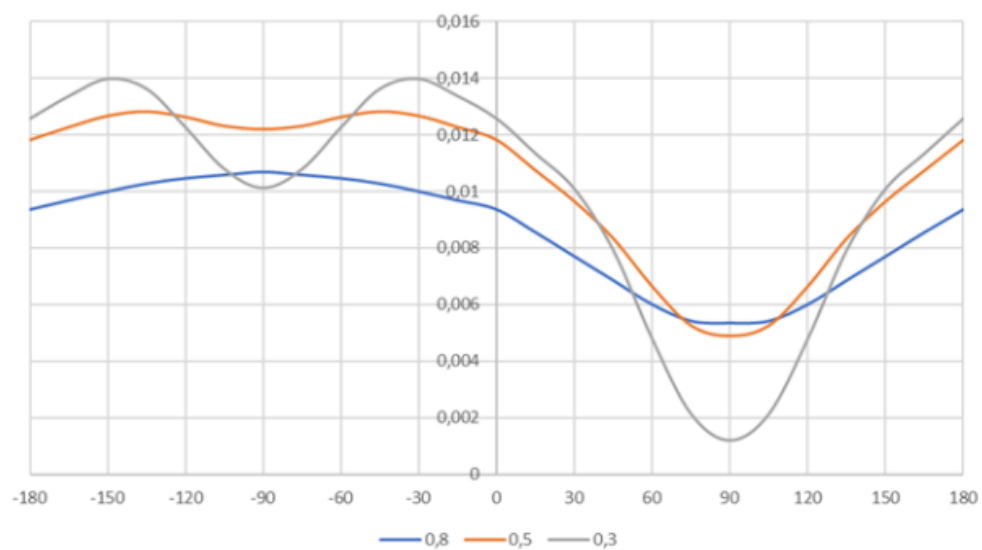


Рис. 5.  $K_{II}$  при  $d = 0.25$ .

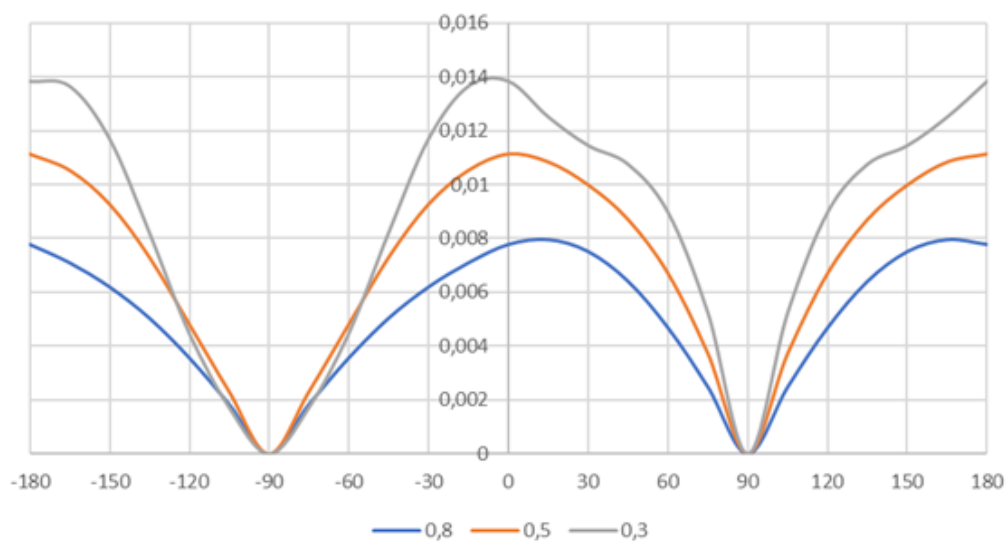


Рис. 6.  $K_{III}$  при  $d = 0.25$ .

