МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

На правах рукописи

УДК 514.8;530.182

БАДЬИН АНДРЕЙ ВАЛЕНТИНОВИЧ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТИПОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

01.01.03 - математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Москва - 1994

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико – математических наук, профессор Э.Г.Позняк; кандидат физико – математических наук, доцент А.Г.Попов.
Официальные оппоненты:	доктор физико – математических наук, профессор Е.В.Шикин, кандидат физико – математических наук, с.н.с. Е.В. Ферапонтов.

Ведущая организация: МПГУ им. В.И.Ленина

Защита состоится "16" февраля 1995 года в 15^{10} часов на заседании Специализированного Совета К 053.05.18 при МГУ им. М.В.Ломоносова по адресу 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, аудитория СФА

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ.

Автореферат разослан "16" января 1995 года.

Ученый секретарь Специализированного Совета К 053.05.18
доктор физико – математических наук,
доцент П.А.Поляков

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию специальных типов гиперболических уравнений математической физики геометрическими методами.

Теория нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа представляет собой важный раздел современной математической физики. Нелинейные гиперболические уравнения второго порядка возникают в теории нелинейных волн, в квантовой теории поля, в некоторых задачах математической метеорологии. Гиперболические системы квазилинейных уравнений первого порядка широко используются в газовой динамике.

Многие уравнения указанного типа допускают естественную геометрическую интерпретацию. В диссертации рассматриваются нелинейные гиперболические дифференциальные уравнения и системы уравнений с точки зрения теории изометрических погружений двумерных метрик отрицательной кривизны в E^3 и в E^4.

Актуальность такого подхода обусловлена двумя причинами.

Во-первых, возникающие в теории поверхностей отрицательной кривизны уравнения совпадают с некоторыми модельными уравнениями математической физики. В качестве примера можно привести уравнения *sine-Gordon* и Монжа - Ампера, а также гиперболические системы квазилинейных уравнений в римановых инвариантах. Сходство уравнений порождает сходство проблем, встающих в дифференциальной геометрии и в математической физике, причём геометрический подход позволяет использовать при решении задачи наводящие соображения, опирающиеся на геометрическую интуицию.

Во-вторых, так как задача изометрического погружения всегда тем или иным способом сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, то множество погружаемых областей конкретного риманова многообразия совпадает с множеством областей существования решения некоторого дифференциального уравнения (или системы) на этом многообразии. Известно, что полное, гомеоморфное R^2, риманово многообразие отрицательной кривизны, допускающее конформную интерпретацию в круге (многообразие типа Л), с кривизной, ограниченной сверху отрицательной константой не допускает регулярного изометрического погружения в E^3. Более того, на многообразии типа Л постоянной кривизны (плоскость Лобачевского) даже полуплоскость не допускает регулярного изометрического погружения в E^3. С другой стороны, каждая компактная и широкий класс некомпактных областей на упомянутых многообразиях регулярно изометрически погружаются в E^3. Таким образом, при погружении в E^3 некомпактных областей на многообразиях типа Л приходится иметь дело с нелинейными дифференциальными уравнениями в областях, в некотором смысле близких к максимально возможным областям существования регулярного решения. Изучение таких ситуаций представляет большой интерес, поскольку позволяет лучше понять природу препятствий к существованию регулярного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений.

При повышении размерности объемлющего евклидова пространства, задача изометрического погружения в некотором смысле упрощается: все упомянутые выше многообразия допускают регулярное изометрическое вложение в евклидовы пространства высокой размерности. Так например плоскость Лобачевского ($Л^2$) можно C^∞ - гладко погрузить в E^5 и вложить в E^6 ($Л^2$ не допускает даже C^2 - гладкого изометрического погружения в E^3). Можно ли регулярно погрузить $Л^2$ в E^4 в настоящее время (1994) неизвестно. Таким образом, пространство E^4 играет некоторую критическую роль, поэтому, представляет интерес собрать максимум информации об изометрических погружениях в E^4 двумерных римановых метрик кривизна которых, по крайней мере в некоторых точках, имеет отрицательное значение.

