

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



Гончаров Иннокентий Александрович

**Моделирование влияния микроструктурных
механизмов на поведение материалов при
сверхпластическом деформировании**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Белякова Татьяна Александровна

Москва – 2021

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Структурно-механические модели	14
1.1. Постановка задачи	14
1.2. Анализ соотношений	17
1.3. Численное моделирование	27
1.4. Заключение	35
Глава 2. Определение значений параметров в моделях сверхпла- стичности	37
2.1. Объект исследования	37
2.2. Обзор литературы	40
2.3. Идентификация параметров модели	44
2.4. Анализ алгоритма	63
2.5. Заключение	80
Глава 3. Моделирование сложного нагружения: формовка листо- вых материалов давлением	83
3.1. Введение	83
3.2. Постановка задачи и возникающие проблемы	86
3.3. Обзор литературы	89
3.4. Система уравнений состояния оболочки	94
3.5. Результаты моделирования	99
3.6. Заключение	112
Глава 4. Измельчение зёрен	114
4.1. Постановка задачи	114
4.2. Моделирование деформирования с учётом измельчения зёрен	120

4.3. Модель с неполным измельчением	129
4.4. Результаты и обсуждение	134
4.5. Заключение	139
Заключение	141
Список литературы	143
Приложение А. Полные результаты анализа сигмоидальности кривых, получаемых по модели Бэкофена	153

Введение

Способность поликристаллических материалов при определённых температурно-скоростных условиях испытания проявлять аномально высокое удлинение — в сотни и даже тысячи процентов — при относительно низких напряжениях течения принято называть сверхпластичностью [36; 53].

Явление сверхпластичности как механическое свойство материалов впервые экспериментально исследовал Треска в начале XIX века, а классической работой, целиком посвящённой данному явлению и соответствующим микроструктурным механизмам, считается вышедшая в 1934 году работа С.Е. Pearson [38]. Сам термин «сверхпластичность» предложили в 1945 году советские учёные А.А. Бочвар и З.А. Свидерская [51]. Современное состояние теории отражено в монографиях и обзорах [27; 37; 52; 53; 65; 68; 69]. На становление российской школы сверхпластичности большое влияние оказали М.В. Грабский, О.М. Смирнов, О.А. Кайбышев, Р.А. Васин, Ф.У. Еникеев и другие.

Границы внешних условий среды и внутреннего состояния материала, в которых наблюдается режим сверхпластичности, достаточно расплывчаты, поэтому невозможно точно сказать, когда процесс деформирования материала становится сверхпластическим и в какой момент перестаёт быть таковым [52]. Так, считается, что для металлов необходимы температура порядка $0.4 T_m$ К (T_m — температура плавления), скорость деформации в пределах 10^{-5} – 10^{-2} с $^{-1}$ и при этом материал должен обладать микроструктурой со средним размером зерна не более 10 мкм. Для керамик допустимый размер зёрен существенно ниже, порядка 1 мкм [36]. Материаловеды тратят большие усилия на создание исходных материалов с как можно меньшим размером зерна. В некоторых случаях речь идёт о десятках нанометров, например, в так называемой ультра-мелкозернистой (УМЗ) структуре [65].

Находящийся в состоянии сверхпластичности материал обладает высокой скоростной чувствительностью. Широко известно, что кривая зависимости на-

пряжения от скорости деформации, получаемая из экспериментов на одноосное растяжение, в случае сверхпластичности имеет характерную форму при изображении в логарифмических координатах [53]. Особенностью этой формы является наличие точки перегиба, соответствующей максимуму первой производной (кривые такого вида принято называть сигмоидальными). Опыты показывают, что данный перегиб с большей или меньшей степенью выраженности наблюдается в большинстве случаев сверхпластического растяжения материала [41]. Определение его положения весьма важно для изучения сверхпластичности, поскольку оно характеризует оптимальную скорость деформации для рассматриваемого материала.

При сверхпластическом деформировании в материале устанавливается режим совместного действия ряда микроструктурных механизмов, таких как диффузионная ползучесть, дислокационное скольжение, зернограничное проскальзывание, рекристаллизация [36; 53]. Считается, что основным механизмом сверхпластичности является зернограничное проскальзывание, однако возможность получения больших деформаций до разрушения образца связывается именно с действием комплекса механизмов, при котором дефекты внутренней структуры материала, порождаемые одним механизмом, поглощаются (заращаются) благодаря действию других.

Таким образом, сверхпластичность — процесс, существенно зависящий от структурно-механического состояния деформируемого материала. Упомянутый режим совместного действия микроструктурных механизмов в процессе деформирования приводит как к росту зёрен, так и к их измельчению в результате образования новых внутризёренных границ [18; 35]. Вследствие этого, в ряде исследовательских работ и практических приложений важным объектом изучения и контроля является именно микроструктура. В этой области, как правило, исследуется характер распределения зёрен материала по размерам, его влияние на процесс деформирования и изменение (эволюция) в ходе этого процесса.

Представленная диссертационная работа посвящена вопросам аналитиче-

ского и численного моделирования деформирования в режиме сверхпластичности, в том числе, но не исчерпываясь, — описанию сигмоидальных кривых сверхпластичности, анализу феноменологических определяющих соотношений сверхпластичности и определению значений для входящих в них параметров, влиянию учёта микроструктурных механизмов при моделировании деформирования на получаемые макропараметры процесса и образца. Более подробный обзор литературы по конкретным проблемам, рассматриваемым в работе, приведён в начале каждой главы.

Актуальность темы исследования.

Актуальность работы обусловлена высоким научным и техническим интересом к явлению сверхпластичности. На сегодняшний день проделано большое количество исследований, посвящённых как общим аспектам сверхпластического деформирования, так и вопросам его практического применения.

Изучением сверхпластичности занимаются многие научные группы как в нашей стране, так за рубежом. В городе Уфе базируется Институт проблем сверхпластичности металлов. Кафедры и лаборатории, проводящие исследования по сверхпластичности, есть в ряде российских ВУЗов — Пермском национальном исследовательском политехническом университете, Уфимском государственном нефтяном техническом университете, Национальном исследовательском технологическом университете «МИСиС» и других.

Сверхпластическое деформирование получило широкое распространение в технологических процессах обработки материалов давлением, таких как прокатка, ковка, объёмная и листовая штамповка [59; 61; 66; 68]. В настоящее время сверхпластичность применяется в аэрокосмической, автомобильной и других сферах промышленности, в основном при обработке сплавов на основе титана [13; 22; 42], алюминия [7; 25; 29] и некоторых других металлов, а также интерметаллических соединений и керамик [36; 65].

Цели и задачи работы.

При проведении исследований автор преследовал следующие цели:

- Построить численное приближение для данных из экспериментов по сверхпластическому деформированию металлов с помощью известных моделей разного типа.
- Проанализировать возникающие при этом трудности, предложить пути их решения.
- Описать типы и количество экспериментов, необходимых для определения параметров моделей, и сформулировать методику проверки устойчивости алгоритма определения параметров к шумам в исходных данных и предсказательной силы получаемых моделей.
- Оценить влияние включения в определяющие соотношения параметров эволюции микроструктуры и потребность в использовании таких параметров при моделировании макроскопических процессов сверхпластического деформирования.
- Предложить модели, учитывающие характерные особенности экспериментов в режиме сверхпластичности, связанные с происходящей в процессе деформирования эволюцией микроструктуры (в частности, измельчением зёрен).

Научная новизна работы.

В диссертации изложены результаты, полученные автором лично и не публиковавшиеся ранее другими авторами:

- Теоретическое доказательство невозможности описания сигмоидальной кривой с помощью реологической модели, являющейся комбинацией произвольного количества нелинейно-вязких элементов, соединённых только параллельно или только последовательно.

- Теоретический и численный анализ формы кривых, описывающихся реологической моделью из трёх нелинейно-вязких элементов со смешанным типом соединения (известной также как модель Бэкофена).
- Формулировка единой методики исследования и верификации алгоритмов поиска значений для параметров в одномерных феноменологических определяющих соотношениях сверхпластичности и получаемых с их помощью моделей.
- Описание влияния эволюции микроструктуры на неоднородность истончения оболочки при моделировании формовки полусферы давлением в режиме сверхпластичности.
- Модель учёта измельчения зёрен при моделировании сверхпластического деформирования, основанная на одновременном распаде зёрен одного размера.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Полученные в работе результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Классификация пространства параметров модели Бэкофена позволяет конкретизировать область применимости данной модели и сузить множество возможных значений для идентификации модели на основе экспериментальных данных. При интерпретации модели как описания взаимодействия микроструктурных механизмов в материале, полученная классификация позволяет соотнести механизмы между собой и оценить область действия и параметры каждого из них.

Разработанная методика идентификации и верификации моделей может применяться для поиска определяющих соотношений, более качественно описывающих поведение материалов в состоянии сверхпластичности. Такие соотношения необходимы, в частности, для уточнения оценки будущих свойств изделий из современных конструкционных материалов и перспективных сплавов в ходе предварительного моделирования их сверхпластической формовки.

С помощью предложенной модели измельчения зёрен можно улучшить описание эволюции микроструктуры, что позволяет учитывать в технологических расчётах большее количество наблюдаемых в экспериментах эффектов, например, разупрочнение материала в результате рекристаллизации.

Методология и методы исследования.

В главе 1 доказательство невозможности описания сигмоидальной кривой с помощью однотипных соединений нелинейно-вязких элементов основано на методах математического анализа и методе индукции.

Классификация пространства параметров модели со смешанным типом соединения (модели Бэкофена) выполнена путём упрощения уравнений состояния модели методами математического анализа и теории размерностей. Для численного решения уравнений состояния модели использована программа на языке C++, в которой применяются метод половинного деления и метод Ньютона.

Моделирование сверхпластического одноосного растяжения материалов в главе 2 основано на определяющих соотношениях сверхпластичности, выраженных в форме математических уравнений с феноменологическими параметрами в духе Ю.Н. Работнова. Используются соотношения из литературы, известные по работам F.P.E. Dunne, J. Lin [25; 29; 31; 46], О.И. Были, Р.А. Васина [52] и других.

Численное интегрирование системы уравнений, описывающей состояние материала, выполнено с помощью программы на языке Python с применением метода Рунге — Кутты. Поиск значений для параметров модели осуществлялся с помощью метода наименьших квадратов, минимизация функционала ошибки задействует алгоритмы Левенберга — Марквардта и численного дифференцирования. Реализация некоторых методов взята из распространённых библиотек для численных расчётов, таких как numpy, scipy, MINPACK.

При моделировании наложения шума на экспериментальные данные применён аппарат теории вероятностей: равномерная случайная величина, методы

вычисления математического ожидания, дисперсии.

Решение задачи о формовке листового материала давлением в главе 3 выполнено на основе методов математического анализа и классического аппарата механики деформируемого твёрдого тела. Уравнения равновесия материала записаны в рамках безмоментной теории оболочек. Численное моделирование формовки осуществлялось аналогично главе 2 с применением аппарата теории дифференциальных уравнений.

Моделирование измельчения зёрен в главе 4 выполнено с помощью пространственного в механике сверхпластичности подхода [4; 18; 35]. Работа с распределениями зёрен по размеру основана на методах математического и функционального анализа. Вычисление характеристик распределения затрагивает аппарат теории вероятностей. Численное интегрирование соотношений выполнено аналогично главе 2.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложенная модель измельчения зёрен, учитывающая неполное измельчение групп, качественно описывает наблюдающуюся в экспериментах эволюцию распределения зёрен, которую не удаётся описать при помощи рассмотренных известных моделей.
2. Предложенный алгоритм позволяет определять значения параметров в различных определяющих соотношениях сверхпластичности из рассмотренного класса, для верификации которых и оценки устойчивости алгоритма к шумам применимы разработанная методика и введённые метрики ошибки аппроксимации.
3. Определяющие соотношения, учитывающие эволюцию микроструктуры, позволяют решать краевые задачи о формовке мембраны давлением и более точно оценивать оптимальное соотношение размера зерна и скорости деформации, при которых неоднородность истончения минимальна.
4. Невозможность описания сигмоидальной кривой сверхпластичности од-

нотипной комбинацией нелинейно-вязких элементов доказана строго при любом их количестве и любых значениях их параметров.

5. Проведённый анализ модели Бэкофена и пространства её параметров позволяет классифицировать задаваемые моделью кривые по формальным типам.

Достоверность результатов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением в работе строгих математических методов из соответствующих разделов математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей; а также классических методов механики деформируемого твёрдого тела. Полученные результаты качественно подтверждаются при их сравнении с признанными результатами других авторов.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах:

- International conference “Materials science of the future: research, development, scientific training (MFS’2019)” (12–14 February 2019, Nizhni Novgorod, Lobachevsky University).
- 1st Russia-Japan Joint Workshop on Composite Materials (RJCM-1). October 31 – November 1, 2019. Lomonosov Moscow State University.
- XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС – 2019).
- Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: 14–23 апреля 2014 года; 15–25 апреля 2019 года; октябрь 2020 года.
- Научно-исследовательский семинар лаборатории упругости и пластичности НИИ механики МГУ (под руководством д.ф.-м.н., проф. Р.А. Васина).
- Научно-исследовательские семинары на кафедрах механико-математического факультета МГУ:

- семинар кафедры теории пластичности (под руководством д.ф.-м.н., проф., члена-корр. РАН Е.В. Ломакина);
- семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости (под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского);
- семинар имени Б.Е. Победри кафедры механики композитов (под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева);
- семинар кафедры газовой и волновой динамики (под руководством д.ф.-м.н., проф., академика РАН Р.И. Нигматулина).

Публикации.

Основные результаты диссертационного исследования представлены в **11** печатных работах [3; 20; 47–50; 54–58], в том числе в **4** публикациях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI [47; 50; 55; 57].

Личный вклад автора.

Постановка задач к главе 1 предложена Р.А. Васиным. Доказательство невозможности описания сигмоидальных кривых сверхпластичности однотипной комбинацией нелинейно-вязких элементов получено соискателем одновременно и независимо с А.В. Хохловым, что отражено в совместной публикации [50]. Классификация пространства параметров модели Бэкофена получена соискателем лично с применением разработанной им программы на языке C++ для численного решения уравнений модели.

Постановка задачи к главе 2 предложена Р.А. Васиным и научным руководителем соискателя Т.А. Беляковой. Методы исследования и идея предлагаемого алгоритма принадлежат соискателю. Проведение верификации моделей, а также разработка и применение методики оценки устойчивости алгоритма к шумам, выполнены соискателем самостоятельно с помощью авторской программы, реализованной в коде на языке Python.

Постановка задачи к главе 3 предложена Р.А. Васиным, расширена и дополнена Т.А. Беляковой. Все содержащиеся в главе результаты моделирования формовки и их анализ принадлежат соискателю.

Постановка задачи к главе 4 вдохновлена Т.А. Беляковой, но выбрана соискателем самостоятельно. Модель измельчения зёрен, учитывающая неполное измельчение групп, разработана лично соискателем. Идентификация модели и сравнение с экспериментальными данными также выполнены соискателем.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы и 1 приложения. Общий объём диссертации составляет **156** страниц, включая **39** рисунков и **12** таблиц. Список литературы содержит **70** наименований.

Благодарности.

Автор хотел бы посвятить свою работу памяти Рудольфа Алексеевича Васина, который познакомил его с темой сверхпластичности, предложил формулировки ряда задач и во многом определил направление исследований.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Татьяне Александровне Беляковой за поддержку при написании работы и кропотливое сопровождение на всём протяжении пути к её защите.

Также автор благодарит сотрудников Кафедры теории пластичности Механико-математического факультета МГУ за тёплую рабочую атмосферу, неоднократную помощь в организационных вопросах, полезные консультации и строгую, но конструктивную критику ранних версий его работы.

Кроме того, автор выражает благодарность коллективу Лаборатории упругости и пластичности НИИ механики МГУ и лично Андрею Владимировичу Хохлову за интерес к работе и большое количество ценных замечаний.

Глава 1

Структурно-механические модели

В настоящей главе используются результаты работ [47; 49; 50].

1.1. Постановка задачи

Исторически одним из распространённых способов описания поведения материалов являются структурно-механические (в частности, реологические) модели. Одномерная модель строится из набора параллельно и/или последовательно соединённых между собой базовых элементов с фиксированными свойствами, которые описываются небольшим количеством параметров. Широкий выбор базовых элементов и большое число возможных способов соединения позволяют получать модели с различными свойствами, в том числе существенно отличными от свойств исходных базовых элементов.

Структурно-механические модели являются удобным инструментом для построения корректных одномерных определяющих соотношений и в случае сверхпластичности. Поскольку при моделировании сверхпластического деформирования связь напряжений и деформаций должна отражать высокую скоростную чувствительность материала, традиционно в качестве базового элемента применяется степенной нелинейно-вязкий элемент, имеющий определяющее соотношение $\sigma = K\dot{\epsilon}^m$, где K и m — параметры элемента (константы), σ — напряжение, $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации (здесь и далее под напряжением понимается напряжение Коши, а под деформацией — логарифмическая деформация Генки). В частности, при $m = 1$ данное соотношение задаёт линейный вязкий элемент (ньютоновскую жидкость), широко применяемый в структурных реологических моделях, описывающих линейную вязкоупругость.

Как уже упоминалось во введении, характерной особенностью сверхпластического деформирования является наличие точки перегиба у зависимости σ

от $\dot{\epsilon}$, полученной из экспериментов на одноосное растяжение и изображённой в логарифмических координатах (такую форму кривой принято называть *сигмоидальной*). Производная зависимости в этих координатах, называемая *показателем скоростной чувствительности*, в точке перегиба достигает максимума. Качественная реологическая модель, описывающая материал в состоянии сверхпластичности, должна корректно моделировать подобный перегиб. Определяющее соотношение нелинейно-вязкого элемента в указанных координатах задаёт прямую линию, производной которой является константа, численно равная параметру элемента m . Таким образом, одиночный элемент не может задавать сигмоидальную кривую независимо от значений его параметров.

На рисунке 1.1 изображены различные способы соединения одномерных реологических элементов. В случае линейных элементов произвольная комбинация из нескольких элементов одного типа может быть эквивалентно заменена на один элемент того же типа с соответствующими параметрами элемента. Однако для нелинейно-вязких элементов в случае несовпадения значений параметра m это не так, то есть поведение модели не сводится к поведению единственного элемента. Следовательно, не лишён смысла вопрос о том, можно ли смоделировать сигмоидальную кривую, используя *только такие* элементы.

Первыми этот вопрос рассмотрели и дали положительный ответ S.W. Zehr и W.A. Backofen [45]. Построенная ими модель состоит из трёх нелинейно-вязких элементов, соединённых смешанным образом (рис. 1.1в), и основана на идее взаимодействия нескольких микроструктурных механизмов с разными показателями скоростной чувствительности m (0,1; 0,5 и 1,0). Однако исследование модели при других допустимых значениях параметров её элементов авторами работы не производилось.

Обширное исследование структурно-механических моделей на основе упругих, вязких и идеально-пластических элементов выполнил О.М. Смирнов [66]. Ему не удалось получить модель, приводящую к сигмоидальной зависимости $\log \sigma$ от $\log \dot{\epsilon}$, однако он предложил известную в сверхпластичности дробно-

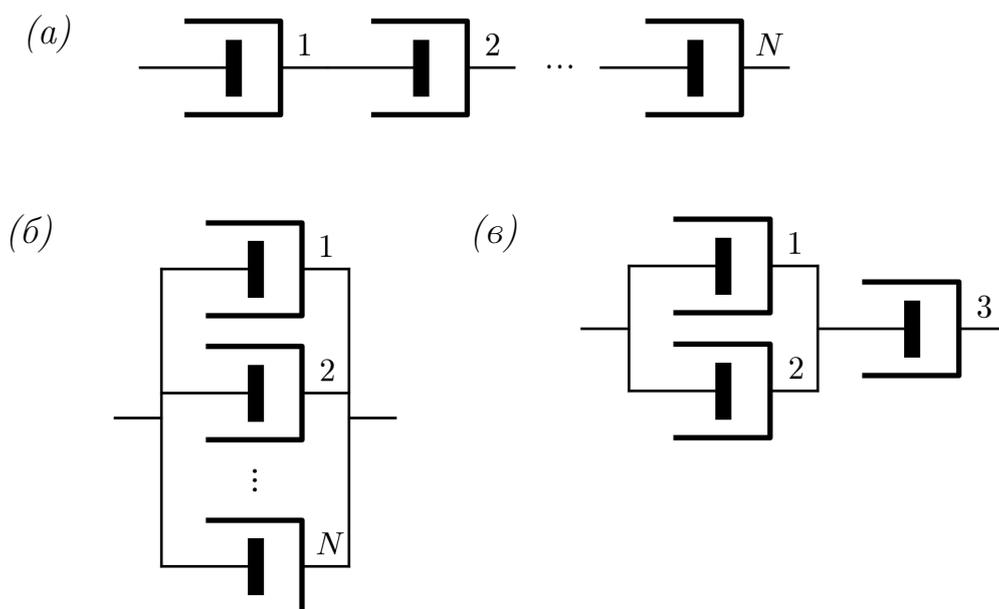


Рис. 1.1. Способы соединения нелинейно-вязких элементов: последовательное (а), параллельное (б) и смешанное (модель Бэкофена; в).

рациональную формулу Смирнова, которая описывает сигмоидальность экспериментальных зависимостей, хотя и не соответствует какой-либо конкретной структурно-механической модели.

Возможность аппроксимации экспериментальных кривых с точкой перегиба дробно-рациональными выражениями обсуждалась в применении к задачам ползучести в работах С.А. Шестерикова и соавторов [70]. Вопрос о моделировании сигмоидальной кривой сверхпластичности комбинацией нелинейно-вязких элементов подробно рассматривался также в [34; 37], где приведено несколько конкретных наборов значений параметров, при которых получаемая зависимость $\log \sigma$ от $\log \dot{\epsilon}$ является сигмоидальной.

Также оставался открытым вопрос о моделировании сигмоидальной кривой с помощью однотипных соединений нелинейно-вязких элементов. В работе [34] с помощью численного моделирования показано, что только параллельные или только последовательные комбинации малого числа элементов (от 2 до 5) при любых значениях их параметров непригодны для описания сигмоидальной кривой.

Целью данной главы является исследование соединений нелинейно-вязких элементов (как однотипных, так и модели Бэкофена) и определение области, точкам которой отвечают сигмоидальные кривые, в общем пространстве параметров всех элементов модели.

1.2. Анализ соотношений

Способ соединения элементов оказывает существенное влияние на получаемый результат. На рисунке 1.2 показаны кривые, моделирующиеся тремя нелинейно-вязкими элементами при различных способах их соединения (параметры самих элементов остаются при этом неизменными). Нетрудно заметить, что получаемые кривые имеют разную форму — монотонную, искомую сигмоидальную (с перегибом, соответствующим максимуму производной), либо с перегибом, направление которого обратно требуемому (соответствует минимуму производной). Таким образом, для классификации моделей необходимо отдельное исследование каждого конкретного типа соединения.

1.2.1. Параллельное соединение

Для начала проанализируем модель, включающую нелинейно-вязкие элементы, соединённые одинаковым образом. Как уже упоминалось, численно показано [34], что такая модель, содержащая от 2 до 5 элементов, при любых значениях параметров приводит к монотонным зависимостям (то есть, не позволяет описать экспериментальные зависимости с точкой перегиба). На самом деле эту монотонность можно доказать аналитически для любого количества элементов.

Рассмотрим параллельное соединение $N \geq 2$ нелинейно-вязких элементов с определяющими соотношениями $\sigma_i = K_i \dot{\varepsilon}_i^{m_i}$, $i \in \{1, \dots, N\}$. При параллельном соединении деформация ε (и скорость деформации $\dot{\varepsilon}$) всех элементов совпадает, а напряжение σ является суммой напряжений σ_i по всем элементам.

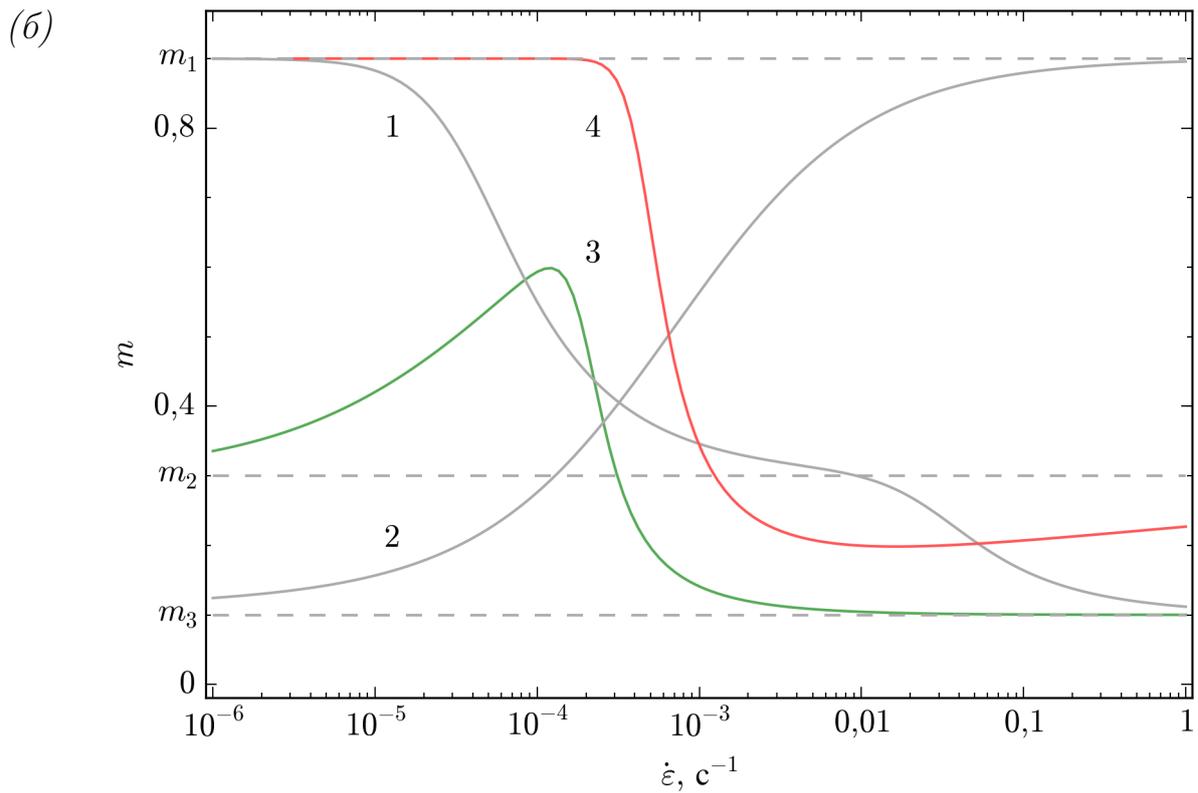
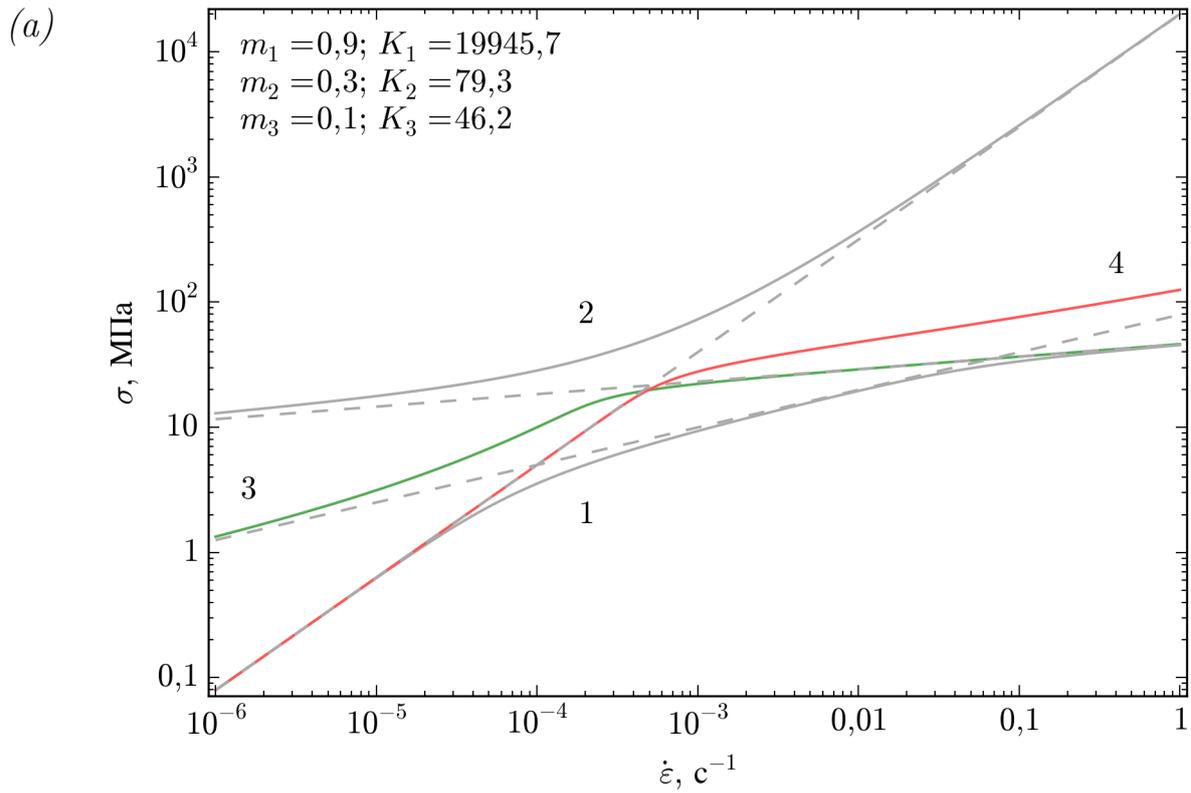


Рис. 1.2. Влияние способа соединения нелинейно-вязких элементов на зависимость σ от $\dot{\epsilon}$ (а) и показатель скоростной чувствительности m (б). Линия 1 — последовательное соединение, линия 2 — параллельное, линия 3 — смешанное соединение, линия 4 — смешанное, в котором элементы 1 и 3 переставлены местами. Штриховыми линиями показаны зависимости отдельных элементов.

Определяющие соотношения модели будут, следовательно, выглядеть так:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_1 = \dots = \dot{\varepsilon}_N; \\ \sigma &= \sum_{i=1}^N \sigma_i = \sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i}.\end{aligned}\quad (1.1)$$

(Здесь и далее в этом разделе знаком \sum без пределов суммирования обозначается для краткости $\sum_{i=1}^N$.)

Поскольку при перестановке элементов общая схема не изменяется, а два элемента с номерами $i \neq j$, для которых выполняется равенство $m_i = m_j$, можно эквивалентно заменить на один элемент с тем же $m = m_i = m_j$ и суммарным $K = K_i + K_j$, без ограничения общности будем считать, что $m_1 < \dots < m_N$.

Перегибы кривой соответствуют экстремумам её первой производной. Вычислим эту производную (показатель скоростной чувствительности модели):

$$M_p := \frac{d \log \sigma}{d \log \dot{\varepsilon}} = \frac{\frac{1}{\sigma} d\sigma}{\frac{1}{\dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i}} \cdot \sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i-1} = \frac{\sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i}}{\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i}}. \quad (1.2)$$

Её экстремумы, в свою очередь, соответствуют нулям второй производной:

$$\begin{aligned}\frac{dM_p}{d \log \dot{\varepsilon}} &= \frac{dM_p}{\frac{1}{\dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon}} = \\ &= \dot{\varepsilon} \left(\sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i-1} \cdot \frac{1}{\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i}} + \sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i} \cdot \frac{-1}{(\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i})^2} \cdot \sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i-1} \right) = \\ &= \frac{(\sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i}) \cdot (\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i}) - (\sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i})^2}{(\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i})^2}.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Поскольку $0 < m_i \leq 1$, $K_i > 0$ и, в случае одноосного растяжения, $\dot{\varepsilon} > 0$, каждая сумма в выражении (1.3) строго положительна. В частности, знаменатель не обращается в ноль и равенство дроби нулю возможно только при равенстве нулю её числителя.

Лемма 1.1. *Для любого $N \geq 2$ при различных $m_i \in (0, 1]$, $i \in 1, \dots, N$ и любых $K_i > 0$, $\dot{\varepsilon} > 0$ выполняется неравенство*

$$S[N] := \left(\sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i} \right) \cdot \left(\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i} \right) - \left(\sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i} \right)^2 > 0.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. В качестве *базы индукции* рассмотрим $N = 2$:

$$S[2] = (K_1 m_1^2 \dot{\varepsilon}^{m_1} + K_2 m_2^2 \dot{\varepsilon}^{m_2}) \cdot (K_1 \dot{\varepsilon}^{m_1} + K_2 \dot{\varepsilon}^{m_2}) - (K_1 m_1 \dot{\varepsilon}^{m_1} + K_2 m_2 \dot{\varepsilon}^{m_2})^2.$$

Раскроем скобки, приведём подобные и упростим получившееся выражение, учитывая предположение $m_1 \neq m_2$:

$$\begin{aligned} S[2] &= K_1^2 m_1^2 \dot{\varepsilon}^{2m_1} + K_1 K_2 m_1^2 \dot{\varepsilon}^{m_1+m_2} + K_1 K_2 m_2^2 \dot{\varepsilon}^{m_1+m_2} + K_2^2 m_2^2 \dot{\varepsilon}^{2m_2} - \\ &\quad - K_1^2 m_1^2 \dot{\varepsilon}^{2m_1} - 2K_1 K_2 m_1 m_2 \dot{\varepsilon}^{m_1+m_2} - K_2^2 m_2^2 \dot{\varepsilon}^{2m_2} = \\ &= K_1 K_2 \dot{\varepsilon}^{m_1+m_2} (m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2) = \\ &= K_1 K_2 \dot{\varepsilon}^{m_1+m_2} (m_1 - m_2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим исследуемое выражение, содержащее $N + 1$ слагаемое, считая, что при N слагаемых факт уже доказан (*шаг индукции*). Сгруппируем все слагаемые, кроме последнего, в единую сумму:

$$S[N + 1] = \left(\sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i} + K_{N+1} m_{N+1}^2 \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}} \right) \cdot \left(\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i} + K_{N+1} \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}} \right) - \left(\sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i} + K_{N+1} m_{N+1} \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}} \right)^2.$$

Вновь раскроем скобки и упростим выражение:

$$\begin{aligned} S[N + 1] &= \left(\sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i} \right) \cdot \left(\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i} \right) + \\ &\quad + K_{N+1} \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}} \sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i} + K_{N+1} m_{N+1}^2 \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}} \sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i} + K_{N+1}^2 m_{N+1}^2 \dot{\varepsilon}^{2m_{N+1}} - \\ &\quad - \left(\sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i} \right)^2 - 2K_{N+1} m_{N+1} \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}} \sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i} - K_{N+1}^2 m_{N+1}^2 \dot{\varepsilon}^{2m_{N+1}} = \\ &= S[N] + K_{N+1} \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}} \left(\sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i} + m_{N+1}^2 \sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i} - 2m_{N+1} \sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i} \right). \end{aligned}$$

По предположению индукции $S[N] > 0$. Константа $K_{N+1} \dot{\varepsilon}^{m_{N+1}}$ перед скобкой положительна, поэтому необходимо проанализировать только знак выражения в скобках. Для этого запишем его в виде общей суммы, внося все константы под

знаки суммирования:

$$\begin{aligned}
\sum (K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i} + K_i m_{N+1}^2 \dot{\varepsilon}^{m_i} - 2K_i m_i m_{N+1} \dot{\varepsilon}^{m_i}) &= \\
&= \sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i} (m_i^2 + m_{N+1}^2 - 2m_i m_{N+1}) = \\
&= \sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i} (m_i - m_{N+1})^2 > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение полностью доказано. \square

Итак, согласно лемме 1.1 вторая производная (1.3) зависимости (1.1) в логарифмических координатах всегда положительна. Следовательно, её первая производная M_p (1.2) монотонно возрастает и не имеет экстремумов, а кривая самой зависимости (1.1) — точек перегиба (а точнее, является выпуклой вниз).

1.2.2. Последовательное соединение

Теперь рассмотрим последовательное соединение $N \geq 2$ нелинейно-вязких элементов. При таком соединении деформация, наоборот, является суммой деформаций всех элементов, а напряжение в них совпадает. Введём обозначения $n_i := 1/m_i$, $C_i := 1/K_i^{n_i}$. В этих обозначениях определяющие соотношения элементов можно записать как $\dot{\varepsilon}_i = C_i \sigma_i^{n_i}$. Определяющие соотношения модели будут, соответственно, выглядеть так:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_1 = \dots = \sigma_N; \\
\dot{\varepsilon} &= \sum_{i=1}^N \dot{\varepsilon}_i = \sum C_i \sigma^{n_i}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Вновь вычислим производную:

$$M_s := \frac{d \log \sigma}{d \log \dot{\varepsilon}} = \frac{\frac{1}{\sigma} d\sigma}{\frac{1}{\dot{\varepsilon}} d\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\frac{d\dot{\varepsilon}}{d\sigma}} = \frac{\sum C_i \sigma^{n_i}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sum C_i n_i \sigma^{n_i-1}} = \frac{\sum C_i \sigma^{n_i}}{\sum C_i n_i \sigma^{n_i}}.$$

Данное выражение с точностью до переименования переменных эквивалентно перевёрнутому выражению (1.2), то есть $1/M_p$. Поскольку уже доказано, что M_p является строго положительной монотонно возрастающей функцией, M_s также

является строго положительной и монотонной, но убывающей функцией. Следовательно, кривая зависимости (1.4) в логарифмических координатах также не имеет точек перегиба (точнее, выпукла вверх).

Таким образом, доказано, что модель из нелинейно-вязких элементов, соединённых только параллельно или только последовательно, при любом количестве элементов и любых значениях их параметров не позволяет описать зависимости с точкой перегиба.

1.2.3. Смешанная модель: классы кривых

Перейдём теперь к анализу модели Бэкофена, то есть смешанного соединения трёх нелинейно-вязких элементов (рис. 1.1б). Выпишем кинематические и силовые соотношения модели (нумерация элементов соответствует рисунку):

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3; \quad (1.5)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3. \quad (1.6)$$

Подставляя во второе равенство цепочки (1.6) определяющие соотношения для каждого элемента $\sigma_i = K_i \dot{\varepsilon}_i^{m_i}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ и используя равенства (1.5), получим уравнение

$$K_1(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_3)^{m_1} + K_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_3)^{m_2} = K_3 \dot{\varepsilon}_3^{m_3}, \quad (1.7)$$

которое задаёт неявное выражение $\dot{\varepsilon}_3$ через $\dot{\varepsilon}$ и параметры модели K_i и m_i . Из (1.6) так же очевидно следует

$$\log \sigma = \log \sigma_3 = \log K_3 + m_3 \log \dot{\varepsilon}_3 \quad (1.8)$$

Уравнения (1.7)–(1.8) полностью описывают зависимость σ от $\dot{\varepsilon}$ при известных значениях K_i , m_i , то есть являются определяющими соотношениями модели. Однако величины K_i являются в некотором смысле слова искусственными. Они обладают понятным математическим смыслом (коэффициент пропорциональности), но с механической точки зрения не несут смысловой нагрузки и

имеют нечёткую размерность, которая зависит от значения соответствующего m_i . Поэтому для дальнейшего анализа удобно произвести нормировку.

Выберем на кривой некую опорную точку $(\hat{\varepsilon}, \hat{\sigma})$. В данной точке, конечно, выполняются основные уравнения модели (1.5)–(1.6):

$$\hat{\varepsilon}_1 = \hat{\varepsilon}_2, \quad \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_3, \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_3. \quad (1.9)$$

Введём теперь безразмерные величины $\alpha := \hat{\varepsilon}_3/\hat{\varepsilon}$ и $\beta := \hat{\sigma}_2/\hat{\sigma}$, принимающие значения из интервала $(0, 1)$. Данные величины имеют понятный физический смысл — описывают долю вклада каждого элемента в общие деформацию и напряжение модели. Подставляя их в уравнения (1.9), получим

$$\hat{\varepsilon}_1 = (1 - \alpha)\hat{\varepsilon}, \quad \hat{\sigma}_1 = (1 - \beta)\hat{\sigma}.$$

Наконец, внося данные выражения в определяющие соотношения элементов, выразим коэффициенты K_i через введённые величины:

$$K_1 = \frac{(1 - \beta)\hat{\sigma}}{\left((1 - \alpha)\hat{\varepsilon}\right)^{m_1}}; \quad (1.10)$$

$$K_2 = \frac{\beta\hat{\sigma}}{\left((1 - \alpha)\hat{\varepsilon}\right)^{m_2}}; \quad (1.11)$$

$$K_3 = \frac{\hat{\sigma}}{\left(\alpha\hat{\varepsilon}\right)^{m_3}}. \quad (1.12)$$

Заменим теперь в уравнении (1.7) коэффициенты K_i на их выражения (1.10)–(1.12):

$$\frac{1 - \beta}{(1 - \alpha)^{m_1}} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_3)^{m_1} + \frac{\beta}{(1 - \alpha)^{m_2}} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_3)^{m_2} = \frac{1}{\alpha^{m_3}} (\bar{\varepsilon}_3)^{m_3},$$

где $\bar{\varepsilon}_3 := \dot{\varepsilon}_3/\hat{\varepsilon}$ и $\bar{\varepsilon} := \dot{\varepsilon}/\hat{\varepsilon}$ — нормированные значения скоростей деформаций. Итак, получена неявная зависимость $\bar{\varepsilon}_3(\bar{\varepsilon}, \alpha, \beta, m_i)$.

Теперь подставим K_3 из (1.12) в уравнение для напряжения (1.8) и учтём

полученную неявную зависимость:

$$\begin{aligned}\log \sigma &= \log \hat{\sigma} - m_3 \left(\log \alpha + \log \hat{\varepsilon} \right) + m_3 \log \dot{\varepsilon}_3 = \\ &= \log \hat{\sigma} + m_3 \left(\log \bar{\varepsilon}_3 \left(e^{\log \bar{\varepsilon}}, \alpha, \beta, m_i \right) - \log \alpha \right) = \\ &= \log \hat{\sigma} + \Phi \left(\log \bar{\varepsilon} \right) = \log \hat{\sigma} + \Phi \left(\log \dot{\varepsilon} - \log \hat{\varepsilon} \right),\end{aligned}$$

где Φ — некоторая сложная (и даже неявная), но фиксированная при заданных параметрах α, β, m_i функция.

Отсюда очевидно, что параметры $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ являются «параметрами сдвига». На геометрическом языке изменение этих параметров равносильно параллельному переносу кривой, представляющей зависимость $\log \sigma$ от $\log \dot{\varepsilon}$. Поскольку интерес представляет только наличие точки перегиба, а не её конкретное положение, можно вместо индивидуальных кривых изучать *классы кривых, совпадающих с точностью до параллельного переноса*. С точки зрения численного расчёта, выбор иных параметров $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ эквивалентен рассмотрению кривой на другом интервале скоростей деформации.

1.2.4. Смешанная модель: сопоставление параметров

Заметим, что в случае $m_1 = m_2$ параллельно соединённые элементы эквивалентны одному элементу с тем же m и суммарным K ; модель вырождается в последовательное соединение двух элементов, которое, как было показано выше, не может дать требуемой сигмоидальности. Случай $m_1 > m_2$ в силу симметричности можно свести к обратному, перенумеровав элементы.

Итак, без ограничения общности можно считать, что $m_1 < m_2$. Вернёмся теперь к пространствам параметров $(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \alpha, \beta)$ и (K_1, K_2, K_3) . В первом из них каждый класс кривых соответствует плоскости, заданной параметрами α и β ($\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ при этом играют роль координат на данной плоскости). В случае, когда m_i не являются совпадающими (в силу принятого неравенства это всегда верно), матрица преобразования координат из первого пространства во второе

имеет максимальный ранг, а потому плоскость перейдёт в некоторую также двумерную поверхность в пространстве K_i . Заметим, что наличие у двух таких поверхностей общей точки означало бы наличие общей точки и в оригинальном пространстве $(\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \alpha, \beta)$, где поверхности являются параллельными плоскостями, а значит, влекло бы совпадение оригинальных плоскостей и самих поверхностей. Таким образом, поверхности, отвечающие разным классам кривых, не пересекаются.

Из общих соображений размерности замечаем, что двумерные не пересекающиеся поверхности в трёхмерном пространстве должны образовывать однопараметрическое семейство. В нашем же случае плоскости соответствуют паре параметров (α, β) . Следовательно, данные параметры должны быть связаны между собой. Чтобы получить уравнение этой связи, вернёмся к уравнениям (1.10)–(1.12), задающим отображение точек первого пространства в точки второго. В пространстве (K_1, K_2, K_3) при фиксированных α и β эти соотношения можно рассматривать как параметрическое задание обсуждаемых поверхностей. Перейдём от данного параметрического задания к явному виду.

Из первого равенства (1.10) выразим $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma} = K_1 \frac{\left((1 - \alpha) \hat{\varepsilon} \right)^{m_1}}{1 - \beta}.$$

Подставим полученное выражение во второе равенство (1.11). После небольшого упрощения оно примет вид:

$$K_2 = K_1 \frac{\beta}{1 - \beta} \left((1 - \alpha) \hat{\varepsilon} \right)^{m_1 - m_2}.$$

Поскольку принято $m_1 \neq m_2$, данное уравнение разрешается относительно $\hat{\varepsilon}$:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \right)^{\frac{m_2 - m_1}{m_1 - m_2}}.$$

Подставим теперь выражения для $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ в последнее равенство (1.12) и приведём

подобные в получившейся степенной функции. Окончательно получим:

$$K_3 = K_1^{\frac{m_3-m_2}{m_1-m_2}} K_2^{\frac{m_1-m_3}{m_1-m_2}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{m_3} \beta^{\frac{m_3-m_1}{m_1-m_2}} (1-\beta)^{\frac{m_2-m_3}{m_1-m_2}}, \quad (1.13)$$

что, при фиксированных α и β , представляет собой искомый явный вид функции $K_3 = K_3(K_1, K_2)$.