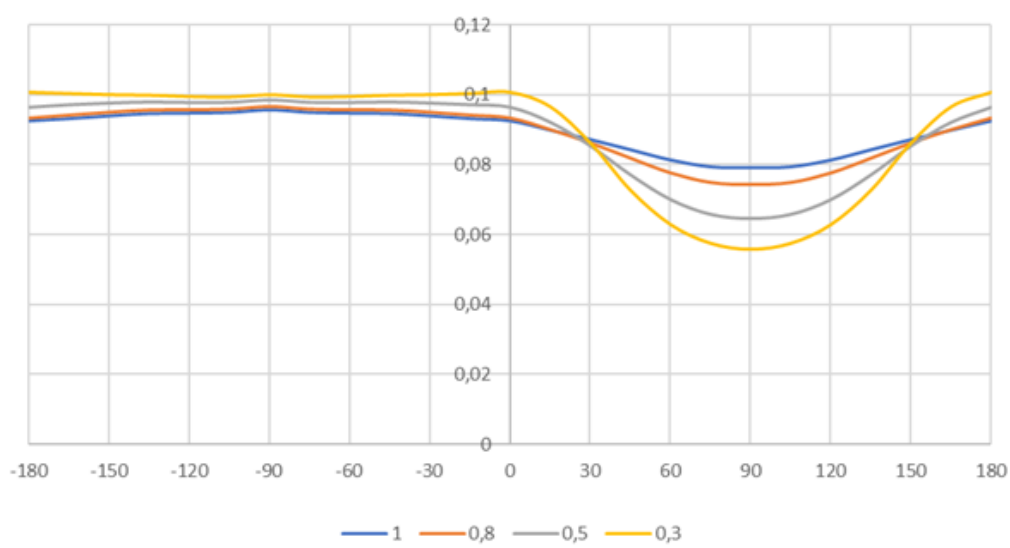


Рис. 7.  $K_I$  при  $d = 1$ .

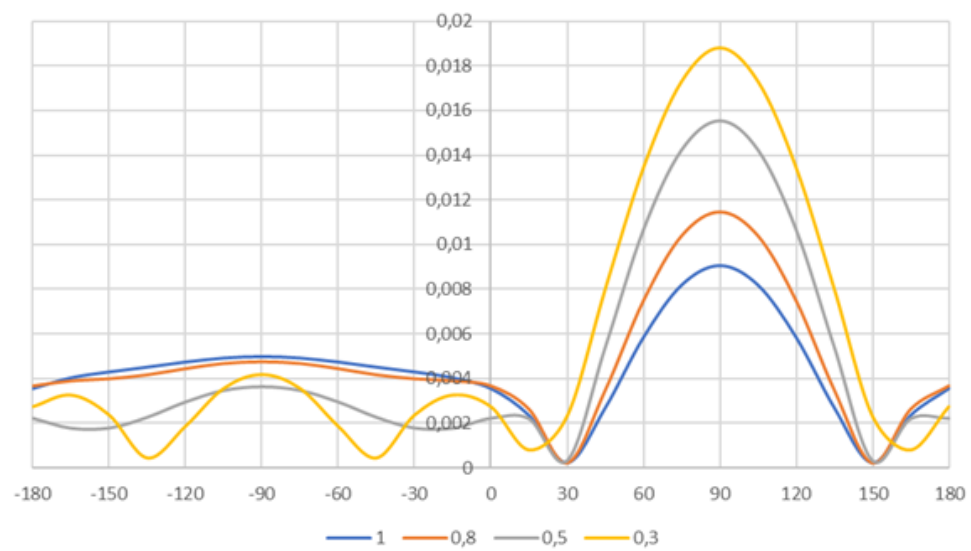


Рис. 8.  $K_{II}$  при  $d = 1$ .