Целью диссертационной работы является изучение:

1) вопроса существования и узкой гиперболичности решения, а также поведения характеристик гиперболической системы квазилинейных уравнений специального вида;

2) геометрической интерпретации решения системы дифференциальных уравнений, обобщающей известное модельное уравнение математической физики - уравнение *sine-Gordon*, с помощью поверхности отрицательной кривизны в E^3;

3) изометрических погружений двумерных метрик вращения в E^4 в виде поверхностей специального вида.

Научная новизна работы. Новыми являются полученные в диссертации необходимые и достаточные условия существования изометрического погружения метрики вращения на сфере (S^2) и плоскости (R^2) в E^4 в виде поверхности вращения и ее обобщений.

Доказана возможность построения геометрической интерпретации решения системы дифференциальных уравнений, обобщающей уравнение *sine-Gordon*, с помощью поверхности отрицательной кривизны в E^3, имеющей особенности.

Указан общий алгоритм построения геометрической интерпретации решения уравнения *sine-Gordon* (являющегося важным модельным уравнением математической физики) с помощью области на двумерном римановом многообразии постоянной отрицательной кривизны.

Получен ряд новых фактов о существовании решения и поведении характеристик некоторых систем квазилинейных уравнений, а также о погружениях в E^3 некомпактных областей на многообразиях типа Л.

В частности, указан новый класс выпуклых некомпактных областей на плоскости Лобачевского (содержащий области, граница которых в интерпретации Пуанкаре касается абсолюта более чем в двух точках с бесконечным порядком касания), допускающих регулярное изометрическое погружение в E^3. Доказательство погружаемости сводится к доказательству теоремы существования решения одной гиперболической системы квазилинейных уравнений.

Доказана невозможность осуществления некоторых специальных способов расположения характеристик рассматриваемых систем квазилинейных уравнений. Полученные результаты позволяют делать заключения о характере областей определенности начальных данных при решении задачи Коши для рассматриваемых систем.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на семинаре по геометрии "в целом" (МГУ, 1991, 1993, 1994), на Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам геометрии и анализа (1994, Абрау-Дюрсо), на кафедре математики физического факультета МГУ (1994), на чебышевских чтениях (МГУ, 1994).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано четыре работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит 120 страниц и состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Содержание диссертации.

Во введении поставлены рассматриваемые в диссертации вопросы, обоснована их актуальность, кратко изложены результаты по главам.

В первой главе дан литературный обзор результатов по теории поверхностей, необходимых для изложения основного материала, указано место рассматриваемых вопросов в общей проблематике современной теории поверхностей и математической физики.

Во второй главе методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются изометрические погружения в E^4 метрик вращения на сфере и плоскости в виде поверхностей вращения, и их обобщений.

На плоскости (R^2) рассматривается область D, где D – один из объектов: R^2; $R^2 \setminus \{O\}$ (O – начало координат); открытый круг K с центром в O; $K \setminus \{O\}$; открытое кольцо с центром в O (либо универсальная накрывающая одного из двух последних объектов). Под метрикой вращения в D понимается метрика, линейный элемент которой в полярных координатах (u,t) имеет вид:

$$ds^2 = g(u) \cdot \left[du^2 + u^2 \cdot dt^2\right]. \tag{1}$$

Под метрикой вращения на сфере (S^2) понимается метрика, линейный элемент которой в стереографической проекции в полярных координатах имеет вид (1). Полагается, что кривизна метрики на S^2 отрицательна в полюсах O_1 и O_2 стереографической проекции.

Под погружением в виде поверхности вращения, понимается погружение F, определяемое формулами:

$$\begin{aligned} x^1(u,t) &= r_1(u)\cos\left[\gamma_1 t + f_1(u)\right] \\ x^2(u,t) &= r_1(u)\sin\left[\gamma_1 t + f_1(u)\right] \\ x^3(u,t) &= r_2(u)\cos\left[\gamma_2 t + f_2(u)\right] \\ x^4(u)t) &= r_2(u)\sin\left[\gamma_2 t + f_2(u)\right], \end{aligned} \tag{2}$$

где $r_1(u) \geqslant 0$, $r_2(u) \geqslant 0$, γ_1 и γ_2 – фиксированные числа.

Для каждой метрики вращения вводится функция:

$$\alpha(u) = \frac{ug'(u)}{2g(u)}.$$

поведение которой, в частности, связано с распределением знаков кривизны метрики. Доказано следующее утверждение I.