Очевидно, что для различных наборов α и β заданные таким образом поверхности либо не имеют общих точек в интересующей нас области $K_1, K_2 > 0$, либо полностью совпадают. Последнее происходит тогда и только тогда, когда значения параметров α и β являются решениями уравнения

$$\tilde{c} := \alpha^{m_3(m_2-m_1)} (1-\alpha)^{m_3(m_1-m_2)} \beta^{m_3-m_1} (1-\beta)^{m_2-m_3} = \text{const}, \quad (1.14)$$

где \tilde{c} по сути является тем единственным параметром, который определяет поверхности в пространстве K_i (в том смысле, что каждому положительному значению данного параметра соответствует одна и только одна поверхность). Заметим также, что выражение (1.14) явно разрешается относительно α :

$$\alpha = \frac{\tilde{\beta}^m}{\tilde{\beta}^m + \tilde{c}^m}; \quad \tilde{\beta} := \beta^{m_3-m_1} (1-\beta)^{m_2-m_3}, \quad m := \frac{1}{m_3(m_1-m_2)}. \quad (1.15)$$

Следовательно, для любого класса (то есть для каждого фиксированного $\tilde{c} > 0$) и каждого β существует и однозначно определено значение α , при котором поверхность, соответствующая таким α и β , принадлежит к этому классу.

Геометрический смысл β в пределах класса легко выясняется: параметры $(\hat{\epsilon}, \hat{\sigma})$ задают опорную точку на графике зависимости $\log \sigma$ от $\log \dot{\epsilon}$, а β указывает, какая именно точка кривой совпадает с этой опорной точкой. Иными словами, если константа \tilde{c} и точка $(\hat{\epsilon}, \hat{\sigma})$ фиксированы, β меняется, а значения α при этом вычисляются по формуле (1.15), то соответствующие данным значениям параметров кривые, изображающие зависимость $\log \sigma$ от $\log \dot{\epsilon}$, отличаются на сдвиг вдоль самой кривой (рис. 1.3).

Таким образом, если рассматривается только общая форма кривой, параметр β можно считать эквивалентным параметрам $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\sigma}$ в том смысле, что изме-

нение любого из них при фиксированном \tilde{c} не меняет эту форму. Наконец, параметр α отвечает непосредственно за форму кривой. Проведённые исследования показали, что малые изменения этого параметра для сигмоидальных кривых меняют лишь степень выраженности перегиба кривой, но при больших изменениях α возможно и качественное изменение формы зависимости (рис. 1.4).

1.3. Численное моделирование

1.3.1. Алгоритм расчёта

Чтобы определить форму кривой, соответствующей каждому конкретному классу (то есть фиксированному набору параметров), будем искать экстремумы её производной $d \log \sigma / d \log \dot{\epsilon}$. Для вычисления этой производной из выражения (1.8) получим

$$\frac{d \log \sigma}{d \log \dot{\epsilon}} = m_3 \frac{d \log \dot{\epsilon}_3}{d \log \dot{\epsilon}} = m_3 \frac{dy}{dx}, \quad (1.16)$$

где для краткости введены обозначения $x := \log \dot{\epsilon}$, $y := \log \dot{\epsilon}_3$. Преобразуем с использованием этих обозначений неявное выражение (1.7), задающее зависимость $\dot{\epsilon}_3(\dot{\epsilon})$, к экспоненциальной форме:

$$K_1 (e^x - e^y)^{m_1} + K_2 (e^x - e^y)^{m_2} - K_3 e^{m_3 y} = 0,$$

и продифференцируем это тождество:

$$\begin{aligned} K_1 m_1 (e^x - e^y)^{m_1-1} (e^x dx - e^y dy) + \\ + K_2 m_2 (e^x - e^y)^{m_2-1} (e^x dx - e^y dy) - \\ - K_3 m_3 e^{m_3 y} dy = 0. \end{aligned}$$

Выразив отсюда dy/dx , подставив в (1.16) и вернув оригинальные обозначения, окончательно получим

$$\frac{d \log \sigma}{d \log \dot{\epsilon}} = m_3 \frac{K_1 m_1 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_3)^{m_1-1} \dot{\epsilon} + K_2 m_2 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_3)^{m_2-1} \dot{\epsilon}}{K_1 m_1 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_3)^{m_1-1} \dot{\epsilon}_3 + K_2 m_2 (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_3)^{m_2-1} \dot{\epsilon}_3 + K_3 m_3 \dot{\epsilon}_3^{m_3}}. \quad (1.17)$$

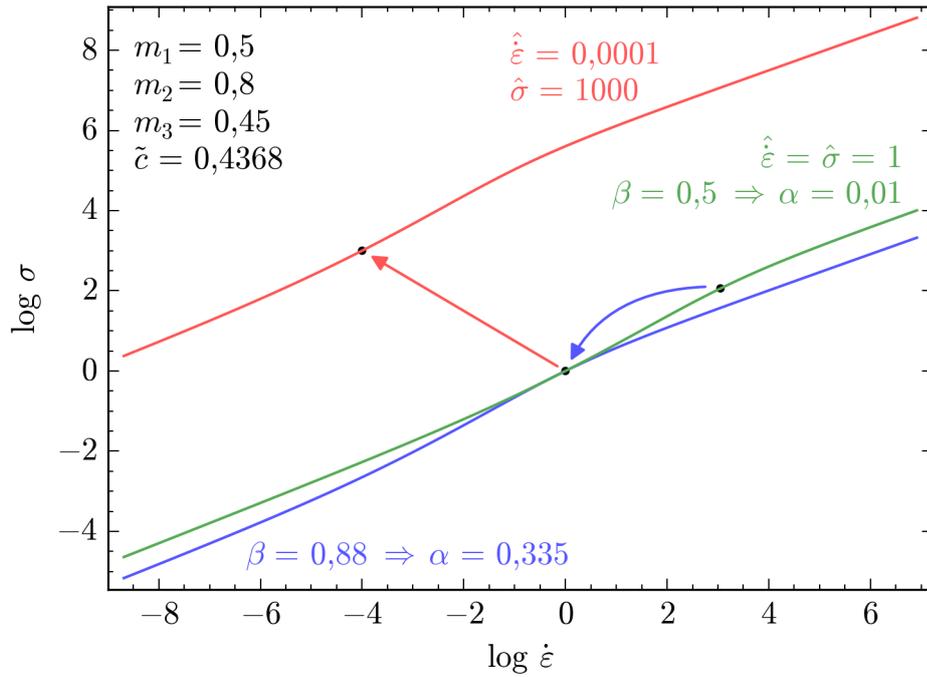


Рис. 1.3. Различные положения кривых одного класса (то есть одинаковой формы). Зелёная линия — нормированная кривая (стандартные значения параметров), красная — изменены параметры $\hat{\epsilon}$, $\hat{\sigma}$, синяя — изменён параметр β (и скорректирован α для сохранения \tilde{c}).

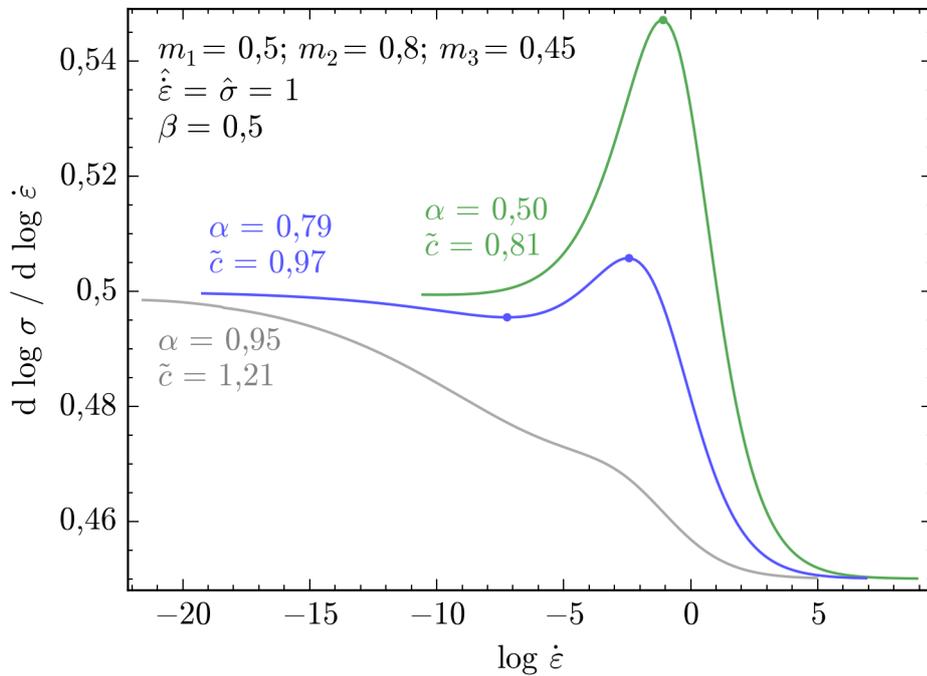


Рис. 1.4. Влияние смены класса на форму кривой. Показаны производные (показатели скоростной чувствительности) для различных значений α , задающих различные классы согласно (1.14). Перегибы кривых соответствуют экстремумам производных (отмечены точками): зелёная имеет единственный максимум, синяя — минимум и максимум, серая монотонна.

Таким образом, для любого значения $\dot{\epsilon}$ можно численно найти соответствующее ему значение $\dot{\epsilon}_3$, решив неявное уравнение (1.7), после чего значение для производной вычисляется с помощью явной формулы (1.17). Однако, поскольку рассматриваются классы кривых (то есть уже сдвинутые кривые), необходимо определить участок, на котором имеет смысл производить поиск экстремумов.

Для этого воспользуемся тем фактом, что при $\log \dot{\epsilon} \rightarrow \pm\infty$ зависимость $\log \sigma$ от $\log \dot{\epsilon}$ асимптотически стремится к прямой [34; 37], а её производная, соответственно, к константе. Выберем на кривой произвольную точку и будем двигаться от неё вдоль кривой до обнаружения достаточно длинного участка, на котором все значения производной отличаются друг от друга не более чем на заранее заданное малое число δ (рис. 1.5). В силу указанного свойства можно с высокой степенью уверенности утверждать, что в дальнейшем производная будет только стремиться к своему предельному значению, и, соответственно, экстремумы (если они есть) имеет смысл искать лишь до указанной точки.

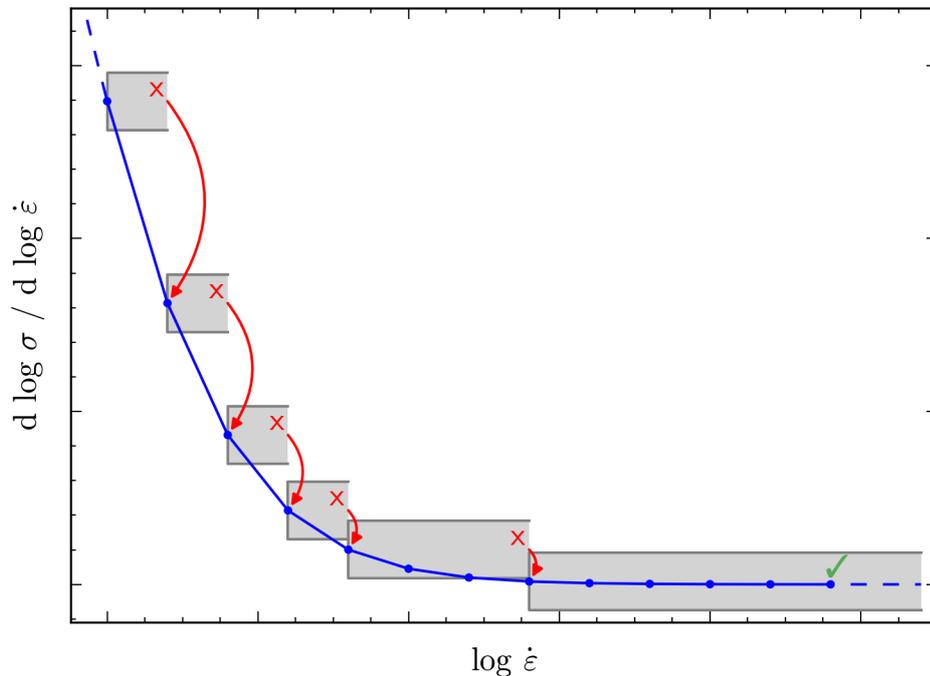


Рис. 1.5. Схема алгоритма поиска интервала, содержащего экстремумы. Серым цветом обозначены полосы ширины δ вокруг опорных точек. Если очередная точка выпадает из полосы, она становится новой опорной точкой и построение начинается заново. При нахождении достаточного числа подряд идущих точек внутри полосы алгоритм завершается.

Применим описанный алгоритм к некоторой точке кривой (например, соответствующей $\log \dot{\varepsilon} = 0$) дважды, один раз двигаясь от неё «вправо» (в сторону увеличения $\log \dot{\varepsilon}$), а другой — «влево» (в сторону уменьшения). После этого рассмотрим участок между найденными крайними точками и найдём на нём экстремумы производной методом перебора всех значений $\log \dot{\varepsilon}$ с фиксированным малым шагом.

1.3.2. Результаты расчёта

Численное моделирование различных кривых производилось с помощью реализации изложенного в предыдущей секции алгоритма на языке программирования C++. Кривые анализировались при фиксированных параметрах нормировки $\hat{\varepsilon} = \hat{\sigma} = 1$ и $\beta = 0,5$. По параметрам m_i производился перебор, для каждого из параметров рассматривалось 20 значений, равномерно распределённых в полуинтервале $(0, 1]$. По параметру α также производился перебор, рассматривалось 25 значений из интервала $(0, 1)$ с увеличением частоты по краям, поскольку, как видно из формулы зависимости (1.14), при $\alpha \rightarrow 0$ или $\alpha \rightarrow 1$ (в зависимости от конкретных значений m_i) константа класса стремится к вертикальной асимптоте. Для решения уравнения (1.7) применялся комбинированный метод, сочетающий метод деления пополам для построения начального приближения и метод Ньютона для быстрого поиска нуля в его окрестности.

В результате численного моделирования было установлено, что классы кривых можно условно поделить на четыре больших типа.

- Производные кривых из классов первого типа, обозначенного знаком “+”, имеют единственный максимум на отрезке рассмотрения. Это соответствует искомому случаю сигмоидальности самой кривой с «правильным» направлением перегиба.
- Второй тип “−” содержит классы, производные кривых из которых имеют единственный минимум на отрезке рассмотрения. Это также соответству-

ет наличию на кривой точки перегиба, однако его направление обратно требуемому.

- Тип “ \emptyset ” отвечает классам, кривые из которых не содержат перегибов на рассматриваемом интервале (производные монотонны, как в случае чисто параллельной или чисто последовательной комбинации).
- Тип “ \pm ” содержит классы, кривые из которых имеют два перегиба в области рассмотрения, один из которых соответствует максимуму производной, а второй — минимуму.

Кроме того, в некоторых случаях при переборе значений производной на ней обнаруживалось более двух экстремумов. Изучение графиков таких кривых показало, что при соответствующих значениях параметров модели в ходе промежуточных вычислений по формулам (1.7), (1.17) возникают экстремально большие или экстремально малые значения, расчёты с которыми выходят за пределы достижимой компьютером точности. В результате при расчётах наблюдается переполнение либо получение в результате арифметической операции значения NaN — “not a number” (то есть «не число»).

«Настоящих» (то есть рассчитанных без погрешностей) классов кривых, имеющих более двух перегибов, в процессе расчётов не обнаружено. Таким образом, появление дополнительных экстремумов является следствием некорректного поведения алгоритма при переполнении. Поэтому кривые с признаками подобных отклонений (менее 2% от общего числа рассмотренных классов) помечались как «сомнительные» и в финальный результат не включаются.

В таблице 1.1 содержится статистика по описанным выше типам кривых. Для каждого из типов приведено количество классов кривых, отнесённых к данному типу, и его доля в процентах от общего числа рассмотренных классов. Далее полученные результаты были сгруппированы по значениям m_i , то есть для каждого набора последних были найдены все типы, встречающиеся при данных m_i и любом значении α из рассматривавшихся. При этом, поскольку

с точки зрения формального ответа на вопрос о наличии сигмоидальности все типы кроме “+” неразличимы (соответствуют ответу «нет»), тип “+” обозначен как положительный вердикт “✓”, а остальные типы отождествлены под единым отрицательным вердиктом “×”. В таблице 1.2 содержится полученная сводная статистика. Для каждой комбинации вердиктов приведено количество наборов m_i , для которых при расчётах встретились именно эти вердикты.

Наконец, приводится визуализация полученных результатов. Изображения, наиболее ярко демонстрирующие все обнаруженные эффекты, представлены на рисунке 1.6. Полные результаты расположены в приложении А.

Каждое изображение содержит «срез» пространства параметров m_i плоскостью $m_3 = const$. Метки соответствуют наборам m_i , по оси абсцисс отложены значения m_1 , по оси ординат — m_2 . Линией показана диагональ области ($m_1 = m_2$), все результаты располагаются над ней, поскольку, как было сказано ранее, при расчётах рассматривался только случай $m_1 < m_2$.

Каждая метка является круговой диаграммой, показывающей распределение классов кривых по типам. Красный цвет соответствует типу “–”, зелёный цвет — типу “+”, синий — типу “±”, серый — “∅”. Доля на диаграмме кодирует долю классов соответствующего типа от всех классов, рассмотренных для данного набора m_i , без учёта «сомнительных» классов.

Таблица 1.1. Статистика по частоте типов кривых

Тип	Кол-во (классов кривых)	Процент
±	32 450	34,16%
+	31 649	33,31%
–	24 248	25,52%
∅	4 891	5,15%
Всего 95 000 классов		

Таблица 1.2. Статистика по сгруппированным вердиктам

Вердикты	Кол-во (наборов m_i)	Процент
×	2 279	59,97%
✓	948	24,95%
✓, ×	573	15,08%
Всего 3 800 наборов		

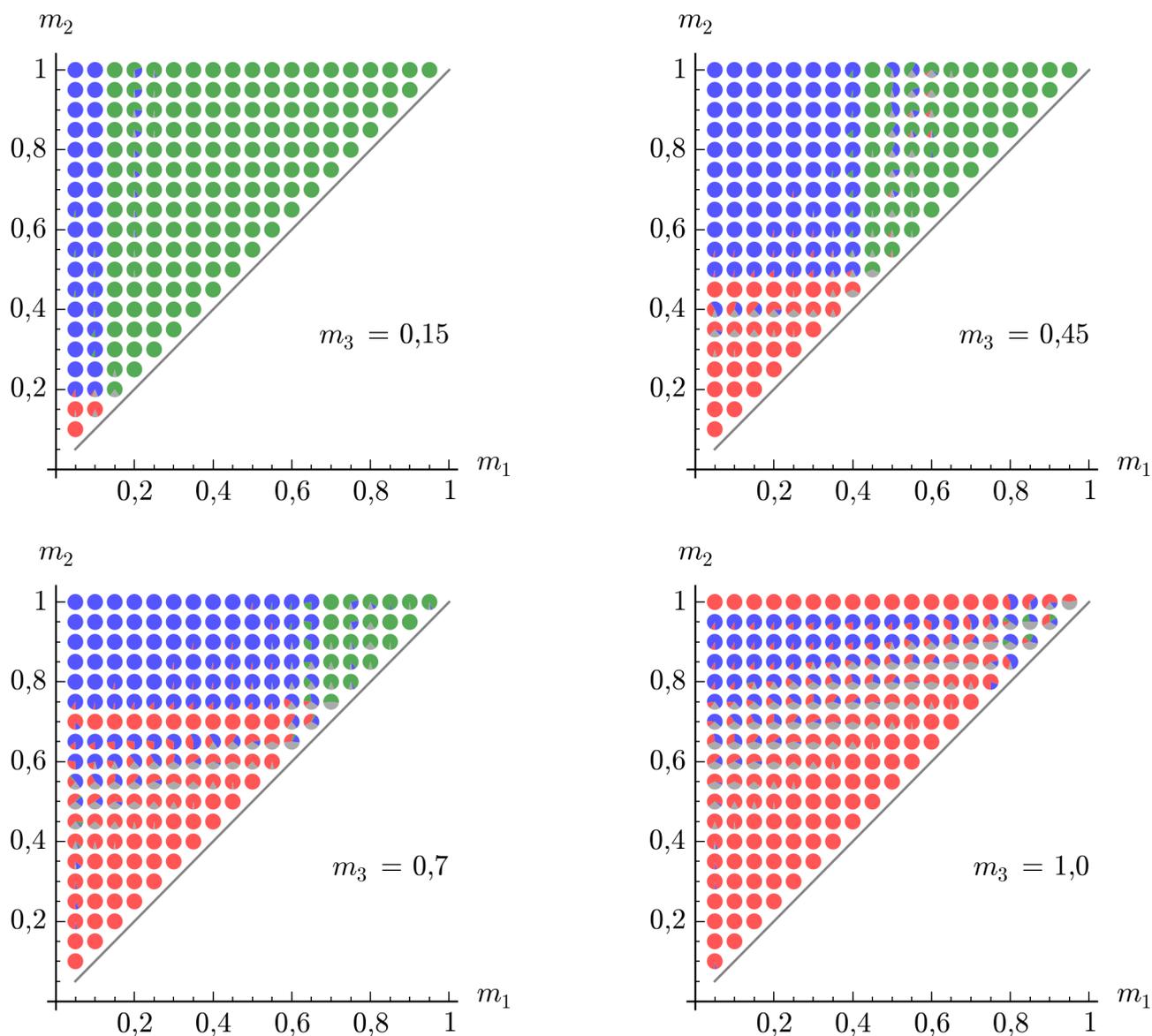


Рис. 1.6. Визуализация основных результатов расчёта. Представлены показательные «срезы». Полные результаты см. в приложении А.

1.3.3. Анализ результатов

Анализ представленных изображений позволяет выделить следующие основные зоны в пространстве параметров модели:

- В зоне $m_1 \geq m_3$ (в общем виде, из соображений симметрии, она соответствует $\min(m_1, m_2) \geq m_3$) наблюдается преобладание кривых типа “+” с добавлением типа “±”. При этом, по мере удаления значения m_1 от m_3 , тип “+” начинает доминировать. Кривые типа “-” в этой зоне практически отсутствуют.

- В симметричной ей зоне $m_2 \leq m_3$ (в общем виде $\max(m_1, m_2) \leq m_3$), напротив, преобладает тип “–” с примесью типа “±” и полностью отсутствует тип “+”.
- В оставшейся «промежуточной» зоне $m_1 < m_3 < m_2$ (и симметричной ей $m_2 < m_3 < m_1$) преобладает тип “±”.
- Кривые типа “∅” преимущественно встречаются на стыках зон. Скорее всего, это связано с тем, что именно в этих местах поведение модели нестабильно и сильно зависит от константы α , тогда как в глубине зон оно жёстко фиксировано для заданного набора m_i .

Для формального отделения области строгой сигмоидальности представляется уместным ввести коэффициент k и рассмотреть область $m_1 \geq km_3$. Далее следует выбрать минимальное значение k , при котором в этой области оказываются только такие тройки (m_1, m_2, m_3) , для которых при всех значениях α был получен тип “+”. При этом в области окажутся не все такие тройки среди рассмотренных, то есть данное условие будет являться достаточным, но не необходимым.

По полученным данным значение введённого коэффициента можно оценить как $k \approx 1,8$. Для получения более точной оценки следует уменьшить шаг численного перебора по m_i и увеличить количество значений α , при которых для каждого набора m_i определяется тип кривой, после чего повторить выбор k с учётом полученной дополнительной информации о промежуточных точках пространства параметров.

Наконец, стоит отметить чётко прослеживающуюся при $m_3 \geq 0.6$ линию, соответствующую значениям $m_1 < m_2 = m_3$ и целиком состоящую из меток типа “–”. Она примечательна тем, что при $m_1 \rightarrow 0$ линию окружает область преобладания ответов типа “±”. При равенстве другой пары параметров ($m_3 = m_1 < m_2$) наблюдается аналогичная, хотя и не столь выраженная линия из меток типа “+”. Локальное поведение кривых вблизи этих линий (то есть,

при $m_1 \rightarrow m_3$ или $m_2 \rightarrow m_3$ и фиксированном значении оставшегося параметра) не устанавливается из полученных результатов и нуждается в дополнительном изучении.

1.4. Заключение

В результате работы доказана непригодность структурно-механических моделей, основанных на чисто параллельном или чисто последовательном соединении любого числа нелинейно вязких элементов, для описания процесса сверхпластичности. Проведён математический анализ смешанного соединения трёх нелинейно-вязких элементов (модели Бэкофена) и выявлены параметры $\hat{\sigma}$, $\hat{\varepsilon}$ и β , отвечающие за положение кривой на плоскости (то есть задающие класс кривых одинаковой формы), параметр \tilde{c} , непосредственно определяющий форму кривой, и его связь с параметром α .

В результате численного моделирования различных классов кривых определены их типы и получена классификация пространства параметров модели Бэкофена по форме получаемых кривых: отсутствие перегиба, требуемая сигмоидальность, сигмоидальность с обратным направлением перегиба, двойной перегиб. Полным ответом на поставленный вопрос об области формальной сигмоидальности следует считать утверждение «Кривые всегда сигмоидальны при $\min(m_1, m_2) = m_3$ или $\min(m_1, m_2) \geq km_3$ и сигмоидальны для большинства значений α при $\min(m_1, m_2) \in (m_3, km_3)$, где k — некоторый числовой коэффициент». По полученным данным коэффициент k можно оценить величиной $k \approx 1,8$.

При этом стоит отметить, что практический интерес для моделирования эксперимента в большинстве случаев представляет не вся кривая, а лишь её поведение в окрестности максимума производной (то есть в окрестности сигмоидального участка). Поэтому можно модифицировать предложенный метод расчёта, изменив критерий оценки. А именно, можно определять степень при-

годности найденной кривой для моделирования сверхпластического деформирования материала, основываясь на сравнении этой кривой с *универсальной кривой сверхпластичности* [41], описывающей в некотором смысле «стандартное» поведение материала при деформировании в режиме сверхпластичности.

Такой подход может быть более оправдан для практических применений исследуемой модели. В настоящей работе, однако, ставилась цель определить область, соответствующую именно формальному математическому описанию сигмоидальности. Поэтому от сравнения с универсальной кривой (имеющей, в общем-то, сугубо эмпирический характер) при решении этой задачи было решено отказаться.

Определение значений параметров в моделях сверхпластичности

В настоящей главе используются результаты работ [3; 57].

2.1. Объект исследования

Для осуществления конструкционных расчётов и описания напряжённо-деформированного состояния в исследуемых изделиях требуется создание качественных *тензорных* моделей поведения материалов в условиях сверхпластичности. Однако наиболее часто встречающимся испытанием на сверхпластическое деформирование является *одноосное* растяжение образцов при постоянной скорости деформации. Наблюдаемые в этих экспериментах зависимости напряжения течения σ от скорости пластической деформации $\dot{\varepsilon}_p$ исторически служили основой для построения определяющих соотношений сверхпластичности.

Обобщение различных определяющих соотношений на случай трёхмерного напряжённо-деформированного состояния остаётся одним из наиболее сложных вопросов в теории сверхпластичности. Некоторыми авторами предлагаются обобщённые зависимости вида [30]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_e} \dot{p},\end{aligned}$$

где ε_{ij} , ε_{ij}^e и ε_{ij}^p — тензоры полной, упругой и пластической логарифмической деформации соответственно, σ_{ij} — тензор напряжений Коши, $S_{ij} := \sigma_{ij} - \sigma_{\text{avg}} \delta_{ij}$ при $\sigma_{\text{avg}} := \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$ — девиатор тензора напряжений и среднее напряжение, $\sigma_e := \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$ — интенсивность касательных напряжений, \dot{p} — интенсивность

скоростей пластических деформаций, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. При помощи подобных соотношений авторам работы [30] удаётся получить удовлетворительные результаты расчёта методом конечных элементов.

Для интенсивности скоростей пластических деформаций \dot{p} обычно предлагаются инвариантные соотношения вида $\dot{p} = \dot{p}(\sigma_e, \chi_i)$, где χ_i — материальные постоянные (параметры модели) и переменные, описывающие состояние материала. Именно эта зависимость в случае одноосного растяжения (при $\sigma_e = \sigma$ и $\dot{p} = \dot{\epsilon}_p$ в предположении несжимаемости) описывает наблюдаемые экспериментальные диаграммы. Таким образом, *построение корректных одноосных моделей на основе экспериментальных данных является предпосылкой для успешного моделирования сверхпластичности*. Для определения параметров соотношения $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_p(\sigma, \chi_i)$ при конкретно заданной форме зависимости служат данные экспериментов на одноосное растяжение и, при необходимости, дополнительные экспериментальные данные.

Так как сверхпластичность является процессом, существенно зависящим от микроструктурного состояния материала, внешние механические и тепловые воздействия могут приводить к, вообще говоря, разным напряжённо-деформированным состояниям в зависимости от внутренней структуры образца. Макроскопическое описание этой структуры и её зависимость от истории деформирования может описываться в духе подхода Ю.Н. Работнова [64] конечным числом тензорных и скалярных величин, называемых внутренними переменными состояния системы.

Изменение внутренних переменных состояния задаётся при помощи уравнений, называемых уравнениями эволюции параметров. С вычислительной точки зрения удобно классифицировать определяющие соотношения по набору внутренних переменных. Математически это соответствует размерности системы дифференциальных уравнений, описывающих модель.

Простейшим случаем является отсутствие у модели внутренних переменных. Это соответствует связи напряжения и скорости деформации образца в

форме $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_p(\sigma, \chi_i)$ либо $\sigma = \sigma(\dot{\epsilon}_p, \chi_i)$, где χ_i включают в себя только материальные постоянные и величины, считающиеся неизменными на всем протяжении процесса деформирования (например, температура в изотермическом процессе). Единственным плюсом такой модели является простота расчёта: пренебрегая упругой частью деформации (то есть принимая $\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}$) при известной истории нагружения в эксперименте — $\sigma(t)$ или $\epsilon(t)$ — можно напрямую получить вторую из величин, не прибегая к численному решению дифференциального уравнения. Недостаток же состоит в том, что такая модель не описывает ничего, кроме этих двух величин, в частности, не учитывает рост зёрен или упрочнение.

Улучшением данной модели является введение в рассмотрение внутренних переменных и эволюционных уравнений для них. Это могут быть переменные, характеризующие микроструктурное состояние материала (в простейшем случае один скалярный параметр d , связанный со средним размером зёрен), некоторые авторы используют параметр порообразования [65] и другие величины. Аналогичным образом может описываться изменение температуры T [37; 52]. Так, например, определяющие соотношения в форме

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= \dot{\epsilon}_p(\sigma, d, \chi_i) \quad \text{либо} \quad \sigma = \sigma(\dot{\epsilon}_p, d, \chi_i); \\ \dot{d} &= \dot{d}(\sigma, \dot{\epsilon}_p, d, \chi_i) \end{aligned}$$

способны описывать рост зёрен: нужно подставить первое уравнение во второе и проинтегрировать получившееся дифференциальное уравнение при известной истории нагружения. Далее полученную функцию роста зёрен $d(t)$ можно подставить в первое уравнение и, с учётом той же истории нагружения, получить полное описание поведения образца.

Уравнения в такой форме способны также частично учитывать упрочнение — ту его часть, которая вызвана ростом зёрен. Кроме того, к ним можно добавить функцию распределения зёрен, например, в виде объёмной доли зёрен в зависимости от их размера, $v(d)$, и отслеживать изменения этой функции, свя-

занные с ростом или измельчением зёрен и соответствующим перераспределением объёмных долей. Описание эволюции микроструктуры с помощью такого подхода подробно обсуждается в главе 4.

Для моделирования всей кривой зависимости напряжения от деформации, в том числе начального (упругого) участка и упрочнения, в определяющие соотношения могут быть явно включены интенсивность накопленной к данному моменту пластической деформации ε_p и время t :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_p(t, \sigma, \varepsilon_p, d, \chi_i) \quad \text{либо} \quad \sigma = \sigma(t, \dot{\varepsilon}_p, \varepsilon_p, d, \chi_i); \\ \dot{d} = \dot{d}(t, \sigma, \dot{\varepsilon}_p, \varepsilon_p, d, \chi_i). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Такие соотношения имеют как минимум два внутренних параметра (ε_p и d) и не «распадаются» на независимые части. Для моделирования эксперимента требуется полноценное численное интегрирование системы дифференциальных уравнений, однако результат моделирования получается наиболее точным.

Именно этому классу определяющих соотношений и моделям, которые могут быть записаны в таком виде, посвящена данная глава. Целью главы является разработка методики исследования определяющих соотношений в форме (2.1): алгоритма определения значений для параметров, входящих в уравнения; метрик для оценки применимости получаемых моделей и сравнения моделей между собой; подходов к анализу свойств получаемых моделей, в частности, их устойчивости к погрешностям экспериментальных данных.

2.2. Обзор литературы

2.2.1. Определяющие соотношения сверхпластичности

Для достижения больших значений деформации без образования концентраторов необходимо установление в материале режима совместного действия нескольких микроструктурных механизмов, при котором неоднородности структуры (такие как вакансии атомной решётки), возникающие при работе одного

механизма, поглощаются (заращаются) при работе других. Исторически многие определяющие соотношения для случая одноосного нагружения формулировались на основе анализа подобных механизмов, обеспечивающих сверхпластическое деформирование: диффузионной ползучести, зерно-граничного проскальзывания, внутризёрненного (дислокационного) скольжения [46]. Например, из литературы достаточно хорошо известны такие модельные зависимости:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= \frac{K_1}{d^3} \sigma, & K_1 &= B_1 \frac{\Omega \omega D_g}{k_b T} && \text{(Coble);} \\ \dot{\epsilon}_p &= K_2 \sigma, & K_2 &= B_2 \frac{\Omega D_L}{k_b T} && \text{(Orowan);} \\ \dot{\epsilon}_p &= \frac{K_3}{d^2} \left(\frac{\sigma}{G} \right)^2, & K_3 &= B_3 \frac{G b^3 D_g}{k_b T} && \text{(Nabarro-Herring);} \end{aligned}$$

где Ω — атомный объем, ω — размер граничной зоны зёрен, D_L и D_g — коэффициенты решёточной и зерно-граничной диффузии, k_b — постоянная Больцмана, T — температура, G — модуль сдвига, b — вектор Бюргерса, а B_i — неопределённые константы (со значениями порядка 1–10, что может оказаться удобным при аппроксимации результатов экспериментов). Таким образом, хотя в каждом случае в определении коэффициента K_i содержится множество констант материала, фактически он заменяется на безразмерную мультипликативную константу, значение которой необходимо определять на основе экспериментальных данных.

Отсюда естественным образом возникает идея феноменологических моделей, которые исходно оперируют определяемыми на основе экспериментальных данных абстрактными параметрами и в которых может быть учтено совместное действие различных микроструктурных механизмов. Тем не менее, исходные микроструктурные модели продолжают играть важную роль, определяя физически обусловленную область изменения материальных параметров в феноменологических определяющих соотношениях.

Наиболее простой феноменологический подход, широко используемый при описании пластического одноосного растяжения (в том числе и в работах по

сверхпластичности [8]), предполагает зависимость между напряжением течения, деформацией и скоростью пластической деформации в виде

$$\sigma = K \varepsilon_p^N \dot{\varepsilon}_p^m, \quad (2.2)$$

где N отвечает за степень упрочнения, а $m := \partial \log \sigma / \partial \log \dot{\varepsilon}_p$ — показатель скоростной чувствительности материала.

В работе [52] предложена модель, учитывающая вязкоупругие деформации. Полная скорость деформации представляется в виде суммы упругой, вязкоупругой и сверхпластической компонент — $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v + \dot{\varepsilon}_p$, при этом

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_v &= \lambda \sigma; \\ \dot{\varepsilon}_p &= A \frac{\sigma^2}{d^2} + B \sigma^4, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где d — средний размер зёрен.

Определяющие соотношения, явно учитывающие упрочнение, приведены в работах [8; 31]:

$$\dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} \left(\frac{\sigma - R - \sigma_y}{K} \right)^n \frac{1}{d^\alpha}, & \sigma > \sigma_y + R; \\ 0, & \sigma \leq \sigma_y + R, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $n := 1/m$, R — функция упрочнения, σ_y — предел текучести. Авторами [46] предложена модификация этих соотношений на основе функции гиперболического синуса:

$$\dot{\varepsilon}_p = \begin{cases} \frac{A_0}{d^\alpha} \sinh \left(B_0 (\sigma - R - \sigma_y) \right), & \sigma > \sigma_y + R; \\ 0, & \sigma \leq \sigma_y + R, \end{cases} \quad (2.5)$$

которая лучше описывает поведение сверхпластического материала при напряжениях, близких к пределу текучести. Похожие соотношения применяются, например, в [7].

Функция упрочнения в работах [31; 46] зависит от скорости деформации:

$$\dot{R} = C(Q - R)\dot{\varepsilon}_p. \quad (2.6)$$

Поскольку материал в состоянии сверхпластичности достаточно чутко реагирует на изменение размеров зёрен, многие модели дополняются соответствующими зависимостями. В простейшем случае используются эволюционные уравнения для переменных, описывающих размеры зёрен, либо в деформационной форме [8]:

$$\dot{d} = \frac{A_1}{d^\beta} + \frac{B_1}{d^\varphi} \dot{\varepsilon}_p, \quad (2.7)$$

либо в виде нелинейной зависимости от напряжения [52]:

$$\dot{d} = \frac{C_1 \sigma^4 + C_2 \sigma^5}{1 + C_3 \sigma^4 d}. \quad (2.8)$$

Подходящие значения для параметров (материальных постоянных) в определяющих соотношениях (2.2)–(2.8), как и в других феноменологических моделях сверхпластического деформирования, неизвестны априори и не привязываются к параметрам атомной решётки или дислокационным характеристикам материала, а должны быть определены напрямую на основе имеющихся экспериментальных данных.

2.2.2. Экспериментальные данные

Экспериментальные данные по сверхпластичности, приводимые в литературе, в большинстве случаев относятся к одноосному нагружению при постоянной температуре и описывают один из трёх типов связи между параметрами образца в процессе такого деформирования.

Первый тип — зависимость осевого напряжения от полной осевой скорости деформации. Такие *скоростные кривые* $\sigma(\dot{\varepsilon})$ часто устанавливаются из испытания со ступенчатым нагружением [17], то есть одноосным растяжением с несколькими значениями скорости захвата (каждая следующая в 2–3 раза больше предыдущей) и скачкообразным переходом между ними. При такой схеме тестирования можно получить из одного образца значения напряжения течения σ сразу для нескольких скоростей деформации $\dot{\varepsilon}$. Скоростные кривые имеют характерную сигмоидальную форму, которая подробно обсуждалась в главе 1.

Вторым часто изучаемым типом связи является зависимость осевого напряжения от полной осевой деформации (*кривые деформирования* $\sigma(\varepsilon)$), получаемая из эксперимента на одноосное растяжение с постоянной скоростью деформации $\dot{\varepsilon}$ (для этого скорость захвата изменяется экспоненциально [17]). Эти тесты требуют использования одного образца для каждой исследуемой пары «скорость деформации – распределение размеров зёрен».

Также в литературе приводятся зависимости третьего типа — среднего размера зёрен от полной осевой деформации (*кривые роста зёрен* $d(\varepsilon)$). Точки на этих графиках получаются из эксперимента на одноосное растяжение по схеме теста с постоянной скоростью деформации $\dot{\varepsilon}$ одного образца до некоторого значения деформации, с последующей разгрузкой, охлаждением образца, снятием микрофотографии его шлифа и оценкой среднего размера зёрен по снимку. Такие графики довольно дорогостоящие, но они позволяют напрямую определять параметры эволюции зёрен, что невозможно никаким иным способом (здесь и далее параметрами эволюции зёрен для краткости называются параметры, входящие в эволюционные уравнения, описывающие изменение размеров зёрен в процессе деформирования).

2.3. Идентификация параметров модели

Исторически идентификация моделей, то есть определение подходящих значений для входящих в определяющие соотношения параметров на основе экспериментальных данных, производится с помощью авторских алгоритмов, которыми сопровождаются предлагаемые различными авторами модели. Чаще всего такие алгоритмы относятся к одному из двух типов.

В первом случае для идентификации параметров предлагается искать характерные точки на тех или иных экспериментальных кривых. Алгоритм в таком случае представляет собой способ определения положения характерной точки и формулы, по которым значения параметров зависят от эксперимен-

тальных величин в характерных точках. Примером такого алгоритма может служить идентификация параметров K и m в простейшей модели $\sigma = K\varepsilon^m$ путём нахождения точки перегиба на скоростной кривой материала.

Второй тип формируют алгоритмы, в которых экспериментальные данные рассматриваются в совокупности и значения для параметров подбираются таким образом, чтобы полученная по модели зависимость приближала экспериментальные данные наилучшим (в том или ином смысле) образом. Такие алгоритмы часто существенно полагаются на свойства конкретных определяющих соотношений и могут состоять из многих шагов, на каждом из которых значения части параметров фиксируется, а некоторые другие подбираются оптимальным для данного шага образом. В качестве примеров таких алгоритмов можно отметить работу [46] в контексте сверхпластичности, а также работу [15], в которой рассматриваются процессы пластического (вязкопластического) деформирования с нелинейным упрочнением.

Наилучшее приближение в алгоритмах такого рода как правило определяется путём минимизации некоторой функции погрешности, выраженной в математической форме. Наиболее используемым и неплохо себя зарекомендовавшим для этой задачи остаётся метод наименьших квадратов (МНК), минимизирующий сумму квадратов отклонений вычисленных по модели точек от экспериментальных. На примере кривых деформирования оптимизационная функция может быть выписана в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} (\sigma(\varepsilon_{\text{эксп.},ij}, \chi_k) - \sigma_{\text{эксп.},ij})^2 \rightarrow \min, \quad (2.9)$$

где N — общее количество кривых, n_i — количество точек на i -й кривой, χ_k — искомые параметры. Аналогичным образом МНК может быть применён и к другим типам кривых. Для данного метода разработано большое количество алгоритмов минимизации, в частности, численные методы, подходы на основе генетических алгоритмов [32], нейронных сетей [7] и другие.

Целью настоящей работы было создание алгоритма идентификации пара-

метров модели, не привязанного к конкретной системе уравнений и подходящего для различных определяющих соотношений из рассматриваемого класса (2.1). Однако прежде чем переходить к описанию самого алгоритма, следует обратить внимание на некоторые важные особенности, игнорирование которых может привести к проблемам с реализацией аппроксимационных методов (в частности, с применением МНК).

2.3.1. Нормировка моделей

С точки зрения метода наименьших квадратов (2.9) любая модель — это функция, переводящая набор значений параметров в значение погрешности (или, более детально, в вектор разностей между ожидаемыми и вычисленными значениями). В зависимости от выбранного алгоритма минимизации в построении следующего приближения могут участвовать численные производные этой функции по параметрам модели. Поэтому при любых вычислениях с использованием МНК следует, по возможности, избегать экстремально большого разброса в искомым значениях величин.

Например, в работе [46] предлагается описывать сверхпластическое деформирование материала системой уравнений (2.5)–(2.7), с учётом аддитивности упругой и сверхпластической деформации: $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$. С использованием многоступенчатого алгоритма аппроксимации для феноменологических параметров, входящих в модель, получены следующие значения:

$$\begin{array}{lll} A_0 = 4,37 \times 10^{-6}; & B_0 = 0,0919; & \alpha = 1,06; \\ A_1 = 1,28 \times 10^{-17}; & B_1 = 9,625 \times 10^{-14}; & \beta = \varphi = 5,0; \\ C = 0,666; & Q = 8,397; & E = 1000,0. \end{array}$$

Здесь наибольшее значение Q порядка 10 соседствует с наименьшим A_1 порядка 10^{-17} (значение параметра E для каждого материала известно априори и не варьируется в ходе исполнения алгоритма). Такой существенный разброс

осложняет сходимость и приводит к серьёзным погрешностям в алгоритмах аппроксимации.

В данном случае проблема вызвана тем, что авторы работы [46] напрямую подставляют в уравнения размерные величины (напряжение в МПа, размеры зёрен в миллиметрах, время в секундах). В результате многие параметры модели имеют не вполне осмысленную размерность, поскольку размерные величины входят в уравнения в некоторых, не обязательно целых, степенях. Более того, поскольку данные степени также являются параметрами модели и ищутся методом наименьших квадратов, в процессе вычислений другие параметры, вообще говоря, меняют свою размерность, что не имеет разумной физической интерпретации.

Естественным шагом к решению этих проблем может быть перенормировка модели с заменой всех размерных величин на их нормированные версии, что отмечалось, например, в работах [18; 53]. Для нормирования воспользуемся характерными значениями: размером зерна $d_0 = 1$ мкм, скоростью деформации $\dot{\epsilon}_0 = 0,001 \text{ с}^{-1}$ и пределом текучести σ_y , который для рассматриваемого в [46] материала (сплава титана Ti–6Al–4V при температуре 927 °C) равен 0,5 МПа. Хотя для некоторых размерностей можно было выбрать в качестве опорных величин микроструктурные параметры, измеряющиеся в соответствующих единицах, указанные нормировочные коэффициенты лучше соответствуют феноменологическому подходу и в некоторых случаях могут давать более точный результат [2].