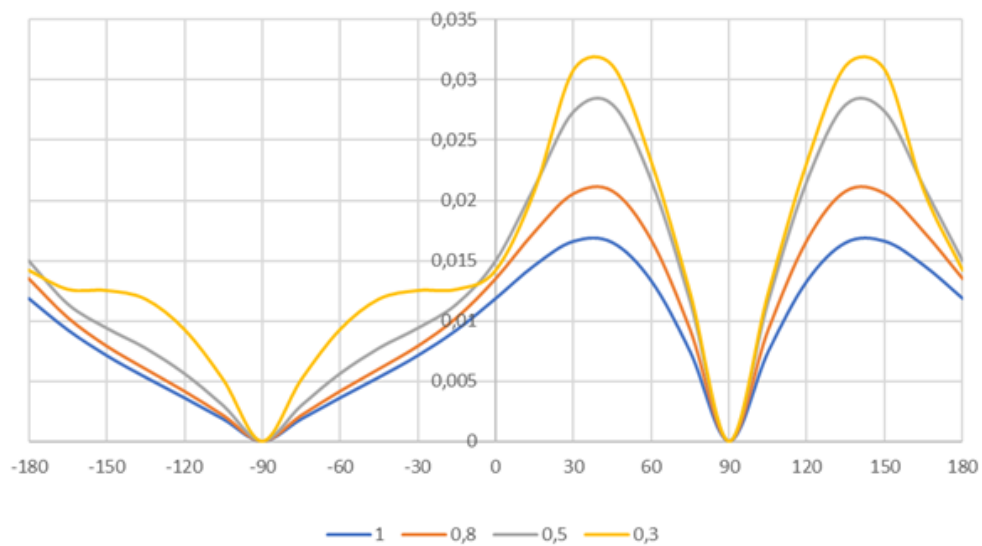


Рис. 9.  $K_{III}$  при  $d = 1$ .

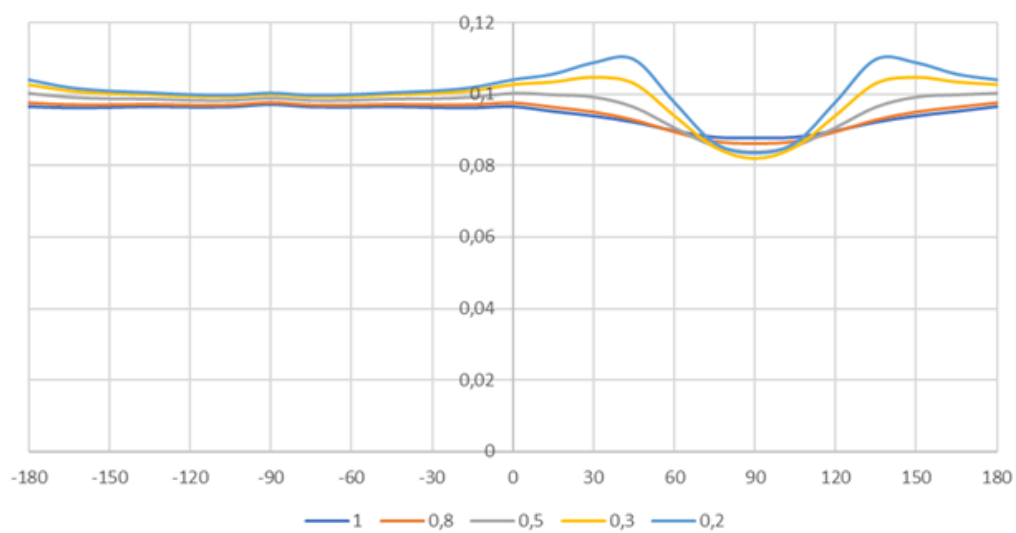


Рис. 10.  $K_I$  при  $d = 1,5$ .