I) 1) Метрика вращения на S^2 с отрицательной кривизной в полюсах O_1 и O_2 допускает изометрическое погружение в E^4 в виде поверхности вращения в классе $C^{(1,1)}(S^2)\cap C^2(S^2\setminus\{O_1,O_2\})$.

2) В классе $C^2(S^2)$ необходимым условием существования погружения в виде поверхности вращения является требование:

$$(\alpha + 1)^2 \leqslant 4,$$

а достаточным: $$(\alpha + 1)^2 < 4.$$

Утверждение (I) легко переносится на метрики в D, если $D=R^2$, или $D=K$, с отрицательной кривизной в O.

Для метрик в D, невырожденным погружением, обобщающим погружение в виде поверхности вращения, назовем погружение F, определяемое формулами:

$$\begin{aligned} x^1(u,t) &= r(u)\cos(\gamma(u)t + f(u)) \\ x^2(u,t) &= r(u)\sin(\gamma(u)t + f(u)) \\ x^3(u,t) &= \psi_1(u,t) \\ x^4(u,t) &= \psi_2(u,t), \end{aligned} \tag{3}$$

где: $r(u)\geqslant 0$, $\gamma(u)$ - кусочно-постоянная функция, квадратичная форма $d\psi_1^2 + d\psi_2^2$ невырождена.

Справедливо следующее утверждение (II).

II) Если существует такая точка u_* (м.б. $u_*=+\infty$), что $\alpha(u)\to+\infty$ при $u\to u_*$, то не существует невырожденного погружения $F\in C^3(D)$ вида (3) заданной в D метрики вращения в E^4.

Погружение F: $D\to E^4$, $F\in C^1(D)$ назовем погружением в виде обобщенной поверхности вращения, если оно определяется формулами вида (2), где γ_1 и γ_2 - кусочно - постоянные функции u.

Справедливо следующее утверждение (III).

III) В точках разрыва функций $\gamma_1(u)$ и $\gamma_2(u)$ производная функции $\alpha(u)$ удовлетворяет условию:

$$\alpha'(u)\cdot\left[\alpha(u)+1\right]=0. \tag{4}$$

<u>В третьей главе</u> рассматриваются регулярные изометрические погружения в E^3 двумерных метрик отрицательной кривизны и свойства возникающих в связи с этими погружениями дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Первый параграф третьей главы содержит некоторые необходимые определения.

Пусть B - открытый круг на R^2 единичного радиуса с центром в начале координат ,в B задана риманова метрика $G_{\lambda\mu}\in C^4(B)$ с гауссовой кривизной $K<0$, $(B,G_{\lambda\mu})$ - полное пространство.

Предположим, что найдется такое число $q\geq 0$, что:

$$\left|\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{-K}}\right|\leqslant q \tag{5}$$

(модуль понимается в смысле метрики $G_{\lambda\mu}$).

Рассмотрим на B область A, изометрически погруженную в E^3 с помощью отображения $F\colon B\to E^3$, $F\in C^5(A)$. На множестве A определены два гладких поля единичных асимптотических векторов T^λ_1, T^λ_2. В каждой точке векторы T^λ_1 и T^λ_2 линейно независимы . Интегральную кривую $l_\alpha(x)$ поля T^λ_α, $\alpha=1,2$, проходящую через точку x называют асимптотической кривой. Поля T^λ_1, T^λ_2 удовлетворяют системе (6):

$$L_\alpha T^\lambda_{3-\alpha}=(\varepsilon_{\beta\gamma}T^\beta_\alpha T^\gamma_{3-\alpha})\cdot\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \lambda}T^\mu_{3-\alpha}\cdot L_{3-\alpha}Q, \tag{6}$$
$$\lambda,\alpha=1,2,$$

где: $L_\alpha=T^\mu_\alpha\nabla_\mu$, $\alpha=1,2$; ∇_μ - ковариантная производная; $\varepsilon_{\lambda\mu}$ - дискриминантный тензор; $Q=\frac{1}{2}\ln\sqrt{-K}$.

Если существуют поля T^λ_1 и T^λ_2, удовлетворяющие (6), такие, что в каждой точке векторы T^λ_1 и T^λ_2 линейно независимы и имеют единичную длину, то существует и изометрическое погружение F.