С использованием нормировки ту же самую модель можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\epsilon}_p &= \frac{A}{d^\alpha} \sinh \left(B(\sigma - h - 1) \right); \\
 \dot{d} &= \frac{D}{d^\beta} + \frac{G}{d^\varphi} \dot{\epsilon}_p; \\
 h &= H_0(1 - \exp(-H\epsilon_p)); \\
 \sigma &= E_n(\epsilon - \epsilon_p),
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

где соотношения (2.6) для функции упрочнения R проинтегрированы, введено обозначение $h := R/\sigma_y$, а значения параметров равны

$$\begin{aligned} A &:= \frac{A_0}{\dot{\epsilon}_0 d_0^\alpha} = 6,614; & B &:= B_0 \sigma_y = 0,046; & \alpha &= 1,06; \\ D &:= \frac{A_1}{\dot{\epsilon}_0 d_0^{\beta+1}} = 12800,0; & G &:= \frac{B_1}{d_0^{\beta+1}} = 96250,0; & \beta &= \varphi = 5,0; \\ H &:= C = 0,666; & H_0 &:= \frac{Q}{\sigma_y} = 16,794; & E_n &:= \frac{E}{\sigma_y} = 2000,0. \end{aligned}$$

Здесь максимальный порядок 10^5 , минимальный — 10^{-2} . Разброс составляет 7 порядков, что тоже немало, однако существенно лучше исходного варианта (18 порядков). Кроме того, теперь все входящие в уравнения величины (как параметры модели, так и характеристики деформируемого образца) являются «настоящими» безразмерными числами. Таким образом, проблема с изменением степенных параметров у нормированной модели отсутствует.

2.3.2. Использование скоростных кривых

Для успешной аппроксимации экспериментальных данных необходимо учитывать особенности испытаний, из которых они получены. Рассмотрим, в частности, скоростные кривые для процесса сверхпластичности. Как уже упоминалось в разделе 2.2.2, особенности формы таких кривых достаточно хорошо изучены и описаны в литературе. Из формулировки метода их построения может показаться, что скоростные кривые являются удачным обобщением кривых деформирования, содержащим больше информации. Поэтому в некоторых работах по сверхпластичности предлагалось использовать их для экономии испытательных образцов и определения параметров моделей на основе меньшего числа экспериментов.

В действительности, скоростные кривые обладают определёнными недостатками по сути метода — накоплением упрочнения для больших скоростей и сложностью измерения изображаемых параметров (они не снимаются датчиками напрямую, а вычисляются, с соответствующим увеличением погрешности).

Это приводит к рассогласованности скоростных кривых и кривых деформирования для тех же самых образцов.

В качестве примера возьмём классический набор экспериментальных данных авторства А.К. Ghosh, С.Н. Hamilton [17] для сплава титана Ti–6Al–4V при температуре 927 °С, на который ссылаются во многих работах [14; 19; 26; 28; 32; 33; 36; 37; 43; 46]. В данном наборе представлены как скоростные кривые для ряда значений среднего размера зёрен до деформирования \tilde{d} , так и кривые деформирования для тех же размеров зёрен и различных значений скорости деформации $\dot{\varepsilon}$. Определим насколько эти кривые соотносятся между собой.

В оригинальной методике испытания со ступенчатым нагружением рассматривается инженерное напряжение $\sigma_{\text{eng}} := \frac{F}{S_0}$, где F — действующая на образец сила, S_0 — площадь сечения образца в начальный момент времени. Величина σ_{eng} контролируется в процессе испытания, новая скорость захвата устанавливается каждый раз, когда эта величина переходит через максимум [17]. В точке максимума производится снятие значений напряжения и скорости деформации для построения скоростной кривой $\sigma(\dot{\varepsilon})$.

С помощью условия несжимаемости материала $S\ell = V = V_0 = S_0\ell_0$, где ℓ — длина образца, S — площадь его сечения, V — объём, а индекс 0 обозначает взятие величины в начальный момент времени; и соотношения $\varepsilon = \ln \frac{\ell}{\ell_0}$ можно записать выражение инженерного напряжения через напряжение Коши и логарифмическую деформацию:

$$\sigma_{\text{eng}} = \frac{F}{S_0} = \frac{F \ell_0}{S_0 \ell_0} = \frac{F \ell_0}{S \ell} = \frac{F/S}{\ell/\ell_0} = \frac{\sigma}{\exp \varepsilon}.$$

Теперь, имея кривую деформирования для скорости $\dot{\varepsilon}^*$, можно вычислить инженерное напряжение σ_{eng} в каждой её точке, найти значение ε^* , соответствующее максимуму этой величины, и записать в этой точке значение напряжения Коши σ^* (рис. 2.1).

Проделав данную процедуру для всех имеющихся кривых деформирования и получив набор пар $(\dot{\varepsilon}^*, \sigma^*)$, можно сравнить его со скоростными кривыми.

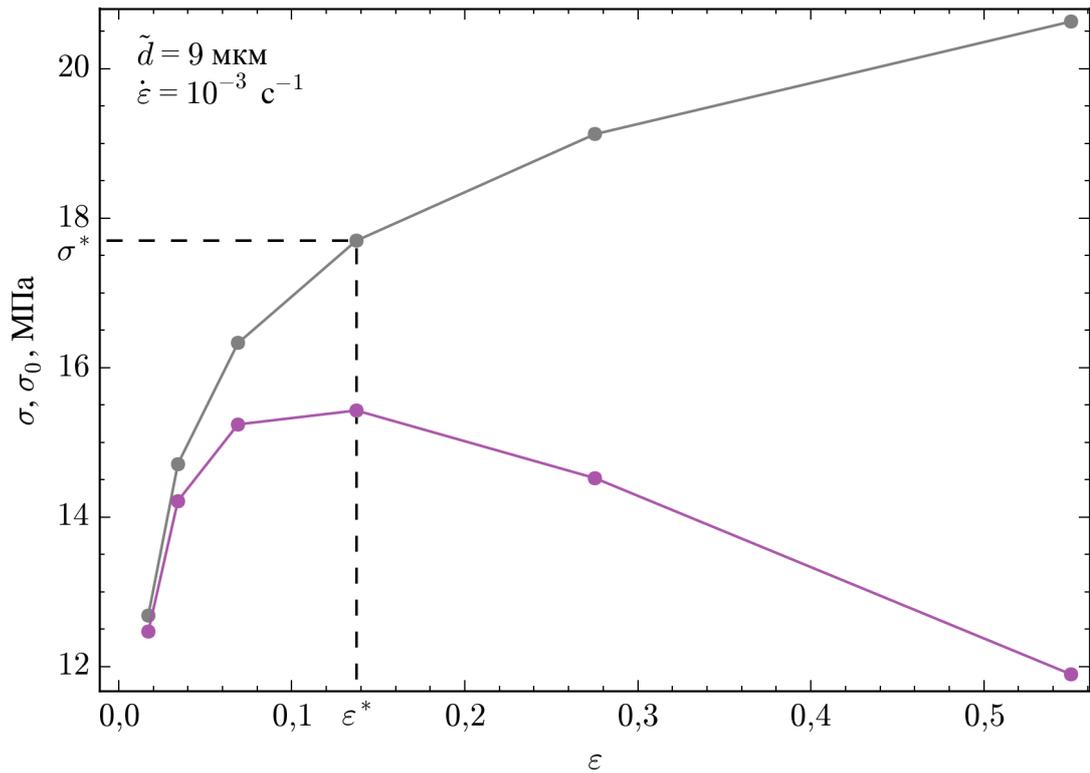


Рис. 2.1. Схема определения напряжения течения по экспериментальной кривой деформирования (серая линия) на основе положения максимума инженерного напряжения (фиолетовая линия).

В идеале, если исходные данные получены из экспериментов, проводившихся с теми же образцами и в одинаковых условиях, обе зависимости должны быть близки. В действительности, однако, кривые достаточно сильно различаются (рис. 2.2).

Причина расхождений состоит в том, что на практике испытатели вынуждены переходить к следующей скорости раньше, не растягивая образец до настоящей точки максимума. Заметим, что на рисунке 2.1 значение максимума соответствует деформации порядка 14 %. По форме кривой деформирования видно, что к этому моменту в ней уже накоплено некоторое достаточно заметное упрочнение. В то же время, в типичных испытаниях со ступенчатым нагружением образец растягивается примерно на 20–25 % суммарно за всё время испытания [17], при этом один эксперимент может включать в себя 3–5 (и даже

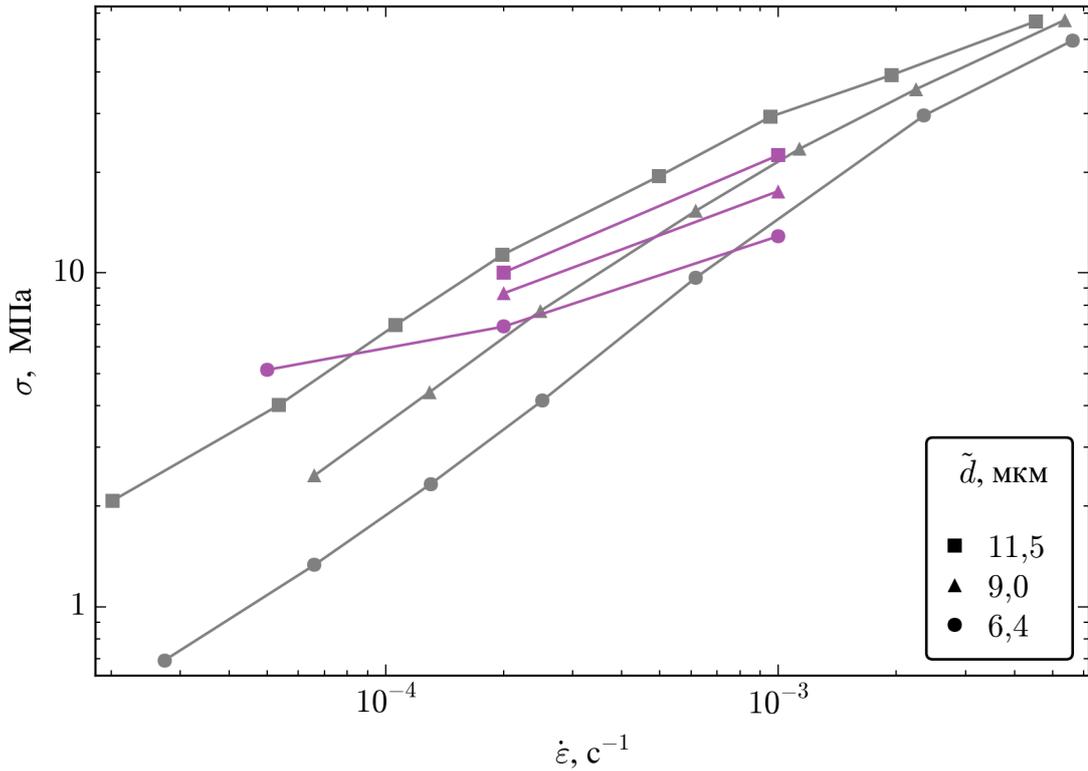


Рис. 2.2. Сравнение экспериментальных скоростных кривых из [17] (серые линии) с точками, построенными на основе кривых деформирования из той же работы (фиолетовые линии) по схеме с рис. 2.1.

больше) скоростей деформации. Очевидно, это было бы невозможно, если бы каждый эксперимент требовал растяжения на десять с лишним процентов. Кроме того, из самой сути метода следует, что материал в процессе экспериментов должен испытывать минимальное упрочнение.

Таким образом, выбор конкретного момента перехода к следующей скорости деформации не привязывается напрямую к состоянию образца и неизбежно обладает определённой степенью субъективности. Вклад упрочнения при этом непредсказуемым образом различается в разных точках кривой, в силу чего выполнить аккуратную оценку этого вклада и сделать соответствующие поправки при вычислениях оказывается достаточно трудно.

Из сказанного следует, что использование скоростных кривых в качестве окончательного или единственного критерия оценки параметров модели может приводить к существенным погрешностям. В то же время, они могут использо-

ваться (и успешно используются) для предварительной оценки материальных параметров.

2.3.3. Схема алгоритма

Как уже упоминалось, важной чертой предлагаемого алгоритма поиска значений параметров модели является его независимость от конкретных определяющих соотношений в рамках рассматриваемого класса уравнений сверхпластичности: алгоритм применим к любой системе уравнений, записанной в форме (2.1) и любому набору экспериментальных данных, описывающих сверхпластическое деформирование посредством некоторого количества кривых, относящихся к трём указанным в разделе 2.2.2 типам. Кроме того, было использовано «универсальное» начальное приближение, не требующее априорных знаний о свойствах процесса и материала: 0 — для всех мультипликативных констант, 1 — для всех степенных. Это позволяет применять алгоритм даже для тех моделей, у которых заранее неизвестен диапазон изменения параметров, входящих в уравнения.

Алгоритм относится к типу пошаговых, то есть формулируется в виде последовательности шагов, на каждом из которых определяется или уточняется оптимальное значение одного или нескольких параметров, входящих в уравнения. При этом в качестве начального приближения на каждом шаге выступают значения, полученные на предыдущих шагах. Для адаптации алгоритма к разным системам уравнений входящие в них параметры группируются, а именно объединяются по физическому смыслу процесса, который они описывают: основные параметры (входящие в определяющее соотношение для скорости пластических деформаций); параметры эволюции зёрен; параметры упрочнения. Далее шаги алгоритма формулируются с использованием этих групп, без привязки к количеству и названиям конкретных параметров.

На первом шаге алгоритма следует определять значения параметров, входящих в группу основных параметров модели. Однако если сразу попытаться

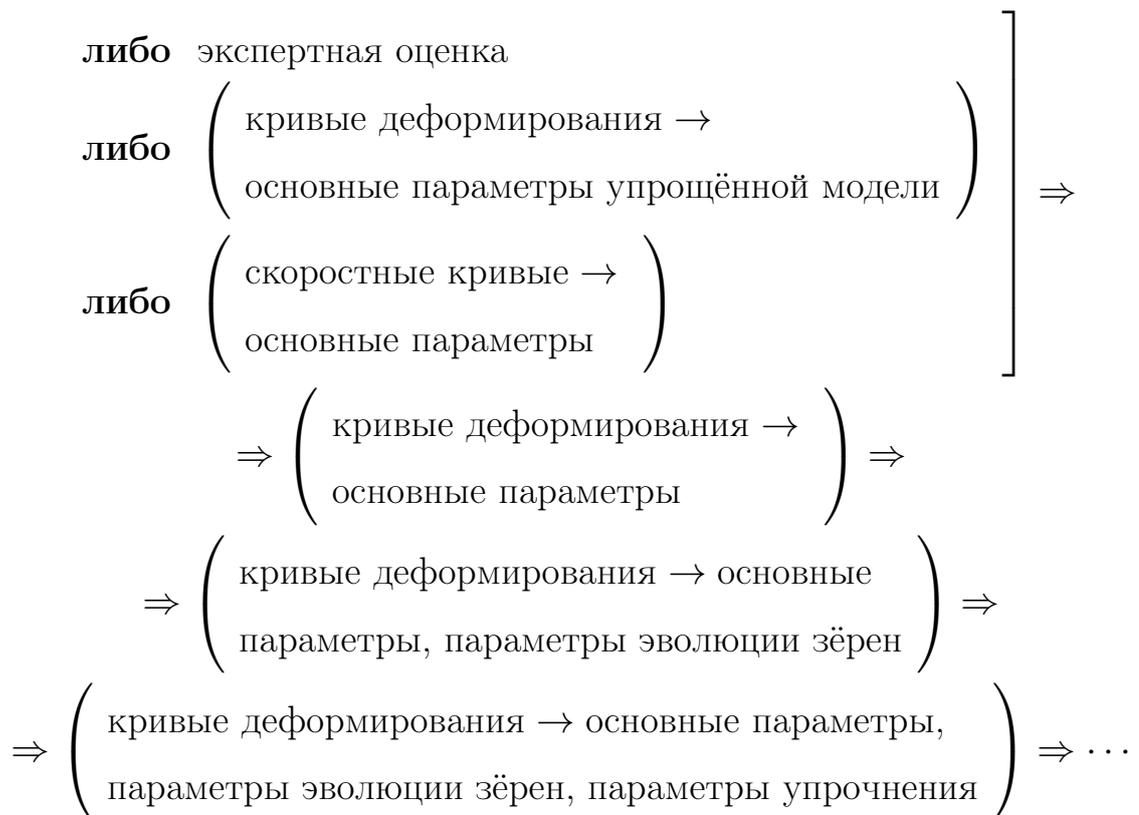
ся найти эти значения на основе кривых деформирования, то процесс может не сойтись или длиться неоправданно долго. В некоторых случаях оказывается возможным временное упрощение определяющих соотношений, после чего алгоритм может приобрести сходимость. Например, определяющие соотношения (2.5) можно записать без учёта упрочнения и начального (упругого) участка, то есть в форме $\dot{\varepsilon}_p = \frac{A}{d^\alpha} \sinh(B\sigma)$ [25]. Однако такое упрощение нужно производить индивидуально для каждого конкретных соотношений, что снижает универсальность метода, поэтому в настоящей работе такой путь не рассматривается.

Частично плохая сходимость связана с тем, что в работе используется универсальное начальное приближение. Если заранее (путём экспертной оценки) найдены значения параметров, близкие к искомым, можно для ускорения счёта взять их в качестве начального приближения. Если же предварительных оценок нет, либо их недостаточно для обеспечения сходимости, следует прибегнуть к «нулевому» шагу, позволяющему получить подходящую оценку параметров путём вычислений. На этом шаге предлагается также производить поиск значений основных параметров модели, но на основе скоростных кривых, а найденные значения параметров использовать затем как начальное приближение на первом шаге для поиска тех же параметров, но уже на основе кривых деформирования.

Подчеркнём, что в данном случае расчёт по скоростным кривым не входит в противоречие с высказанным в разделе 2.3.2 соображением о том, что их использование при расчётах нежелательно в силу больших вносимых погрешностей. В описанном методе данные кривые применяются только в целях построения начального приближения для следующих этапов расчёта; иными словами, ни одно значение параметра, определённое из скоростных кривых, не переходит в конечную модель без уточнения и проверки по кривым деформирования, поэтому их применение корректно. Более того, когда в исходном наборе данных для материала скоростные кривые отсутствуют, их можно построить на основе

кривых деформирования по процедуре, описанной в том же разделе. При этом значения параметров модели, полученные даже по таким «искусственным» кривым, оказываются достаточно удачными для того, чтобы дальнейшие расчёты на их основе сходились.

На последующих шагах устанавливаются значения параметров, входящих в остальные группы (уравнения), то есть параметров эволюции зёрен, параметров упрочнения и других (при их наличии). При этом, поскольку параметры, добавляющиеся на каждом шаге, вносят вклад в общую форму кривой, в частности изменяют характеристики упрочнения, необходимо вместе с определением их значений уточнять также значения для параметров из предыдущих групп. Это позволит вкладам, вносимым различными механизмами в наблюдаемый общий рост напряжений, корректно перераспределяться на каждом шаге. Таким образом, алгоритм можно представить в виде следующей схемы:



Такой алгоритм хорошо описывает кривые деформирования и является чисто феноменологическим в том смысле, что для его работы используются только данные макроэкспериментов (скорость деформации, уровень деформа-

ции, напряжение). Испытание на растяжение с постоянной скоростью деформации становится при этом одним из базовых экспериментов, служащих для идентификации модели материала. В то же время, поскольку сверхпластичность — процесс, существенно зависящий от структурно-механического состояния деформируемого материала, в ряде исследовательских работ и практических приложений важным объектом изучения и контроля служит именно микроструктура. В этой области исследуется влияние на сверхпластическое деформирование характера распределения размеров зёрен [11; 26], процессов не только роста, но и измельчения крупных зёрен вследствие деформации [18; 35; 52] и подобных микроструктурных механизмов. При этом состояние образца задаётся, например, в виде уже упоминавшейся функции объёмной доли зёрен в зависимости от их размера, $v(d)$, изменение которой отслеживается на всём протяжении процесса. Моделирование эволюции микроструктуры с помощью такого подхода подробно обсуждается в главе 4.

В подобной задаче от модели требуется точность описания не только макроэксперимента, но и микроструктурных параметров (в частности, среднего размера зёрен d). С этой целью была разработана модификация алгоритма, учитывающая данные о росте зёрен. Модифицированный алгоритм не является феноменологическим в строгом смысле слова, поскольку оперирует данными микроструктурного эксперимента, полученными со снимков шлифа образца, то есть значения внутренних (феноменологических) параметров модели напрямую соотносятся с реальными микроструктурными характеристиками материала. Однако для расширения области применимости получающихся моделей подобное использование дополнительных экспериментальных данных о микроструктуре может быть оправдано.

В предлагаемой модификации на втором шаге алгоритма на основе кривых роста зёрен определяются параметры эволюции зёрен, после чего они фиксируются и не меняются на последующем шаге (шагах) алгоритма. Схема описанного алгоритма выглядит так:

$$\left[\begin{array}{l} \text{процедуры «нулевого» и} \\ \text{первого шагов не меняются} \end{array} \right] \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{кривые роста зёрен} \rightarrow \\ \text{параметры эволюции зёрен} \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{кривые деформирования} \rightarrow \\ \text{основные параметры, параметры упрочнения} \end{array} \right) \Rightarrow \dots \quad (2.11)$$

Построенные с его помощью модели, действительно, гораздо лучше описывают эволюцию зёрен и несколько хуже — кривые деформирования. Тем не менее, результат аппроксимации адекватно моделирует поведение материала, поэтому данная модификация алгоритма взята в настоящей работе за основу при проведении вычислений.

Предложенный алгоритм был протестирован на экспериментальных данных из [17], относящихся к растяжению сплава титана Ti–6Al–4V при температуре 927 °С. Все расчёты выполнялись посредством авторской программы, написанной на языке Python, с применением широко известной библиотеки для научных расчётов SciPy. Для поиска оптимальных значений из библиотеки вызывалась функция, производящая поиск по методу наименьших квадратов и использующая для минимизации целевой функции алгоритм Левенберга–Марквардта (реализация из вычислительной библиотеки MINPACK).

Рассмотрим работу алгоритма на примере системы уравнений (2.5)–(2.7) авторства M. Zhou, F.P.E. Dunne [46] в нормированном виде (2.10). Основными параметрами для этой системы являются A , B , α ; параметрами эволюции зёрен — D , G , β , φ ; параметрами упрочнения — H_0 , H . На рисунке 2.3 изображены промежуточные результаты после выполнения шагов алгоритма (здесь и далее в обозначениях на рисунках под ε понимается логарифмическая деформация, под σ — напряжение Коши).

В качестве нулевого шага воспользуемся скоростными кривыми, взятым из той же работы [17]. Нетрудно заметить, что полученные кривые деформирования (рис. 2.3а) проходят достаточно далеко от экспериментальных точек. Это иллюстрирует обсуждавшуюся в разделе 2.3.2 разницу между скоростными

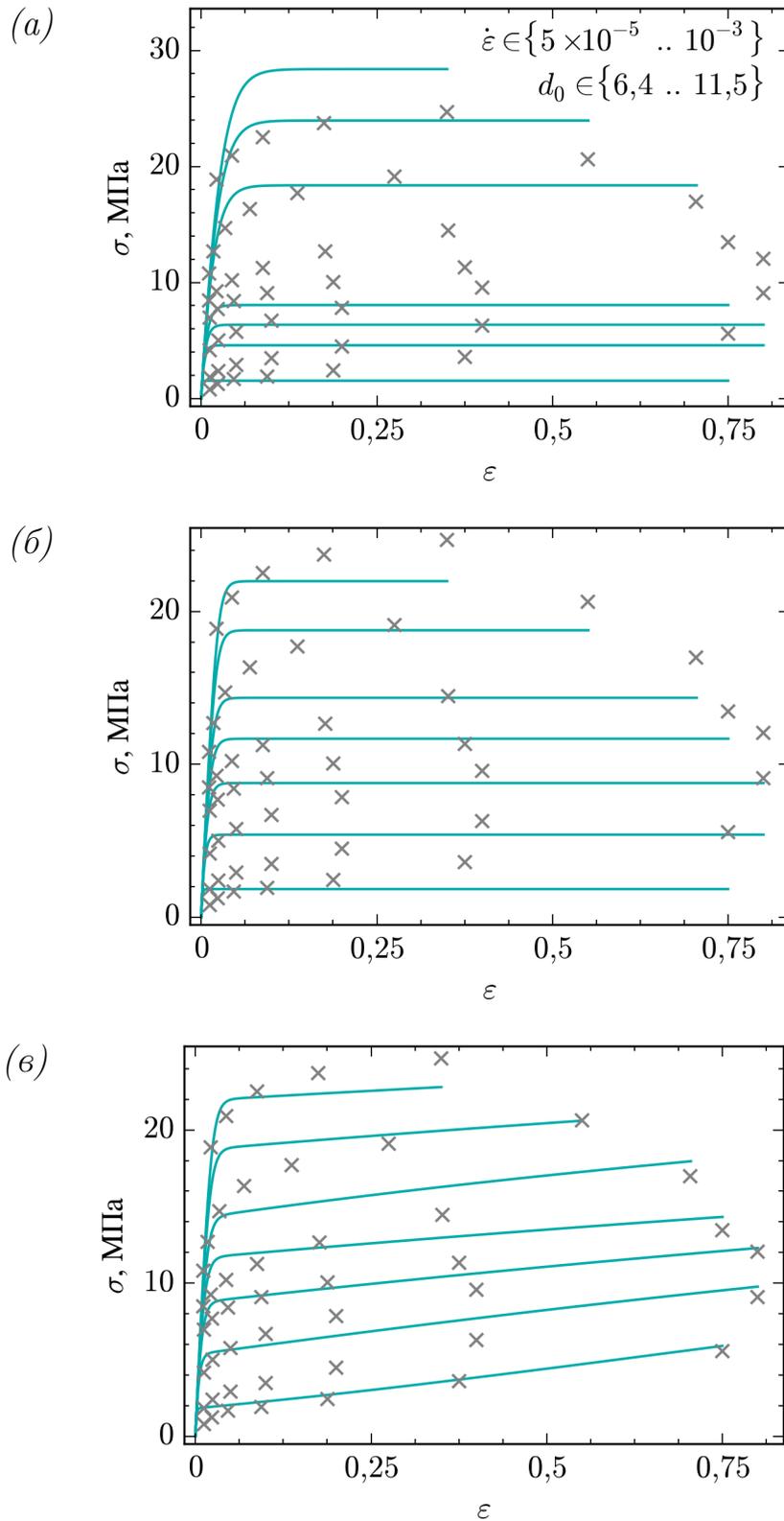


Рис. 2.3. Результаты промежуточных расчётов по модели на основе системы (2.10): после нулевого шага предложенного алгоритма (а), после первого шага (б) и после второго (в). Серыми знаками \times отмечены экспериментальные точки из [17].

ми кривыми и кривыми деформирования. Тем не менее, порядок найденных величин оказывается достаточно близок к целевому, что позволяет в результате первого шага получить кривые, сравнительно неплохо описывающие уровни напряжений в эксперименте (рис. 2.3б).

Эти кривые ожидаемо проходят строго горизонтально, так как не содержат компонент, отвечающих за описание упрочнения. После второго шага (определение параметров роста зёрен по соответствующим кривым; рис. 2.3в) часть упрочнения, связанная с ростом зёрен, оказывается учтённой, что позволяет корректно описать установившееся течение (точки в правой части графика). Недостатком является некорректное описание начального участка кривых, которое компенсируется при уточнении основных параметров на последнем шаге.

Таким образом, алгоритм воспроизводит постепенное усложнение модели путём учёта новых действующих в материале механизмов. Такой подход позволяет, в частности, отделить вклады разных механизмов в общий рост напряжения и сравнить их между собой. Результирующие кривые после применения всех шагов алгоритма представлены на рисунке 2.4. Найденные значения параметров приведены в таблице 2.1.

Аналогичным образом была обработана система, использованная в работе [52] и содержащая уравнения (2.3) и (2.8). Для этой системы основными параметрами являются λ , A , B ; параметрами эволюции — C_1 , C_2 , C_3 ; группа параметров упрочнения отсутствует. С помощью данной системы не удалось в полной мере описать имеющиеся данные, по всей видимости, как раз из-за отсутствия уравнения для упрочнения. В то же время, эволюция зёрен описывается уравнением (2.8) местами успешнее, чем уравнением (2.7). Поэтому в

Таблица 2.1. Найденные с помощью предложенного алгоритма значения параметров для системы уравнений (2.10)

A	B	α	D	G	β	φ	H_0	H	E_n
67,6	0,0532	2,35	0,367	10,3	$2,09 \times 10^{-5}$	0,676	4,89	3,56	2000,0

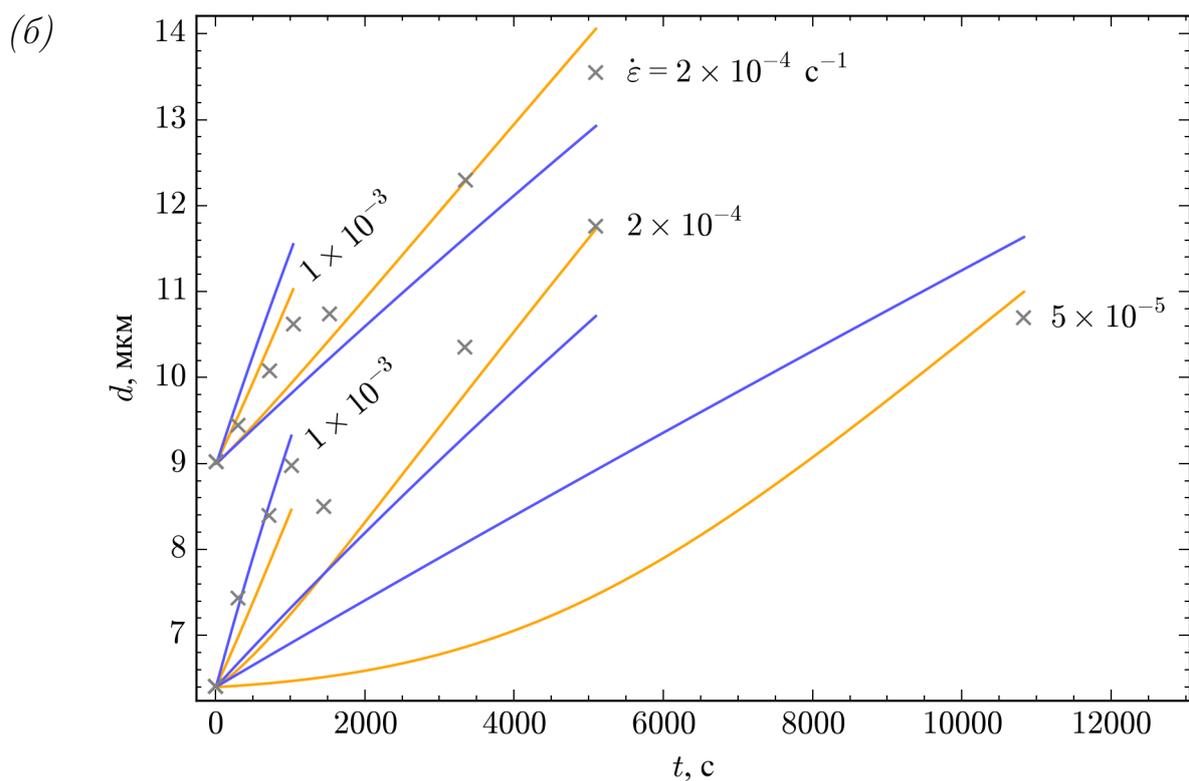
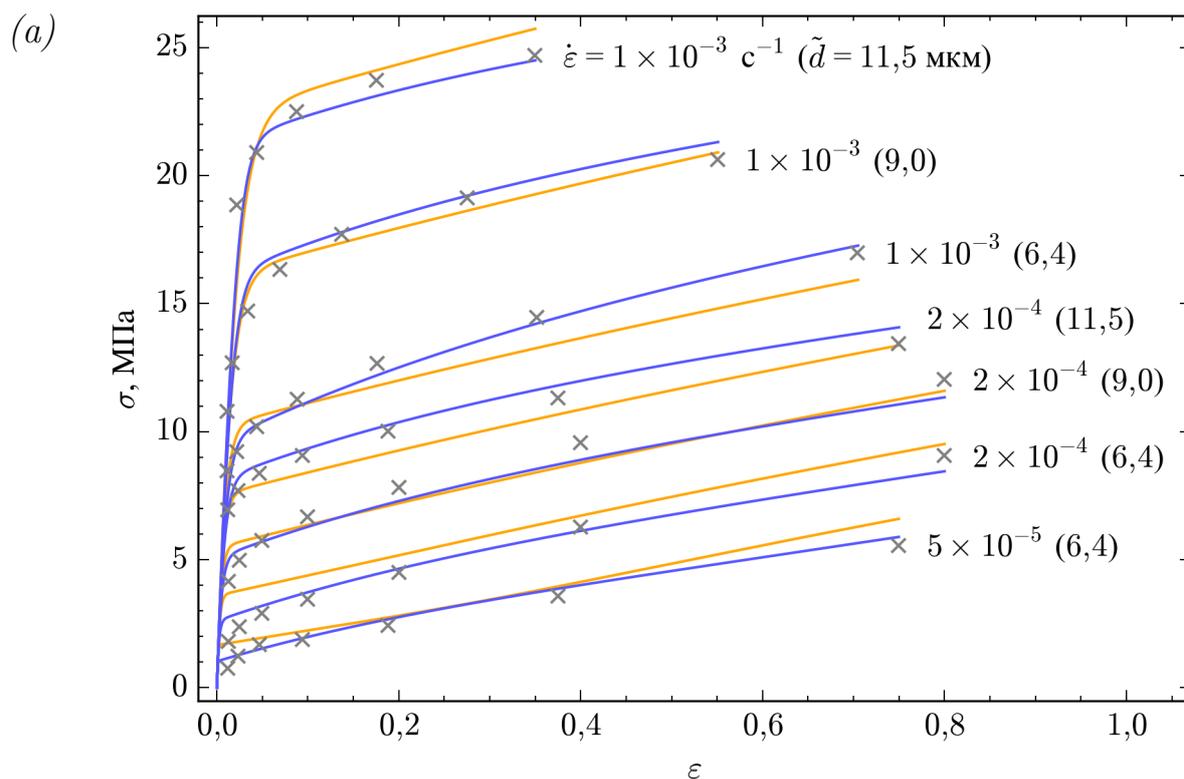


Рис. 2.4. Результаты расчёта по моделям, полученным с помощью предложенного алгоритма: кривые деформирования (a) и кривые роста зёрен (б). Синие линии соответствуют модели на основе системы (2.10), оранжевые — системы (2.12). Серыми знаками \times отмечены экспериментальные точки из [17].

качестве ещё одной пробной системы был взят набор уравнений, состоящий из основного уравнения (2.4) и уравнения для упрочнения (2.6) как в [31], с уравнением роста зёрен (2.8) согласно [52]. Данная система также была записана в нормированном виде

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_p &= \frac{(B(\sigma - h - 1))^\eta}{d^\alpha}; \\ \dot{d} &= \frac{C_1\sigma^4 + C_2\sigma^5}{1 + C_3\sigma^4 d}; \\ h &= H_0(1 - \exp(-H\varepsilon_p)); \\ \sigma &= E_n(\varepsilon - \varepsilon_p).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Найденные с помощью предложенного алгоритма значения параметров модели приведены в таблице 2.2, результаты расчётов представлены на рисунке 2.4. Следует заметить, что данная система является «комбинированной» в том смысле, что она состоит из уравнений, предложенных разными авторами. Таким образом, у неё по определению отсутствует авторский алгоритм идентификации параметров, обычно «прилагающийся» к каждой модели. Тем не менее, предложенный в настоящей работе алгоритм позволяет определить значения для параметров такой модели и получить с её помощью вполне приемлемое описание экспериментальных данных.

Проиллюстрируем также применимость алгоритма к различным экспериментальным данным на примере деформирования того же сплава Ti–6Al–4V при температуре 900 °С. Несмотря на кажущуюся незначительной разницу в абсолютных значениях, поведение сплава в соответствующем диапазоне температур заметно изменяется, поскольку данный сплав является двухфазным. Соотношение фаз, а вместе с ним и механические свойства материала, существен-

Таблица 2.2. Найденные с помощью предложенного алгоритма значения параметров для комбинированной системы уравнений (2.12)

B	η	α	C_1	C_2	C_3	H_0	H	E_n
0,671	1,41	1,96	$3,4 \times 10^{-4}$	$2,55 \times 10^{-5}$	$7,05 \times 10^{-5}$	8,62	1,29	2000,0

но зависят от температуры окружающей среды вплоть до окончания фазового перехода при ~ 1000 °C [22].

В качестве основных экспериментальных данных для данной температуры были рассмотрены данные из статьи [26], содержащей кривые деформирования и кривые роста зёрен. Однако, поскольку все представленные данные относятся к единственному начальному размеру зерна ($\tilde{d} = 7,4$ мкм), для уточнения модели к ним были добавлены данные для той же температуры из работы [63], содержащей скоростную кривую (в форме таблицы) и кривую деформирования для начального размера $\tilde{d} = 2,2$ мкм.

Также была предпринята попытка добавить данные по росту зёрен из работы [60]. Однако, как оказалось, эти данные не могут быть использованы совместно с данными из [26], поскольку предполагают существенно больший статический (под действием температуры, но в отсутствии деформирования) рост зёрен. Более того, этот рост должен ускоряться по мере увеличения размеров зёрен, тогда как в уравнении (2.7) текущий размер зёрен стоит в знаменателе, а уравнение (2.8) не описывает статический рост в принципе. Возникающий в связи с этим вопрос о воспроизводимости экспериментальных данных, относящихся к одному и тому же материалу в одинаковых условиях, требует проведения дополнительных исследований для уточнения поведения материала. Обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы, поэтому от использования данных из [60] было решено отказаться.

На рисунке 2.5 представлены результаты, полученные для модели (2.10) по данным из работ [26; 63]. Соответствующие значения параметров модели, найденные с помощью предложенного алгоритма, указаны в таблице 2.3. Та-

Таблица 2.3. Найденные значения параметров для системы уравнений (2.10) для случая температуры 900 °C

A	B	α	D	G	β	φ	H_0	H	E_n
1,03	0,0580	1,60	0,0676	0,884	$9,64 \times 10^{-7}$	$9,64 \times 10^{-7}$	8,10	4,23	2000,0

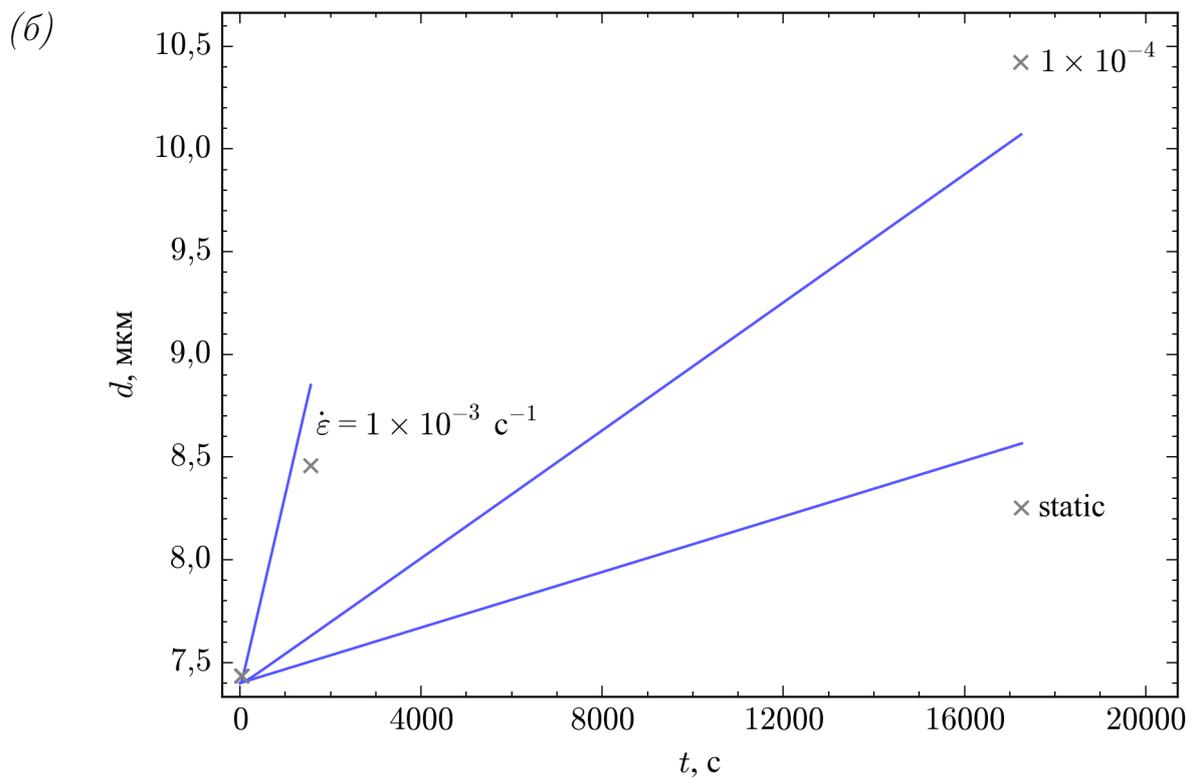
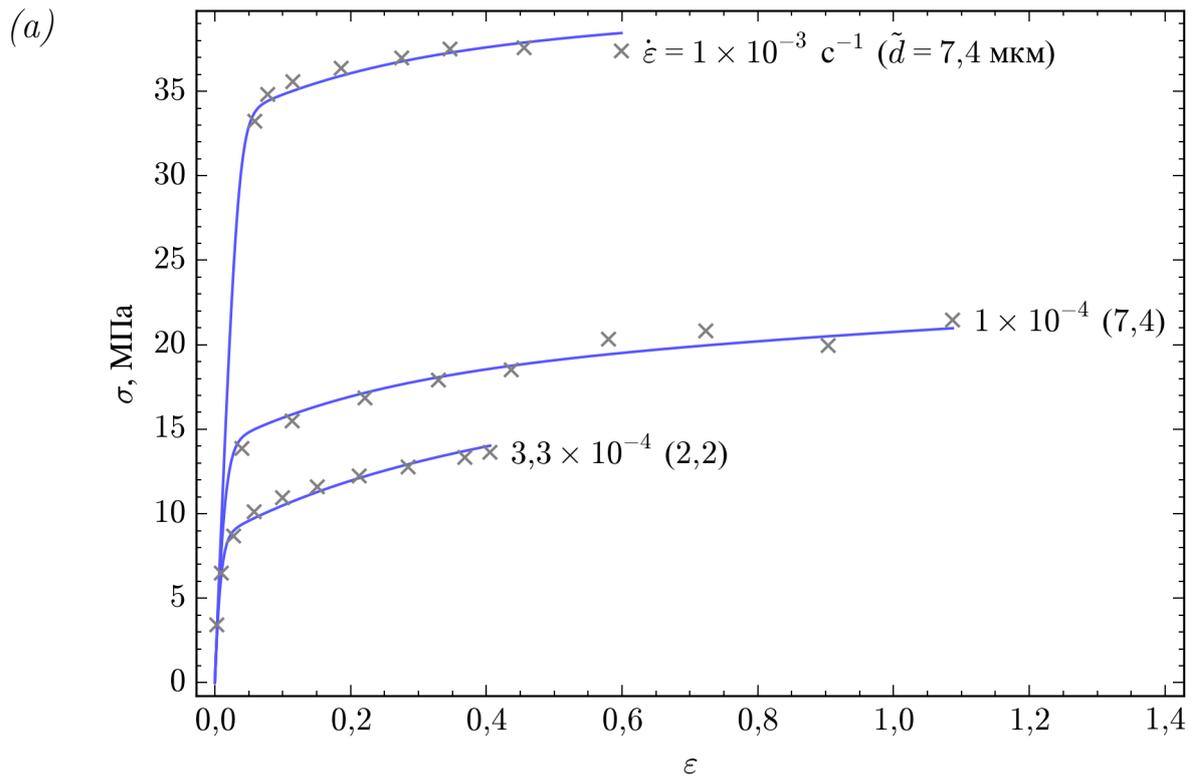


Рис. 2.5. Результаты расчёта по модели на основе системы (2.10) для случая температуры $900 \text{ }^\circ\text{C}$: кривые деформирования (а) и кривые роста зёрен (б). Серыми знаками \times отмечены объединённые экспериментальные точки из [26; 63].

ким образом, даже при небольшом количестве экспериментальных кривых, в том числе, полученных путём комбинирования данных из разных исследований (если они совместимы друг с другом), алгоритм выдаёт подходящие значения для параметров модели, позволяющие описать данные с удовлетворительной точностью. Более подробно вопрос о необходимом количестве кривых и предъявляемых к ним требованиях будет обсуждаться в следующем разделе.

2.4. Анализ алгоритма

Итак, предложенный алгоритм обладает некоторой степенью универсальности в рамках рассматриваемого класса определяющих соотношений сверхпластичности (2.1). Он может успешно применяться для поиска значений параметров модели как для различных определяющих соотношений и уравнений эволюции, так и для различных экспериментальных данных, описывающих поведение материала при деформировании. В частности, применение алгоритма возможно при использовании моделей и данных комбинированного характера (собранных из работ разных авторов).