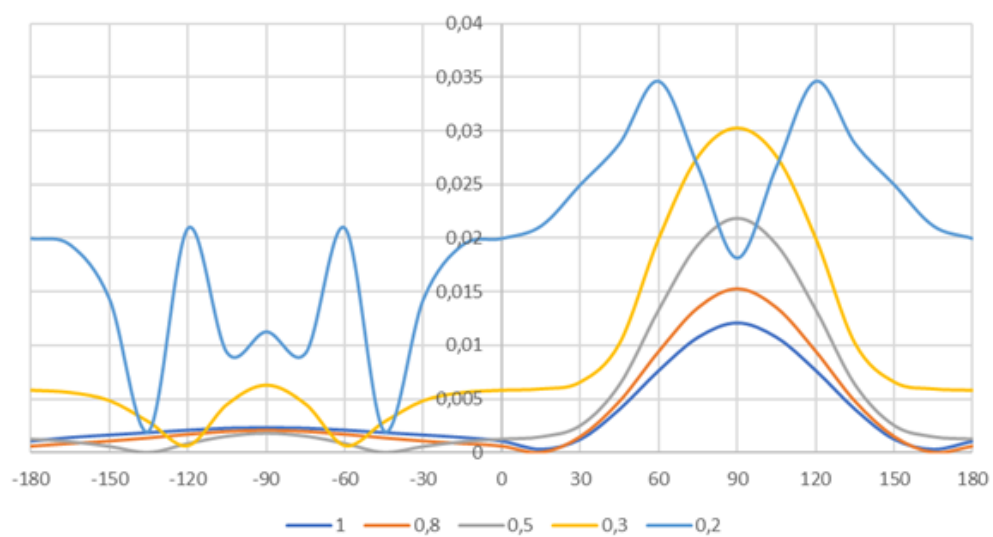


Рис. 11.  $K_{II}$  при  $d = 1,5$ .

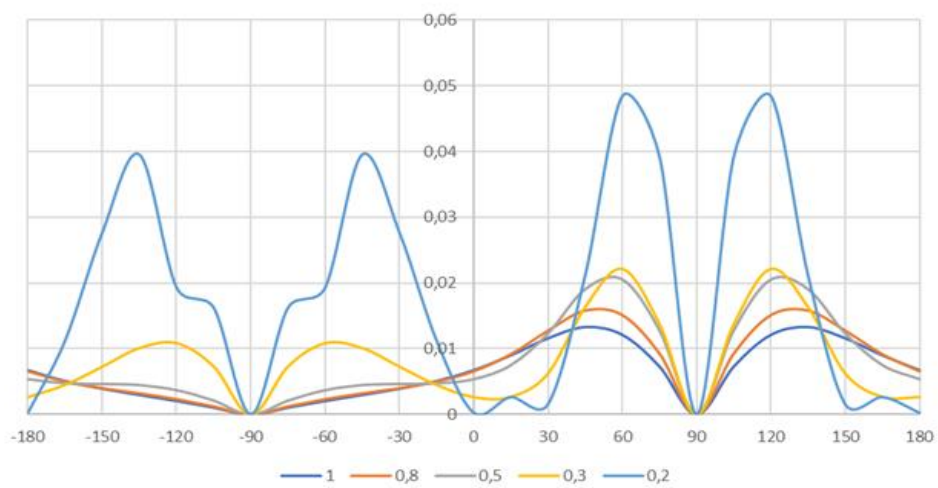


Рис. 12.  $K_{III}$  при  $d = 1,5$ .

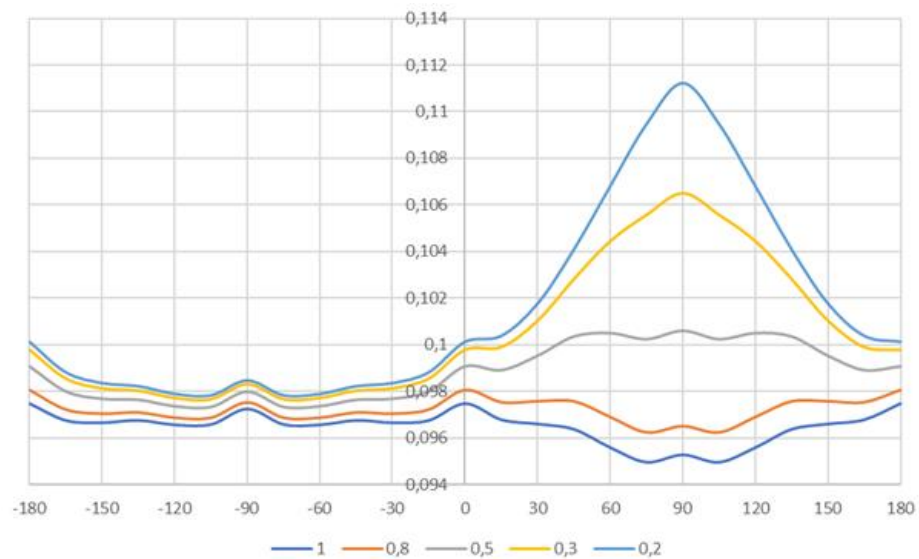


Рис. 13.  $K_I$  при  $d = 2$ .