Кривые l_1, l_2 - характеристики системы (6), а также возникающей в теории поверхностей отрицательной кривизны системы уравнений в римановых инвариантах:

$$\begin{aligned} r_x + sr_y &= P(x,y,r,s) \\ s_x + rs_y &= P(x,y,s,r), \end{aligned} \tag{7}$$

где P - полином третьей степени от r и s, коэффициенты которого есть линейные комбинации символов Кристоффеля и Q_x, Q_y. Если существует решение (7), удовлетворяющее условию $r \neq s$, то существует и погружение F. Системы уравнений вида (7) возникают также в газовой динамике (разумеется с другой правой частью).

Во втором параграфе доказывается теорема, характеризующая поведение кривых l_1 и l_2. Рассмотрим множество $D \subseteq B$ такое, что ∂D - простая замкнутая кривая, имеющая одну общую точку N с ∂B. Пусть $\bar{D} \backslash \{N\} \subseteq A$, где A - область, погруженная в E^3.

Справедливо утверждение (IV).

IV) Если $q \leqslant \sqrt{2}$ (q - число из условия 5), то описанное выше погружение F не может удовлетворять следующему условию (8):

можно указать такой отрезок I кривой $\partial D \backslash \{N\}$ конечной (в метрике $G_{\lambda\mu}$) длины, что для каждой точки $x \in D$ каждая из кривых $l_1(x)$ и $l_2(x)$ имеет с I общую точку P_1 и P_2, причем отрезок кривой $l_1(x)$ ($l_2(x)$), соединяющий P_1 и x (P_2 и x) целиком лежит в $\bar{D} \backslash \{N\}$.

Рассмотрим задачу Коши для системы (6) в $\bar{D} \backslash \{N\}$ с начальными данными на некотором отрезке I кривой $\partial D \backslash \{N\}$ и условием, что векторные поля T_1^λ и T_2^λ состоят из единичных линейно независимых векторов . Если ее решать методом характеристик в сочетании с методом малого параметра, то естественно ожидать, что решение будет допускать продолжение на некоторую окрестность $\bar{D} \backslash \{N\}$.

Сформулированная теорема показывает, что D не может быть областью определенности отрезка I.

Отметим, что требование линейной независимости T_1^λ и T_2^λ, или требование $r \neq s$ (узкая гиперболичность (7) на решении (r,s)) весьма существенно (требование единичности T_1^λ и T_2^λ не принципиально, т.к. длина T_1^λ и T_2^λ сохраняется вдоль характеристик l_2 и l_1 и определяется начальными данными). Очевидно, если в некоторой точке T_1^λ и T_2^λ линейно зависимы, то без ограничения общности можно считать, что $T_1^\lambda = T_2^\lambda$.

Если $T_1^\lambda = T_2^\lambda$, $r=s$, то группа уравнений (6), соответствующая $\alpha=1$, совпадает с группой уравнений (6), соответствующей $\alpha=2$, а первое из уравнений (7) совпадает со вторым. В третьем параграфе для достаточно регулярных решений (впрочем требования к регулярности максимально снижены) (7) доказывается, что если в некоторой точке x: $r=s$, то $l_1(x)=l_2(x)$ и вдоль этих кривых $r=s$, т.о. выполнение свойства узкой гиперболичности определяется начальными данными (для достаточно регулярного решения). Аналогичное свойство имеет место для широкого класса систем, поведение которых похоже на поведение (6) при $T_1^\lambda = T_2^\lambda$ и (7) при $r=s$ (к этому классу, кстати, относятся некоторые уравнения газовой динамики).

В четвертой главе изучаются, с геометрической точки зрения, свойства системы уранений, обобщающей широко используемое в математической физике уравнение *sine-Gordon*.

В первом параграфе обсуждается уравнение *sine-Gordon* и его роль в теории поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Уравнение *sine-Gordon* можно записать в виде:

$$Z_{xy} = \sin(Z), \tag{9}$$

здесь Z – угол между асимптотическими кривыми на поверхности с постоянной отрицательной кривизной -1, а x,y - асимптотические координаты.