Однако с практической точки зрения интересны лишь модели, обладающие предсказательной силой. Любое сколь угодно удачное приближение имеющихся экспериментальных данных оправдано лишь в том случае, если полученная модель пригодна для описания каких-либо других данных без априорного знания о них. Поэтому после разработки алгоритма основное внимание было уделено вопросам его проверки по двум основным направлениям.

2.4.1. Верификация моделей

Первое из направлений проверки алгоритма связано с изменением набора экспериментальных данных для оценки способности полученных с помощью алгоритма моделей предсказывать поведение кривых, не участвовавших в поиске значений параметров.

Сначала зададимся вопросом о том, каково *минимальное количество экспериментов*, необходимое для успешной идентификации параметров модели. Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим величины, которые необходимо задать извне для описания эксперимента с помощью используемой системы уравнений. В случае исследуемых определяющих соотношений в форме (2.1) такими величинами являются средний размер зёрен в образце до деформирования \tilde{d} (задающий начальное значение для параметра d) и, при использовании кривых деформирования, скорость деформации в эксперименте $\dot{\varepsilon}$ (в общем случае экспериментов со сложным нагружением — явный вид функции $\varepsilon(t)$ либо $\sigma(t)$).

Для успешного нахождения значений параметров модели требуется, чтобы для каждой такой величины в наборе кривых присутствовали зависимости для, по крайней мере, двух её различных значений. В противном случае параметры, регулирующие зависимость модели от соответствующей величины, заведомо нельзя определить корректно. Например, содержащее средний размер зёрен выражение в соотношении (2.5) имеет вид $\hat{A} := A/d^\alpha$. Если все кривые в наборе отвечают только одному начальному размеру d_u , после первого (не учитывающего рост зёрен) шага алгоритма приведённое выражение во всех точках всех входящих в набор кривых будет равняться некоторой константе \hat{A}_u . Следовательно, помимо найденных алгоритмом значений параметров A_u , α_u к аналогичной форме итоговых кривых будет приводить любая пара A и α , удовлетворяющая уравнению $A/d_u^\alpha = \hat{A}_u = A_u/d_u^{\alpha_u}$. Выбрать из этих пар правильную без наличия каких-либо иных априорных знаний о значениях параметров модели не представляется возможным.

Таким образом, «критически» необходимый набор экспериментальных данных содержит две кривые (отличающиеся как скоростью деформации, так и начальным средним размером зёрен), а «базовый» минимальный набор — четыре кривые (все комбинации из двух скоростей и двух размеров). Из обсуждавшихся ранее экспериментальных данных [17] можно выделить наборы обоих видов. В таблице 2.4 схематически изображены использовавшиеся наборы и показано,

какие из кривых (то есть кривые, соответствующие какими значениям величин) входят в разные наборы. Набором **full** названы сами экспериментальные данные, «базовый» набор обозначен **basic**, а два «критических» набора — *critical64* и *critical90*.

Помимо набора кривых на результат может оказывать влияние способ оцифровки каждой из них. «Сырые» экспериментальные данные представляют собой множество точек, формирующих кривую, однако эти точки расположены, как правило, очень плотно (так как время эксперимента велико, а снятие значений производится постоянно). Это приводит к тому, что при использовании всех точек система оказывается сильно переопределённой, и расчёт занимает очень большое время. Кроме того, когда данные берутся из литературы, оригинальные точки там зачастую отсутствуют, а кривые изображены в сглаженном непрерывном виде.

Следовательно, и в том, и в другом случае необходимо выбрать на кривой подмножество точек, элементы которого будут участвовать в определении значений для параметров моделей. Естественным для этих целей кажется использование равномерного распределения точек от нуля до максимального доступного на кривой значения деформации (оцифровка *uniform*), однако специфика кривых сверхпластического деформирования состоит в том, что наиболее существенно они изменяются на начальном участке, тогда как на конечном приближаются к прямой линии. Поэтому в качестве альтернативы можно предложить точки, распределённые логарифмически, то есть с абсциссами, построенными по следующей процедуре: берётся максимально доступное на кривой значение

Таблица 2.4. Выделение из набора кривых из [17] наборов с различным количеством кривых

	$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-5} \text{ c}^{-1}$	$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ c}^{-1}$	$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ c}^{-1}$
$\tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	full	full, basic, critical64	full, basic, critical90
$\tilde{d} = 9,0 \text{ мкм}$	—	full, basic, critical90	full, basic, critical64
$\tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$	—	full	full

деформации и последовательно делится на одно и то же число несколько раз (оцифровка \log).

В настоящей работе опробованы оба описанных способа оцифровки, причём количество точек было выбрано одинаковым в обоих случаях, чтобы оценить влияние на результат именно расположения точек, а не дополнительной информации, возникающей при увеличении их количества. Отметим, что, помимо рассмотрения разных оцифровок, возможен подход, при котором важность некоторых участков кривой увеличивается посредством введения весовых коэффициентов в основное уравнение МНК. Например, подобный метод применён в [39] для задачи определения по экспериментальным кривым значений параметров моделей пластического (вязкопластического) деформирования с нелинейным упрочнением.

Для объективного, а не чисто визуального сравнения кривых, рассчитанных по модели, с экспериментальными необходимо выбрать метрику. В ряде работ в качестве такой метрики применяется погрешность метода наименьших квадратов на последнем шаге расчёта, то есть сумма квадратов отклонений модельных точек от экспериментальных данных. Недостатком такой метрики является то, что она оперирует *абсолютными* значениями отклонений. Более правильным видится определение погрешности в конкретной точке как величины *относительной* разности значений:

$$\Delta_{ij} := \frac{|c_{ij} - e_{ij}|}{e_{ij}},$$

где Δ_{ij} — погрешность в i -й точке j -й кривой, c_{ij} — вычисленное по модели значение в этой точке, e_{ij} — ожидаемое (экспериментальное) значение. Взятие по модулю нужно для того, чтобы разнонаправленные погрешности не компенсировали друг друга при суммировании.

Далее предлагается проводить оценку погрешности двумя путями. Первый из них заключается в вычислении средней погрешности для j -й кривой

$$\Delta_{\text{avg},j} := \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \Delta_{ij}}{n_j},$$

где n_j — количество точек на j -й кривой; и по ней — общей средней погрешности по всем точкам всех кривых

$$\Delta_{\text{avg}} := \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} \Delta_{ij}}{\sum_{j=1}^N n_j},$$

где N — количество кривых в наборе. При этом в качестве опорных точек (то есть точек, в которых вычисляется погрешность) необходимо брать равномерно распределённые, поскольку в противном случае ошибка на участке с большей концентрацией точек даст больший вклад в общую погрешность, чем ошибка на участке с их меньшим числом. Погрешность, найденную таким образом, будем в дальнейшем называть *погрешностью по среднему*.

Такое усреднение хорошо показывает величину систематической ошибки, из-за которой расчётная кривая по всей длине отклоняется от ожидаемой. Однако при использовании метрики по среднему слабо идентифицируются те кривые, которые в целом приближают экспериментальные зависимости хорошо, но плохо описывают их форму на каких-то конкретных участках, обычно в начале или на конце. Например, типичной погрешностью алгоритма поиска значений параметров в моделях сверхпластичности является ситуация, когда получаемые по модели кривые резко «задираются» вверх в конце области расчёта. При этом общая погрешность может быть невелика, однако при продлении такой кривой в область больших значений деформации предсказательная сила модели оказывается крайне низкой.

В целях обнаружения таких случаев пойдём по второму пути и введём ещё одну метрику. Для j -й кривой вычислим её как максимум погрешностей во всех точках:

$$\Delta_{\text{max},j} := \max_{i=1}^{n_j} \Delta_{ij},$$

Для получения значения общей погрешности эти величины усредним по числу кривых в наборе:

$$\Delta_{\text{max}} := \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{\text{max},j}}{N},$$

Здесь в качестве опорных точек разумно рассматривать распределённые логарифмически, поскольку именно они при определении максимума $\Delta_{\max,j}$ позволяют учитывать погрешность как на начальном, так и на конечном участке кривой. Важно обратить внимание, что для получения общего значения погрешности производится не простой выбор максимального из $\Delta_{\max,j}$ среди кривых в наборе, а именно усреднение. В противном случае в результирующем значении оказалась бы потерянная информация обо всех кривых набора кроме одной (содержащей точку с наибольшим значением погрешности), что сделало бы эту метрику малоприменимой для сравнения разных наборов кривых между собой. Погрешность, рассчитанную таким образом, будем называть далее *погрешностью по максимуму*.

В таблице 2.5 приведены погрешности, полученные на полном наборе кривых деформирования из [17] при его приближении с помощью моделей на основе рассматриваемых систем уравнений (2.10) и (2.12), построенных с использованием разных наборов кривых и способов их оцифровки (*log* или *uniform*). Ячейки таблицы на пересечении строки *log* и столбца **full** соответствуют моделям, результаты расчёта по которым приведены на рисунке 2.4.

Видно, что выбранные метрики, действительно, приводят к ожидаемым

Таблица 2.5. Погрешности при аппроксимации экспериментальных данных с использованием моделей, построенных на основе разных наборов кривых и способов их оцифровки. Приведены погрешности по среднему Δ_{avg} , в скобках погрешности по максимуму Δ_{max} .

Набор кривых \ Тип оцифровки	full	<i>basic</i>	<i>critical64</i>	<i>critical90</i>
Система уравнений (2.10)				
<i>log</i>	3,85 (23,58)	5,75 (24,45)	17,22 (27,4)	33,55 (63,24)
<i>uniform</i>	3,58 (25,03)	3,78 (30,4)	—	—
Система уравнений (2.12)				
<i>log</i>	6,71 (42,85)	9,83 (34,56)	42,59 (60,19)	26,9 (55,78)
<i>uniform</i>	4,79 (57,58)	5,13 (50,94)	—	—

результатам: комбинированная система уравнений (2.12) описывает экспериментальные данные немного хуже системы (2.10) в смысле погрешности по среднему и заметно хуже при использовании погрешности по максимуму, что связано с существенно большей погрешностью на начальных участках кривых, отвечающих размеру зёрен 6,4 мкм и скоростям деформации $5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ и, особенно, $2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

Для значений из таблицы 2.5, относящихся к системе уравнений (2.10), также приводятся графики погрешностей по отдельным кривым для различных наборов и способов оцифровки (рис. 2.6). Показанные результаты подтверждают сделанное предположение о том, что набор *basic* из четырёх кривых достаточен для построения модели, обладающей предсказательной силой. Общая погрешность, как и ожидалось, возрастает по сравнению с погрешностью, наблюдаемой при использовании полного набора *full*, однако погрешности для конкретных кривых распределены похожим образом. В целом все погрешности остаются в пределах разумного.

В то же время уменьшение количества кривых в наборе до двух (наборы *critical90* и *critical64*) приводит к резкому росту погрешности аппроксимации, причём получаемыми моделями корректно описываются только те кривые, по которым модель рассчитывалась. Распределение погрешностей для конкретных кривых становится совершенно не похожим на распределение для полного набора (имеет ярко выраженные пики и провалы). Таким образом, присутствие в наборе кривых, относящихся к разным размерам зёрен и скоростям деформации, само по себе не гарантирует наличия у модели предсказательной силы.

Кроме того, по рисунку 2.6 можно видеть, что при одинаковом наборе кривых оцифровка *uniform* показывает лучшее значение погрешности по среднему, однако проигрывает оцифровке *log* при оценке погрешности по максимуму. Это согласуется с ожиданиями, поскольку модель на основе равномерно распределённых точек имеет меньше информации о форме кривой в её начале (то есть именно там, где погрешность Δ_{\max} наибольшая), в то время как модель, по-

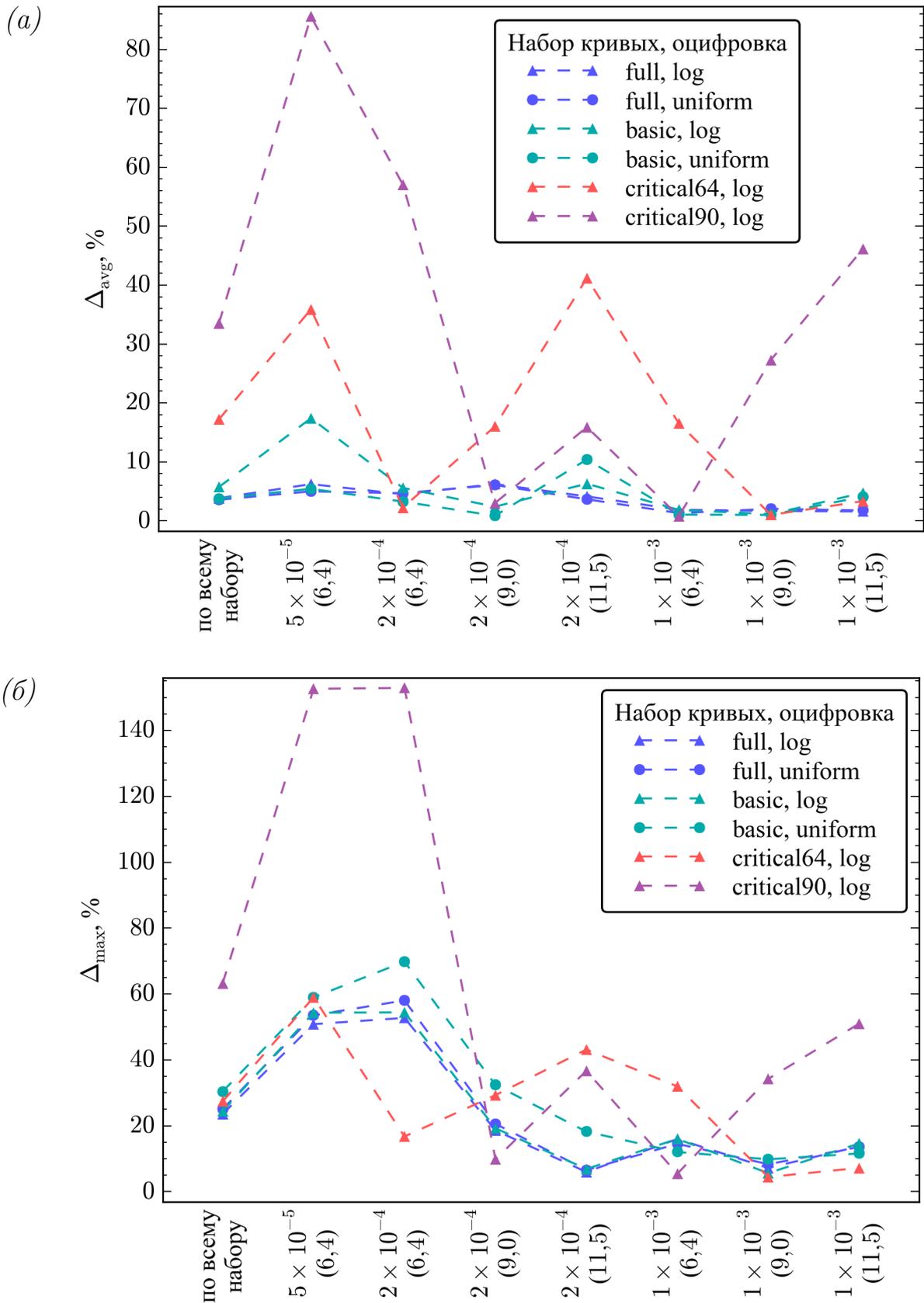


Рис. 2.6. Погрешности по среднему (а) и по максимуму (б) при аппроксимации экспериментальных данных с помощью модели на основе системы (2.10): по всему набору и для отдельных кривых. Цифра в подписи — скорость деформации ($\dot{\epsilon}$, с^{-1}), в скобках — средний размер зёрен в образце до деформирования (\tilde{d} , мкм).

строенная по логарифмически сконцентрированным к началу кривой точкам, описывает эту область лучше, однако достигается это ценой изменения формы всей кривой, в том числе более длинного финального участка (что и приводит ухудшению погрешности по среднему).

В заключение сравним описание экспериментальных данных с помощью моделей, полученных на основе полного и «базового» наборов кривых деформирования для системы уравнений (2.10) при оцифровке \log (рис. 2.7). Соответствующие значения погрешностей приведены в ячейках (\log , **full**) и (\log , **basic**) таблицы 2.5. Как и предполагалось теоретически, модель по неполному набору данных чуть лучше приближает кривые, по которым она была построена, но хуже — все остальные.

Заметим, однако, что приближение кривой, не участвовавшей в определе-

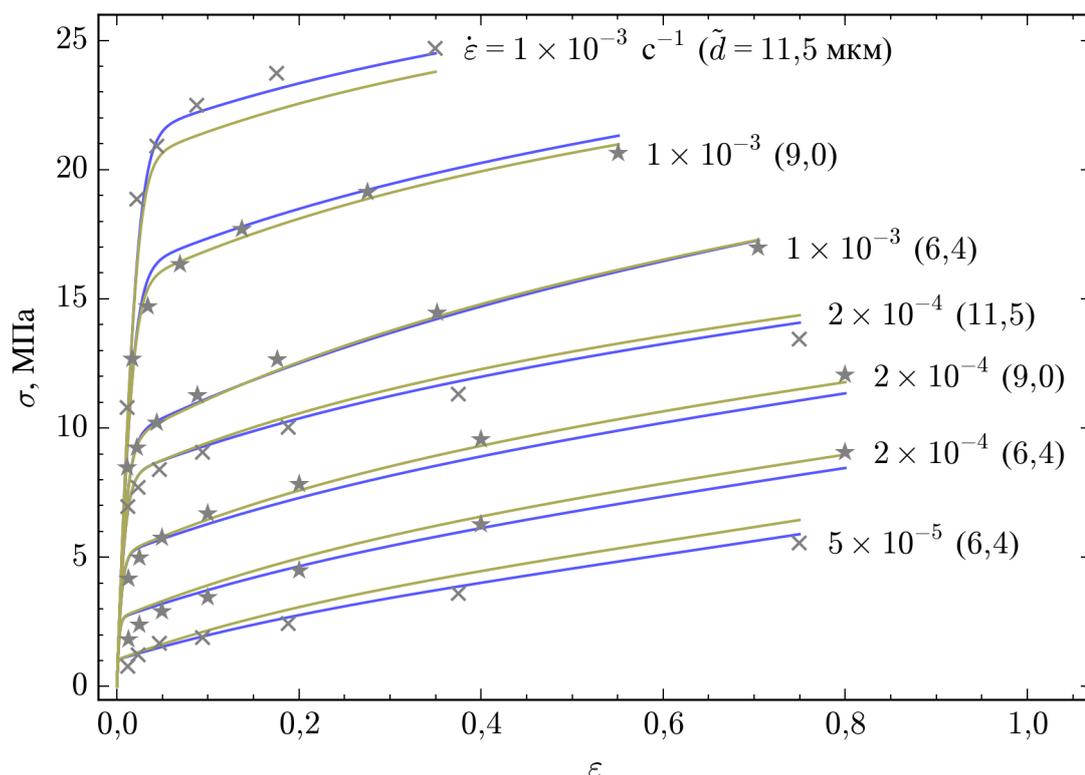


Рис. 2.7. Кривые деформирования, рассчитанные по моделям на основе системы (2.10), построенным по полному набору данных **full** (синие линии, аналогичны рис. 2.4) и «базовому» набору **basic** (жёлтые линии). Серыми знаками отмечены экспериментальные точки из [17]: \times — входившие только в полный набор, \star — в оба набора.

нии параметров, но проходящей между входившими в набор кривыми (а именно, $\dot{\varepsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$), меньше отличается от приближения по полному набору, чем приближения кривых, расположенных по краям (то есть $\dot{\varepsilon} = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $\tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$ и $\dot{\varepsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $\tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$). Это также подтверждается графиками погрешностей по отдельным кривым (рис. 2.6). Можно заключить, что по мере удаления параметров контрольного эксперимента от параметров экспериментов, использовавшихся для построения модели, погрешность аппроксимации возрастает. Таким образом, при планировании экспериментов, данные которых затем будут использованы для идентификации моделей материала, следует по возможности выбирать параметры экспериментов, близкие к краям допустимого диапазона их значений, а не к его центру.

2.4.2. Устойчивость алгоритма к погрешностям экспериментальных данных

Вторым важным направлением верификации получаемых с помощью алгоритма моделей является проверка на устойчивость. В данном случае под устойчивостью понимается способность алгоритма идентификации параметров игнорировать (сглаживать) присутствующий в данных шум. Важность данного вопроса в контексте общей методологии разработки и аттестации моделей подчёркивается в [53].

Одним из методов анализа такой устойчивости является вычисление корреляционной матрицы параметров [40]. Другой возможный подход заключается в наложении случайного шума на уже имеющиеся или специально генерируемые входные данные и оценке происходящих в результате этого изменений в модели. Так, в уже упоминавшейся работе [39] авторы используют подобный подход для выбора оптимальных весовых коэффициентов в методе наименьших квадратов, минимизируя размер «облака параметров», который вычисляется путём линеаризации функционала ошибки при многократно наложенном случайном шуме. Генерируемые случайные данные рассматриваются, например, в [23].

В настоящей работе к системам уравнений сверхпластичности из исследуемого класса (2.1) применён похожий подход. Вызванная шумом ошибка оценивалась с помощью введённых в предыдущем разделе метрик, учитывающих характерные особенности сверхпластического деформирования. При этом, поскольку для вычисления этих метрик требуется построение по модели соответствующих ей кривых, методы оптимизации расчёта (такие как линеаризация функционала ошибки по примеру работы [39]) не использовались. Иными словами, к каждому сгенерированному набору зашумлённых данных применялся полный алгоритм нахождения параметров модели.

Итак, для моделирования случайного шума в экспериментальных данных к каждой точке каждой кривой деформирования по оси ординат (то есть к напряжениям) добавлялось случайное равномерно распределённое отклонение в пределах 5 %. Иными словами, производилась замена данных по формуле $\sigma_{ij} \rightarrow (0,95 + 0,1\nu) \cdot \sigma_{ij}$, где σ_{ij} — исходное значение напряжения в i -й точке j -й кривой, ν — стандартная (то есть на отрезке $[0, 1]$) равномерно распределённая непрерывная случайная величина.

По модифицированному набору данных с помощью предложенного алгоритма по схеме (2.11) определялись значения параметров в системе уравнений (2.10). Скоростные кривые и кривые роста зёрен при этом не изменялись. В качестве начального выступало «универсальное» приближение, то есть алгоритм не обладал какой-либо информацией о модели, полученной по исходным (не изменённым) данным.

Поскольку накладываемый шум имел случайную статистическую природу, была проведена серия из 26 расчётов, в каждом из которых шум накладывался заново, независимо от предыдущих. После этого вычислялись средние по всей серии погрешности (общая и для каждой кривой, метрики совпадали с описанными выше), а также среднеквадратичные (стандартные) отклонения этих погрешностей. Результаты расчётов приведены в таблице 2.6.

Для расчётов из серии, показавших самую большую и самую маленькую

Таблица 2.6. Статистические характеристики погрешности при аппроксимации оригинальных экспериментальных кривых с помощью моделей на основе системы (2.10), построенных по зашумлённым данным.

Кривая	Средняя погрешность	Стандартное отклонение
	Δ_{avg} (Δ_{max})	Δ_{avg} (Δ_{max})
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	6,4 (51,28)	2,56 (1,31)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	4,6 (53,29)	0,89 (2,4)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 9,0 \text{ мкм}$	6,2 (18,65)	0,76 (1,7)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$	4,1 (6,18)	1,12 (1,49)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	1,89 (15,83)	0,43 (0,72)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 9,0 \text{ мкм}$	2,06 (7,48)	0,63 (0,76)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$	1,48 (13,73)	0,51 (0,42)
по всему набору	3,91 (23,78)	0,38 (0,65)

погрешности, построены полные изображения кривых (рис. 2.8). Нетрудно заметить, что визуально результаты мало отличаются друг от друга, что осложняет построение гипотез о влиянии характера наложенного шума на получаемую погрешность. Это связано с тем, что, как видно из таблицы 2.6, среднеквадратичные отклонения погрешностей существенно меньше их средних значений. Иными словами, разница между крайними случаями незаметна на фоне общей погрешности как таковой.

Чтобы устранить влияние общей погрешности и увидеть «чистую» ошибку, возникающую при наложении случайного шума, была предпринята попытка разделить наблюдаемые эффекты. Для этого был построен искусственный (модельный) набор данных, в котором набор кривых и абсциссы точек совпадали с оригинальными экспериментальными данными, а ординаты (значения напряжений) вычислялись по модели, построенной на основании этих данных с помощью описанного алгоритма (кривые на рис. 2.4). Далее, для этого искусственного набора осуществлялся тот же анализ на устойчивость: накладывался шум, проводилась серия из 26 расчётов, определялись средние погрешности и среднеквадратичные отклонения погрешностей.

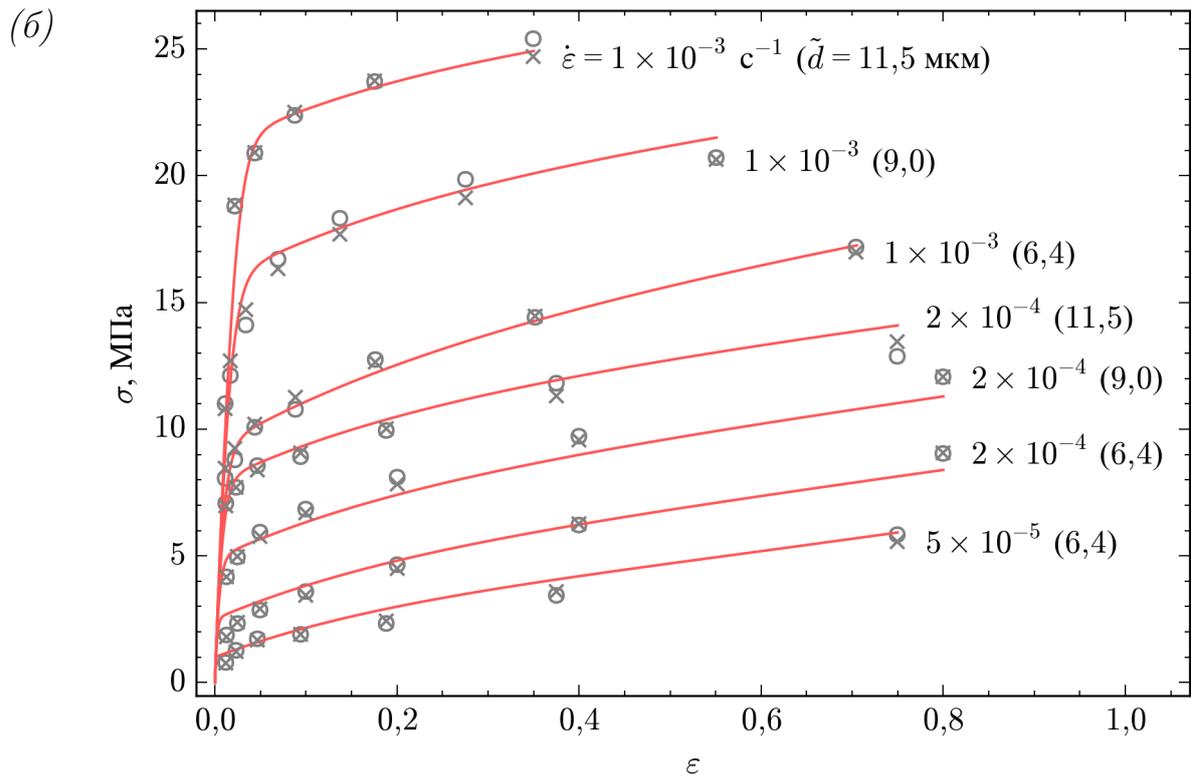
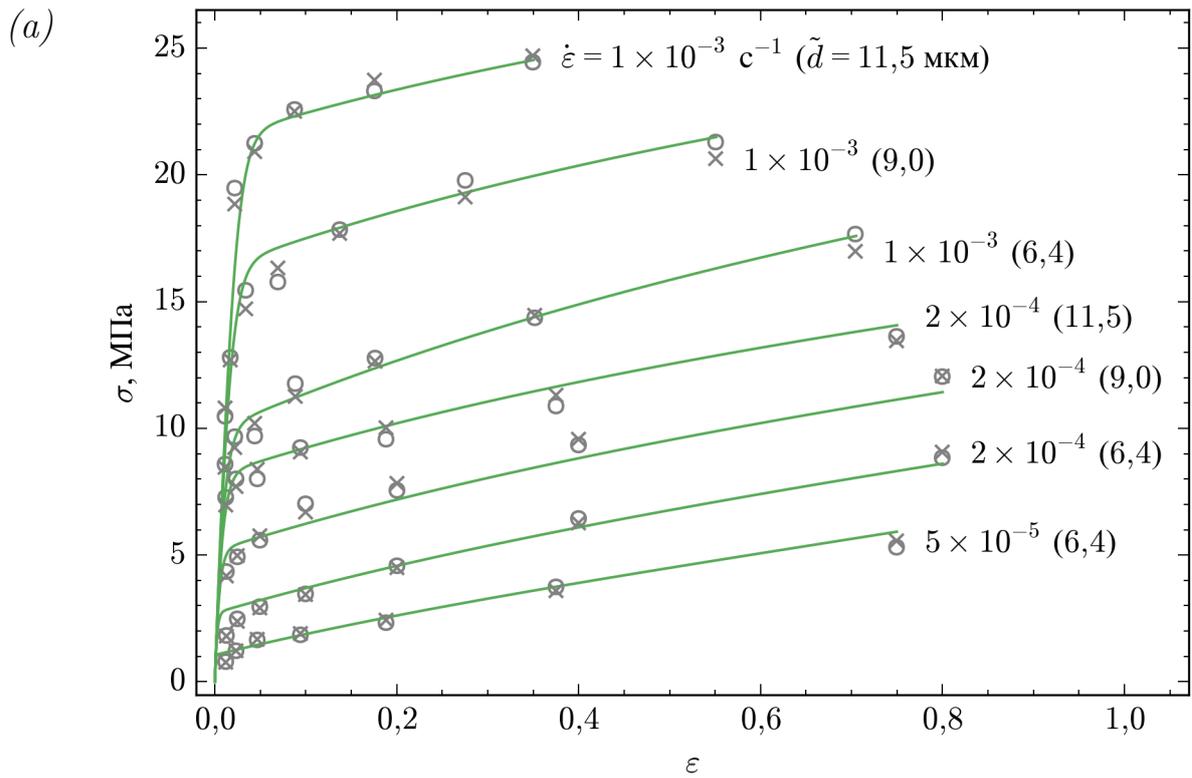


Рис. 2.8. Результаты расчётов по моделям на основе системы (2.10), показавшим минимальную (a) и максимальную (b) погрешности в серии расчётов с зашумлёнными экспериментальными данными. Знаками \times отмечены исходные данные, знаками \circ — данные с наложенным шумом.

Таблица 2.7. Статистические характеристики погрешности при аппроксимации искусственных кривых с помощью моделей на основе системы (2.10), построенных по зашумлённым данным.

Кривая	Средняя погрешность	Стандартное отклонение
	$\Delta_{\text{avg}} (\Delta_{\text{max}})$	$\Delta_{\text{avg}} (\Delta_{\text{max}})$
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	1,98 (3,33)	0,93 (1,69)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	1,18 (2,29)	0,58 (0,88)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 9,0 \text{ мкм}$	0,8 (1,63)	0,39 (0,73)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$	0,89 (1,54)	0,53 (0,96)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	0,81 (1,5)	0,5 (0,79)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 9,0 \text{ мкм}$	0,68 (1,01)	0,52 (0,6)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$	1,0 (1,17)	0,57 (0,57)
по всему набору	1,06 (1,78)	0,4 (0,69)

Результаты расчётов с искусственным набором данных приведены в таблице 2.7. Нетрудно заметить, что на этом наборе значения отклонений погрешностей сохранились практически на том же уровне, что и при наложении шума на оригинальные экспериментальные данные, тогда как средние значения уменьшились в несколько раз.

Таким образом, можно условно представлять погрешность на зашумлённых экспериментальных данных δ_e как сумму: $\delta_e = \delta_0 + \delta_m$, где δ_0 — отклонение модельных данных от экспериментальных, а δ_m — погрешность на самих модельных данных. Первое слагаемое δ_0 не зависит от наложенного шума и показывает, насколько удачно выбранная система определяющих соотношений в принципе описывает имеющиеся экспериментальные данные при использовании соответствующих значений для параметров. Оно вносит вклад в общую погрешность, однако не влияет на среднеквадратичное отклонение. Второе же слагаемое δ_m имеет вероятностный характер и показывает, собственно, реакцию модели на наложенный шум.

Для серии расчётов с использованием искусственных данных также были построены полные изображения результирующих кривых, показавших самую

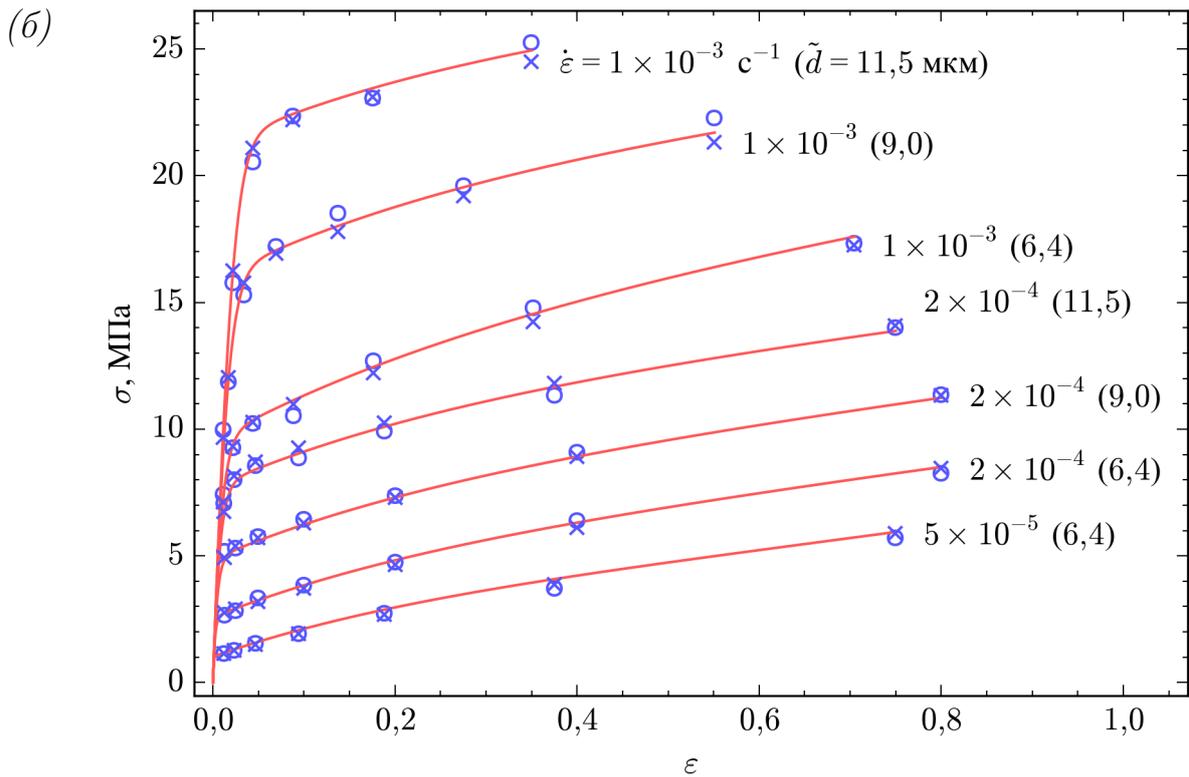
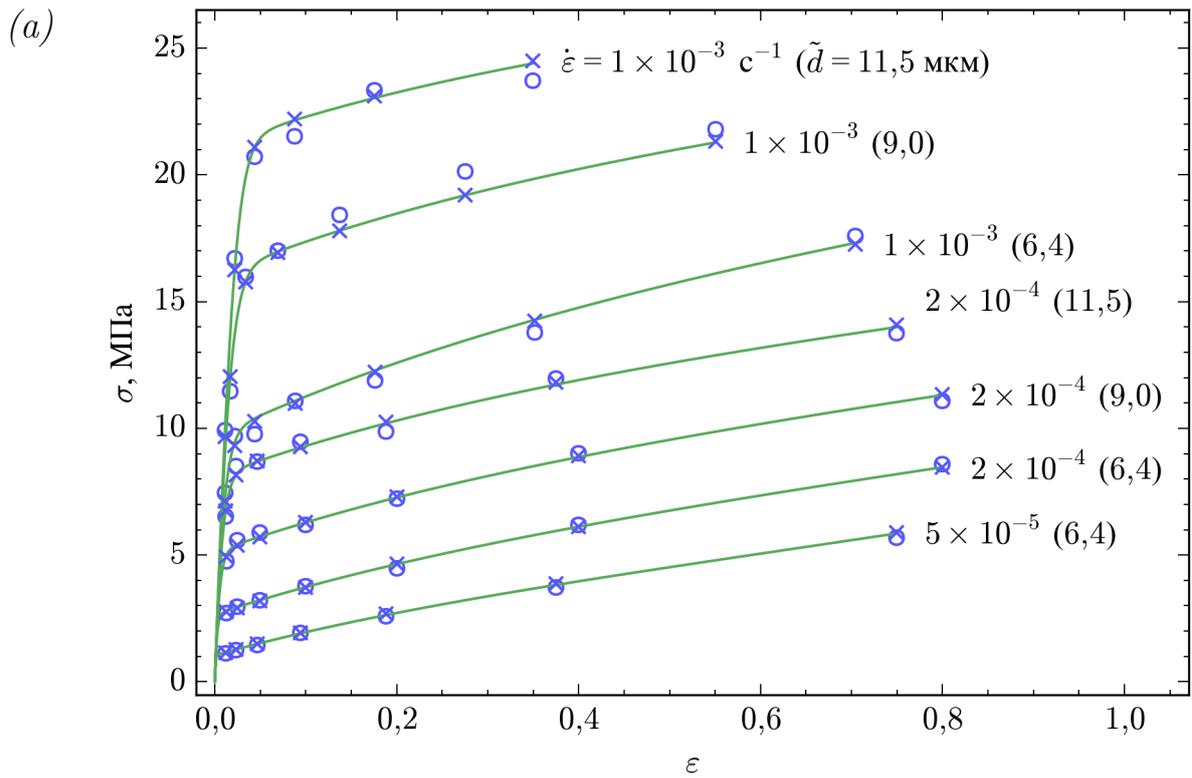


Рис. 2.9. Результаты расчётов по моделям на основе системы (2.10), показавшим минимальную (а) и максимальную (б) погрешности в серии расчётов с зашумлёнными искусственными данными. Знаками \times отмечены исходные искусственные данные, знаками \circ — данные с наложенным шумом.

большую и самую маленькую погрешность (рис. 2.9). Как и ожидалось, на этих кривых отличие результатов более заметно, что позволяет сделать некоторые выводы о зависимости погрешности от характера шума. Видно, что максимальная погрешность наблюдается в случае, когда на начальном участке кривых шум преимущественно занижает значения, а на финальном участке в основном завышает. Такие отклонения могут быть описаны моделью систематически, то есть подобный шум неотличим от иной формы оригинальной (не зашумлённой) кривой. В результате расчёт по алгоритму приводит к кривой с изменённой на всём её протяжении формой — более пологим начальным участком и более крутым финальным, — а также к сдвигу из оригинального положения. Минимальная погрешность, напротив, наблюдается при отклонениях, более-менее чередующихся в сторону завышения и занижения исходных значений. При этом отклонения «компенсируют» друг друга, и кривая, получаемая в результате работы алгоритма, приближается к промежуточному положению, которое неизбежно оказывается близко к оригинальной кривой.

Необходимо отметить, что данная серия вычислений осуществлялась в два этапа: сначала было проведено 13 расчётов и определены средние значения и среднеквадратичные отклонения погрешностей, после чего было проведено ещё 13 расчётов и те же величины находились для полной серии (эти значения приведены в таблице 2.7). Отличие погрешностей, полученных после первой части расчётов, от погрешностей по полной серии составило доли процента, что свидетельствует о получении корректных средних значений погрешностей уже после 10–15 независимых расчётов с наложением шума. Увеличение числа расчётов не вносит принципиальных изменений в результат, а лишь незначительно уточняет его.

Аналогичные расчёты проделаны и по комбинированной системе уравнений (2.12). В соответствии с предлагаемой методикой они основывались на искусственных (модельных) данных, очищенных от влияния исходной погрешности. Значения средних погрешностей и среднеквадратичных (стандартных)

Таблица 2.8. Статистические характеристики погрешности при аппроксимации искусственных кривых с помощью моделей на основе системы (2.12), построенных по зашумлённым данным.

Кривая	Средняя погрешность	Стандартное отклонение
	$\Delta_{\text{avg}} (\Delta_{\text{max}})$	$\Delta_{\text{avg}} (\Delta_{\text{max}})$
$\dot{\epsilon} = 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	2,05 (3,4)	0,8 (1,32)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	1,16 (2,38)	0,65 (1,13)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 9,0 \text{ мкм}$	0,86 (1,81)	0,48 (0,7)
$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$	0,88 (1,54)	0,56 (0,86)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 6,4 \text{ мкм}$	1,04 (1,59)	0,59 (0,75)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 9,0 \text{ мкм}$	0,85 (1,18)	0,54 (0,8)
$\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}; \tilde{d} = 11,5 \text{ мкм}$	0,95 (1,18)	0,61 (0,65)
по всему набору	1,12 (1,87)	0,4 (0,66)

отклонений для этой серии содержатся в таблице 2.8.

Наконец, можно сравнить значения параметров моделей с максимальной и минимальной погрешностью из модельной серии расчётов с данными для оригинальных моделей (табл. 2.9). Сильное изменение параметра β системы уравнений (2.10) связано с тем, что его оригинальное значение крайне мало. Этот параметр отвечает за статический (в условиях отсутствия нагрузки) рост зёрен, но экспериментальные данные содержат лишь один эксперимент такого вида, в силу чего значение данного параметра не может быть определено алгоритмом полноценно.

Значения остальных параметров изменяются в небольших пределах, что позволяет говорить об устойчивости не только в смысле аппроксимации кривых деформирования, но и в смысле полученных параметров модели. Важно отметить, что значения некоторых параметров моделей, показавших максимальную и минимальную погрешности, отличаются друг от друга меньше, чем каждое из них от исходного. Это ещё раз подчёркивает существенно нелинейную связь между параметрами модели и рассчитанными по ней кривыми, аппроксимирующими экспериментальные данные, которая исключает возможность использова-

Таблица 2.9. Сравнение параметров оригинальных моделей (табл. 2.1, 2.2) и моделей, построенных по зашумлённым искусственным данным

Параметр	Оригинальная модель	Модель с наименьшей погрешностью		Модель с наибольшей погрешностью	
Система уравнений (2.10)					
A	67,6	62,0	(-8,2%)	61,4	(-9,1%)
B	0,0532	0,0534	(+0,29%)	0,0497	(-6,5%)
α	2,35	2,32	(-1,4%)	2,26	(-4,0%)
D	0,367	0,367	(+0,015%)	0,367	(+0,076%)
G	10,3	10,3	(+0,23%)	10,3	(+0,43%)
β	$2,09 \times 10^{-5}$	$1,2 \times 10^{-4}$	(+470%)	$4,77 \times 10^{-4}$	(+2200%)
φ	0,676	0,677	(+0,19%)	0,678	(+0,31%)
H_0	4,89	4,92	(+0,58%)	5,4	(+10%)
H	3,56	3,3	(-7,3%)	4,03	(+13%)
Система уравнений (2.12)					
B	0,671	0,66	(-1,6%)	0,661	(-1,5%)
η	1,41	1,42	(+0,5%)	1,42	(+0,64%)
α	1,96	1,96	(-0,082%)	1,96	(-0,41%)
C_1	$3,4 \times 10^{-4}$	$3,37 \times 10^{-4}$	(+9,6%)	$4,01 \times 10^{-4}$	(+18%)
C_2	$2,55 \times 10^{-5}$	$3,81 \times 10^{-5}$	(+50%)	$4,13 \times 10^{-5}$	(+62%)
C_3	$7,05 \times 10^{-5}$	$9,68 \times 10^{-5}$	(+37%)	$1,03 \times 10^{-4}$	(+47%)
H_0	8,62	9,82	(+14%)	9,9	(+15%)
H	1,29	1,07	(-17%)	1,0	(-22%)

ния при сравнении моделей метрик, основанных только на значениях входящих в модель параметров (без непосредственного учёта формы кривых, получаемых по этим моделям).

2.5. Заключение

Подбор подходящих значений для параметров, входящих в системы уравнений, описывающих сверхпластическое деформирование материалов, является

ся актуальной задачей, неизбежно возникающей при решении краевых задач сверхпластичности. Данной теме посвящено множество работ разных авторов, в которых предлагаются различные определяющие соотношения и уравнения эволюции, в большей или меньшей степени основанные на физической интерпретации микроструктурных механизмов. Для соотношений разрабатываются алгоритмы вычисления значений параметров, зачастую сложные и многоступенчатые, создаваемые под конкретный вид системы уравнений. Близость результатов, полученных по построенным моделям, к оригинальным экспериментальным данным оценивается, как правило, субъективно.