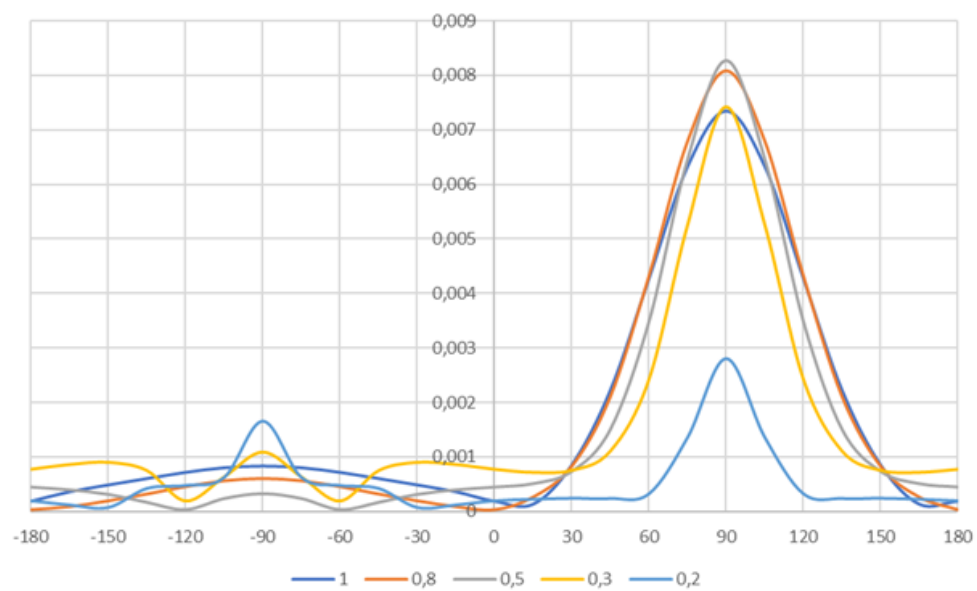


Рис. 14.  $K_{II}$  при  $d = 2$ .

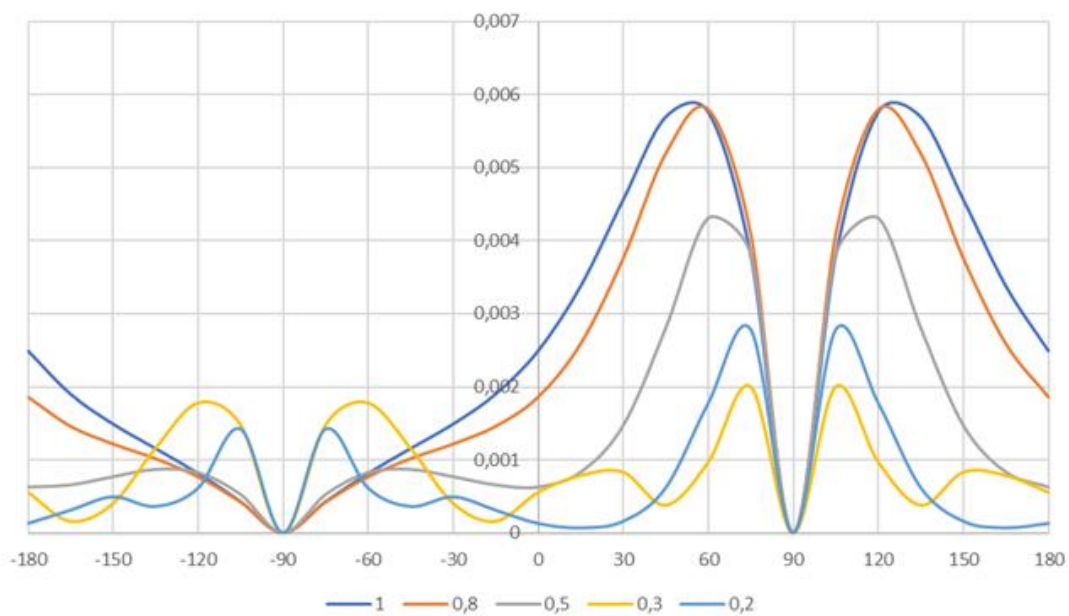


Рис. 15.  $K_{III}$  при  $d = 2$ .