В том же параграфе приводится выведенная Н.В.Ефимовым и Э.Г.Позняком система уравнений, обобщающая уравнение *sine-Gordon* на случай поверхности переменной отрицательной кривизны. Система состоит из трех уравнений и записана в асимптотических координатах.

$$Z_{xy} - \left[\frac{g}{e}\cdot\sin(Z)\cdot Q_x\right]_x - \left[\frac{e}{g}\cdot\sin(Z)\cdot Q_y\right]_y = -Keg\sin(Z) \qquad (a)$$

$$e_y=-(eQ_y+\cos(Z)gQ_x) \qquad (b) \qquad (10)$$

$$g_x=-(gQ_x+\cos(Z)eQ_y). \qquad (c)$$

Здесь Z - угол между асимптотическими кривыми на поверхности отрицательной кривизны, K - гауссова кривизна поверхности, $Q=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{-K})$, $|e|$ и $|g|$ - длины асимптотических векторов.

Уравнение (10,a) (как и уравнение (9), в случае $K\equiv-1$) эквивалентно, при условии $Z\neq\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, формуле Гаусса, выражающей равенство внешней кривизны поверхности и кривизны метрики (имеется в виду, что в формулу Гаусса подставлено выражение для кривизны метрики). Уравнения (10,b) и (10,c) эквивалентны уравнениям Петерсона - Кодацци.

В том же параграфе система (10) приведена к системе уравнений в ковариантной форме (11):

$$\frac{1}{2}\cdot\left\{L_1L_2 + L_2L_2\right\}Z = -K\sin(Z) + L_1\left[\sin(Z)L_1Q\right] + L_2\left[\sin(Z)L_2Q\right] +$$
$$+ \left[L_1Q + \cos(Z)L_2Q\right]\cdot\left[\frac{L_2Z}{2} - \sin(Z)L_1Q\right] +$$
$$+ \left[L_2Q + \cos(Z)L_1Q\right]\cdot\left[\frac{L_1Z}{2} - \sin(Z)L_2Q\right]; \qquad (11,a)$$

$$T_1^\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu}(T_2^\lambda) - T_2^\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu}(T_1^\lambda) = \left[L_1 Q + \cos(Z) L_2 Q\right] T_2^\lambda -$$

$$- \left[L_2 Q + \cos(Z) L_1 Q\right] T_1^\lambda; \quad \lambda=1,2. \qquad (11,b)$$

Здесь Z - угол между асимптотическими кривыми на поверхности отрицательной кривизны; T_1^λ, T_2^λ - единичные асимптотические векторы в касательном пространстве к погружаемому многообразию; $L_\alpha = T_\alpha^\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\alpha=1,2$; K - кривизна поверхности; $Q = \frac{1}{2} \cdot \ln\left[\sqrt{-K}\right]$.

Уравнение $(11,a)$ эквивалентно уравнению $(10,a)$, а система из двух уравнений $(11,b)$ эквивалентна системе $(10,b,c)$ (в асимптотических кооординатах).

Система (11), при условии $Z \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, эквивалентна системе (6), взятой вместе с формулой Гаусса.

В параграфе 2 главы 3 система (11) рассматривается безотносительно к ее происхождению в теории поверхностей отрицательной кривизны. Требование $Z \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ отброшено; Q - некоторая функция, $K = -\exp\{4Q\}$; T_1^λ, T_2^λ - произвольные гладкие поля линейно независимых векторов.

Пусть P_λ^α - компоненты матрицы, обратной к матрице T_α^λ. По заданному решению $\langle Z, T_1^\lambda, T_2^\lambda \rangle$ системы (11) построим квадратичную форму (12):

$$G_{\lambda\mu} = P_\lambda^1 P_\mu^1 + \cos(Z)\left[P_\lambda^1 P_\mu^2 + P_\mu^1 P_\lambda^2\right] + P_\lambda^2 P_\mu^2. \qquad (12)$$

Обозначим: $Z_\alpha = (-1)^{3-\alpha} \cdot Z + 2\pi n_\alpha(x)$, где $\alpha=1,2$, $n_\alpha(x)$ - произвольная функция с целочисленными значениями.