В настоящей работе предпринята попытка унифицировать подход к определению параметров моделей для конкретного, но достаточно широкого класса определяющих соотношений сверхпластичности. Приведена схема алгоритма, не привязанного к конкретной системе уравнений в рамках данного класса, то есть применимого как к различным определяющим соотношениям и уравнениям эволюции, так и к различным экспериментальным данным, описывающим поведение материала при сверхпластическом деформировании (в частности, комбинированным, то есть объединяющим результаты разных авторов).

Для проведения верификации моделей предложены метрики, численно выражающие степень приемлемости построенного по модели приближения. В терминах этих метрик оказывается возможным создание методики проверки корректности и устойчивости моделей с параметрами, вычисляемыми с помощью того или иного алгоритма. Важно отметить, что метрики не связаны напрямую ни с определяющими соотношениями, ни с предложенным алгоритмом и представляют собой самостоятельный инструмент для объективной оценки качества моделей сверхпластичности. В частности, величина погрешности модели при аппроксимации кривых, на основе которых она исходно была построена, является свойством пары «набор кривых — система уравнений» и может служить мерой пригодности выбранных определяющих соотношений для описания конкретных экспериментальных данных.

Адекватность введённых метрик подтверждается результатами проведённого с их помощью сравнения моделей, построенных на основе различных систем уравнений и наборов входных данных. В том числе показано, что полученные с использованием предложенного алгоритма модели обладают предсказательной силой, а сам алгоритм демонстрирует устойчивость по отношению к отклонениям («шумам») во входных данных, причём не только в смысле аппроксимации экспериментальных кривых, но и в смысле значений параметров модели.

Моделирование сложного нагружения: формовка листовых материалов давлением

В настоящей главе используются результаты работ [48; 56].

3.1. Введение

Основное применение моделей поведения материалов в различных условиях — проведение конструкционных расчётов, воспроизводящих реальные технологические процессы. Сверхпластическое деформирование является распространённым способом промышленной обработки материалов в связи с рядом предоставляемых им преимуществ, таких как [37]:

- Возможность достижения существенных значений деформации до разрушения, позволяющая создавать изделия большого размера и/или сложной формы.
- Сохранение микроструктуры материала в процессе деформирования, делающее возможным создание бездефектных изделий либо заготовок с более однородными свойствами, что облегчает их последующую обработку другими методами.
- Относительно низкие напряжения течения, которые позволяют обрабатывать с приемлемым уровнем нагрузки даже жёсткие сплавы, снижают требования к используемому оборудованию и его стоимость, а также уменьшают износ частей, находящихся в непосредственном контакте с обрабатываемым изделием.

Благодаря этим особенностям сверхпластический режим деформирования применяется во многих процессах обработки металлов давлением, в частности, в лочении, прокатке, ковке, объёмной и листовой штамповке.

Вместе с тем, для деформирования изделий в режиме сверхпластичности необходимо соблюдать определённые технологические требования к процессу обработки. Некоторые из них имеют общий характер и не зависят от конкретного вида процесса — это, в первую очередь, необходимость подготовки материала с подходящей микроструктурой (то есть обеспечения в заготовке размера зёрен, допускающего возникновение сверхпластичности), а также поддержание необходимых для режима сверхпластичности температурно-скоростных условий на всём протяжении процесса деформирования.

Другие особенности, напротив, характерны для конкретных процессов. Так, при формовке листовых материалов, очень важным оказывается контроль толщины изделия. Возникающие в процессе сверхпластической обработки значительные деформации приводят к существенному уменьшению толщины листа. Поскольку толщина готового изделия является важным технологическим параметром, в некоторых случаях наблюдаемое истончение материала может выступать лимитирующим фактором для применения сверхпластичности как таковой, либо, по крайней мере, при выборе используемых в процессе обработки скоростей и давлений [9; 10; 42; 59].

В связи с этим, одной из важнейших задач механики сверхпластичности является разработка моделей, корректно описывающих поведение материала при сложном нагружении, возникающем в подобных технологических процессах. Далее в этом разделе обработка металлов давлением будет рассматриваться на примере формовки изделий из листового материала посредством избыточного давления газа (один из вариантов листовой штамповки). Для формализации этого процесса в виде краевых задач механики обычно применяются некоторые допущения, например [37]:

- материал полагается однородным, изотропным и несжимаемым;
- упругие деформации пренебрежимо малы по сравнению с пластическими;
- деформация происходит с малой скоростью при постоянной температуре;

- толщина изделия много меньше его линейных размеров, а размер зёрен в материале, в свою очередь, много меньше толщины;
- детали аппаратуры рассматриваются как абсолютно жёсткие, а краевые условия формулируются в геометрической постановке как на границе области формовки (жёсткая заделка, шарнирное закрепление, свободное деформирование) так и при контакте материала с формой (полное прилипание, проскальзывание без трения).

Некоторые из этих допущений вполне общеприняты, другие могут быть неприменимы в конкретных частных случаях. Так, при высокоскоростной сверхпластичности ($0,1-10 \text{ с}^{-1}$) могут оказаться существенными динамические процессы, происходящие в материале. При работе с материалами, интенсивно выделяющими тепло в процессе деформирования, могут использоваться определяющие соотношения с температурными коэффициентами и, соответственно, уравнение теплопроводности. При формовке изделий со сложной геометрией могут возникать промежуточные режимы контакта, требующие рассмотрения проскальзывания материала по форме с ненулевым трением. Однако рассмотрение подобных частных случаев выходит за рамки данной работы.

Требования к предлагаемым моделям и критерии их адекватности обуславливаются при этом основными задачами, для решения которых производится моделирование технологического процесса. Среди таких задач, как правило, выделяют:

- определение оптимальных условий деформирования и функции давления, обеспечивающей поддержание этих условий на протяжении всего процесса обработки;
- вычисление изменения геометрии образца и определение минимальной толщины (или, более полно, распределения толщины в разных точках образца), задающей, как уже упоминалось, границы применимости соответствующих технологических процессов;

- отслеживание изменения микроструктуры материала в процессе деформирования для предотвращения образования концентраторов и оценки ожидаемых механических свойств готового изделия.

Целью данной главы является моделирование процесса формовки листового материала давлением с применением определяющих соотношений, учитывающих эволюцию микроструктуры материала и его упрочнение, вызванное накоплением пластических деформаций.

3.2. Постановка задачи и возникающие проблемы

В рамках допущений, перечисленных на странице 84, будем рассматривать плоскую круглую металлическую пластину равномерной толщины w_0 . В начальном состоянии она защемляется по периметру в цилиндрической форме радиуса $r_0 \gg w_0$. Далее с одной стороны пластины прикладывается равномерно распределённое давление по заданному закону $P(t)$, где P — давление, t — время. Под действием давления пластина деформируется, в результате чего постепенно принимает полусферическую форму.

При моделировании будем считать, что в промежуточные моменты времени оболочка также имеет форму сегмента сферы, радиус которой равен ρ , и введём в каждой точке локальную ортонормированную систему координат, первая ось которой направлена по касательной к меридиану сферы в направлении от полюса, вторая перпендикулярна первой в касательной плоскости сферы, а третья совпадает с нормалью к её поверхности (рис. 3.1).

Принятые допущения позволяют рассматривать поставленную задачу как квазистатический изотермический процесс, описываемый исключительно геометрией деформируемого образца и определяющими соотношениями материала. Малая толщина позволяет воспользоваться *безмоментной теорией оболочек*, согласно которой:

- компонента напряжения, направленная по нормали к сфере, много меньше других и потому пренебрежимо мала: $\sigma_3 = 0$;
- можно пренебречь изгибом пластинки, а значит, касательные напряжения равны нулю: $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

С учётом положений безмоментной теории тензор напряжений Коши принимает вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где σ_1 и σ_2 — меридиональное и окружное напряжения. Отсюда можно вычислить среднее напряжение $\sigma_{\text{avg}} := \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2)$, девиатор тензора напряжений

$$S_{ij} := \sigma_{ij} - \sigma_{\text{avg}}\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

и интенсивность напряжений $\sigma_e := \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$.

Тензор скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ связан с девиатором тензора напряжений S_{ij} и интенсивностями σ_e , \dot{p} ассоциированным законом пластичности:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3\dot{p}(\sigma_e, \chi_k)}{2\sigma_e} S_{ij}, \quad (3.2)$$

где зависимость интенсивности скоростей деформаций \dot{p} от интенсивности напряжений σ_e и произвольного количества внутренних параметров материала χ_k задаётся определяющими соотношениями.

Таким образом, не-диагональные компоненты тензора деформаций будут также равны нулю, то есть введённая система координат совпадает с главными осями как тензора напряжений, так и тензора деформаций. На диагонали последнего будут стоять меридиональная ε_1 , окружная ε_2 и нормальная ε_3 пластические деформации.

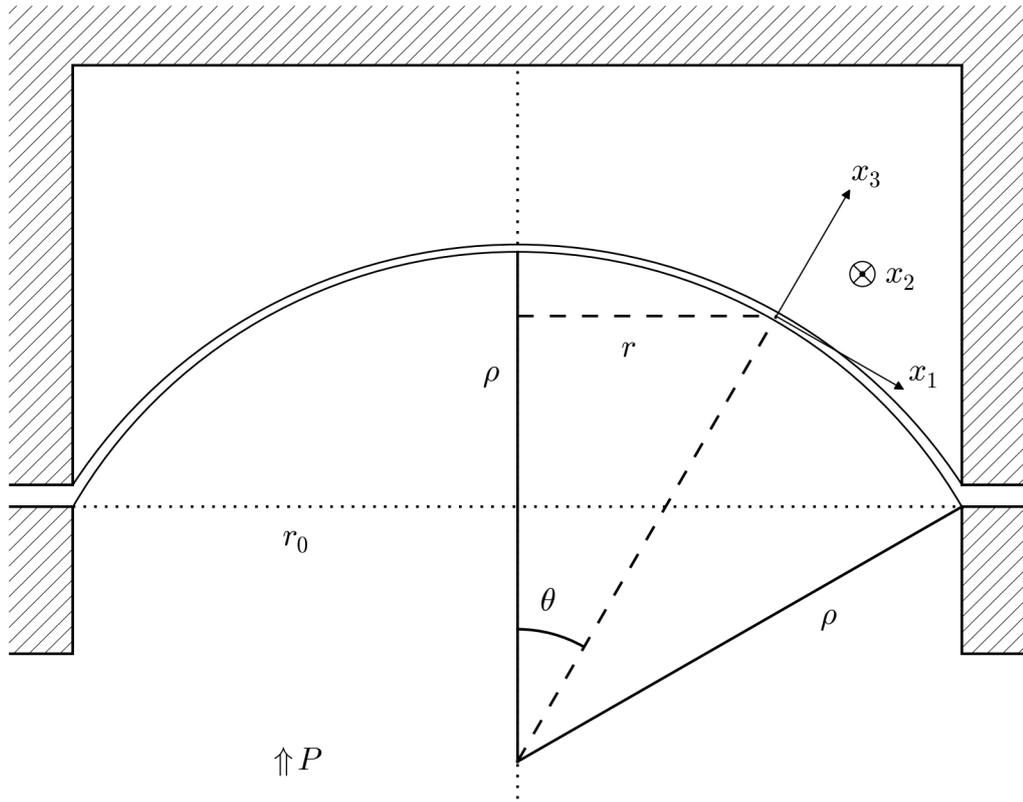


Рис. 3.1. Схема задачи о деформировании оболочки давлением.

Далее классический способ решения задач о деформировании оболочек предполагает рассмотрение уравнений равновесия, которые, с учётом положений безмоментной теории и осевой симметрии поверхности вращения, принимают вид [67]:

$$\frac{\sigma_1}{\rho_m} + \frac{\sigma_2}{\rho_c} = \frac{P}{w} \text{ — равновесие элемента,} \quad (3.3)$$

$$2\pi r w \sigma_1 \sin \theta = \pi r^2 P \text{ — равновесие сегмента поверхности,} \quad (3.4)$$

где ρ_m и ρ_c — меридиональный и окружной радиусы кривизны поверхности оболочки, w — толщина оболочки, r — расстояние от рассматриваемой точки до оси вращения, θ — угол между осью вращения и нормалью к поверхности (все величины относятся к одной и той же точке оболочки). С учётом геометрического соотношения $\rho_c \sin \theta = r$ (рис. 3.1) данные уравнения можно разрешить относительно напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{P\rho_c}{2w}; \quad \sigma_2 = \frac{P\rho_c}{2w} \left(2 - \frac{\rho_c}{\rho_m} \right). \quad (3.5)$$

Поскольку для сферы $\rho_m = \rho_c = \rho$ из этих соотношений получаем $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P\rho}{2w}$.

В то же время, условие закрепления — фиксация оболочки по периметру — означает равенство нулю окружной деформации на границе купола: $\varepsilon_{2b} = 0$ (индекс b здесь и далее означает величины, относящиеся к границе). В соответствии с ассоциированным законом пластичности (3.2) можно записать:

$$0 = \dot{\varepsilon}_{2b} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_b}{\sigma_{eb}} S_{22} = \frac{\dot{p}_b}{2\sigma_{eb}} (2\sigma_{2b} - \sigma_{1b}),$$

откуда при ненулевой интенсивности скоростей пластических деформаций на границе \dot{p}_b имеем для напряжений соотношение $2\sigma_{2b} = \sigma_{1b}$, что противоречит их равенству.

Таким образом, при решении поставленной задачи невозможно одновременно удовлетворить уравнениям безмоментной теории оболочек, предположению о сферической форме купола, ассоциированному закону пластичности и условию закрепления.

3.3. Обзор литературы

Описанная задача рассматривается в ряде экспериментальных работ и теоретических исследований различных авторов. При этом, в силу наличия указанного противоречия в уравнениях, в большинстве теоретических моделей положения безмоментной теории не применяются для описания всех точек оболочки. Решение в промежуточных точках строится по итерационным процедурам или посредством введения каких-либо дополнительных гипотез о поведении оболочки в процессе деформации.

Случай соблюдения во всех точках оболочки уравнения равновесия сегмента поверхности в предположениях безмоментной теории (3.4) рассматривается в работе [10]. При этом уравнение равновесия элемента (3.3) не применяется, а для определения напряжений в промежуточных точках авторы разбивают исходную пластину на набор концентрических круговых полос и отслежива-

ют состояние каждой полосы. Сверхпластическое деформирование описывается ими с помощью определяющих соотношений в виде степенной зависимости $\sigma = K\dot{\epsilon}^m$, где σ — напряжение, $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации, а K и m — постоянные коэффициенты. Решение строится с помощью итерационной процедуры, в которой приращения параметров конкретной полосы на каждом шаге выбираются так, чтобы обеспечить выполнение с заданной степенью точности системы уравнений, описывающей состояние полосы, при условии сохранения сферической формы купола. Также авторы строят распределение толщины в разных точках оболочки и рассматривают зависимость её истончения от величины показателя скоростной чувствительности m в определяющих соотношениях материала. Во второй части работы приводятся результаты замеров толщины в разных точках реальных изделий сложной формы, полученных путём сверхпластического деформирования под действием избыточного давления.

Аналогичной гипотезой пользуются авторы работы [21], однако они не прибегают к подбору значений напряжения для удовлетворения системы уравнений каждой полосы. Вместо этого ими проводится эксперимент с растяжением пакета из двух пластин, в верхней из которых просверлены изначально круглые отверстия одинакового диаметра, в процессе деформации принимающие эллиптическую форму. Авторы принимают гипотезу о пропорциональности изменения размеров отверстий напряжениям по соответствующим осям, что позволяет им ввести параметр отношения напряжений и определить его величину экспериментально, измеряя отношения осей полученных эллипсов. Используя этот параметр, авторы напрямую вычисляют приращения на каждом шаге расчёта.

Кроме того, в работе [21] приводятся формулы для вычисления характеристик процесса деформирования на основе определяющих соотношений вида $\dot{\epsilon} = A_1 \left(\frac{b}{d}\right)^q \left(\frac{\sigma}{G}\right)^n$, где A_1 , b , q , G и n — постоянные коэффициенты, а d — размер зерна. При этом авторы особо отмечают, что для сверхпластических материалов поведение размера зерна достаточно сложное (в частности, зависит не только от времени, но и от деформации), поэтому в большинстве случаев его деталь-

ное исследование не проводится. В дальнейшем авторы используют упрощённое соотношение $\dot{\varepsilon} = A_2 \sigma^n$, эквивалентное степенной зависимости.

Одним из немногих примеров отказа от гипотезы сферической формы купола является работа [44], в которой форма купола полагается эллиптической. Дальнейшее решение строится аналогично работе [10]. Необходимо отметить, что теоретически отказ от сферической формы мог бы стать решением противоречия между положениями безмоментной теории и ассоциированным законом пластичности. Для этого необходимо задать форму так, чтобы отношение вычисляемых на основе уравнений равновесия напряжений (3.5) совпадало на границе купола с полученным по ассоциированному закону. Однако в работе [44] данный вопрос не рассматривается: соотношение полуосей эллипса в конце деформации полагается априори заданным, а в промежуточные моменты времени вычисляется пропорционально высоте купола.

Применение дополнительной гипотезы о поведении образца под нагрузкой позволяет ряду авторов устранить необходимость разбиения пластины на полосы и вывести единую систему уравнений для оболочки в целом. Так, одной из первых работ, посвящённых рассматриваемой задаче, по-видимому, является статья [24]. В данной работе используется гипотеза о равномерном истончении оболочки (то есть, в каждый момент времени купол имеет одинаковую толщину во всех точках), что позволило относительно просто решить поставленную задачу аналитически и определить требуемую функцию давления. К недостаткам данной работы следует отнести тот факт, что в совокупности с нулевой окружной деформацией на границе купола гипотеза о равномерном истончении приводит к парадоксальному выводу — радиус оболочки, деформированной до полусферы, оказывается в $\sqrt{2}$ раз больше начального радиуса пластины [37], что противоречит предположению об абсолютной жёсткости формы.

Рассмотрение распределения толщины в разных точках оболочки позволило авторам работы [12] избавиться от этого противоречия и получить решение задачи в условиях недеформируемой формы. В качестве гипотезы о характере

деформации при этом используется предположение о равномерном растяжении меридианов (то есть, одинаковом значении меридиональной деформации во всех точках купола), которое также позволяет решить задачу аналитически. Коэффициенты K и m в определяющих соотношениях сверхпластичности определялись авторами на основе экспериментов с постоянным давлением. В результате анализа была найдена требуемая функция давления, получены и сопоставлены с экспериментальными конечное распределение толщины оболочки и общее время деформирования при различных скоростях $\dot{\epsilon}$.

По иному пути пошли авторы работы [16], экспериментально измерившие в некоторые моменты времени величины окружной и меридиональной деформаций в разных точках оболочки. По результатам этих измерений ими была выдвинута гипотеза о параболической форме зависимости инженерной деформации от радиуса. Построенная на основе данной гипотезы модель уже не может быть решена аналитически и нуждается в численном интегрировании, результатом которого и становится требуемая функция давления. Толщина оболочки в рамках данной гипотезы также оказывается неравномерной, однако авторы работы [16] не обсуждают этот вопрос.

Таким образом, по результатам проведённого обзора можно выделить следующие закономерности. Во-первых, большинством авторов предполагается, что в промежуточные моменты времени форма купола задаётся частью сферы. Данное предположение хорошо согласуется с эмпирическими данными [37]. Хотя некоторыми авторами предпринимались попытки рассматривать эллиптическую поверхность [44], вопрос о выборе её параметров с целью согласования ассоциированного закона пластичности с положениями безмоментной теории оболочек на границе купола при этом не рассматривался.

Во-вторых, в качестве гипотезы о поведении оболочки в промежуточных точках используются самые разные предположения, такие как: одинаковое значение произведения σw [10]; явная форма связи главных напряжений [21]; одинаковая [5; 24] или линейно изменяющаяся вдоль меридиана [6] толщина; оди-

наковая меридиональная деформация [12] либо степенная зависимость её от радиуса [16].

В-третьих, большинство авторов пользуются степенными определяющими соотношениями в форме $\sigma = K\dot{\epsilon}^m$. Поведение оболочки в рамках таких определяющих соотношений хорошо изучено, в частности, показано [10], что неоднородность её истончения уменьшается с ростом показателя скоростной чувствительности m . Однако на графике зависимости $\sigma(\dot{\epsilon})$, изображённом в логарифмических координатах, данные соотношения задают прямую линию. Как хорошо известно, кривые сверхпластического деформирования в таких осях имеют сигмоидальную форму (в частности, этот вопрос подробно обсуждался в главе 1 настоящей работы). Таким образом, данные соотношения пригодны для описания поведения конкретного материала лишь в определённом, достаточно узком диапазоне скоростей деформации.

Вместе с тем, даже при поддержании оптимальной скорости деформации в полюсе купола, скорость деформации на его границе может от неё отличаться. Ещё более существенная разница скоростей возникает при деформировании с постоянным давлением, когда ни в одной точке оболочки скорость деформации не является постоянной на протяжении всего процесса. Поэтому некоторыми авторами, например [16; 63], предпринимались попытки описывать поведение материала обобщением степенных соотношений либо ещё более сложными зависимостями. При этом статья [16] является единственной из рассмотренных работ, в которой использованы определяющие соотношения, зависящие от размера зёрен в образце, но вопрос о влиянии этого размера на характеристики процесса деформирования авторами работы не затрагивается.

Однако при сверхпластическом деформировании такое влияние присутствует. Это подтверждается как экспериментами, так и моделированием деформирования листовых материалов давлением с помощью метода конечных элементов с применением соответствующих программных пакетов, таких как ANSYS, ABAQUS и подобных [9; 29; 30; 62]. В частности, в работе [9] показа-

но, что подходящая начальная микроструктура позволяет добиться более равномерного распределения толщины в готовом изделии. В материаловедческой литературе описаны способы подготовки микроструктуры материала вплоть до ультра-мелкозернистой структуры с размерами зёрен порядка нанометров [65].

В настоящей работе предпринята попытка использовать определяющие соотношения, учитывающие упомянутую сложную эволюцию микроструктуры материала в процессе деформации, для более точной оценки характеристик процесса в рамках построенной аналитически модели оболочки (без применения метода конечных элементов). При расчёте применяется гипотеза о параболической форме зависимости инженерной деформации от радиуса [16]. Параметры моделей определяются на основе авторского алгоритма, описанного в главе 2.

3.4. Система уравнений состояния оболочки

Итак, во введённой системе координат (рис. 3.1) тензоры напряжений и скоростей пластических деформаций имеют диагональный вид (см. раздел 3.2).

В полюсе купола из соображений симметрии $\sigma_{1p} = \sigma_{2p}$ (индекс p здесь и далее означает полюс), что для интенсивности даёт $\sigma_{ep} = \sigma_{1p}$ и, с учётом (3.1) и (3.2), $\varepsilon_{1p} = \varepsilon_{2p} = \frac{p_p}{2}$, $\varepsilon_{3p} = -p_p$, где $p_p = \int_0^t \dot{p}_p dt$ — величина накопленной пластической деформации. При этом в окрестности полюса оболочка деформируется свободно, что позволяет применить к ней уравнение равновесия элемента (3.3). С учётом равенства $\rho_m = \rho_c = \rho$ получаем в итоге $\sigma_{1p} = \frac{P\rho}{2w_p}$, где w_p — толщина оболочки в полюсе купола.

По условию закрепления, на границе купола окружная деформация равна нулю: $\varepsilon_{2b} = 0$. Пренебрежение изгибом по сути эквивалентно шарнирному закреплению, то есть $M_b = 0$, где M — изгибающий момент. При постановке экспериментов для обеспечения близкого к модели режима деформирования может применяться скруглённый зажим на внутренней стороны формы (см., например, рис. 2 в работе [10]).

Из этих условий с учётом (3.2) для напряжений получаем $\sigma_{1b} = 2\sigma_{2b}$, $\sigma_{eb} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{1b}$ и для деформаций $\varepsilon_{1b} = -\varepsilon_{3b} = \frac{\sqrt{3}}{2}p_b$. Применяя ко всему куполу уравнение равновесия сегмента поверхности (3.4), получаем $\sigma_{1b} = \frac{P\rho}{2w_b}$.

Таким образом, как в полюсе купола, так и на его границе, все компоненты тензоров напряжений и деформаций могут быть выражены через интенсивность напряжений σ_e , накопленную пластическую деформацию p , давление P и геометрические параметры оболочки ρ , w . Поскольку связь между интенсивностями напряжений и скоростей пластических деформаций \dot{p} задаётся определяющими соотношениями материала, а давление изменяется по известному закону $P(t)$, для полного определения системы уравнений остаётся задать связь между деформациями и геометрическими параметрами оболочки.

Для этого, во-первых, воспользуемся условием несжимаемости материала: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. По определению логарифмической деформации $\varepsilon_3 = \ln\left(\frac{w}{w_0}\right)$ или

$$w = w_0 \exp(\varepsilon_3) = w_0 \exp(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

что задаёт связь толщины оболочки с её деформациями.

Во-вторых, в соответствии с принятой гипотезой А.К. Ghosh, С.Н. Hamilton о параболическом распределении инженерной деформации, можно записать:

$$\varepsilon_{\text{eng}} = \varepsilon_{\text{eng},p} + (\varepsilon_{\text{eng},b} - \varepsilon_{\text{eng},p}) \frac{r^2}{r_0^2}, \quad (3.6)$$

где r — радиус, исчисляемый от оси симметрии купола ($r = 0$ соответствует полюсу, $r = r_0$ — границе). Поскольку инженерная деформация по определению равна относительному удлинению элемента и связана с логарифмической деформацией соотношением $\varepsilon_{\text{eng}} := \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\ell}{\ell_0} - 1 = \exp(\varepsilon) - 1$, для логарифмической деформации принятую гипотезу можно записать в виде

$$\begin{aligned} \exp(\varepsilon) &= 1 + \varepsilon_{\text{eng}} = \\ &= 1 + (\exp(\varepsilon_p) - 1) + \left((\exp(\varepsilon_b) - 1) - (\exp(\varepsilon_p) - 1) \right) \frac{r^2}{r_0^2} = \\ &= \exp(\varepsilon_p) + (\exp(\varepsilon_b) - \exp(\varepsilon_p)) \frac{r^2}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь дугу меридиана L от полюса до границы. С одной стороны, зная ограничивающий дугу угол, её длину можно выразить через радиус сферы: $|L| = \rho\theta = \rho \arcsin(r_0/\rho)$. С другой стороны, можно проинтегрировать по всей дуге длину её элемента, которая, в свою очередь, выражается через меридиональную деформацию ε_1 :

$$\begin{aligned}
|L| &= \int_L d|L| = \int_0^{r_0} \frac{d|L|}{dr} dr = \int_0^{r_0} \exp(\varepsilon_1) dr = \\
&= \int_0^{r_0} \left(\exp(\varepsilon_{1p}) + (\exp(\varepsilon_{1b}) - \exp(\varepsilon_{1p})) \frac{r^2}{r_0^2} \right) dr = \\
&= \left(\exp(\varepsilon_{1p}) r + (\exp(\varepsilon_{1b}) - \exp(\varepsilon_{1p})) \frac{r^3}{3r_0^2} \right) \Big|_0^{r_0} = \\
&= \exp(\varepsilon_{1p}) r_0 + (\exp(\varepsilon_{1b}) - \exp(\varepsilon_{1p})) \frac{r_0}{3} = \\
&= r_0 \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p}) + \exp(\varepsilon_{1b})}{3}.
\end{aligned}$$

Приравнивая данные выражения, окончательно получаем связь радиуса ρ с деформациями оболочки [16]:

$$\frac{\rho}{r_0} \arcsin \left(\frac{r_0}{\rho} \right) = \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p}) + \exp(\varepsilon_{1b})}{3}. \quad (3.7)$$

Стоит отметить, что гипотезу Ghosh, Hamilton можно обобщить, включив в рассмотрение бóльшие или даже дробные степени, то есть записав уравнение для инженерной деформации в виде

$$\varepsilon_{\text{eng}} = \varepsilon_{\text{eng},p} + (\varepsilon_{\text{eng},b} - \varepsilon_{\text{eng},p}) \frac{r^\gamma}{r_0^\gamma}. \quad (3.8)$$

Уравнение для радиуса примет в таком случае вид

$$\frac{\rho}{r_0} \arcsin \left(\frac{r_0}{\rho} \right) = \frac{\gamma \exp(\varepsilon_{1p}) + \exp(\varepsilon_{1b})}{\gamma + 1}.$$

В частности, оригинальные экспериментальные данные из работы [16] чуть лучше соответствуют степени 2,5 (рис. 3.2). Тем не менее, для простоты расчётов в данной работе используется оригинальное значение $\gamma = 2$.

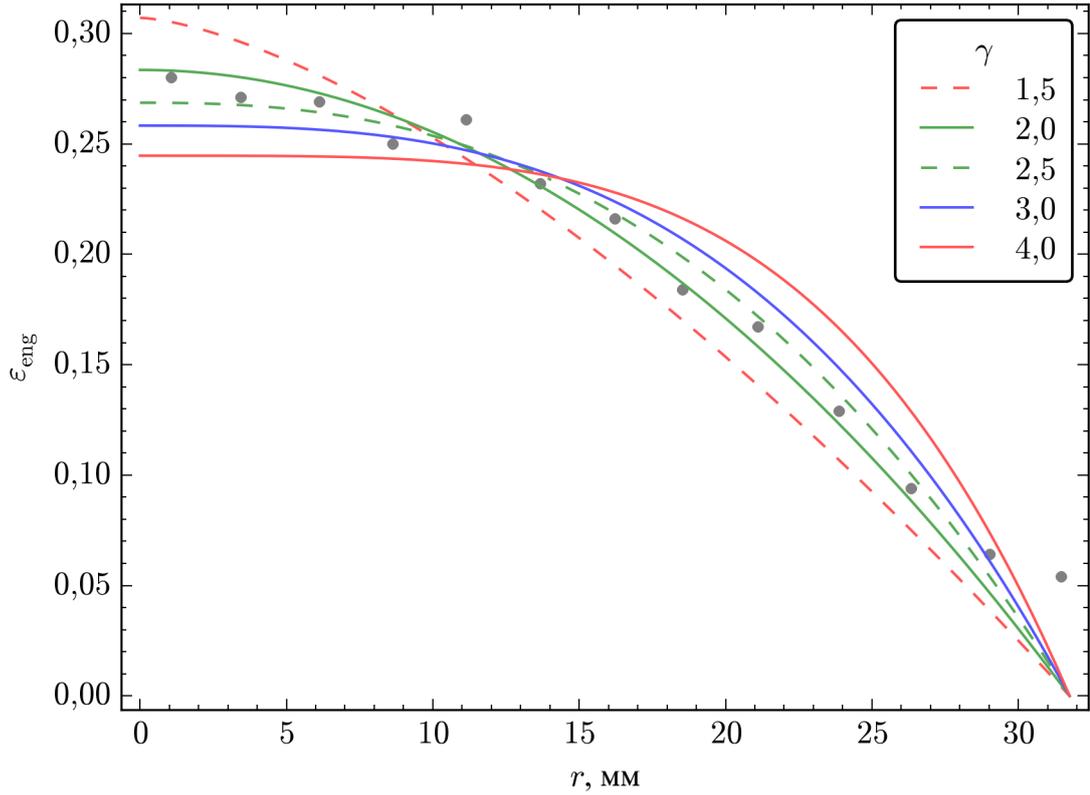


Рис. 3.2. Аппроксимация экспериментальных данных из работы [16] (серые точки) кривыми, задаваемыми уравнением (3.8) при разных значениях γ .

Кроме того, в частном случае $\varepsilon_{1p} = \varepsilon_{1b}$, положив $\gamma = 1$ данную гипотезу можно сделать в сущности эквивалентной применяемой в работе [12] гипотезе о равномерном растяжении меридианов. Таким образом, принятый подход представляется достаточно гибким, в частности, не противоречит подходу Ф.У. Еникеева и А.А. Круглова, а является в некотором смысле его обобщением, допускающим различные деформации в разных точках оболочки.

Уравнение (3.7) — неявное, поэтому для дальнейших вычислений будет удобно записать его в дифференциальной форме. Возьмём от обеих его частей производную по времени и упростим выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}}{r_0} \arcsin\left(\frac{r_0}{\rho}\right) + \frac{\rho}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{\rho^2}}} \frac{-r_0}{\rho^2} \dot{\rho} &= \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p}) \dot{\varepsilon}_{1p} + \exp(\varepsilon_{1b}) \dot{\varepsilon}_{1b}}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\rho} \left(\frac{1}{r_0} \arcsin\left(\frac{r_0}{\rho}\right) - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r_0^2}} \right) &= \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p}) \dot{\varepsilon}_{1p} + \exp(\varepsilon_{1b}) \dot{\varepsilon}_{1b}}{3}. \end{aligned}$$

В качестве определяющих соотношений для материала можно взять любой набор уравнений, относящийся к классу (2.1). Воспользуемся соотношениями М. Zhou, F.P.E. Dunne в нормированном виде (2.10), содержащими явное эволюционное уравнение для размера зерна d . В совокупности с выведенными ранее уравнениями это позволяет записать полную систему, описывающую поведение оболочки под действием приложенного давления:

$$\begin{aligned}
w_p &= w_0 \exp(-2\varepsilon_{1p}); \\
w_b &= w_0 \exp(-\varepsilon_{1b}); \\
\sigma_{1p} &= \frac{P\rho}{2w_p}; \\
\sigma_{1b} &= \frac{P\rho}{2w_b}; \\
h_p &= H_0 (1 - \exp(-2H\varepsilon_{1p})); \\
h_b &= H_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}H\varepsilon_{1b}\right) \right); \\
\dot{\rho} &= \frac{2 \exp(\varepsilon_{1p})\dot{\varepsilon}_{1p} + \exp(\varepsilon_{1b})\dot{\varepsilon}_{1b}}{3 \left(\frac{1}{r_0} \arcsin\left(\frac{r_0}{\rho}\right) - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r_0^2}} \right)}; \\
2\dot{\varepsilon}_{1p} &= \frac{A}{d_p^\alpha} \sinh\left(B(\sigma_{1p} - h_p - 1)\right); \\
\dot{d}_p &= \frac{D}{d_p^\beta} + \frac{G}{d_p^\varphi} 2\dot{\varepsilon}_{1p}; \\
\frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{1b} &= \frac{A}{d_b^\alpha} \sinh\left(B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{1b} - h_b - 1\right)\right); \\
\dot{d}_b &= \frac{D}{d_b^\beta} + \frac{G}{d_b^\varphi} \frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{1b}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Как можно заметить, данная система является системой из пяти дифференциальных уравнений с шестью неизвестными: P , ρ , ε_{1p} , d_p , ε_{1b} , d_b . Остальные (не-дифференциальные) уравнения выписаны для удобства и могут быть подставлены в дифференциальные напрямую.

Таким образом, при известном законе давления $P(t)$ система замыкается и может быть решена любым стандартным способом (например, методом Рун-

ге — Кутты). Для решения обратной задачи — определения функции давления, требующейся для поддержания заданного режима деформирования, — необходимо дополнить систему соотношением, задающим этот режим (например, $\dot{\epsilon}_{1p} = const$). В любом из случаев решением системы будут являться характеристики как состояния материала (размеры зёрен, величина упрочнения), так и процесса деформирования (давление, напряжения и деформации), а также геометрические параметры оболочки (радиус и толщина).

3.5. Результаты моделирования

3.5.1. Влияние микроструктуры на истончение

Как уже упоминалось, одним из важнейших параметров при сверхпластическом деформировании листовых материалов является неоднородность толщины листа в конце процесса, поскольку минимальная толщина в готовом изделии ограничена предъявляемыми к нему технологическими требованиями. В рассматриваемой задаче формовки полусферы минимальная толщина наблюдается в полюсе купола, а максимальная — на его границе (рис. 3.3). Для формального контроля их величин введём параметр неоднородности истончения:

$$\bar{w} = \frac{w_b - w_p}{w_b} = 1 - \frac{w_p}{w_b}.$$

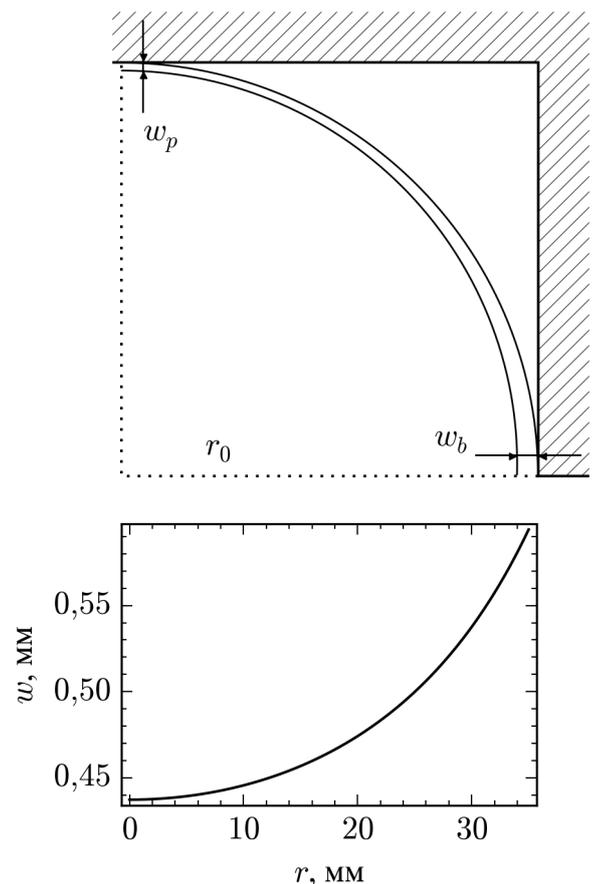


Рис. 3.3. Неоднородность толщины полусферы, полученной в результате формовки.

Параметр принимает значения от нуля (одинаковая толщина, равномерное истончение) до единицы (нулевая толщина в полюсе, прорыв оболочки).

Для определения данного параметра было смоделировано деформирование пластины в различных условиях. В основной серии расчётов, в соответствии с большинством рассмотренных в обзоре статей, применялся режим деформирования с постоянной скоростью деформации в полюсе купола — $\dot{\epsilon}_{1p} = const$. Конкретное значение скорости и средний размер зёрен в образце до начала деформирования были при этом параметрами расчёта.

В качестве геометрических параметров образца были выбраны значения $r_0 = 35$ мм, $w_0 = 1$ мм. Моделировался весь процесс формовки пластины от изначального (плоского) состояния до момента превращения в полусферу, который определялся по превышению высотой купола h значения $r_0 - r_c$, где r_c — контрольная высота, малая константа (при расчётах принималась равной 0,2 мм). Это соответствует экспериментам, в которых момент образования полусферы определяется по контакту купола с датчиком, выступающим на высоту r_c из основания цилиндрической формы (см, например, [12]).

Расчёты производились на основе моделей материала Ti–6Al–4V при температуре 927 °C со значениями параметров, определёнными на основе авторского алгоритма, который подробно описан в главе 2. На рисунке 3.4 представлены результаты расчёта для редуцированной модели, не учитывающей рост зёрен в процессе деформирования. Параметры данной модели приведены в первой строке таблицы 3.1.

Таблица 3.1. Параметры моделей, использовавшиеся при расчётах: (а) модель без учёта роста зёрен, (б) модель с учётом роста зёрен.

	A	B	α	D	G	β	φ	H_0	H	E_n
(а)	47,8	0,0524	2,20	0,0	0,0	–	–	22,8	0,947	2000,0
(б)	67,6	0,0532	2,35	0,367	10,3	$2,09 \times 10^{-5}$	0,676	4,89	3,56	2000,0

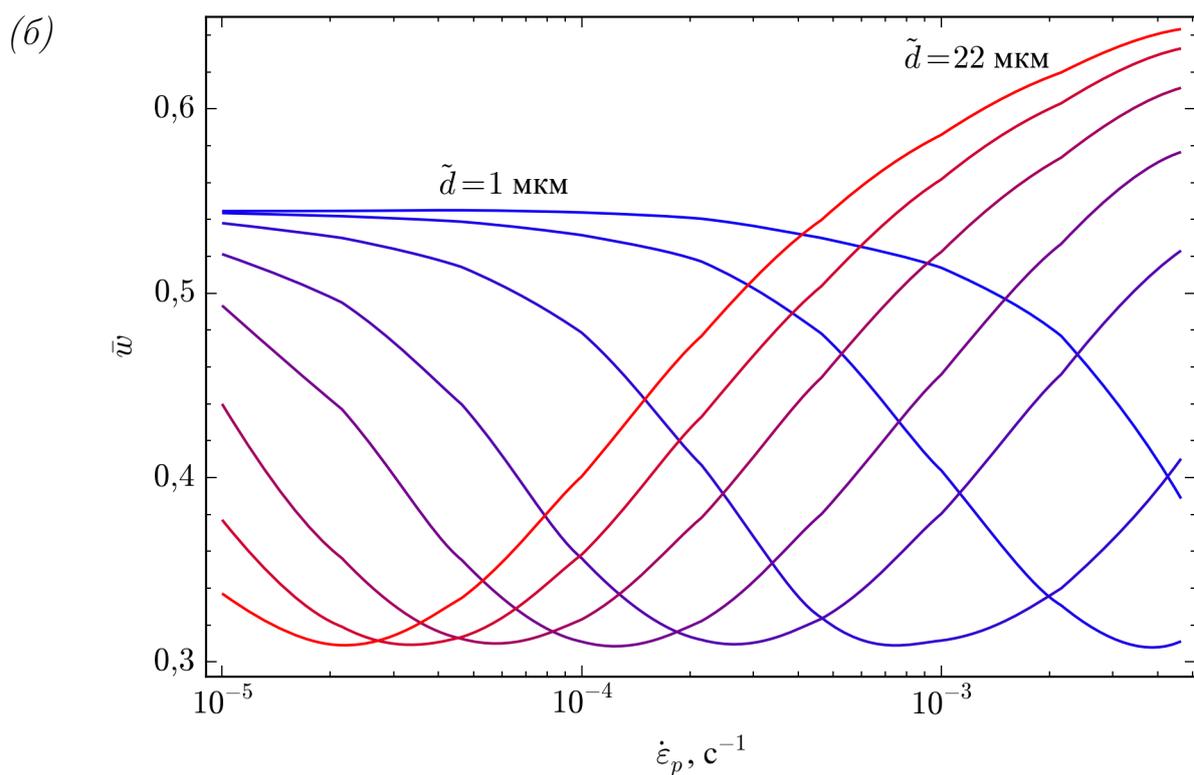
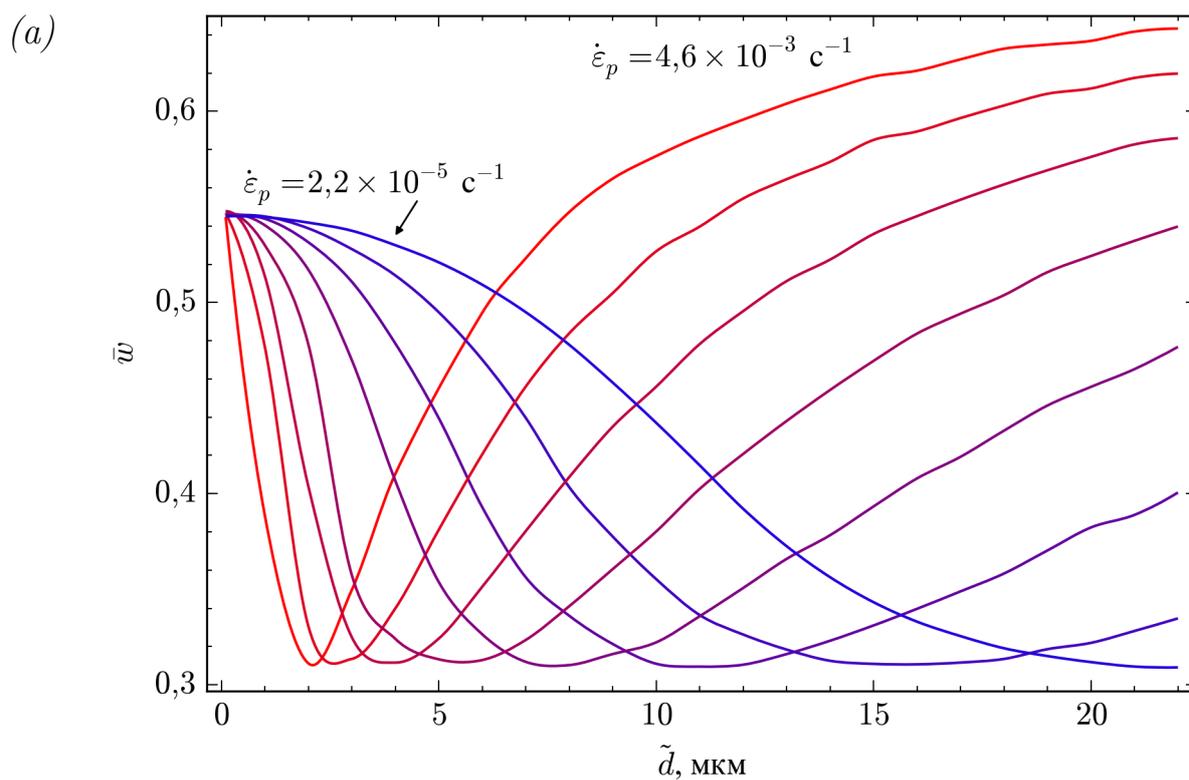


Рис. 3.4. Параметр неоднородности истончения \bar{w} , рассчитанный по модели, не учитывающей рост зёрен: (а) в зависимости от среднего размера зёрен в образце до деформирования \tilde{d} при различных скоростях деформации в полюсе купола $\dot{\epsilon}_p$, (б) в зависимости от скорости $\dot{\epsilon}_p$ при различных средних размерах зёрен \tilde{d} .

Как видно из этих изображений, для каждой скорости деформации существует оптимальный размер зёрен, при котором итоговое значение параметра неоднородности истончения минимально. Данный результат хорошо согласуется с известным из многих работ положением об обратной зависимости неоднородности истончения от показателя скоростной чувствительности m . Таким образом, даже модель, не учитывающая рост зёрен, но описывающая сигмоидальную кривую сверхпластичности и зависимость параметра m от размера зёрен в материале, может быть успешно использована для моделирования деформирования в достаточно широком диапазоне скоростей.

В то же время, конкретное значение минимума параметра \bar{w} на рисунке 3.4 не зависит от размера зерна. По этим графикам следовало бы заключить, что начальная микроструктура материала не оказывает влияния на получаемую неоднородность истончения при условии, что размер зёрен и скорость деформации соотносятся оптимальным образом.

Картина существенно изменяется при использовании оригинальной модели, учитывающей рост зёрен. Параметры этой модели приведены во второй строке таблицы 3.1 (соответствуют таблице 2.1). Результаты расчётов с использованием такой модели представлены на рисунке 3.5.

Нетрудно заметить, что в данном случае минимальное значение параметра неоднородности истончения зависит от размера зерна. При увеличении размера значение \bar{w} стремится к некоторой константе, момент отдаления от неё приблизительно соответствует размеру зерна в 10 мкм, который считается пороговым для проявления сверхпластического течения в металлических сплавах. При уменьшении размера зерна значение \bar{w} также начинает убывать и достигает глобального минимума.

Здесь важно отметить два факта. Во-первых, глобальный минимум параметра неоднородности истончения не равен нулю. Иными словами, существует теоретический предел однородности толщины изделия, а получение одинаковой толщины во всех точках невозможно даже при суб-микронных размерах зёрен.

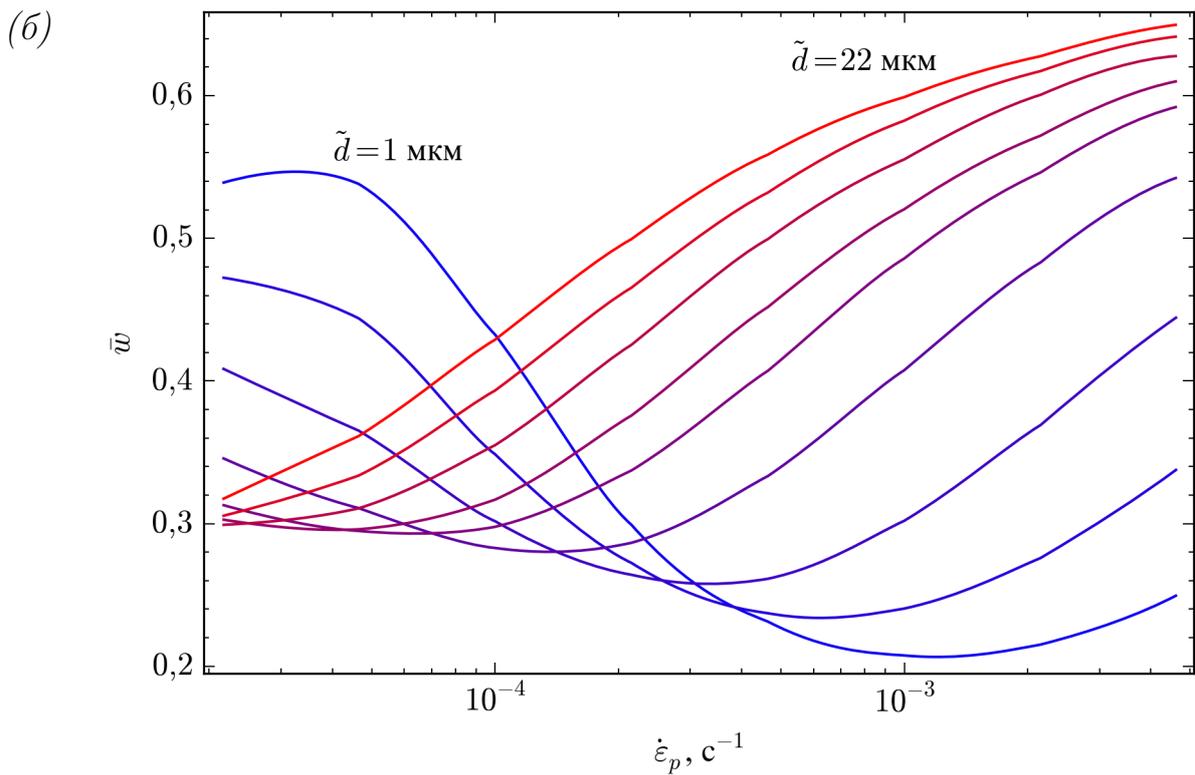
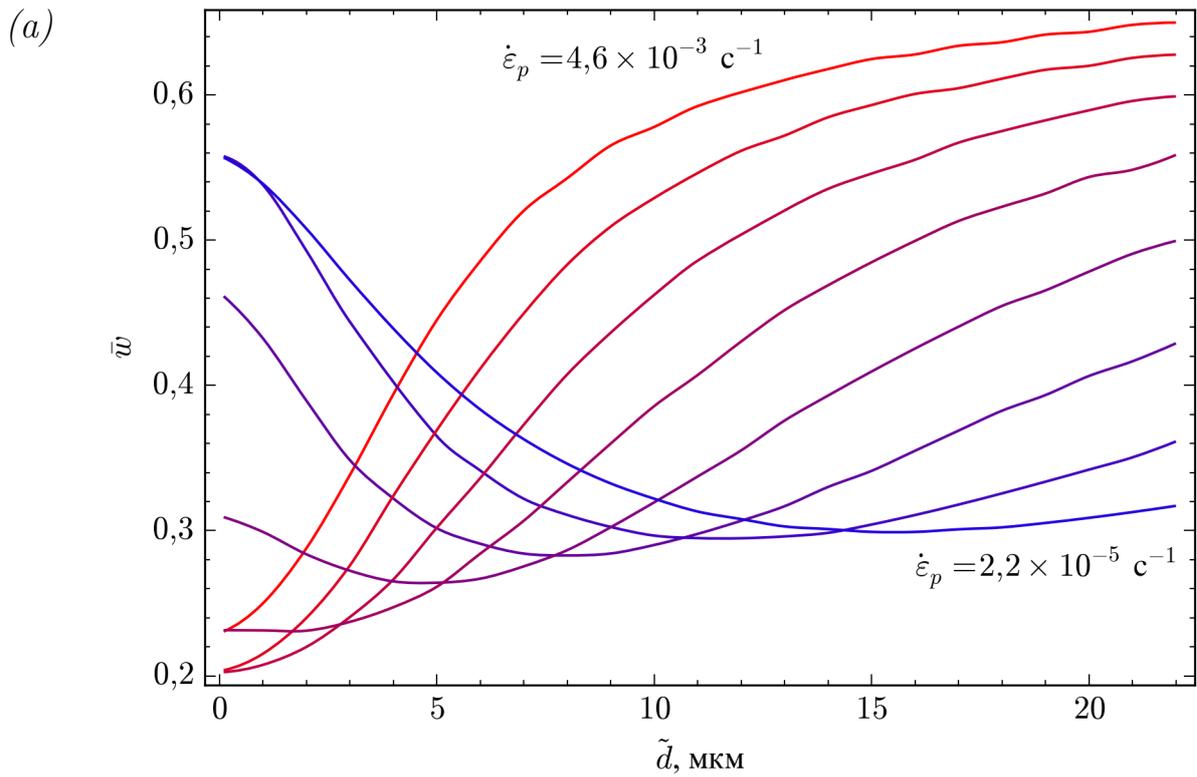


Рис. 3.5. Параметр неоднородности истончения \bar{w} , рассчитанный по модели, учитывающей рост зёрен: (а) в зависимости от среднего размера зёрен в образце до деформирования \tilde{d} при различных скоростях деформации в полюсе купола $\dot{\epsilon}_p$, (б) в зависимости от скорости $\dot{\epsilon}_p$ при различных средних размерах зёрен \tilde{d} .

Во-вторых, по мере уменьшения размера зерна оптимальная скорость деформации возрастает (что удобно для практических применений, так как позволяет сформировать готовое изделие за меньшее время), однако минимальному значению \bar{w} соответствует некоторая конкретная оптимальная скорость. Дальнейшее повышение скорости деформирования не позволит оставаться в рамках оптимального режима сверхпластичности, сколь бы хорошо ни была подготовлена микроструктура. Это ограничивает применение высокоскоростной сверхпластичности в рассматриваемых процессах формовки.

Другим немаловажным параметром процесса является давление, которое необходимо приложить в ходе деформирования. На рисунке 3.6 изображена зависимость от времени величины давления, требующегося для поддержания постоянной скорости деформации в полюсе купола. Аналогичный вид кривой получен многими авторами [12; 16; 21; 44]. Характерной особенностью данной кривой является наличие точки максимума. Именно давление в этой точке выступает определяющим для требований к применяемому оборудованию и влияет на его стоимость.

На рисунке 3.7 показана зависимость максимума давления от условий деформирования. Вполне ожидаемо, рост скорости при фиксированном начальном размере зерна, равно как и начального размера зерна при фиксированной скорости, приводит к увеличению требуемого давления. Однако значения, соответствующие режимам минимальной неоднородности истончения (отмечены точками), находятся приблизительно на одном уровне. Таким образом, увеличение скорости деформирования не повышает требования к применяемому оборудованию до тех пор, пока соответствующая подготовка микроструктуры позволяет оставаться в области оптимального режима деформирования. По достижении максимальной скорости, при которой возможен оптимальный режим, дальнейшее повышение приводит к росту требуемого давления, что согласуется с описанными выше результатами по истончению.

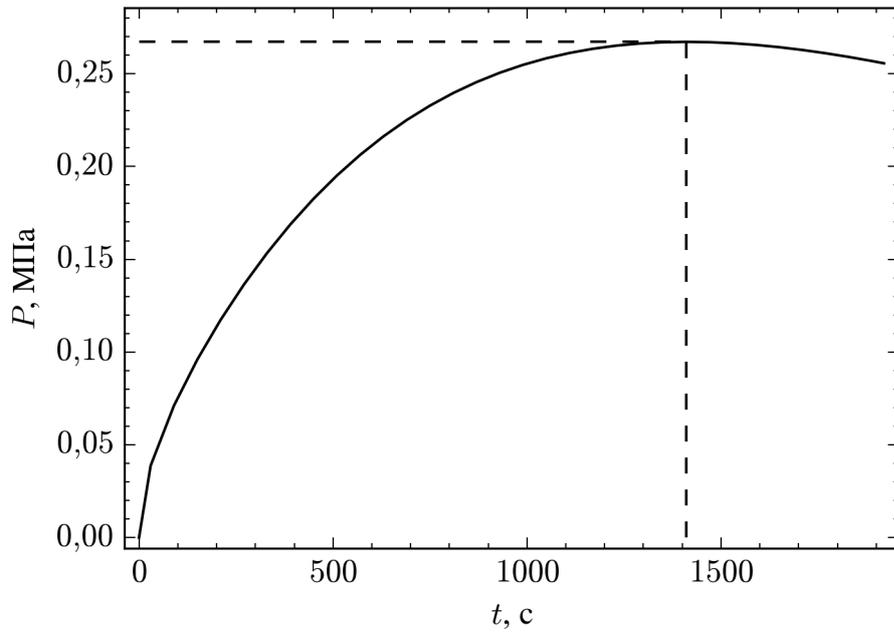


Рис. 3.6. Схема изменения давления в процессе формовки при условии поддержания постоянной скорости деформации в полюсе купола.

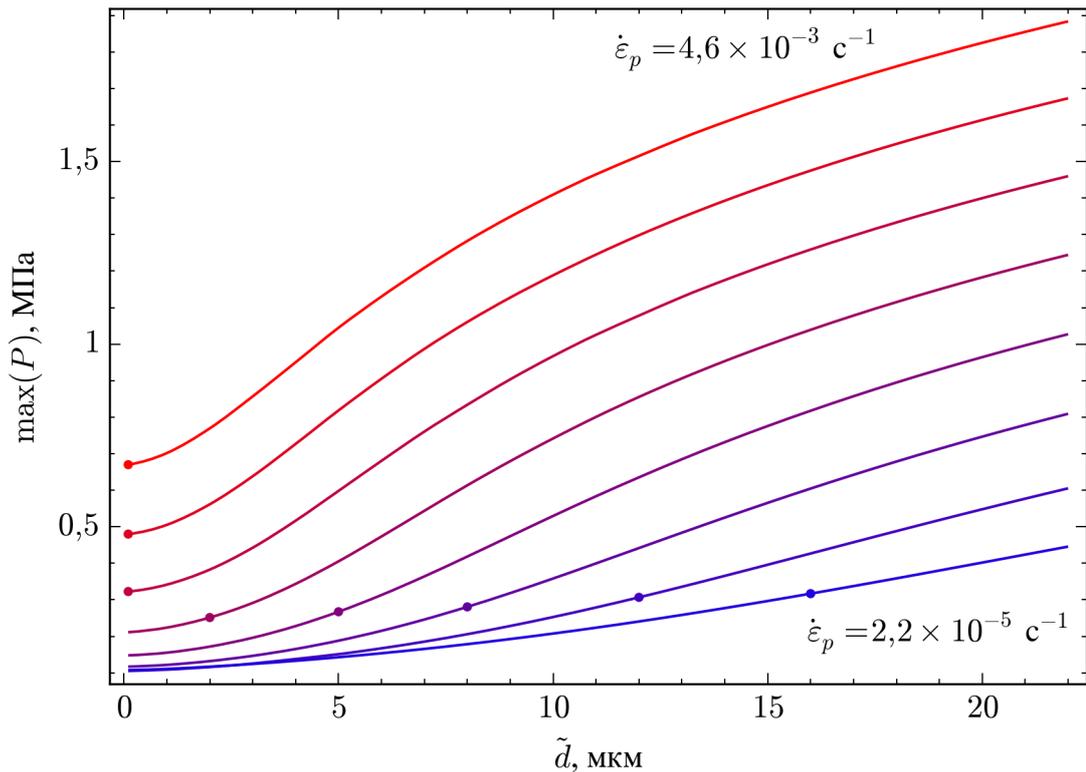


Рис. 3.7. Максимальное значение давления, требующееся в процессе формовки, в зависимости от среднего размера зёрен в образце до деформирования \tilde{d} при различных скоростях деформации в полюсе купола $\dot{\epsilon}_p$. Точками отмечены размеры, соответствующие оптимальному режиму деформирования (то есть минимальному значению параметра неоднородности истончения, см. рисунок 3.5a).

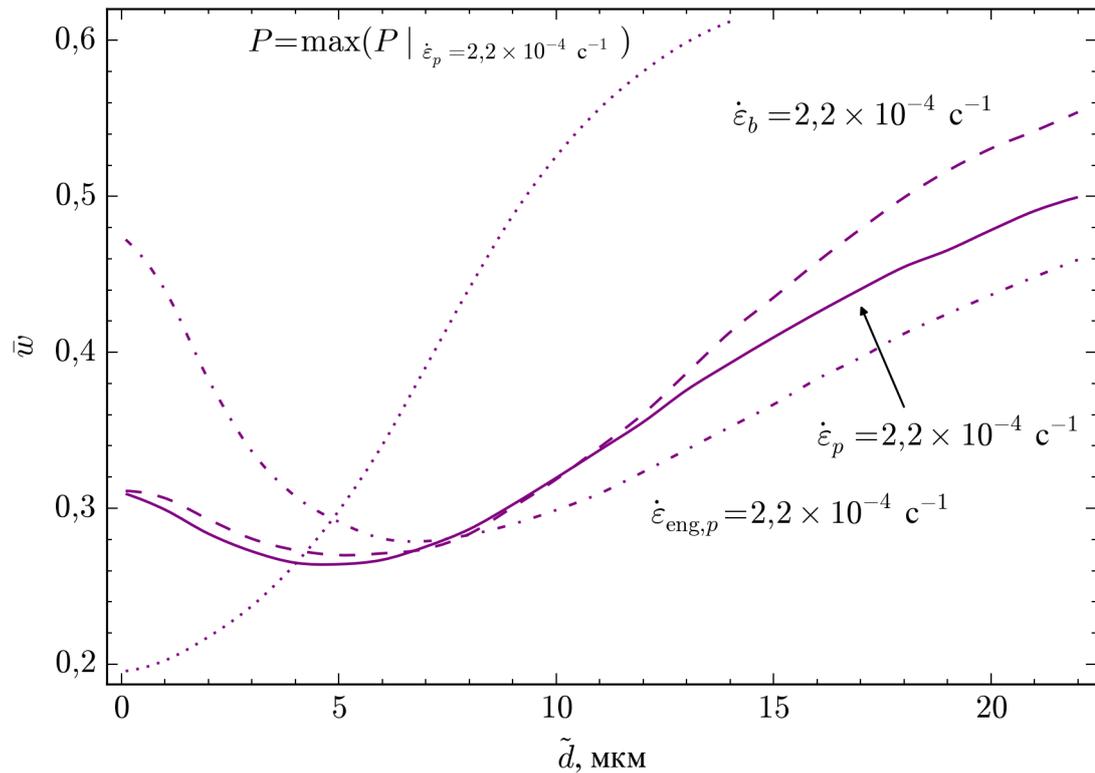


Рис. 3.8. Параметр неоднородности истончения \bar{w} в зависимости от среднего размера зёрен в образце до деформирования \tilde{d} при различных режимах деформирования образца.

Наконец, рассмотрим поведение материала при нестандартных режимах деформирования. На рисунке 3.8 классический режим — поддержание постоянной скорости логарифмической деформации в полюсе купола — сравнивается с некоторыми физически реализуемыми альтернативами: поддержанием постоянной скорости на границе купола, поддержанием скорости инженерной деформации вместо логарифмической, деформированием при постоянном давлении. Нетрудно заметить, что основным выводом при этом остаётся неизменным: в любом из режимов существует оптимальное соотношение скорости деформации и микроструктуры материала, обеспечивающее минимальную неоднородность истончения. Однако конкретное положение этого минимума и достигаемая в нём величина параметра \bar{w} зависит от режима, что подчёркивает важность предварительного моделирования поведения материала в тех или иных условиях при планировании соответствующих технологических процессов.

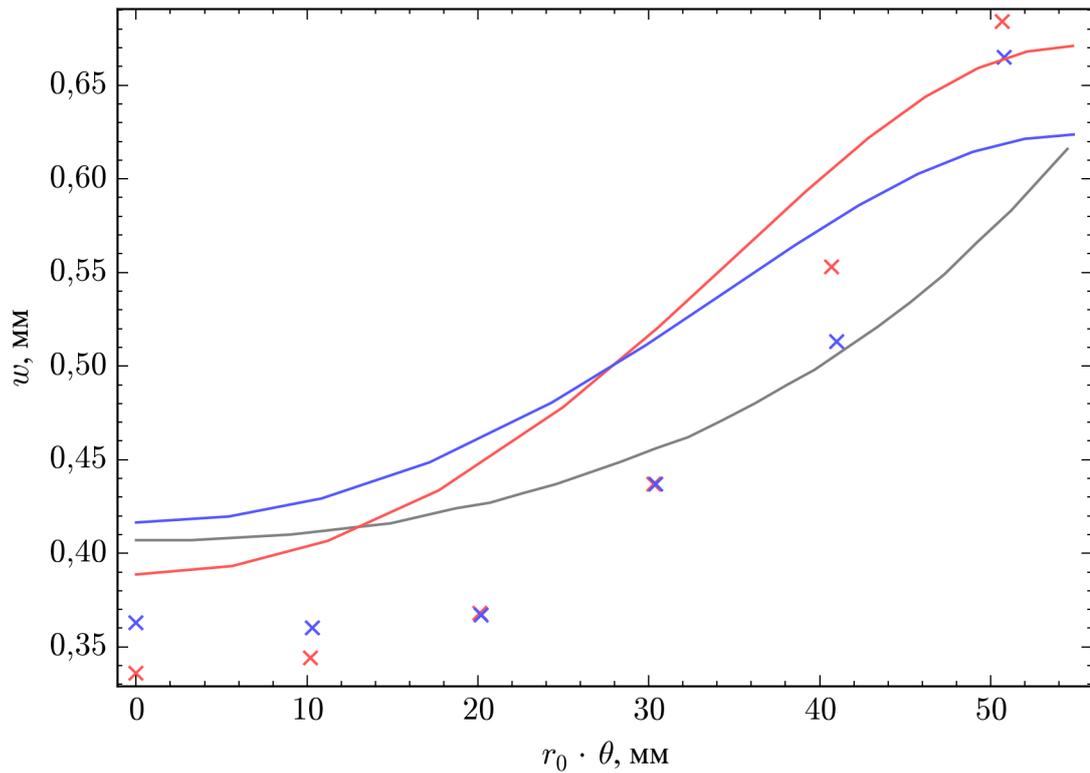


Рис. 3.9. Рассчитанное распределение толщины в разных точках готовой полусферы. Знаками \times отмечены экспериментальные точки из [12]. Красный цвет соответствует скорости деформации $\dot{\epsilon}_p = 1,2 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, синий — $\dot{\epsilon}_p = 4 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Для сравнения серыми цветом показан результат аналитического решения из той же статьи (не зависит от скорости).

3.5.2. Анализ результатов моделирования формовки

Для сравнения получаемых результатов с экспериментами рассмотрим данные по распределению толщины в готовой полусфере из работы [12], относящиеся к сплаву титана Ti–6Al–4V при температуре 900 °C. Для моделирования эксперимента были применены соответствующие значения параметров модели, которые приведены в таблице 2.3. Результаты расчётов представлены на рисунке 3.9 (значение по оси абсцисс соответствует расстоянию от полюса до точки поверхности, измеренному вдоль меридиана полусферы).

Полученные при расчёте значения толщины в целом близки к экспериментальным. При этом, в отличие от оригинальной модели из [12], результат расчёта по которой не зависит от скорости деформации, модель, учитывающая

микроструктуру материала, позволяет получить разные распределения толщины для разных скоростей. Направление изменения краевых значений при изменении скорости деформации соответствует эксперименту. В то же время, хотя и оригинальная модель, и сами экспериментальные данные выпуклы вниз, полученное в настоящей работе распределение имеет характерную форму с точкой перегиба. Распределения толщины подобного вида встречаются в литературе, например, в работах [21; 44] (при пересчёте приведённых в них данных в координатные оси, соответствующие работе [12]). Однако эти работы относятся к сплавам алюминия; возможность получения подобных распределений в титановых сплавах нуждается в дальнейшем изучении и требует проведения дополнительных экспериментов.

Теперь проанализируем более детально результаты моделирования формовки в оптимальном режиме. На рисунке 3.10 проиллюстрировано изменение характеристик материала и оболочки в процессе деформирования. Видно, что рост зёрен интенсивнее происходит в полюсе, что согласуется с наличием в соответствующем эволюционном уравнении компоненты, связанной с накопленной пластической деформацией (которая в полюсе выше, чем на границе). При этом максимальный размер зёрен в конце процесса остаётся в допустимых для сверхпластичности пределах. Аналогично, толщина в полюсе купола ожидаемо меньше, чем на его границе, но оба значения находятся в допустимых пределах (не приближаются к прорыву оболочки). Интересно отметить, что, хотя изменение толщины происходит неравномерно (скорость уменьшения толщины падает со временем), значение параметра неоднородности истончения \bar{w} растёт при этом практически линейно.

При постановке задачи в разделе 3.2 было показано, что положения безмоментной теории оболочек строго говоря противоречат условию закрепления при принятии ассоциированного закона пластичности и сохранении сферической формы купола. В силу этого, для построения решения в промежуточных точках в настоящей работе применяется гипотеза (3.6) по статье [16], которая

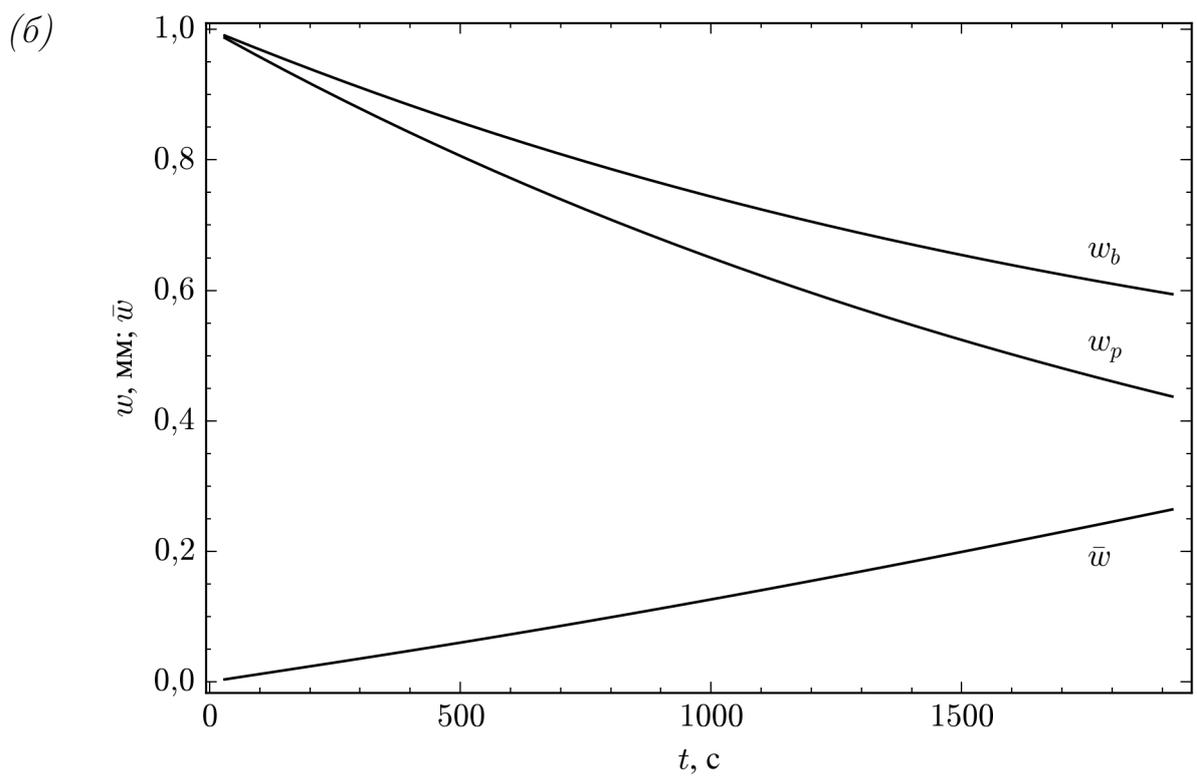
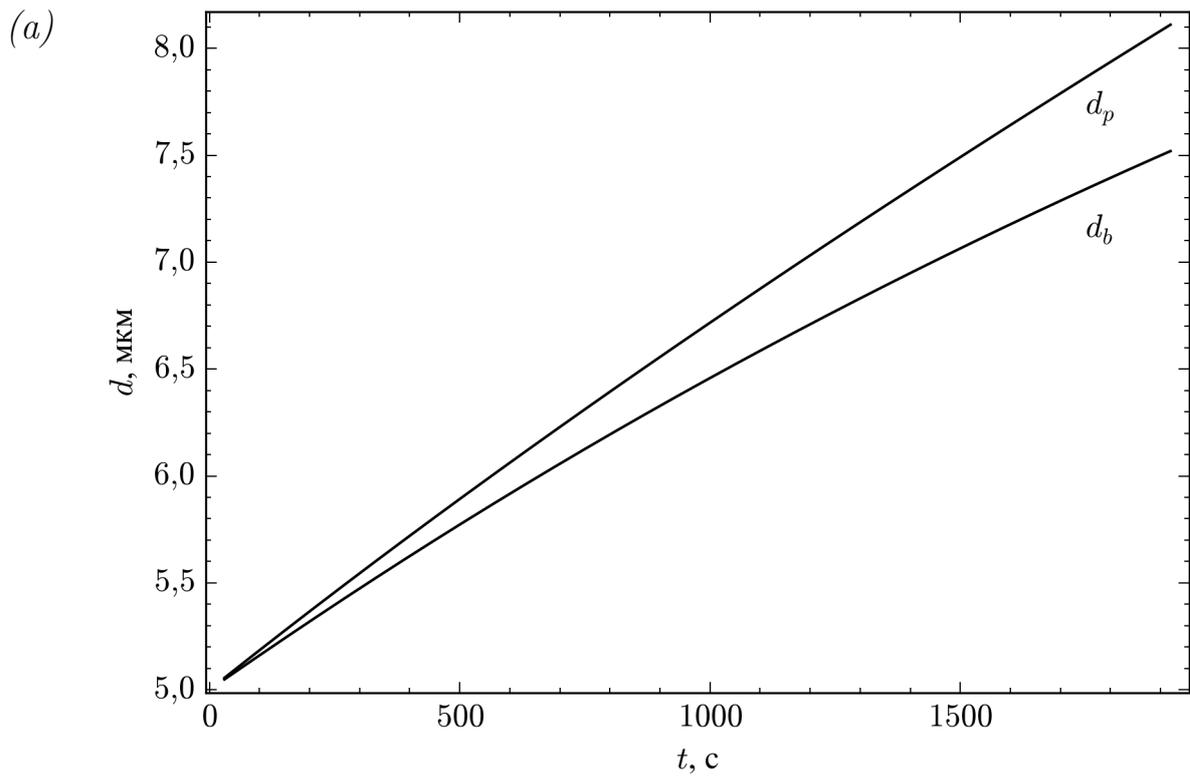


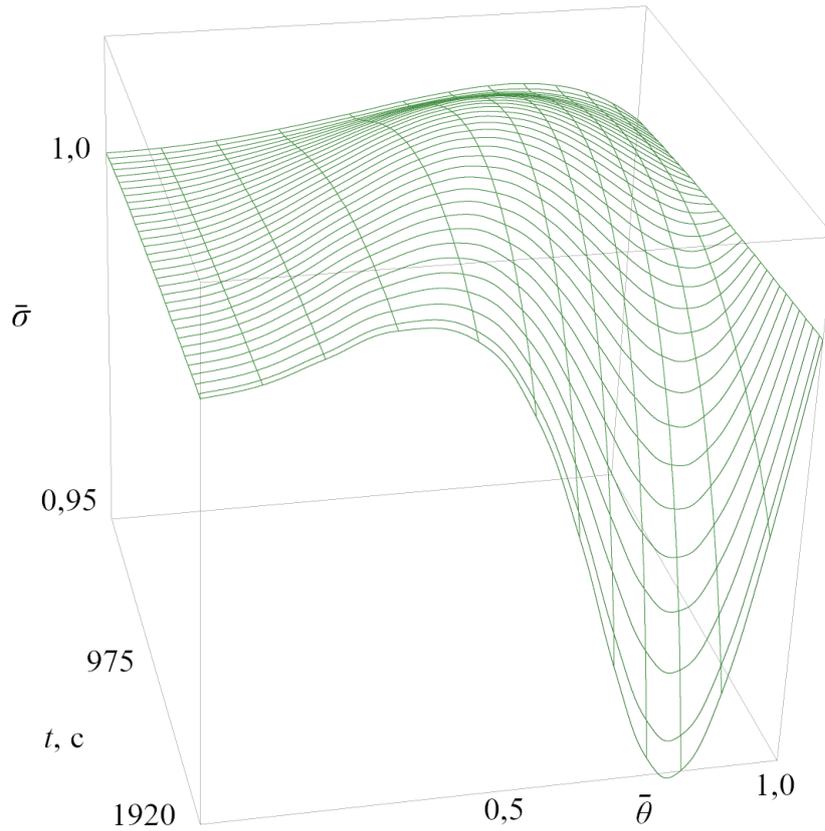
Рис. 3.10. Изменение характеристик в полюсе купола и на его границе в процессе формовки полусферы: (а) среднего размера зёрен d , (б) толщины w и параметра неоднородности истончения \bar{w} . Моделировалась формовка с постоянной скоростью деформации в полюсе $\dot{\epsilon}_p = 2,15 \times 10^{-4}$.

основана на экспериментальных данных и, тем самым, содержит в себе дополнительную информацию о поведении оболочки в области закрепления (с учётом, в том числе, тех компонент тензора напряжений, которыми безмоментная теория пренебрегает).

В построенном таким образом решении интересно сравнить меридиональное напряжение σ_1 , вычисленное на основе принятой гипотезы и определяющих соотношений материала, с величиной $\frac{P\rho}{2w}$ (3.5), полученной из уравнений равновесия оболочки в предположениях безмоментной теории. На рисунке 3.11 показана зависимость их отношения $\bar{\sigma} := \frac{2w\sigma_1}{P\rho}$ от времени t и угловой координаты $\bar{\theta} := \frac{\theta}{\theta_b}$ (то есть, в разных точках оболочки, см. рисунок 3.1). При $\bar{\theta} = 0$ или $\bar{\theta} = 1$ (в полюсе купола и на его границе) значение $\bar{\sigma}$ в точности равно единице. Это соответствует описывающей деформирование оболочки системе уравнений (3.9), в которую исходно заложено выполнение уравнения равновесия элемента (3.3) в полюсе купола и уравнения равновесия сегмента поверхности (3.4) на границе.

В промежуточных точках значение величины $\bar{\sigma}$ отличается от единицы, причём характер отклонений зависит от геометрии купола, поскольку уравнение равновесия сегмента поверхности (3.4) получено путём проецирования сил, действующих на этот сегмент, на ось симметрии оболочки. В области, где направление нормали к границе сегмента близко к направлению оси симметрии — а именно, при близости к полюсу купола ($\bar{\theta} \approx 0$), либо при малых значениях времени t , пока вся оболочка ещё остаётся достаточно плоской, — значение $\bar{\sigma}$ больше единицы. По видимому, часть растягивающего меридионального напряжения σ_1 компенсируется в этой области сжимающим нормальным напряжением σ_3 , проекция которого направлена в противоположную сторону. В оставшейся области — при близости к границе ($\bar{\theta} \rightarrow 1$) и достаточно развитой деформации (больших значениях t) — величина $\bar{\sigma}$ оказывается меньшей единицы. В этой области существенный (и не учитываемый безмоментной теорией) вклад в равновесие оболочки принадлежит касательным напряжениям в области закрепления, которые сопротивляются изгибу оболочки и при проекции совпадают по

(а)



(б)

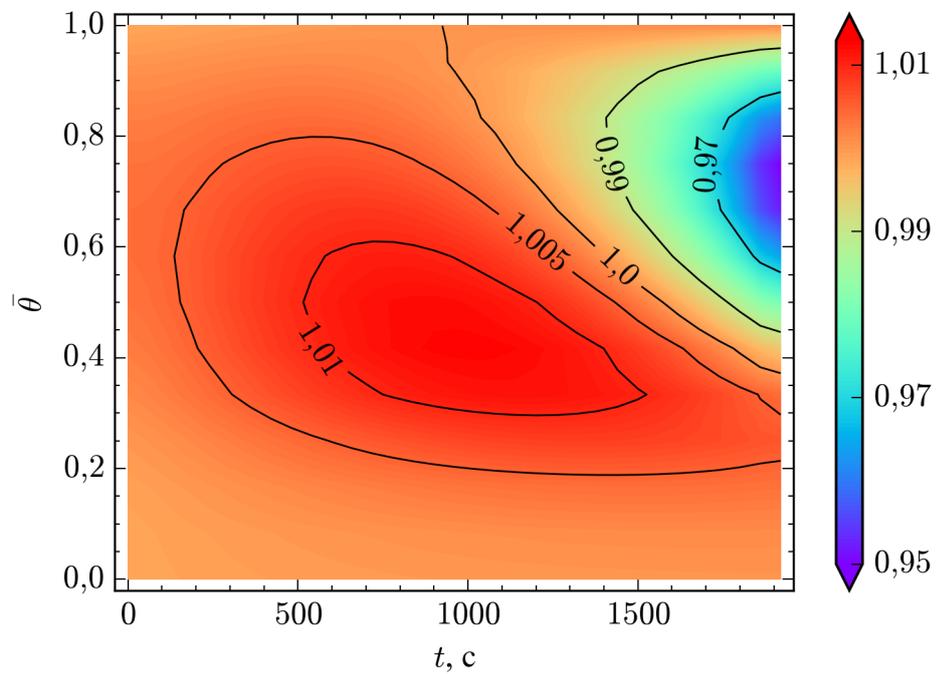


Рис. 3.11. Отношение $\bar{\sigma}$ меридионального напряжения σ_1 к значению напряжения, вычисленному по безмоментной теории оболочек, в зависимости от времени t и углового положения точки $\bar{\theta}$: в виде трёхмерной поверхности (а) и цветовой карты значений (б).

направлению с напряжением σ_1 .

Стоит отметить, что на всём протяжении процесса интенсивность отклонений существенно выше при $\bar{\theta} \rightarrow 1$, чем при $\bar{\theta} \rightarrow 0$. Это согласуется с принципом локальности Сен-Венана: чем дальше точка находится от закреплённой границы купола, тем меньшее влияние краевых условий она испытывает и тем больше состояние оболочки в этой точке похоже на свободное деформирование в соответствии с положениями безмоментной теории. Также по рисунку 3.11 можно оценить максимальную величину погрешности $\bar{\sigma}$ на всём протяжении процесса — она составляет около 5%. Таким образом, хотя безмоментная теория оболочек (пренебрежение нормальными и касательными напряжениями) не соответствует поведению материала формально, она, тем не менее, позволяет получить приближённое решение с удовлетворительной степенью точности, а потому её применение к рассматриваемой задаче вполне оправдано.

3.6. Заключение

Деформирование листовых материалов давлением в режиме сверхпластичности — достаточно распространённый способ промышленной обработки металлов. Для получения изделий с подходящими геометрическими размерами и механическими свойствами важно контролировать микроструктурные параметры в процессе деформирования.

В настоящей главе проанализирована эффективность применения определяющих соотношений, учитывающих размер зёрен в материале и его упрочнение, к задаче формовки полусферы. Получена система уравнений, целиком описывающая деформирование оболочки на основе принятых гипотез без необходимости применения специализированных программных пакетов для моделирования деформирования методом конечных элементов. Показано, что само использование определяющих соотношений, корректно моделирующих сигмоидальную кривую сверхпластичности, позволяет расширить область примени-

мости полученной модели материала, а дополнительный учёт эволюции микроструктуры в процессе деформирования значительно уточняет оценку скорости деформации, необходимой для поддержания оптимального режима деформирования и получения наиболее однородного по толщине изделия. Проведена численная оценка погрешности, неизбежно возникающей при решении поставленной задачи в предположениях безмоментной теории, и показана приемлемость получаемого решения.

Представленные результаты хорошо согласуются с известными положениями механики сверхпластичности (зависимость неоднородности истончения от показателя скоростной чувствительности m , улучшение параметров течения при уменьшении размера зёрен) и иллюстрируют применимость моделей, полученных с помощью изложенного в главе 2 авторского алгоритма определения параметров в определяющих соотношениях сверхпластичности, для проведения технологических расчётов изделий со сложным напряжённо-деформированным состоянием в различных условиях деформирования.

Глава 4

Измельчение зёрен

В настоящей главе используются результаты работ [3; 20; 54; 55; 58].

4.1. Постановка задачи

4.1.1. Введение

Поскольку сверхпластичность — процесс, существенно зависящий от внутренней микроструктуры деформируемого материала, в ряде случаев [4; 11; 18; 19; 26; 35] модели материала сопровождаются дополнительными соотношениями, позволяющими отслеживать эволюцию микроструктуры более детально, чем учёт в определяющих соотношениях среднего размера зёрен. Как правило, для такой детализации применяются распределения либо в виде количества зёрен определённого размера $n(d)$, либо в виде объёма, занимаемого зёрнами соответствующего размера, и его доли $v(d)$ от общего объёма образца.

Для примера рассмотрим искусственное тримодальное распределение глобулярных зёрен, в котором 60 % объёма занимают зёрна с диаметром около 4 мкм, 15 % объёма — зёрна с диаметром около 8 мкм, а оставшиеся 25 % — с диаметром около 16 мкм. Стоит отметить, что с точки зрения *количества* зёрен, в таком распределении зёрна с диаметром ~ 4 мкм составляют более 96 % от всех зёрен материала. На рисунке 4.1 показано расчётное напряжение при одноосном растяжении образца с описанным распределением зёрен при постоянной скорости деформации $\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, смоделированное с помощью системы уравнений (2.10) со значениями параметров из таблицы 2.3.

В представленном распределении зёрна малого размера доминируют как по количеству, так и по объёму. Однако при усреднении вклады малых и больших зёрен компенсируют друг друга, в результате чего средний размер и рас-

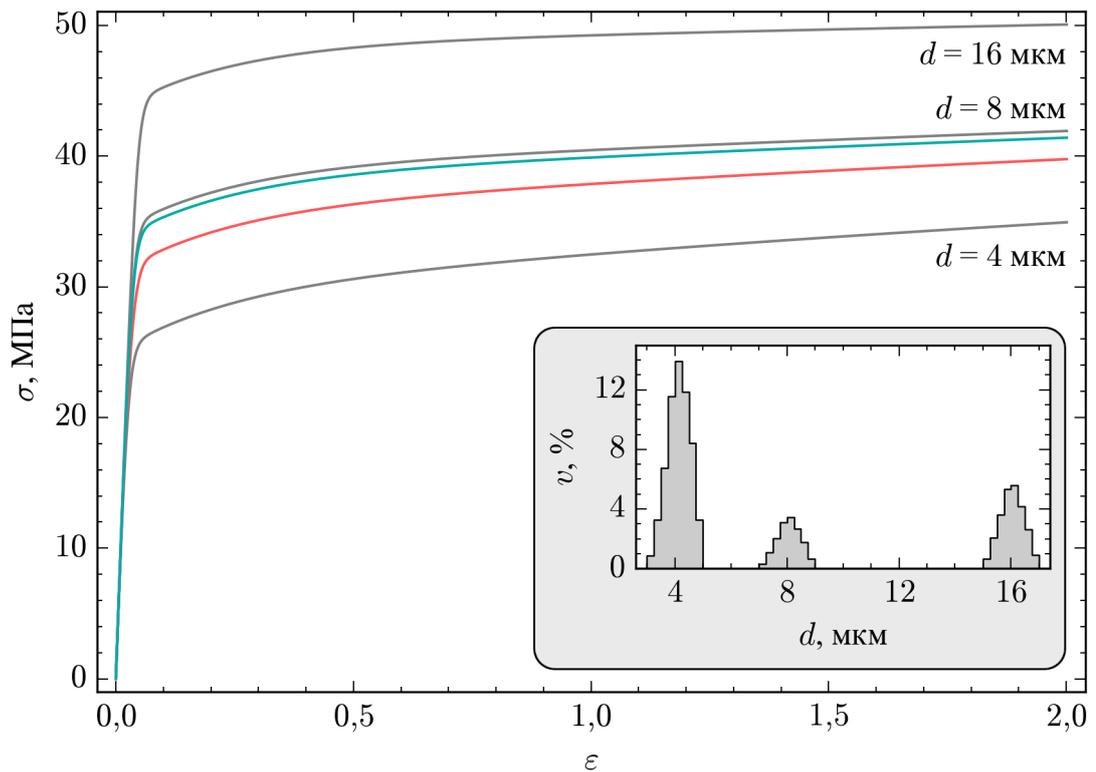


Рис. 4.1. Влияние распределения зёрен по размеру на напряжение. Серым цветом показаны напряжения для «опорных» размеров тримодального распределения (приведено на врезке), бирюзовым — рассчитанное по среднему размеру зёрен в распределении, красным — с учётом всего распределения.

считанное по нему напряжение оказываются близки к линии для 8 мкм, хотя зёрна этого размера занимают в материале наименьший объём. В то же время, расчёт с использованием всего распределения позволяет корректно учесть преобладание зёрен малого размера в материале. Получаемая при этом кривая напряжения отличается от расчёта как по среднему размеру, так и по любому из «опорных» размеров исходного распределения.

До сих пор в настоящей работе речь шла лишь о росте зёрен в процессе деформации. Однако, при определённых температурно-скоростных условиях деформирования, устанавливающийся в материале режим совместного действия нескольких микроструктурных механизмов приводит как к росту зёрен, так и к их измельчению в результате образования новых внутризёренных границ. Качественная модель эволюции микроструктуры в процессе сверхпластического

деформирования должна учитывать оба этих процесса.

В данной главе проанализированы некоторые подходы к описанию механизма измельчения зёрен и предложена модифицированная модель описания сверхпластического поведения металлических материалов с учётом измельчения структуры, качественно воспроизводящая наблюдаемые в экспериментах особенности распределения зёрен по размерам после деформирования.

4.1.2. Экспериментальные данные

К сожалению, в литературе приводится довольно мало экспериментальных данных, описывающих микроструктуру материала как до, так и после деформирования. В настоящей работе использованы данные из работы [26], относящиеся к одноосному растяжению образцов из сплава Ti–6Al–4V при температуре 900 °C и постоянной скорости деформации. Экспериментальные распределения зёрен по размерам $n(d)$ в виде непрерывных кривых взяты с рис. 7 и 8 указанной статьи и приводятся вместе на рисунке 4.2. Он содержит начальное распределение зёрен (до деформации, $\varepsilon = 0$) и конечные распределения: после растяжения до величины деформации $\varepsilon = 0,552$ со скоростью $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$, до $\varepsilon = 1,55$ со скоростью $\dot{\varepsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и до $\varepsilon = 1,72$ со скоростью $\dot{\varepsilon} = 1 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

В указанных осях рост зёрен в процессе эксперимента должен сопровождаться смещением графиков конечного распределения вправо, так как размер зёрен увеличивается, и вниз, поскольку количество зёрен уменьшается по мере их роста для сохранения общего объёма образца. Однако график, полученный при $\varepsilon = 0,552$ и $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$, смещён влево и имеет максимум, соответствующий меньшему, чем в начальном распределении, размеру зерна. Поскольку рост зёрен не мог привести к подобному эффекту, можно утверждать, что при деформации со скоростью $0,1 \text{ с}^{-1}$ происходили процессы не только роста, но и измельчения зёрен. Таким образом, рассматриваемые экспериментальные данные могут быть использованы для проверки моделей, учитывающих процессы измельчения.