Обозначим: $k_1^{(\alpha)} = -(-1)^{3-\alpha} \cdot L_\alpha Z + \sin(Z_\alpha) L_{3-\alpha} Q$, $k_2^{(\alpha)} + \sigma(-1)^\alpha \cdot \exp\{2Q\}$, где $\sigma \equiv \mathrm{const}$, $|\sigma|=1$.

Для произвольно фиксированного $\alpha \in \{1,2\}$ рассматривается следующая система уравнений (13):

$$L_\alpha X^k = \eta_{1(\alpha)}^k \qquad (13,a)$$

$$L_{3-\alpha}X^{\mathbf{k}} = \cos(Z_\alpha)\cdot\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)} + \sin(Z_\alpha)\cdot\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)} \tag{13,b}$$

$$L_\alpha\begin{bmatrix}\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)}\\ \eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1^{(\alpha)}\eta_{2(\alpha)}\\ -k_1^{(\alpha)}\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)} + k_2^{(\alpha)}\eta^{\mathbf{k}}\end{bmatrix} \tag{13,c}$$

$$L_{3-\alpha}\begin{bmatrix}\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)}\\ \eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)}\sin(Z_\alpha)L_\alpha Q + k_2^{(\alpha)}\sin(Z_\alpha)\eta^{\mathbf{k}}_3\\ \eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)}\sin(Z_\alpha)L_\alpha Q - k_2^{(\alpha)}\cos(Z_\alpha)\eta^{\mathbf{k}}_3\end{bmatrix} \tag{13,d}$$

$$L_\alpha\eta^{\mathbf{k}}_3 = -k_2^{(\alpha)}\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)} \tag{13,f}$$

$$L_{3-\alpha}\eta^{\mathbf{k}}_3 = -k_2^{(3-\alpha)}\left[\cos(Z_\alpha)\cdot\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)} + \sin(Z_\alpha)\cdot\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)}\right], \tag{13,g}$$

$\mathbf{k} = \overline{1,3}$ (по α нет суммирования);

относительно функций $X^{\mathbf{k}}$, $\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)}$, $\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)}$, $\eta^{\mathbf{k}}_3$, $\mathbf{k}=\overline{1,3}$ с начальными данными (14) в некоторой точке x_0:

$$X^{\mathbf{k}}(x_0)=X^{\mathbf{k}}_0,\ \eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)}(x_0)=\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)0},\ \eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)}(x_0)=\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)0},\ \eta^{\mathbf{k}}_3(x_0)=\eta^{\mathbf{k}}_{30}, \tag{14}$$

где $\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)0}$, $\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)0}$, $\eta^{\mathbf{k}}_{30}$ – правый отронормированный базис в E^3.

Справедливо утверждение (V).

V) Система (13) с начальными данными (14) имеет единственное решение (при условии выполнения (11), (13) вполне интегрируема), причем функции $X^{\mathbf{k}}(x)$ определяют погружение формы (12) в E^3, для которого векторы T_1^λ, T_2^λ – асимптотические.

Таким образом, каждому решению (11) сопоставлена поверхность в E^3; в регулярных точках эта поверхность имеет кривизну $K = -\exp\{4Q\}$; точки на поверхности, соответствующие точкам, в которых $Z = \pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, вообще говоря особые. Система (13) имеет ясный геометрический смысл: вектор $\eta^{\mathbf{k}}_{1(\alpha)}$ – касательный вектор к асимптотической кривой (на поверхности, а не на многообразии) семейства α; $\eta^{\mathbf{k}}_{2(\alpha)}$ – нормаль; $\eta^{\mathbf{k}}_3$ – бинормаль; уравнения $(13,c,f)$ есть формулы Френе для асимптотических семейства α; уравнения $(13,d,g)$ неявно содержат формулы Френе для асимптотических семейства 3-α. Полученная поверхность как бы склеена из асимптотических, восстановленных по кривизне $k_1^{(\alpha)}$ и кручению $k_2^{(\alpha)}$, а доказательство утверждения (V) аналогично доказательству теоремы Э.Г.Позняка о геометрической интерпретации решений уравнения *sine-Gordon*. С другой стороны векторы $\langle\eta^k_{1(\alpha)}, \eta^k_{2(\alpha)}, \eta^k_3\rangle$ образуют сопровождающий репер поверхности; уравнения (13) играют роль деривационных формул; уравнения (11) подобны система Гаусса и Петерсона - Кодацци; доказательство утверждения (V) с этой точки зрения аналогично доказательству классической теоремы Боннэ. Таким образом, можно сказать, что в главе 4 рассматривается задача изометрического погружения для метрик отрицательной кривизны, обобщенная так, чтобы допустить поверхности с особенностями.