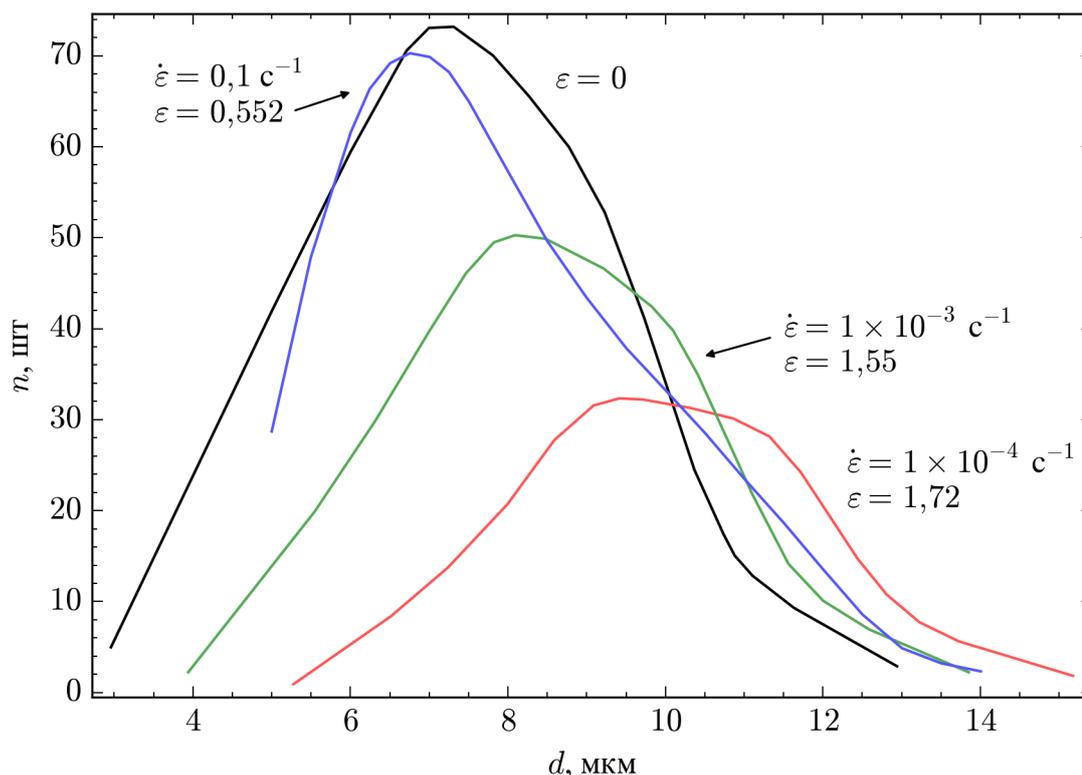


Рис. 4.2. Экспериментальные распределения зёрен по размеру в непрерывном виде из работы [26].

4.1.3. Методика расчёта

В качестве определяющих соотношений для моделирования материала воспользуемся системой уравнений M. Zhou, F.P.E. Dunne и соавторов в нормированном виде (2.10). Значения для параметров модели, определённые с помощью авторского алгоритма, описанного в главе 2, и соответствующие рассматриваемому сплаву Ti–6Al–4V при температуре 900 °C, приведены в таблице 2.3.

Поскольку размер не является дискретной величиной, а моделировать поведение бесконечного количества объектов невозможно, в качестве модели образца рассмотрим набор групп зёрен, каждая из которых содержит некоторое количество зёрен n_i определённого размера d_i , где i — номер группы. Будем считать, что группы независимы между собой, а определяющие соотношения материала описывают поведение каждой конкретной группы.

Начальные характеристики групп определяются путём интегрирования

непрерывного количественного распределения $n(d)$. Весь рассматриваемый диапазон размеров разбивается на N интервалов длины δ , начальное количество зёрен в группе определяется интегрированием распределения по интервалу, размер зёрен группы — как среднее значение на интервале:

$$\tilde{n}_i = \int_{d_{min}+(i-1)\delta}^{d_{min}+i\delta} n(d)dd, \quad \tilde{d}_i = d_{min} + \left(i - \frac{1}{2}\right) \delta, \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

где d_{min} — минимальный размер зерна для используемого распределения, а тильдой обозначены начальные значения величин.

Без учёта измельчения зёрен можно считать, что перемещение зёрен между группами в процессе деформации отсутствует. Следовательно, объёмная доля каждой группы v_i остаётся неизменной. Для нахождения начального объёмного распределения зёрен примем, что зёрна являются сферическими, и запишем:

$$\tilde{V}_i = \frac{1}{6} \pi \tilde{d}_i^3 \tilde{n}_i, \quad \tilde{V}_0 = \sum_{i=1}^N \tilde{V}_i, \quad \tilde{v}_i = \frac{\tilde{V}_i}{\tilde{V}_0},$$

где V_i — суммарный объём зёрен i -й группы, V_0 — общий объём образца.

Связь макро- и микропараметров устанавливается через деформацию: примем деформацию ε_i каждой группы зёрен в любой момент времени равной общей деформации образца ε в тот же момент. Остальные макропараметры образца определяются как взвешенное (по объёму) среднее значение соответствующего микропараметра по всем группам. Например, величина напряжения в образце при одноосном растяжении вычисляется по формуле $\sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i v_i$, средний размер зёрен — как $d = \sum_{i=1}^N d_i v_i$, и так далее.

После проведения моделирования и получения рассчитанного по модели конечного объёмного распределения необходимо найти результирующее количественное распределение для сравнения его с имеющимся экспериментальным. Вновь воспользуемся предположением о сферичности зёрен, а также условием несжимаемости материала $V_0 \equiv \tilde{V}_0$ для корректной нормировки выражения:

$$n_i = \frac{V_i}{\frac{1}{6} \pi d_i^3} = \frac{6v_i V_0}{\pi d_i^3} = \frac{6\tilde{V}_0}{\pi} \cdot \frac{v_i}{d_i^3}. \quad (4.1)$$

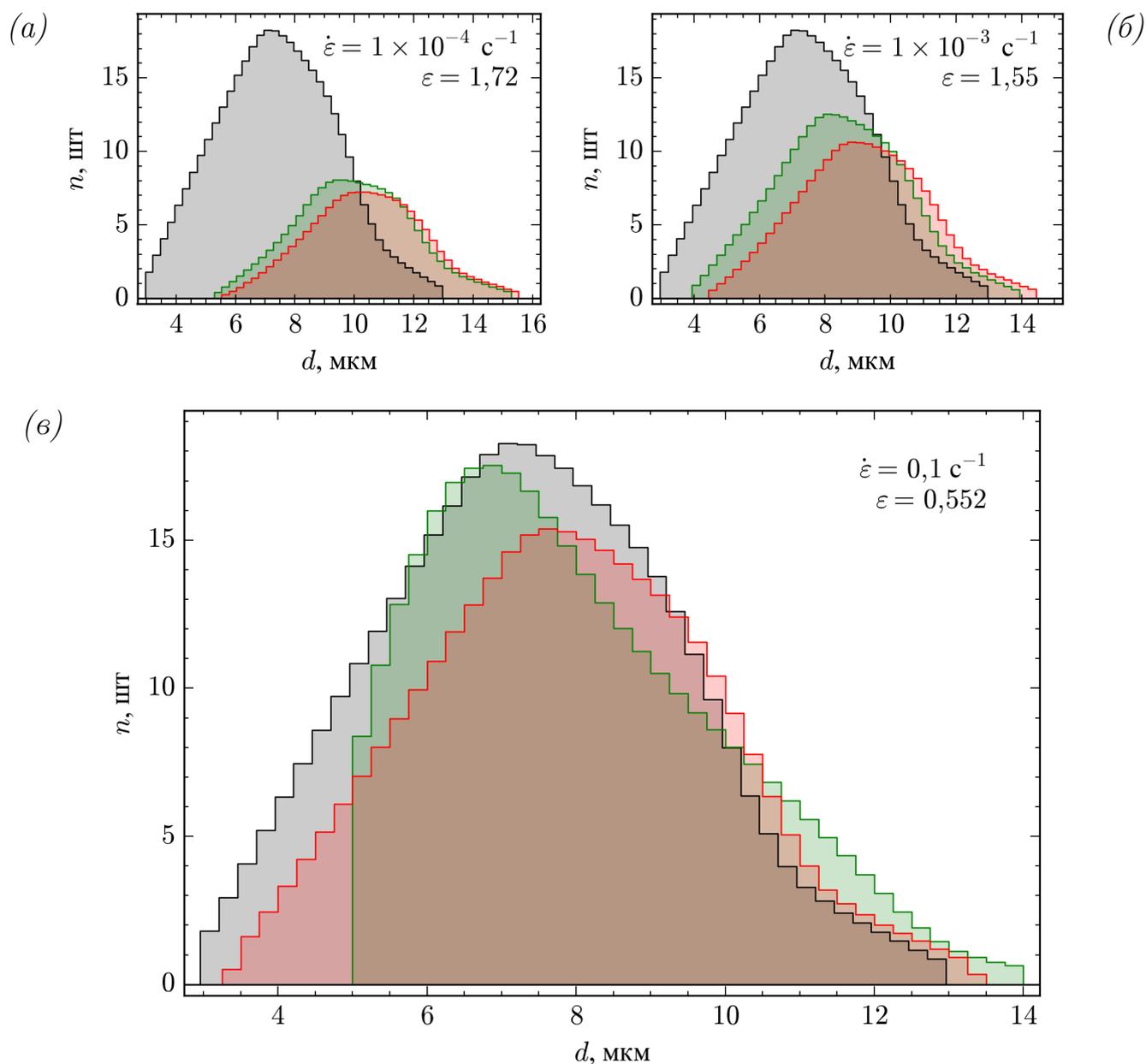


Рис. 4.3. Результат расчёта без использования модели измельчения зёрен. Серым цветом показано начальное распределение, зелёным — конечное экспериментальное, красным — конечное расчётное.

С помощью описанного метода можно произвести моделирование эволюции микроструктуры в процессе деформирования на основе экспериментальных данных из [26], пока без учёта измельчения зёрен. Результат такого расчёта представлен на рисунке 4.3, непрерывные распределения интегрировались с шагом $\delta = 0,25$ мкм.

Как и ожидалось, при расчёте без учёта измельчения начальное распре-

деление в процессе расчёта во всех случаях смещается вправо и вниз. Для экспериментов, соответствующих скоростям деформации $\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и $\dot{\epsilon} = 1 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ это приводит к адекватной форме конечного распределения, удовлетворительно описывающей экспериментальное. Небольшой сдвиг вправо обусловлен завышением скорости роста зёрен моделью со значениями параметров из таблицы 2.3, связанным, по видимому, с малым количеством экспериментальных данных, использовавшихся при определении значений тех параметров модели, которые относятся к росту зёрен (D, G, β, φ).

В случае эксперимента для скорости $\dot{\epsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$ форма распределения описана неудовлетворительно, поскольку, как уже было отмечено, на экспериментальных данных не наблюдается смещения максимума распределения вправо. Целью данной главы является улучшение описания этого эксперимента с помощью добавления к расчёту модели измельчения зёрен.

4.2. Моделирование деформирования с учётом измельчения зёрен

4.2.1. Механизмы измельчения зёрен

Основная идея учёта измельчения заключается в том, что на каждом шаге расчёта после интегрирования системы уравнений, описывающей деформацию материала, для каждой группы зёрен проводится проверка некоторого условия. При его выполнении группа исчезает и возникает одна или несколько новых групп с другими размерами зёрен. Суммарная объёмная доля новых групп должна равняться объёмной доле исходной группы из условия сохранения общего объёма (иначе говоря, сумма объёмных долей всех групп должна равняться единице на любом шаге расчёта).

Для моделирования измельчения зёрен с помощью описанной схемы необходимо задать условие начала измельчения и правила измельчения группы. Под-

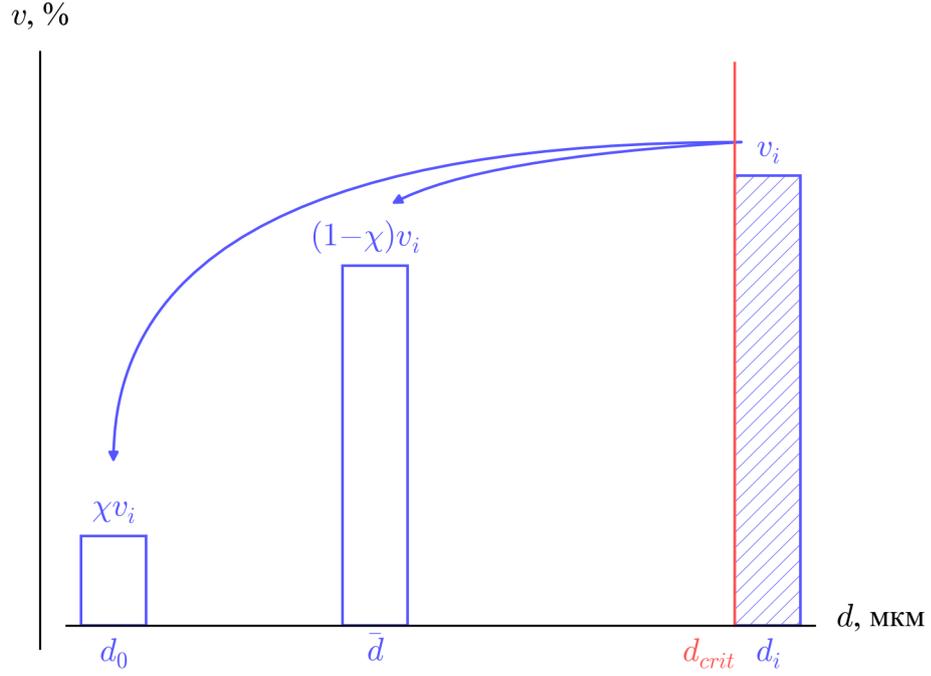


Рис. 4.4. Схема модели измельчения зёрен из работ [35; 52].

ходы к описанию физических механизмов измельчения с помощью этих компонентов предлагались рядом авторов.

Так, авторы работ [35; 52], предлагают условие измельчения на основе текущей накопленной энергии деформации:

$$d_i \geq d_{crit} := d^* \exp\left(-q \int \sigma d\varepsilon\right), \quad (4.2)$$

где d^* — начальный критический размер, q — энергетическая константа.

В этом подходе измельчение приводит к появлению группы зёрен с минимальным наблюдаемым размером d_0 и объёмной долей χv_i (χ — константа). Оставшиеся зёрна, объёмная доля которых составляет $(1 - \chi) v_i$, приобретают размер, равный среднему размеру зёрен в образце d после предыдущего шага. Схема этой модели изображена на рисунке 4.4.

Для оценки пригодности такой модели для описания экспериментальных данных [26] по ним было вычислено значение интеграла накопленной энергии $Q := \int \sigma d\varepsilon$. Величина Q в конце процесса деформирования оказалось наибольшей для эксперимента с $\varepsilon = 1,55$ и $\dot{\varepsilon} = 1 \times 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ (рис. 4.5). Следовательно,

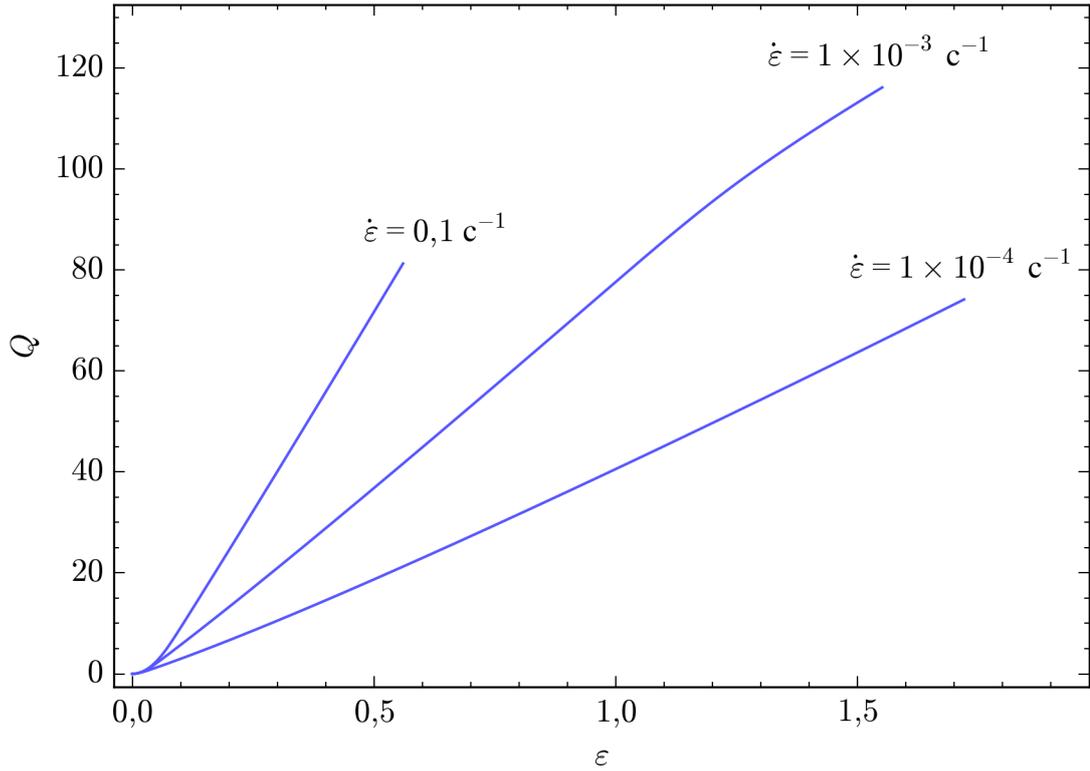


Рис. 4.5. Интеграл накопленной энергии деформации для экспериментов из работы [26].

при использовании энергетического подхода для моделирования процесса именно в этом эксперименте будет получаться наименьший критический размер d_{crit} и наиболее интенсивное измельчение, независимо от выбора значений для параметров d^* и q в уравнении (4.2). Однако, как было показано выше, по конечным распределениям наиболее интенсивное измельчение наблюдается в эксперименте с деформацией $\varepsilon = 0,552$ и скоростью $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ c}^{-1}$. Таким образом, с помощью данной модели не удалось описать наблюдаемый в экспериментах эффект.

В качестве альтернативного был рассмотрен подход, предложенный в работе [18], где условие измельчения формулируется через скорость пластической деформации рассматриваемой группы зёрен $\dot{\varepsilon}_{p,i}$:

$$d_i \geq d_{crit} := d_0 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_{p,i}} \right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad (4.3)$$

где μ — параметр, связанный со скоростью чувствительностью материала, $\dot{\varepsilon}_0$ — критическая скорость деформации (соответствует необходимости измельчения

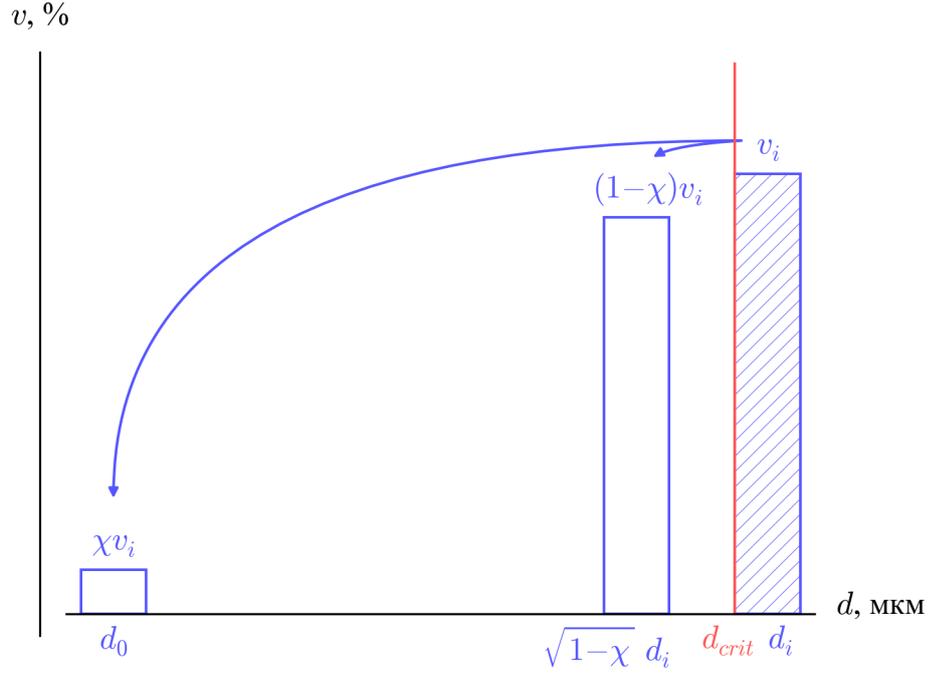


Рис. 4.6. Схема модели измельчения зёрен из работы [18].

даже зёрен минимально возможного размера d_0).

В данной модели часть зёрен группы, достигшей критического значения размера, также образует зёрна наименьшего размера d_0 , однако доля малых зёрен χ не является постоянной, а определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \left(\pi \left(\frac{1}{2} - \chi \right) \right) = b \left(1 - \frac{\varepsilon_{p,i}}{\varepsilon_{crit}} \right), \quad (4.4)$$

где b — константа формы, $\varepsilon_{p,i}$ — уровень накопленной пластической деформации рассматриваемой группы зёрен, ε_{crit} — критический уровень деформации. Размер остальных зёрен становится пропорциональным исходному размеру d_i с коэффициентом $\sqrt{1 - \chi}$.

Итак, в данной модели при выполнении условия (4.3), группа зёрен с размером d_i и объёмной долей v_i превращается в две группы: с размером зёрен d_0 и объёмной долей χv_i и с размером зёрен $\sqrt{1 - \chi} d_i$ и объёмной долей $(1 - \chi) v_i$. Схема этой модели изображена на рисунке 4.6.

При подобном подходе чем выше скорость деформации, тем меньше размер зёрен, попадающих под условие измельчения. Это позволяет обеспечить

требуемое для рассматриваемых экспериментальных данных поведение модели: наиболее интенсивное измельчение происходит при наибольшей скорости. Аналогичное явление наблюдается и в других экспериментах, например, в сплавах на основе алюминия [7].

Для параметров μ и $\dot{\epsilon}_0$ в [18] приведены точные формулы, однако они основаны на конкретных определяющих соотношениях и связаны с микроструктурными параметрами, такими как атомный объем, коэффициенты диффузии, вектор Бюргерса и др. Применять записанные в таком виде формулы при использовании других определяющих соотношений, особенно феноменологического типа, невозможно. Однако можно найти подходящие значения для параметров μ и $\dot{\epsilon}_0$ непосредственно на основе экспериментальных данных.

4.2.2. Определение значений для параметров в уравнении критического размера зерна

Параметр μ в условии (4.3) связан с показателем скоростной чувствительности материала m . Для определения значений параметров в правой части условия рассмотрим зависимость напряжения σ от скорости деформации $\dot{\epsilon}$ при различных начальных размерах зерна. Характерная для сверхпластичности «сигмоидальная» форма этой зависимости при её изображении в логарифмических координатах подробно обсуждалась в главе 1. Значение показателя m определяется как производная этой зависимости:

$$m(d, \dot{\epsilon}) := \frac{\partial \log \sigma(d, \dot{\epsilon})}{\partial \log \dot{\epsilon}}.$$

Задавшись некоторым фиксированным значением m_0 и произвольным размером зерна d_r , можно вычислить зависимость $m(d_r, \dot{\epsilon})$ и найти такую скорость деформации $\dot{\epsilon}_r$, что $m(d_r, \dot{\epsilon}_r) = m_0$. Перебирая теперь различные значения размера d_r , получим набор пар «размер зерна d_r , скорость деформации $\dot{\epsilon}_r$ », соответствующих одинаковому значению показателя скоростной чувствительности. Далее можно применить метод наименьших квадратов (МНК) для поиска таких

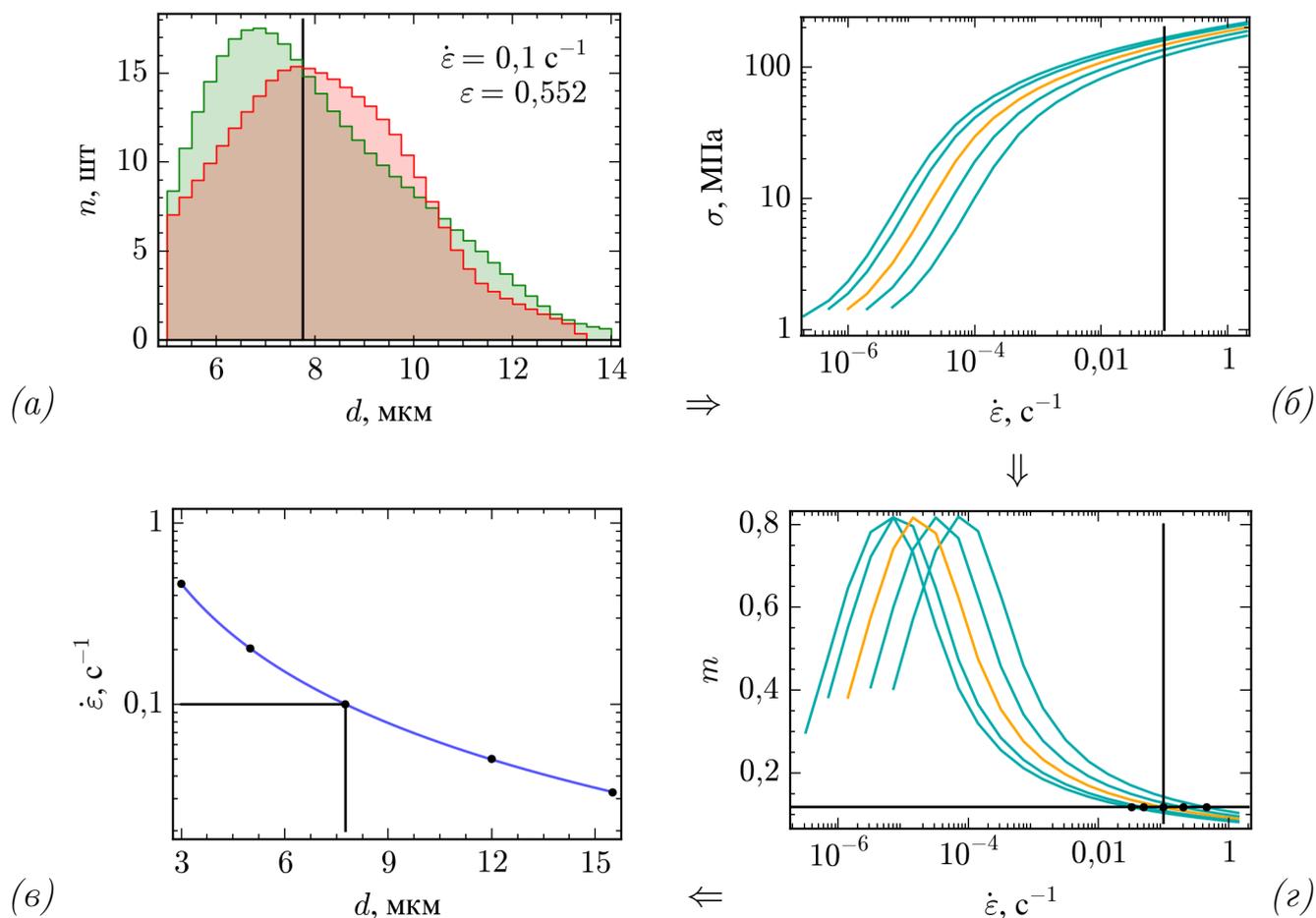


Рис. 4.7. Алгоритм феноменологического определения значений для параметров в условии критического размера зерна (4.3).

значений μ и $\dot{\varepsilon}_0$, при которых зависимость (4.3) наилучшим образом аппроксимирует полученный набор. Схема применения описанного подхода к экспериментальным данным [26] показана на рисунке 4.7.

Сначала определим интересующее нас значение m_0 . Для этого смоделируем эксперимент, в котором наблюдалось измельчение зёрен (растяжение до деформации $\varepsilon = 0,552$ со скоростью $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$), без использования какой-либо модели измельчения. В результате получим распределение зёрен по размерам (рис. 4.7, а; соответствует рис. 4.3, в). Критическим в этом эксперименте будем считать значение размера зерна, соответствующее точке первого пересечения расчётного распределения с экспериментальным (на рисунке примерно 7,75 мкм). Действительно, введение в рассмотрение измельчения будет умень-

шать количество зёрен большего размера (входящих в группы с размером зерна, превышающим критический) и увеличивать количество зёрен меньшего размера (в составе групп, образующихся в результате измельчения), а следовательно, расчётное распределение будет приближаться к экспериментальному.

Далее построим зависимости $\sigma(d, \dot{\epsilon})$ и $m(d, \dot{\epsilon})$ для найденного критического размера зерна и для нескольких вспомогательных размеров d_r (рис. 4.7, б, г; кривые для найденного размера выделены оранжевым цветом). Примем в качестве m_0 значение функции $m(d, \dot{\epsilon})$, соответствующее критическому размеру зерна (7,75 мкм) и скорости деформации в рассматриваемом эксперименте ($0,1 \text{ с}^{-1}$). На основе остальных (вспомогательных) кривых $m(d, \dot{\epsilon})$ определим набор точек $(d, \dot{\epsilon})$, соответствующих тому же значению показателя скоростной чувствительности m_0 . Наконец, с помощью МНК определим значения для параметров μ и $\dot{\epsilon}_0$, при которых зависимость (4.3) наиболее удачно аппроксимирует полученный набор точек (рис. 4.7, в). Полученные для рассматриваемых экспериментальных данных и модели материала значения параметров таковы: $d_0 = 3,0 \text{ мкм}$; $m_0 = 0,117$; $\dot{\epsilon}_0 = 0,463 \text{ с}^{-1}$; $\mu = 1,61$.

Стоит отметить, что погрешность описания результирующего набора точек уравнением (4.3) крайне мала. Это подчёркивает правильность выбора опорных точек на основе одинакового значения показателя скоростной чувствительности m . Поэтому, в случае наличия в наборе экспериментальных данных нескольких экспериментов, в которых наблюдается измельчение, значение m_0 следует искать также с помощью МНК. Для этого необходимо указанным способом определить критический размер в каждом из экспериментов, после чего применять МНК к параметру m_0 , на каждом шаге находя соответствующий текущему значению m_0 набор точек $(d, \dot{\epsilon})$ и значения для параметров μ и $\dot{\epsilon}_0$ с помощью «вложенного» МНК по этим параметрам.

При использовании такого алгоритма оба МНК будут минимизировать один и тот же функционал — отклонение зависимости (4.3) от набора критических размеров для нескольких скоростей деформации. Однако такой алгоритм

не эквивалентен применению МНК сразу к параметрам μ и $\dot{\epsilon}_0$, поскольку в этом случае используемые опорные точки могут отвечать разным значениям m , что не соответствует физическому смыслу искомых параметров.

4.2.3. Результат моделирования измельчения

После определения значений для параметров в условии (4.3), задающем критический размер зерна в модели из работы [18], было смоделировано поведение материала в эксперименте с учётом измельчения зёрен. Значения b и ϵ_{crit} для уравнения (4.4) были взяты из оригинальной работы. Полученный результат приведён на рисунке 4.8, однако он не является удовлетворительным.

Одной из причин является негладкий характер распределения. Оно содержит выбросы при некоторых значениях размеров зерна d : особенно выраженный в начале распределения ($d \approx d_0$) и чуть меньше — при значениях, близких к критическому размеру зерна. При этом все экспериментально полученные распределения имеют гладкий вид в форме купола, без ярко выраженных особых точек.

Появление выбросов непосредственно связано с особенностью используемого в работе [18] подхода к описанию измельчения зерна при деформировании. Действительно, согласно этому подходу из группы, размер зёрен в которой превысил критический, отделяется группа с наименьшим наблюдаемым размером зёрен d_0 , оставшиеся после этого зёрна уменьшаются в $\sqrt{1 - \chi}$ раз и образуют ещё одну группу. Даже с учётом произошедшего уменьшения размеров, эта группа содержит достаточно большие зёрна и вскоре снова попадает под действие условия измельчения. Образовавшиеся зёрна размера d_0 за время эксперимента не успевают существенно вырасти, т.е. их конечный размер остаётся сопоставим с d_0 . Таким образом возникает цепочка измельчающихся групп, в которой каждое происходящее измельчение увеличивает концентрацию зёрен в двух указанных областях.

Крайне большие абсолютные значения количества зёрен в области, соответ-

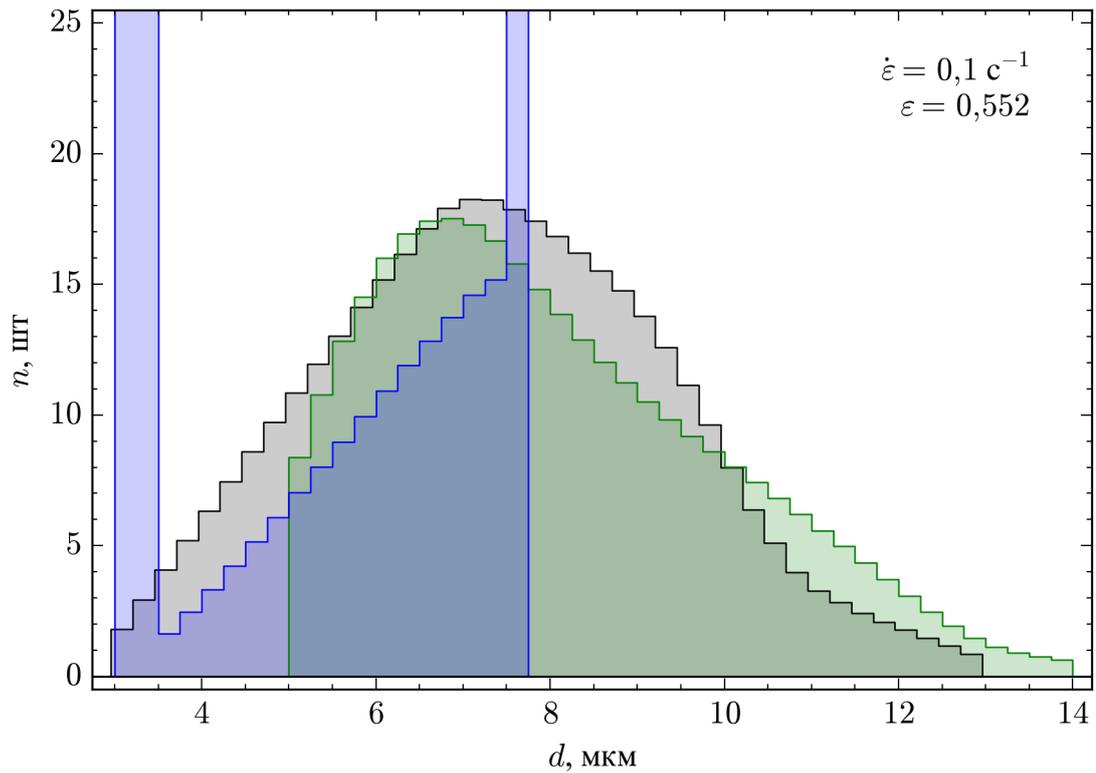


Рис. 4.8. Результат расчёта с использованием модели измельчения зёрен из работы [18]. Серым цветом показано начальное распределение, зелёным — конечное экспериментальное, синим — конечное расчётное.

ствующей их минимальным размерам, обусловлены тем, что при сопоставимой объёмной доле группы с наименьшим размером зёрен содержат наибольшее их количество, поскольку оно обратно пропорционально кубу этого размера (4.1).

Второй проблемой изображённого на рисунке 4.8 расчётного распределения является полное отсутствие зёрен, имеющих размер больше критического, что также обусловлено используемой моделью. При этом, как уже было показано, распределение, полученное при расчёте без учёта измельчения, пересекается с экспериментальным на достаточно маленьком значении размера зерна (рис. 4.3), после которого экспериментальное распределение содержит длинный «хвост», убывающий практически до нуля. Следовательно, для воспроизведения экспериментального распределения необходимо, чтобы зёрна больших размеров уже начали измельчаться (т.е. количество зёрен стало меньше, чем без

учёта измельчения), но измельчились ещё не все (т.е. распределение не «обрывается», а убывает плавно). Рассматриваемая модель такого «промежуточного» состояния не предполагает.

4.3. Модель с неполным измельчением

Для решения указанных проблем в настоящей работе предлагается идея описания измельчения на основе модели с неполным измельчением групп зёрен. В основу модели положено соображение о том, что в реальном материале измельчение зерна происходит при накоплении им повреждений до критического уровня, и в разных зёрнах материала — даже одного размера — этот момент наступает не одновременно. В предлагаемой модели зерно, превысившее критический размер, в каждый момент времени измельчается с некоторой вероятностью, зависящей от степени превышения его текущим размером критического (то есть чем дальше растёт зерно, тем вероятнее оно измельчится). В терминах групп это означает, что измельчению подвергается только часть зёрен группы, достигшей критического размера. Из этой части зёрен образуются новые группы с другими размерами, но исходная группа при этом не исчезает, а продолжает содержать прочие, ещё не подвергшиеся измельчению зёрна.

Объёмные доли новых групп связаны с вероятностью измельчения единичного зерна в каждый момент времени. Как уже было сказано, эта вероятность пропорциональна отношению текущего размера зерна и критического размера (4.3), чтобы по мере роста зёрен в группе рано или поздно она подверглась измельчению целиком:

$$s_i := s_0 \left(\frac{d_i}{d_{crit}} \right)^\theta = s_0 \left(\frac{d_i}{d_0} \left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}_{p,i}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right)^\theta,$$

где s_0 — начальная вероятность измельчения, θ — степень роста вероятности.

Согласно уравнению (4.1) в начале шага количество зёрен в группе равно

$$n_i = \frac{6\tilde{V}_0}{\pi} \cdot \frac{v_i}{d_i^3}.$$

Переход от вероятности измельчения конкретного зерна к объёмным долям достигается путём взятия математического ожидания количества зёрен группы, подвергшихся измельчению на данном шаге расчёта. Обозначим это количество за dn_i . Принимая, что все зёрна группы измельчаются равновероятно, запишем среднее количество измельчающихся зёрен:

$$E [dn_i] = \sum_{j=1}^{n_i} s_i dt = n_i s_i dt = \frac{6\tilde{V}_0}{\pi} \cdot \frac{v_i s_i dt}{d_i^3},$$

где dt — величина шага по времени. Совершая обратный переход и упрощая выражение, получим среднюю объёмную долю измельчающихся зёрен:

$$E [dv_i] = \frac{\frac{1}{6}\pi d_i^3 E [dn_i]}{\tilde{V}_0} = \frac{\pi d_i^3 \cdot 6\tilde{V}_0 \cdot v_i s_i dt}{6\tilde{V}_0 \cdot \pi d_i^3} = v_i s_i dt.$$

В простейшем случае все измельчающиеся зёрна образуют единственную новую группу. Примем новый размер зёрен в этой группе пропорциональным исходному (до измельчения). Для этого введём коэффициент изменения размера при измельчении r . Итак, при достижении группой с размером зёрен d_i и объёмной долей v_i критического размера (4.3) от неё отделяется новая группа с размером зёрен rd_i и объёмной долей $v_i s_i dt$, а объёмная доля исходной группы уменьшается на ту же величину и становится равной $(1 - s_i dt) v_i$; размер оставшихся в ней зёрен при этом не меняется. Схема данной модели изображена на рисунке 4.9.

Значения параметров модели s_0 , θ и r можно найти с помощью МНК, используя в качестве меры ошибки отклонение расчётного распределения от экспериментального. Для рассматриваемых экспериментальных данных и модели материала получены следующие величины: $s_0 = 16,6$; $\theta = 3,34 \times 10^{-4}$; $r = 0,671$.

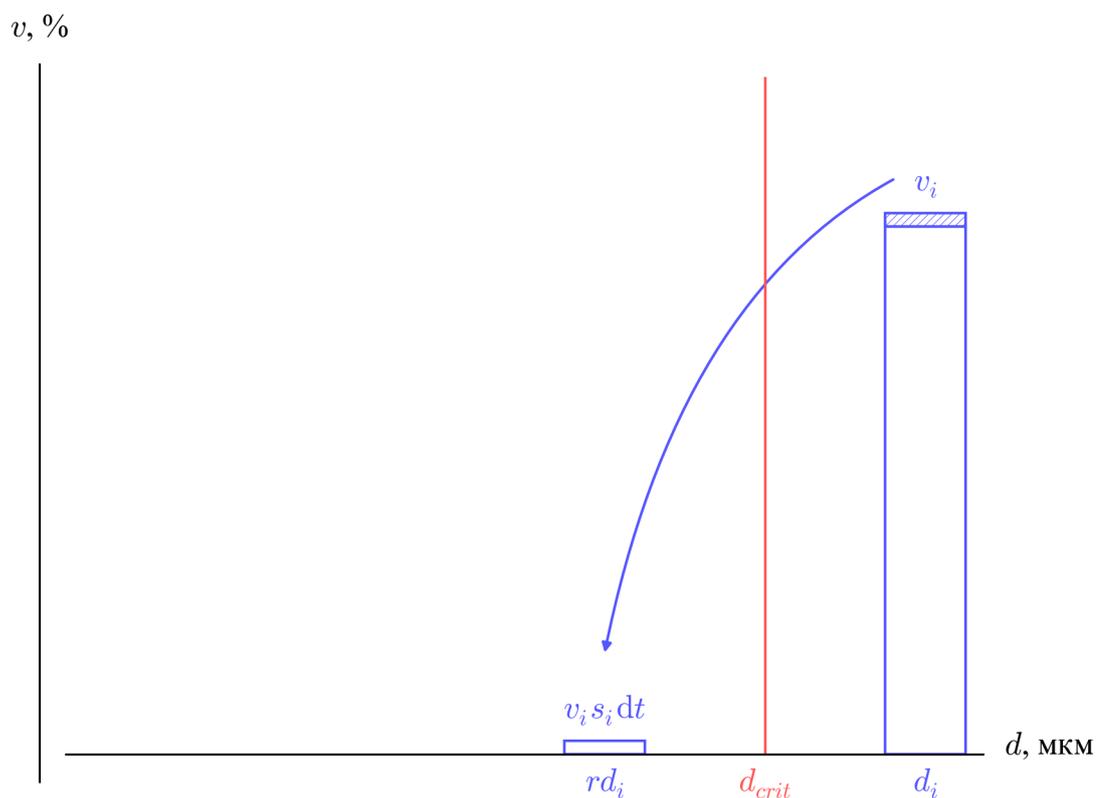


Рис. 4.9. Схема предложенной модели с неполным измельчением.

4.3.1. Алгоритм объединения групп зёрен

При измельчении групп зёрен на каждом шаге расчёта возникает несколько новых групп, поведение которых необходимо отслеживать на последующих шагах. Если измельчение происходит сравнительно редко, время расчёта увеличивается незначительно. В противном случае количество групп за время расчёта существенно возрастает, что приводит к многократному увеличению общего затрачиваемого времени.

Эта проблема крайне актуальна для моделей с неполным измельчением, поскольку при таком подходе группы, размер зёрен в которых превысил критический, не исчезают, а лишь теряют часть своего объёма. При продолжении расчёта эти группы продолжают терять объем на каждом последующем шаге, каждый раз приводя при этом к созданию новых групп, что приводит к взрывному росту их общего количества.

При использовании определяющих соотношений с единственным внутренним параметром — размером зерна d_i — некоторые авторы применяют подход, при котором после каждого шага проводится перегруппировка зёрен по исходным интервалам длины δ [35]:

$$v_i|_{t+\Delta t} = \sum_{j: d_j + \Delta d_j \in (d_i - \delta/2, d_i + \delta/2)} v_j|_t,$$

где Δt — величина шага, Δd_j — изменение размера j -го зерна за время Δt , а индекс после вертикальной черты означает момент времени, в который рассматривается величина.

Для используемых в настоящей работе определяющих соотношений такой подход неприменим, поскольку внутренним параметром группы является также величина накопленной пластической деформации $\varepsilon_{p,i}$. Однако алгоритм можно модифицировать с использованием той же идеи. Для этого зададимся малым значением интервала δ_0 и будем называть *близкими* группы, для которых разница размеров зёрен меньше выбранного числа: $|d_i - d_j| < \delta_0$. Теперь на каждом шаге расчёта после обработки измельчения будем рассматривать все получившиеся пары групп, объединяя близкие группы в одну. Параметры новой группы выберем из условия сохранения взвешенного среднего с тем, чтобы исключить скачкообразное изменение макропараметров образца в момент объединения:

$$\begin{aligned} v_k &= v_i + v_j; & d_k v_k &= d_i v_i + d_j v_j \Rightarrow d_k = \frac{d_i v_i + d_j v_j}{v_i + v_j}; \\ \sigma_k v_k &= \sigma_i v_i + \sigma_j v_j \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_n(\varepsilon_k - \varepsilon_{p,k}) v_k = E_n(\varepsilon_i - \varepsilon_{p,i}) v_i + E_n(\varepsilon_j - \varepsilon_{p,j}) v_j \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varepsilon_{p,k} v_k = \varepsilon_{p,i} v_i + \varepsilon_{p,j} v_j + \varepsilon \cdot (v_k - v_i - v_j) \Rightarrow \varepsilon_{p,k} = \frac{\varepsilon_{p,i} v_i + \varepsilon_{p,j} v_j}{v_i + v_j}, \end{aligned}$$

где i, j — номера объединяемых групп, k — номер новой группы; в последнем выводе использовано равенство полных деформаций групп $\varepsilon_i = \varepsilon_j = \varepsilon_k = \varepsilon$.