В третьем параграфе главы 4 рассматривается возможность интерпретации решений системы (11) с помощью областей на двумерных многообразиях отрицательной кривизны. Рассмотрение производится на основе той же методики Э.Г.Позняка: восстановление аимптотических по заданным кривизнам. Однако полученная система уравнений не является, вообще говоря, вполне интегрируемой. Полная интегрируемость достигается в важном частном случае постоянной кривизны. В последнем случае мы получаем строгое доказательство того известного факта, что каждому решению уравнения *sine-Gordon* соответствует некоторая область на плоскости Лобачевского, возможно накрываемая несколько раз, и метод построения упомянутых областей.

В четвертом параграфе результаты параграфа 3 применены к задаче вычисления геодезической кривизны кривой в области изменения параметров системы (11). Ранее эта задача рассматривалась только для случая постоянной кривизны в асимптотических координатах и для кривых специального вида.

Получены обобщения известных формул для геодезической кривизны.

В пятой главе указан новый класс выпуклых областей плоскости Лобачевского (граница которых в интерпретации Пуанкаре имеет более двух точек на абсолюте с бесконечным порядком касания), допускающих регулярное изометрическое погружение в E^3.

Рассмотрим интерпретацию плоскости Лобачевского в круге Пуанкаре B. Введем на ∂B параметр функциями $\xi^{\lambda}(t)\in C(R)$, $\lambda=1,2$. с периодом 1. Рассмотрим разбиения $[0,1]$ последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $a_n<b_n\leqslant a_{n+1}$:

I $\{a_n\}_{n=1}^{N}$, $\{b_n\}_{n=1}^{N}$, $N\geqslant 2$, $a_1=0$ (дополнительно обозначаем: $a_{N+1}=a_1+1$, и считаем, что если $N=2$, то либо $b_1\neq a_2$, либо $b_2\neq a_3$);

II $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $a_1=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$;

III $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.

Соединим $\xi(a_n)$ и $\xi(b_n)$ геодезической l_n, тогда l_n, дуги $\xi([b_n,a_{n+1}])$, и $\{\xi(0)\}$, ограничивают множество G . Для каждого n выберем $M_n\in\xi([b_n,a_{n+1}])$.

Фиксируем $\mathbf{N}$: $\mathbf{N}\in\xi((a_n,b_n])$ при некотором n в случае (I) ($\mathbf{N}=\xi(b_n)$ только если $b_n = a_{n+1}$) и $\mathbf{N}=\xi(0)$ в случаях II и III.

Рассмотрим открытые орикруги O и O_*: $\mathbf{N}\in\bar{O}$, $O_*\subset O$, $\rho(\partial O\setminus\{\mathbf{N}\},\partial O_*\setminus\{\mathbf{N}\}) = d$, где $d = \ln\left\{\frac{5}{4}\operatorname{ch}\left[\frac{5}{4}\right]\right\}$ (ρ вычисляется в метрике Лобачевского). Проведем геодезическую L_n, соединяющую $\mathbf{N}$ и M_n, обозначим: $P_n = L_n\cap\partial O$, $P_n^* = L_n\cap\partial O_*$. Отметим на ∂O (∂O_*) точки A_n (A_n^*) и B_n (B_n^*) так, что длина дуги $[P_n,A_n]$, $[P_n,B_n]$ ($[P_n^*,A_n^*]$, $[P_n^*,B_n^*]$) равна $D = \dfrac{1}{\operatorname{sh}\left[\frac{5}{4}\right]}$.

Определение. Если для каждого n: l_n и l_{n+1} пересекают дуги $[A_n,B_n]$ и $[A_n^*,B_n^*]$ кривых $\partial O\setminus\{\mathbf{N}\}$ и $\partial O_*\setminus\{\mathbf{N}\}$, то будем говорить, что O правильно расположен относительно G и $\{M_n\}$.

Теорема: пусть $L\subset G$ - простая замкнутая кривая, ограничивающая множество G_*, $L\cap\partial B = \{M_n\}$. Пусть для G и $\{M_n\}$ можно указать правильно расположенный относительно них орикруг O, тогда G_* можно C^3 - гладко изометрически погрузить в E^3.

Доказательство проводится по следующему плану: строится орикруг O_ε: $O_*\subset O_\varepsilon\subset O$. Орикруг O_ε отсекает от G_* "рукава" уходящие на бесконечность. Задача состоит в том, чтобы построить в G_* решение системы уравнений Гаусса и Петерсона - Кодацци (или системы(6)). Т.к. каждый орикруг стандартным образом аналитически погружается в E^3, то $G_*\cap O_\varepsilon$ решение системы уравнений (6) заведомо существует. В упомянутых выше "рукавах" решение строится с помощью системы (7) в римановых инвариантах. В достаточно удаленной части "рукавов" успешно используется метод малого параметра Э.Г.Позняка в модификации Д.В.Туницкого. Основная задача: построить решение в прилегающей к O_ε части "рукавов" с обеспечением гладкой сшивки с уже имеющимся решением в O_ε и с решением в достаточно удаленной части "рукавов". Последняя задача решается с учетом специального вида, который принимают уравнения (7) в полугеодезической системе координат на плоскости Лобачевского, и числовых значений d и D.

В заключении кратко перечислены основные результаты диссертации.

I) В диссертации рассматриваются геометрические свойства уравнения *sine-Gordon*, а также системы (11), обобщающей упомянутое уравнение на случай переменной кривизны.

Для системы (11) доказана теорема, обобщающая известную теорему Э.Г.Позняка о геометрической интерпретации решений уравнения *sine-Gordon*.

Для уравнения *sine-Gordon* обоснован алгоритм, позволяющий каждому решению этого уравнения сопоставить область на полном двумерном ориентируемом многообразии постоянной отрицательной кривизны (вообще говоря накрываемую несколько раз).

Полученные результаты использованы для исследования внутренней геометрии поверхностей отрицательной кривизны в E^3.

II) На основе использования геометрических методов в диссертации получены новые утверждения о свойствах гиперболических систем квазилинейных уравнений.

Доказана невозможность осуществления некоторых специальных способов расположения (в области существования решения) характеристик систем (6) (система уравнений асимптотических сетей), (7) (основная система уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах). Полученные результаты позволяют делать утверждения о характере областей определенности начальных данных при решении задач Коши для упомянутых систем.

Указаны условия, при которых некоторые гиперболические системы уравнений являются, на фиксированном решении, узко-гиперболическими.

Доказана одна теорема существования решения для системы (6).

III) На основе методов математической физики получены новые результаты в теории изометрических погружений двумерных римановых метрик в евклидовы пространства.

Найдены необходимые и достаточные условия существования изометрического погружения метрики вращения на сфере и плоскости в E^4 в виде поверхности вращения и ее обобщений.

Найден новый класс выпуклых областей плоскости Лобачевского, допускающих регулярное изометрическое погружение в E^3, содержащий области, граница которых в интерпретации Пуанкаре касается абсолюта более чем в двух точках, с бесконечным порядком касания.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации.

1. Бадьин А.В. "О восстановлении метрики вращения на сфере по заданной кривизне" деп. в ВИНИТИ, рук. № 1980-В91 от 15.05.1991.

2. Бадьин А.В. "Изометрические погружения заданных на сфере метрик вращения в виде поверхностей вращения в E^4", Вестник МГУ, сер.3 (физика, астрономия), 1992, Т.33, №2, стр. 24-29.

3. Бадьин А.В. "Изометрические погружения двумерных римановых метрик отрицательной кривизны в E^3", Вестник МГУ, сер.1 (математика, механика), 1994, №2, стр. 47-56.

4. Бадьин А.В. "Об изометрическом погружении в E^3 области на плоскости Лобачевского с границей, имеющей более двух точек на абсолюте", в книге тез. док. Всероссийской школы-коллоквиума по стохастическим методам геометрии и анализа (Абрау - Дюрсо, 1994), стр. 10-11.

Типография. ЦНИЭИуголь. Тираж 100 экз. Заказ № 176