При использовании объединения конечное количество групп уменьшается на порядок (рис. 4.10), как и время расчёта (44 секунды против 14 минут). Результат расчёта при этом остаётся практически неизменным.

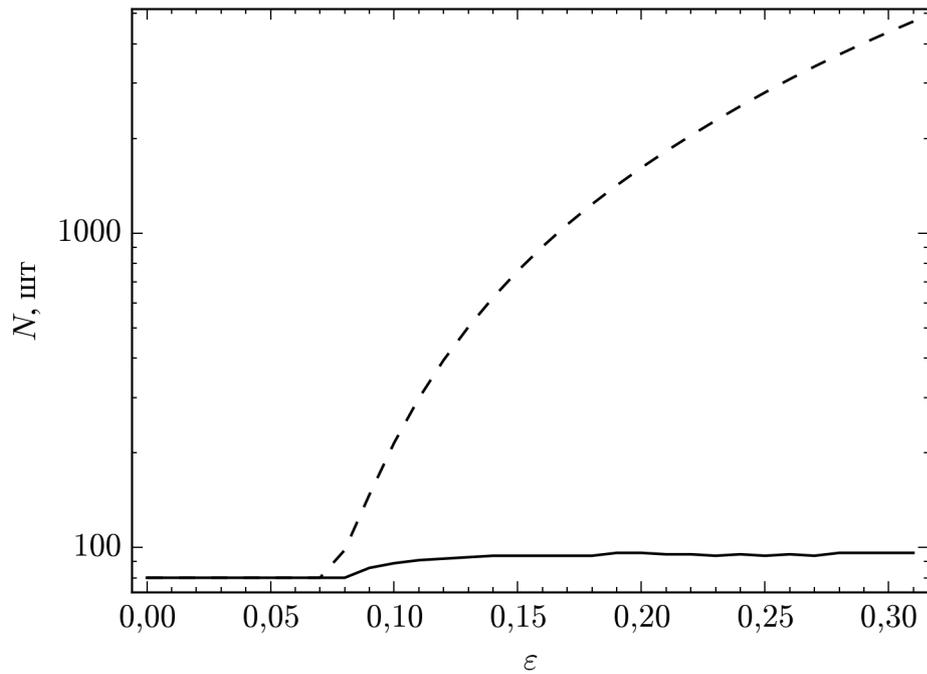


Рис. 4.10. Изменение общего числа групп в процессе расчёта. Сплошная линия — с использованием алгоритма объединения, штриховая — без использования.

Необходимо отметить, что предложенный алгоритм объединения требует рассмотрения всех пар групп, то есть обладает квадратичной сложностью, тогда как остальные этапы расчёта линейны по числу групп. В результате при отсутствии близких групп применение алгоритма объединения, наоборот, увеличивает время расчёта. Однако можно оптимизировать алгоритм, исключив из рассмотрения пары групп, которые заведомо не являются близкими. Например, предварительно отсортировать группы по размеру, и для каждой группы объединять с ней следующие группы до тех пор, пока разность размеров не превысит δ_0 . Среди остальных групп (с большими размерами) уже не будет подходящих для объединения с текущей, а значит можно переходить к следующей группе и искать новые возможные объединения начиная с неё, не возвращаясь к предыдущим группам.

С учётом подобной оптимизации алгоритм объединения групп зёрен практически не увеличивает время расчёта в случае, когда не находит подходящих для объединения групп, но существенно экономит время, если такие группы

есть (за счёт уменьшения числа групп на последующих шагах), а потому его применение вполне оправдано.

4.4. Результаты и обсуждение

Результаты расчёта на основании предложенной модели для экспериментальных данных из [26], относящихся к эксперименту с наблюдающимся измельчением зёрен ($\varepsilon = 0,552$; $\dot{\varepsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$), приведены на рисунке 4.11. Видно, что в расчётном распределении положение максимума не сместилось вправо по мере роста зёрен, и область максимума экспериментального распределения в целом корректно смоделирована. Сравнение рассчитанного по модели распределения с распределением, рассчитанным без учёта измельчения зёрен, подтверждает, что модель работает в соответствии с заложенными в неё механизмами. А именно, в области, где распределение без учёта измельчения превышает экспериментальное — то есть при размерах зёрен больших критического — количество зёрен уменьшилось в пользу групп с размерами, близкими к тому, при котором наблюдается максимум у экспериментального распределения.

В то же время, можно отметить неудовлетворительное описание моделью области больших размеров зёрен. Это связано с отсутствием в модели измельчения механизмов для её описания: в данной области даже распределение, рассчитанное без учёта измельчения, находится ниже экспериментального. Согласно предложенной модели, по мере роста зёрен вероятность их измельчения должна увеличиваться, тогда как для корректного описания экспериментального распределения эту вероятность следовало бы уменьшить вплоть до полного исключения и даже предположить возможность увеличения количества зёрен с размерами, превышающими критический.

Теоретически, при использовании подхода с неполным измельчением возможно описать и такой эффект. Для этого при измельчении группы зёрен должно образовываться две или более групп с коэффициентами измельчения r_j и

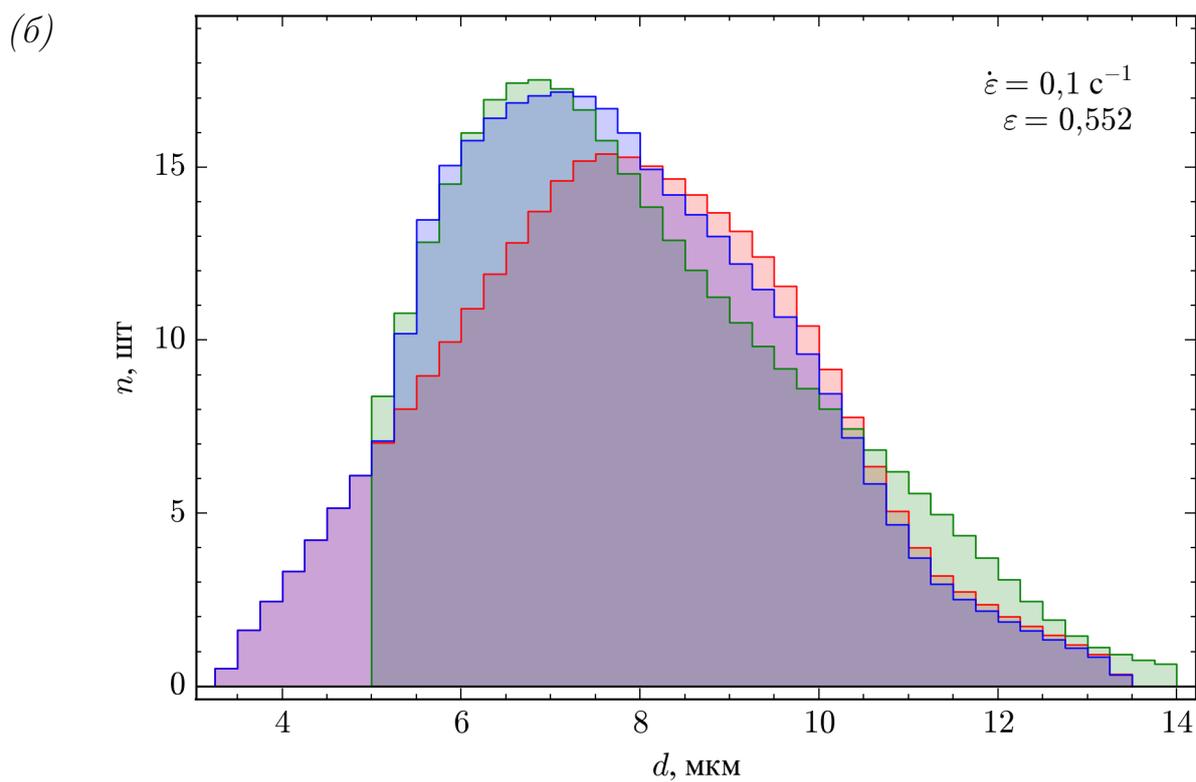
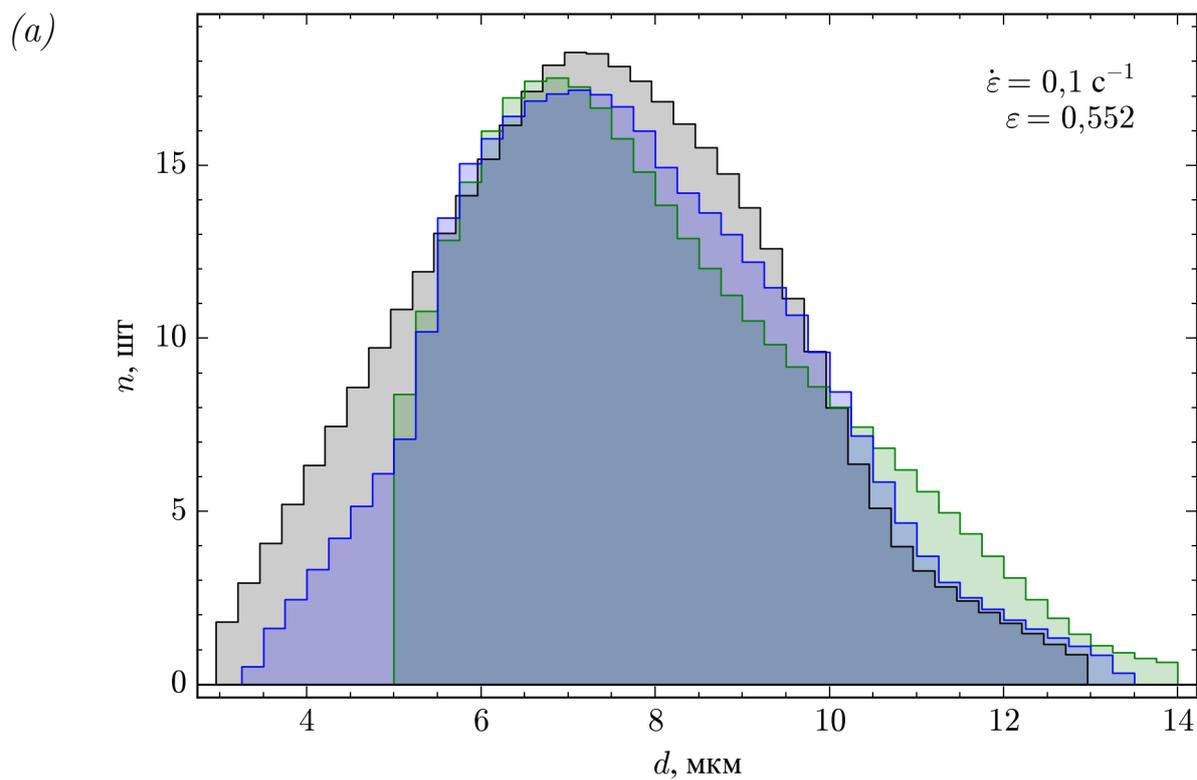


Рис. 4.11. Результат расчёта с использованием предложенной модели с неполным измельчением групп зёрен (а) и его сравнение с расчётом без учёта измельчения (б). Серым цветом показано начальное распределение, зелёным — конечное экспериментальное, синим — конечное расчётное с учётом измельчения, красным — конечное расчётное без учёта измельчения (соответствует рис. 4.3).

относительными долями χ_j ($\sum_j \chi_j = 1$); то есть группа с размером зёрен $r_1 d_i$ и объёмной долей $\chi_1 v_i s_i dt$, группа с размером зёрен $r_2 d_i$ и объёмной долей $\chi_2 v_i s_i dt$ и так далее, с уменьшением объёмной доли исходной группы до $(1 - s_i dt) v_i$, как и в оригинальной схеме. Однако имеющихся данных недостаточно для устойчивого определения коэффициентов в такой модели измельчения, кроме того, потребовалось бы скорректировать параметры в уравнении критической скорости деформации. Таким образом, дальнейшее исследование наблюдаемого расхождения требует дополнительных экспериментальных данных, подтверждающих наличие неучтённого механизма.

Также к недостаткам полученного результата можно отнести тот факт, что измельчение всех зёрен группы ($s_i dt = 1$) при найденных значениях параметров соответствует недостижимо большим значениям размера зерна. Вероятно, это связано с той же областью больших размеров зёрен, которая по описанным выше причинам не позволяет вероятности измельчения корректно расти. Для устранения этого эффекта в МНК можно ввести весовую функцию, уменьшающую значимость ошибки в «сомнительной» области.

В качестве весовой функции можно рассмотреть, например, само экспериментальное распределение, нормированное по всему диапазону размеров:

$$w_i = \frac{n_i}{\sum_j n_j}. \quad (4.5)$$

Такая весовая функция соответствует большому весу в области максимума распределения и пониженному в убывающем «хвосте». Значения параметров, найденные с её помощью, таковы: $s_0 = 2,08$; $\theta = 7,10$; $r = 0,569$. Соответствующая модель при скорости деформации $\dot{\epsilon} = 0,1 \text{ с}^{-1}$ приведёт к полному измельчению зёрен уже при размере $d = 18,5 \text{ мкм}$. Результат расчёта по этой модели показан на рисунке 4.12, экспериментальное распределение описывается ею несколько хуже, хотя основной эффект (отсутствие смещения максимума распределения вправо) все ещё приемлемо смоделирован.

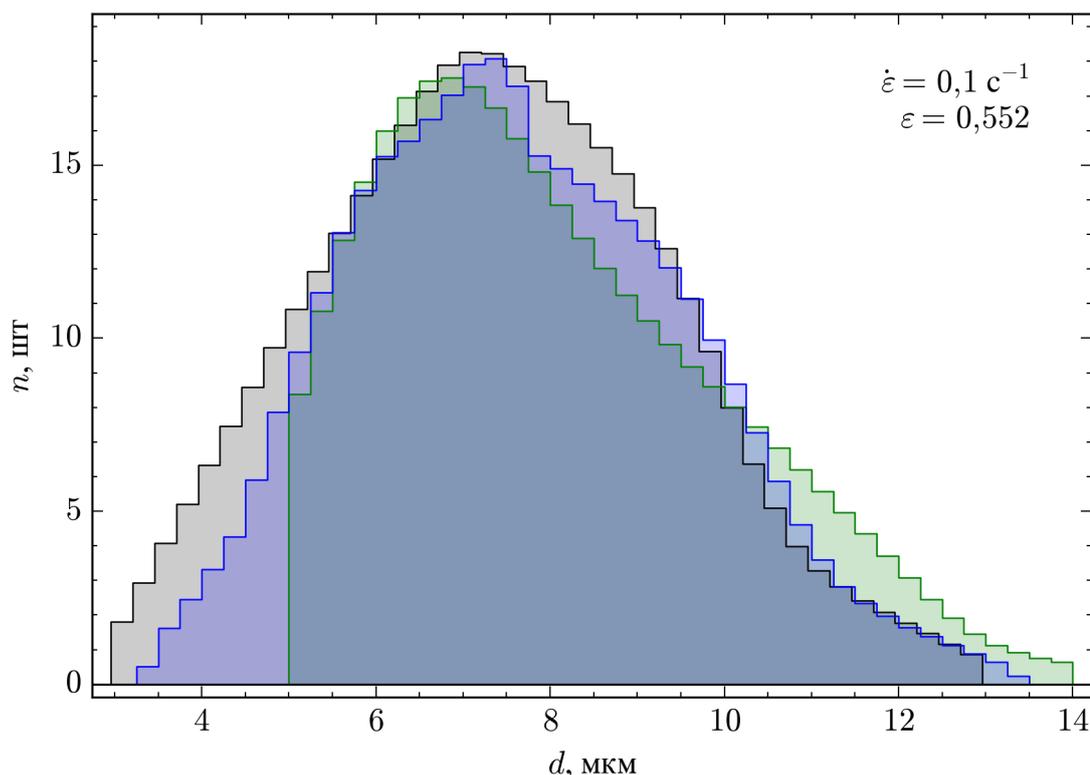


Рис. 4.12. Результат расчёта с использованием предложенной модели с неполным измельчением групп зёрен и весовой функцией МНК согласно (4.5). Серым цветом показано начальное распределение, зелёным — конечное экспериментальное, синим — конечное расчётное.

Учёт измельчения зёрен особенно важен, когда микроструктура образца недостаточно хорошо подготовлена для сверхпластичности. На рисунке 4.13 показаны расчётные напряжение и средний размер зёрен в процессе одноосного растяжения при постоянной скорости деформации $0,1 \text{ c}^{-1}$ образца с модельным распределением зёрен, состоящим из двух «куполов» нормального распределения вокруг размеров 6 мкм и 20 мкм. Зёрна с размерами ~ 6 мкм составляют почти 95 % от общего количества зёрен в образце, однако по объёму занимают при этом лишь около 36 % материала. Несмотря на то, что средний размер зёрен в описанном распределении больше 15 мкм, при моделировании без учёта измельчения материал ведёт себя как сверхпластический — можно заметить слабое деформационное упрочнение и рост зёрен, сопровождающий развитие деформации.

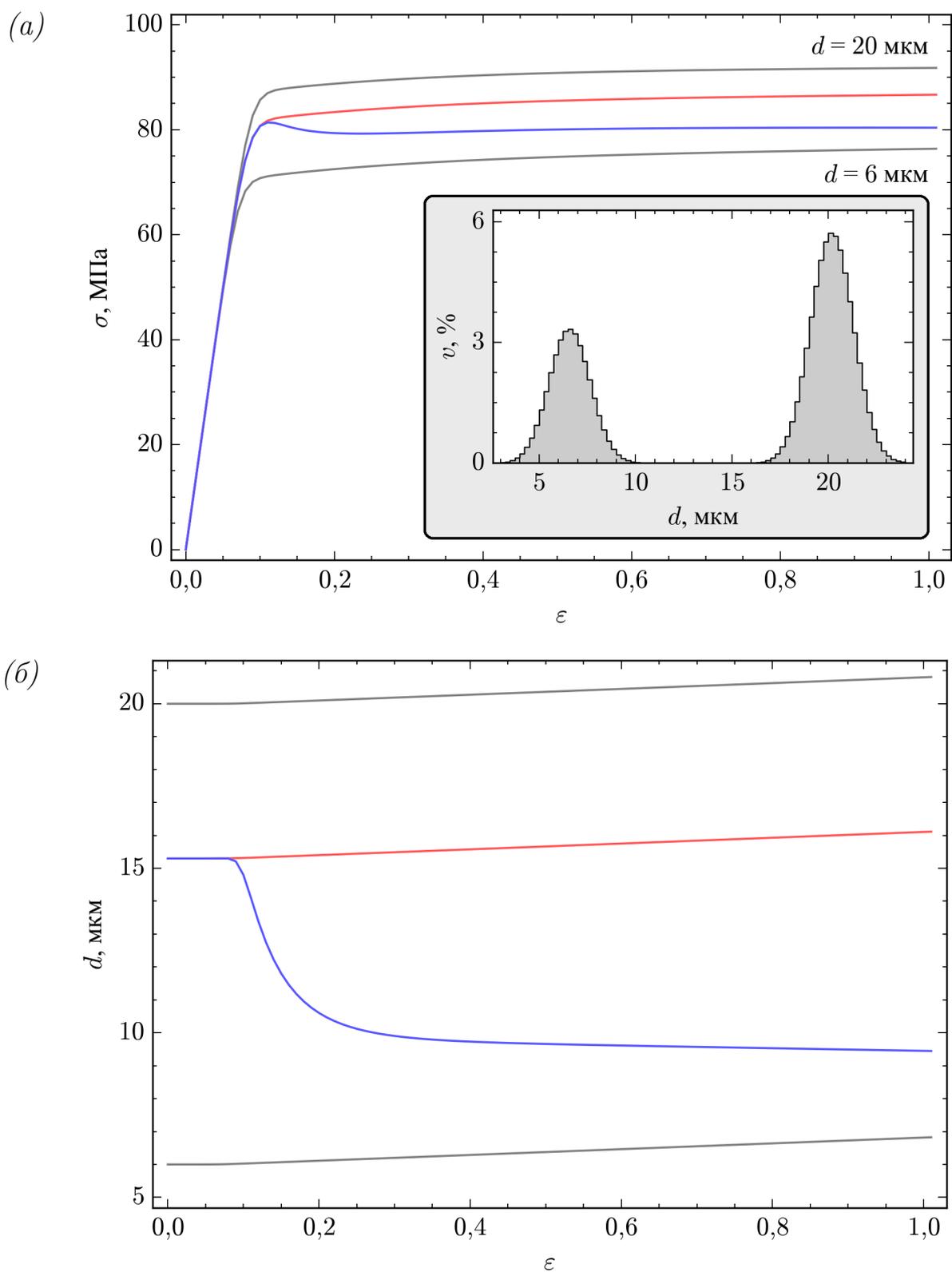


Рис. 4.13. Влияние измельчения зёрен на напряжение (а) и средний размер зёрен в образце (б). Серым цветом показаны результаты для «опорных» размеров распределения (приведено на врезке), красным — результат расчёта по всему распределению, но без учёта измельчения зёрен, синим — с учётом измельчения.

При расчёте с учётом измельчения картина принципиально меняется — при значении деформации $\varepsilon \approx 0,1$ начинается интенсивное измельчение зёрен, которое полностью компенсирует деформационное упрочнение (ближе к концу процесса наблюдается даже некоторое разупрочнение образца). Средний размер зёрен в материале в то же время резко уменьшается и стремится к значению ~ 10 мкм, считающемуся пороговым для проявления сверхпластичности в металлах. Аналогичный вид кривых деформирования наблюдается и при экспериментальном исследовании материалов [1]. Таким образом, введение в рассмотрение измельчения зёрен не только позволяет моделировать эволюцию микроструктуры образца, но и влияет на макропараметры процесса деформирования.

4.5. Заключение

В данной главе рассмотрены подходы к дополнению определяющих соотношений материала моделями измельчения зёрен. Описаны некоторые вычислительные особенности, возникающие при моделировании микроструктуры материала в виде распределений зёрен (группировка зёрен, алгоритм объединения близких групп) и предложена модель механизма измельчения зёрен, основанная на идее неполного измельчения групп. Показано, что учёт распределения размеров зёрен в материале — в том числе их измельчения — позволяет уточнить получаемые в результате расчёта значения макропараметров.

Необходимо отметить, что с точки зрения эволюции микроструктуры полученная модель является феноменологической, поскольку параметр d не связывается напрямую с истинным размером конкретных зёрен, а рассматривается как внутренняя переменная модели. Это следует из ряда положений, принятых в процессе построения модели, в частности группировки зёрен в терминах занимаемого ими объёма и использованием при расчёте объёмных долей (4.1) предположения о сферической форме зёрен, которое, строго говоря, неверно.

Наличие у зёрен главного направления и связанное с ним понятие ориентации зёрен также может являться предметом изучения [1; 4].

Таким образом, в рамках предлагаемой модели параметр d следует воспринимать как среднюю, обобщённую характеристику некоторого подмножества зёрен материала, обладающих близким начальным размером и схожей историей эволюции. Тем не менее подобный чисто феноменологический подход позволяет смоделировать измельчение зёрен и качественно описать наблюдаемые в экспериментальных данных эффекты.

Заключение

Современные определяющие соотношения сверхпластичности на основе феноменологических параметров представляют собой сложные комплексы уравнений, описывающих не только наблюдаемые макроскопические величины, но и внутреннее состояние материала и его способность — или, напротив, сопротивление — к дальнейшему деформированию.

В настоящей работе проанализированы некоторые соотношения подобного типа и трудности, возникающие при их применении для обработки различных экспериментальных данных, в том числе описывающих в той или иной форме эволюцию микроструктуры материала. Предпринята попытка — разумеется, не окончательная — в некоторой мере унифицировать подход к изучению таких соотношений и анализу построенных на их основе моделей поведения материала с помощью соотнесения этих моделей с экспериментальными данными. Затронут вопрос идентификации моделей, в частности, дано несколько рекомендаций по выбору типов и количества экспериментов, необходимых для устойчивого определения значений входящих в модели параметров.

В ходе работы с помощью решения некоторых типовых задач показано, что в ряде случаев учёт микроструктуры материала и её изменения в процессе деформирования действительно оказывает значимое влияние на получаемые при расчёте величины различных характеристик процесса, в том числе, имеющих макроскопическую природу. В подобных случаях комплексные соотношения, детально описывающие поведение материала, могут оказаться более предпочтительными для проведения конструкционных расчётов, даже несмотря на сложность их идентификации и расчёта по ним, по сравнению с широко распространёнными более простыми аналогами. Качественное описание поведения материала позволяет уточнить оценки таких технологических параметров как толщина листа в ходе его формовки, уровни напряжения при растяжении материала и тому подобное.

Состояние сверхпластичности и близкие к нему режимы встречаются при проектировании и работе механизмов во многих областях промышленности. Широко применяется сверхпластическая формовка из металлических заготовок изделий большого объёма и/или сложной формы, в том числе ответственных деталей, таких как лопатки турбин аэрокосмической техники. Важность соответствующих рабочих процессов и необходимые при этом уровни допусков требуют достижения хорошей точности при прогнозировании поведения материала в интересующих технолога условиях.

Таким образом, представленная работа поднимает значимую на сегодняшний день тему и предлагает некоторые продвижения либо пробные шаги в соответствующих областях. Автор надеется, что его работа послужит источником вдохновения для дальнейших, более детальных исследований в этом — несомненно, важном — научном направлении.

Список литературы

1. Al-Mg-Fe-Ni based alloy for high strain rate superplastic forming / A. A. Kishchik [et al.] // *Materials Science and Engineering: A*. — 2018. — Vol. 718. — P. 190–197. — DOI: [10.1016/j.msea.2018.01.099](https://doi.org/10.1016/j.msea.2018.01.099).
2. *Ayubali A. A., Shanmugavel B. P., Padmanabhan K. A.* On the relative accuracy of power law analyses for uniaxial low stress steady state high homologous temperature deformation // *Mechanics of Materials*. — 2020. — Vol. 140. — DOI: [10.1016/j.mechmat.2019.103224](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103224).
3. *Beliakova T. A., Goncharov I. A.* Determination of parameters values in the models of microstructure evolution under superplastic deformation condition // *Abstracts of 1st Russia-Japan Joint Workshop on Composite Materials (RJCM-1)*. October 31 - November 1, 2019. Lomonosov Moscow State University. — 2019. — P. 45.
4. *Bylya O. I., Vasin R. A., Pshenichnyuk A. I.* An approach for modeling the active transformation of microstructure of two-phase Alloys in FEM simulation of technological chains in superplastic forming // *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*. — 2014. — Vol. 45, no. 9. — P. 799–806. — DOI: [10.1002/mawe.201400284](https://doi.org/10.1002/mawe.201400284).
5. *Chandra N., Kannan D.* Superplastic Sheet Metal Forming of a Generalized Cup. Part I: Uniform Thinning // *Journal of Materials Engineering and Performanc.* — 1992. — Vol. 1, no. 6. — P. 801–812. — DOI: [10.1007/BF02658264](https://doi.org/10.1007/BF02658264).
6. *Chandra N., Kannan D.* Superplastic Sheet Metal Forming of a Generalized Cup. Part II: Nonuniform Thinning // *Journal of Materials Engineering and Performanc.* — 1992. — Vol. 1, no. 6. — P. 813–822. — DOI: [10.1007/BF02658265](https://doi.org/10.1007/BF02658265).

7. Characterization of Superplastic Deformation Behavior for a Novel Al-Mg-Fe-Ni-Zr-Sc Alloy: Arrhenius-Based Modeling and Artificial Neural Network Approach / A. O. Mosleh [et al.] // Applied Sciences. — 2021. — Vol. 11, no. 5. — DOI: [10.3390/app11052208](https://doi.org/10.3390/app11052208).
8. *Cheong B. H., Lin J., Ball A. A.* Modelling of the hardening characteristics for superplastic material // Journal of Strain Analysis. — 2000. — Vol. 35, no. 3. — P. 149–157. — DOI: [10.1243/0309324001514314](https://doi.org/10.1243/0309324001514314).
9. *Cheong B. H., Lin J., Ball A. A.* Modelling the effect of grain-size gradients on necking in superplastic forming // Journal of Materials Processing Technology. — 2003. — Vol. 134, no. 1. — P. 10–18. — DOI: [10.1016/S0924-0136\(02\)00216-9](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00216-9).
10. *Cornfield G. C., Johnson R. H.* The forming of superplastic sheet metal // International Journal of Mechanical Sciences. — 1970. — Vol. 12, no. 6. — P. 479–490. — DOI: [10.1016/0020-7403\(70\)90075-5](https://doi.org/10.1016/0020-7403(70)90075-5).
11. *Dunne F. P. E., Kim T.-W.* Inhomogeneous deformation and failure in superplasticity // Proceedings of the Royal Society A. — 1999. — Vol. 455, no. 1982. — P. 719–735. — DOI: [10.1098/rspa.1999.0331](https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0331).
12. *Enikeev F. U., Kruglov A. A.* An analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm // International Journal of Mechanical Sciences. — 1995. — Vol. 37, no. 5. — P. 473–483. — DOI: [10.1016/0020-7403\(94\)00081-T](https://doi.org/10.1016/0020-7403(94)00081-T).
13. Experimental Investigation of the Effect of Temperature and Strain Rate on the Superplastic Deformation Behavior of Ti-Based Alloys in the ($\alpha + \beta$) Temperature Field / A. O. Mosleh [et al.] // Metals. — 2018. — Vol. 8, no. 819. — P. 1–16. — DOI: [10.3390/met8100819](https://doi.org/10.3390/met8100819).
14. Experimental Study of the Mechanical Behavior of Materials under Transient Regimes of Superplastic Deforming / O. Bylya [et al.] // Materials

- Science Forum. — 2013. — Vol. 735. — P. 232–239. — DOI: [10.4028/www.scientific.net/MSF.735.232](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.735.232).
15. Experimentelle Untersuchung und numerische Simulation des inkrementellen Umformverhaltens von Stahl 42CrMo4 / A. V. Shutov [et al.] // Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. — 2010. — Vol. 41, no. 9. — P. 765–775. — DOI: [10.1002/mawe.201000664](https://doi.org/10.1002/mawe.201000664).
 16. *Ghosh A. K., Hamilton C. H.* Influences of material parameters and microstructure on superplastic forming // Metallurgical Transactions A. — 1982. — Vol. 13. — P. 733–743. — DOI: [10.1007/BF02642386](https://doi.org/10.1007/BF02642386).
 17. *Ghosh A. K., Hamilton C. H.* Mechanical behavior and hardening characteristics of a superplastic Ti-6Al-4V alloy // Metallurgical Transactions A. — 1979. — Vol. 10. — P. 699–706. — DOI: [10.1007/BF02658391](https://doi.org/10.1007/BF02658391).
 18. *Ghosh A. K., Raj R.* A model for the evolution of grain size distribution during superplastic deformation // Acta Metallurgica. — 1986. — Vol. 34, no. 3. — P. 447–456. — DOI: [10.1016/0001-6160\(86\)90080-5](https://doi.org/10.1016/0001-6160(86)90080-5).
 19. *Ghosh A. K., Raj R.* Grain size distribution effects in superplasticity // Acta Metallurgica. — 1981. — Vol. 29, no. 4. — P. 607–616. — DOI: [10.1016/0001-6160\(81\)90142-5](https://doi.org/10.1016/0001-6160(81)90142-5).
 20. *Goncharov I. A.* Modeling of metal grains refinement under superplastic deformation conditions // International conference “Materials science of the future: research, development, scientific training (MSF’2019)” (12-14 February, 2019, Nizhni Novgorod, Lobachevsky University): Abstracts. — Nizhni Novgorod : LLC Yurist Publisher, 2019. — P. 28.
 21. *Guo Z. X., Ridley N.* Modelling of Superplastic Bulge Forming of Domes // Materials Science and Engineering: A. — 1989. — Vol. 114. — P. 97–104. — DOI: [10.1016/0921-5093\(89\)90849-6](https://doi.org/10.1016/0921-5093(89)90849-6).

22. Hot working of commercial Ti–6Al–4V with an equiaxed $\alpha - \beta$ microstructure: materials modeling considerations / T. Seshacharyulu [et al.] // Materials Science and Engineering: A. — 2000. — Vol. 284. — P. 184–194. — DOI: [10.1016/S0921-5093\(00\)00741-3](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)00741-3).
23. Identification of material parameters for inelastic constitutive models: statistical analysis and design of experiments / T. Harth [et al.] // International Journal of Plasticity. — 2004. — Vol. 20, no. 8/9. — P. 1403–1440. — DOI: [10.1016/j.ijplas.2003.11.001](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.001).
24. *Jovane F.* An approximate analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm: Theory and Experiments // International Journal of Mechanical Sciences. — 1968. — Vol. 10, no. 5. — P. 403–427. — DOI: [10.1016/0020-7403\(68\)90005-2](https://doi.org/10.1016/0020-7403(68)90005-2).
25. *Kim T.-W., Dunne F. P. E.* Determination of superplastic constitutive equations and strain rate sensitivities for aerospace alloys // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. — 1997. — Vol. 211, no. 6. — P. 367–380. — DOI: [10.1243/0954410971532730](https://doi.org/10.1243/0954410971532730).
26. *Kim T.-W., Dunne F. P. E.* Modelling heterogeneous microstructures in superplasticity // Proceedings of the Royal Society A. — 1999. — Vol. 455, no. 1982. — P. 701–718. — DOI: [10.1098/rspa.1999.0330](https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0330).
27. *Langdon T. G.* Forty-Five Years of Superplastic Research: Recent Developments and Future Prospects // Materials Science Forum. — 2016. — Vol. 838/839. — P. 3–12. — DOI: [10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3).
28. *Lin J.* Selection of material models for predicting necking in superplastic forming // International Journal of Plasticity. — 2003. — Vol. 19, no. 4. — P. 469–481. — DOI: [10.1016/S0749-6419\(01\)00059-6](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(01)00059-6).

29. *Lin J., Dean T. A.* Modelling of microstructure evolution in hot forming using unified constitutive equations // *Journal of Materials Processing Technology*. — 2005. — Vol. 167, no. 2/3. — P. 354–362. — DOI: [10.1016/j.jmatprotec.2005.06.026](https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2005.06.026).
30. *Lin J., Dunne F. P. E.* Modelling grain growth evolution and necking in superplastic blow-forming // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2001. — Vol. 43, no. 3. — P. 595–609. — DOI: [10.1016/S0020-7403\(00\)00055-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00055-2).
31. *Lin J., Dunne F. P. E., Hayhurst D. R.* Physically based temperature dependence of elastic-viscoplastic constitutive equations for copper between 20 and 500 °C // *Philosophical Magazine A*. — 1996. — Vol. 74, no. 2. — P. 359–382. — DOI: [10.1080/01418619608242148](https://doi.org/10.1080/01418619608242148).
32. *Lin J., Yang J.* GA-based multiple objective optimisation for determining viscoplastic constitutive equations for superplastic alloys // *International Journal of Plasticity*. — 1999. — Vol. 15, no. 11. — P. 1181–1196. — DOI: [10.1016/S0749-6419\(99\)00031-5](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(99)00031-5).
33. Mechanical Behavior of Titanium Alloy Ti–6Al–4V with Unprepared Microstructure under Jumpwise Variations of the Strain Rate in the Superplastic State / S. S. Bkhattacharya [et al.] // *Mechanics of Solids*. — 2009. — Vol. 44, no. 6. — P. 951–958. — DOI: [10.3103/S0025654409060120](https://doi.org/10.3103/S0025654409060120).
34. Mechanical modelling of the universal superplastic curve / R. A. Vasin [et al.] // *Journal of materials science*. — 2000. — Vol. 35. — P. 2455–2466. — DOI: [10.1023/A:1004761501240](https://doi.org/10.1023/A:1004761501240).
35. Modelling of active transformation of microstructure of two-phase Ti alloys during hot working / O. I. Bylya [et al.] // *Letters on Materials*. — 2014. — Vol. 4, no. 2. — P. 124–129. — DOI: [10.22226/2410-3535-2014-2-124-129](https://doi.org/10.22226/2410-3535-2014-2-124-129).

36. *Nieh T. G., Wadsworth J., Sherby O. D.* Superplasticity in metals and ceramics. — Cambridge : Cambridge University Press, 1997. — 287 p. — DOI: [10.1017/CB09780511525230](https://doi.org/10.1017/CB09780511525230).
37. *Padmanabhan K. A., Vasin R. A., Enikeev F. U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. — Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2001. — 363 p.
38. *Pearson C. E.* The viscous properties of extruded eutectic alloys of Pb-Sn and Bi-Sn // *Journal of the Institute of Metals*. — 1934. — Vol. 54. — P. 111–123.
39. *Shutov A. V., Kaygorodtseva A. A., Dranishnikov N. S.* Optimal error functional for parameter identification in anisotropic finite strain elasto-plasticity // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2017. — Vol. 894, no. 1. — DOI: [10.1088/1742-6596/894/1/012133](https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012133).
40. *Shutov A. V., Kreißig R.* Regularized strategies for material parameter identification in the context of finite strain plasticity // *Technische Mechanik*. — 2010. — Vol. 30, no. 1–3. — P. 280–295.
41. *Sirenko A. A., Murzinova M. A., Enikeev F. U.* On the universal relationship between specific characteristics of superplastic deformation // *Journal of Materials Sciences Letters*. — 1995. — Vol. 14. — P. 773–774. — DOI: [10.1007/BF00278123](https://doi.org/10.1007/BF00278123).
42. *Titanium and Titanium Alloys* / ed. by C. Leyens, M. Peters. — Weinheim : WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2003. — 513 p. — ISBN 3-527-30534-3.
43. *Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I.* Method to determine the strain-rate sensitivity of a superplastic material from the initial slopes of its stress-strain curves // *Journal of materials science*. — 1998. — Vol. 33. — P. 1099–1103. — DOI: [10.1023/A:1004348919985](https://doi.org/10.1023/A:1004348919985).

44. *Yang H. S., Mukherjee A. K.* An analysis of the superplastic forming of a circular sheet diaphragm // International Journal of Mechanical Sciences. — 1992. — Vol. 34, no. 4. — P. 283–297. — DOI: [10.1016/0020-7403\(92\)90036-G](https://doi.org/10.1016/0020-7403(92)90036-G).
45. *Zehr S. W., Backofen W. A.* Superplasticity in Lead-Tin alloys // Transactions of American Society for Metals. — 1968. — Vol. 61. — P. 300–313.
46. *Zhou M., Dunne F. P. E.* Mechanisms-based constitutive equations for the superplastic behaviour of a titanium alloy // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. — 1996. — Vol. 31, no. 3. — P. 187–196. — DOI: [10.1243/03093247V313187](https://doi.org/10.1243/03093247V313187).
47. *Белякова Т. А., Васин Р. А., Гончаров И. А.* Влияние параметров нелинейно-вязких элементов на моделирование характерных свойств процесса сверхпластичности // Письма о материалах. — 2015. — Т. 5, № 1. — С. 24–29. — DOI: [10.22226/2410-3535-2015-1-24-29](https://doi.org/10.22226/2410-3535-2015-1-24-29). — Impact Factor (РИНЦ): 0,742.
48. *Белякова Т. А., Гончаров И. А.* Влияние микроструктуры металлического сплава на распределение толщины в круглой пластине при сверхпластической формовке давлением // Вестник Самарского университета. Естественная серия. — 2021. — Т. 26, № 2. — С. 50–62. — DOI: [10.18287/2541-7525-2020-26-2-50-62](https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-2-50-62). — Impact Factor (РИНЦ): 0,156.
49. *Белякова Т. А., Гончаров И. А.* Моделирование сигмоидальной кривой сверхпластичности комбинацией нелинейно-вязких элементов // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, 14–23 апреля 2014г., Москва. Тезисы докладов. — М. : Издательство Московского университета, 2014. — С. 29.

50. *Белякова Т. А., Гончаров И. А., Хохлов А. В.* О невозможности моделирования сигмоидальных кривых сверхпластичности параллельным или последовательным соединениями степенных вязких элементов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2019. — Т. 25, № 3. — С. 299—315. — DOI: [10.33113/mkmk.ras.2019.25.03.299_315.01](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.03.299_315.01). — Impact Factor (РИНЦ): 0,531.
51. *Бочвар А. А., Свидерская З. А.* Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием // *Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук*. — 1945. — № 9. — С. 821—824.
52. *Быля О. И., Васин Р. А.* Деформирование сплавов в режиме сверхпластичности и близких к нему режимах // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки*. — 2011. — Т. 2. — С. 116—128.
53. *Васин Р. А., Еникеев Ф. У.* Введение в механику сверхпластичности. Т. 1. — Уфа : Гилем, 1998. — 280 с.
54. *Гончаров И. А.* Влияние эволюции микроструктуры на макро-характеристики процесса деформирования при моделировании сверхпластичности // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2019): Сборник трудов конференции. — М. : Издательство ИМАШ РАН, 2020. — С. 8—11.
55. *Гончаров И. А.* Особенности моделирования измельчения зерен металлов в условиях сверхпластического деформирования // *Деформация и разрушение материалов*. — 2019. — Т. 1. — С. 7—15. — DOI: [10.31044/1814-4632-2019-1-7-15](https://doi.org/10.31044/1814-4632-2019-1-7-15). — Impact Factor (РИНЦ): 0,717.
56. *Гончаров И. А., Белякова Т. А.* Влияние размера зерен на распределение толщины круглой пластины при сверхпластической выдувке // *Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики*. Октябрь 2020

- года. Тезисы докладов. — М. : Издательство Московского университета, 2020. — С. 69.
57. *Гончаров И. А., Белякова Т. А.* Методы оценки точности и устойчивости алгоритма определения значений параметров моделей сверхпластичности // Вычислительная механика сплошных сред. — 2018. — Т. 11, № 1. — С. 51–67. — DOI: [10.7242/1999-6691/2018.11.1.5](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.1.5). — Impact Factor (РИНЦ): 0,899.
58. *Гончаров И. А., Белякова Т. А.* Моделирование измельчения зерен металлов при деформировании в режиме сверхпластичности // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 15–25 апреля 2019 года. Тезисы докладов. — М. : Издательство Московского университета, 2019. — С. 77–78.
59. *Гребский М. В.* Структурная сверхпластичность металлов. — М. : Металлургия, 1975. — 272 с.
60. *Зунг Н. С., Польшкин В. И.* Оптимизация режимов сверхпластической формовки оболочек из титанового сплава ВТ6 // Технология легких сплавов. — 2014. — № 1. — С. 91–96.
61. *Кайбышев О. А.* Сверхпластичность промышленных сплавов. — М. : Металлургия, 1984. — 264 с.
62. Компьютерное моделирование сверхпластической формовки из титановых сплавов ВТ6 и ВТ23 / А. Н. Варгин [и др.] // Международный научный журнал. — 2013. — № 6. — С. 65–71.
63. Методы расчета продолжительности процесса сверхпластической формовки круглой мембраны / А. А. Круглов [и др.] // Известия вузов. Цветная металлургия. — 2017. — Т. 2. — С. 66–75. — DOI: [10.17073/0021-3438-2017-2-66-75](https://doi.org/10.17073/0021-3438-2017-2-66-75).

64. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твёрдого тела. — М. : Наука, 1979. — 744 с.
65. Сверхпластичность ультрамелкозернистых сплавов: эксперимент, теория, технология / под ред. Р. Р. Мулюков [и др.]. — М. : Наука, 2014. — 284 с.
66. *Смирнов О. М.* Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. — М. : Машиностроение, 1979. — 184 с.
67. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. — М. : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — 592 с.
68. *Чумаченко Е. Н., Смирнов О. М., Цепин М. А.* Сверхпластичность: Материалы, теория, технологии. — М. : КомКнига, 2005. — 320 с.
69. *Шарифуллина Э. Р., Швейкин А. И., Трусов П. В.* Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры материалов и механизмы деформирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2018. — № 3. — С. 103—127. — DOI: [10.15593/perm.mech/2018.3.11](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.11).
70. *Шестериков С. А., Мельников Г. П., Аршакуни А. Л.* К выбору уравнений состояния при ползучести // Проблемы прочности. — 1980. — Т. 6. — С. 77—81.

Приложение А

Полные результаты анализа сигмоидальности кривых, получаемых по модели Бэкофена

Глава 1 посвящена определению области сигмоидальности в пространстве параметров модели Бэкофена (рис. 1.1в). Показано, что это пространство можно разбить на классы кривых одинаковой формы, задающиеся четырьмя параметрами (а именно, α и m_i , $i \in \{1, 2, 3\}$).

Численное моделирование производилось с использованием формул (1.7) и (1.17). Параметры расчёта описаны на странице 30, формат изображений — на странице 32. Результаты расчётов по наиболее показательным срезам приведены на рисунке 1.6.

В данном приложении содержится полный набор изображений, демонстрирующий результаты всех расчётов, использовавшихся для анализа модели.

