МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Гончаров Иннокентий Александрович

Моделирование влияния микроструктурных механизмов на поведение материалов при сверхпластическом деформировании

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре теории пластичности Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Белякова Татьяна Александровна,**
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Георгиевский Дмитрий Владимирович,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор РАН,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; механико-математический факультет; кафедра теории упругости; заведующий кафедрой

Михайловская Анастасия Владимировна,
кандидат технических наук,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», кафедра металловедения цветных металлов, доцент

Назаров Айрат Ахметович,
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук, главный научный сотрудник, заместитель директора по научной работе

Защита состоится *«22» октября 2021 г.* в *15 часов 00 минут* на заседании диссертационного совета *МГУ.01.14* Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: *119192, Москва, Мичуринский проспект, д. 1, НИИ механики МГУ, к. 208.*

E-mail: pvchist60@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (*Москва, Ломоносовский просп., д. 27*) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: http://istina.msu.ru/dissertations/389216283

Автореферат разослан *«15» сентября 2021 г.*

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.14,
кандидат физико-математических наук П.В. Чистяков

Общая характеристика работы

Сверхпластичностью называется способность поликристаллических материалов при определённых температурно-скоростных условиях деформирования проявлять удлинение в сотни и даже тысячи процентов при относительно низких напряжениях течения. При этом в материале устанавливается режим совместного действия ряда микроструктурных механизмов, основным из которых считается зернограничное проскальзывание. Материал в таком состоянии обладает высокой скоростной чувствительностью.

Представленная диссертационная работа посвящена вопросам аналитического и численного моделирования сверхпластичности, в том числе, но не исчерпываясь, — моделированию характерной формы кривых сверхпластичности, анализу феноменологических определяющих соотношений сверхпластичности и определению значений входящих в них параметров, влиянию учёта микроструктурных механизмов при моделировании деформирования на получаемые макропараметры процесса и образца.

Актуальность темы исследования.

Актуальность работы обусловлена высоким научным и техническим интересом к явлению сверхпластичности. На сегодняшний день проделано большое количество исследований, посвящённых как общим аспектам сверхпластического деформирования, так и вопросам его практического применения.

Изучением сверхпластичности занимаются многие научные группы как в нашей стране, так за рубежом. В городе Уфе базируется Институт проблем сверхпластичности металлов. Кафедры и лаборатории, проводящие исследования по сверхпластичности, есть в ряде российских ВУЗов — Пермском национальном исследовательском политехническом университете, Уфимском государственном нефтяном техническом университете, Национальном исследовательском технологическом университете «МИСиС» и других.

Сверхпластическое деформирование получило широкое распространение в технологических процессах обработки материалов давлением, таких как прокатка, ковка, объёмная и листовая штамповка. В настоящее время сверхпластичность применяется в аэрокосмической, автомобильной и других сферах промышленности, в основном при обработке сплавов на основе титана, алюминия и некоторых других металлов, а также интерметаллических соединений и керамик.

Цели и задачи работы.

При проведении исследований автор преследовал следующие цели:

— Построить численное приближение для данных из экспериментов по сверхпластическому деформированию металлов с помощью известных моделей разного типа.
— Проанализировать возникающие при этом трудности, предложить пути их решения.
— Описать типы и количество экспериментов, необходимых для определения параметров моделей, и сформулировать методику проверки устойчивости алгоритма определения параметров к шумам в исходных данных и предсказательной силы получаемых моделей.
— Оценить влияние включения в определяющие соотношения параметров эволюции микроструктуры и потребность в использовании таких параметров при моделировании макроскопических процессов сверхпластического деформирования.
— Предложить модели, учитывающие характерные особенности экспериментов в режиме сверхпластичности, связанные с происходящей в процессе деформирования эволюцией микроструктуры (в частности, измельчением зёрен).

Научная новизна работы.

В диссертации изложены результаты, полученные автором лично и не публиковавшиеся ранее другими авторами:
— Теоретическое доказательство невозможности описания сигмоидальной кривой с помощью реологической модели, являющейся комбинацией произвольного количества нелинейно-вязких элементов, соединённых только параллельно или только последовательно.
— Теоретический и численный анализ формы кривых, описывающихся реологической моделью из трёх нелинейно-вязких элементов со смешанным типом соединения (известной также как модель Бэкофена).
— Формулировка единой методики исследования и верификации алгоритмов поиска значений для параметров в одномерных феноменологических определяющих соотношениях сверхпластичности и получаемых с их помощью моделей.
— Описание влияния эволюции микроструктуры на неоднородность истончения оболочки при моделировании формовки полусферы давлением в режиме сверхпластичности.
— Модель учёта измельчения зёрен при моделировании сверхпластического деформирования, основанная на неодновременном распаде зёрен одного размера.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Полученные в работе результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Классификация пространства параметров модели Бэкофена позволяет конкретизировать область применимости данной модели и сузить множество возможных значений для идентификации модели на основе экспериментальных данных. При интерпретации модели как описания взаимодействия микроструктурных механизмов в материале, полученная классификация позволяет соотнести механизмы между собой и оценить область действия и параметры каждого из них.

Разработанная методика идентификации и верификации моделей может применяться для поиска определяющих соотношений, более качественно описывающих поведение материалов в состоянии сверхпластичности. Такие соотношения необходимы, в частности, для уточнения оценки будущих свойств изделий из современных конструкционных материалов и перспективных сплавов в ходе предварительного моделирования их сверхпластической формовки.

С помощью предложенной модели измельчения зёрен можно улучшить описание эволюции микроструктуры, что позволяет учитывать в технологических расчётах большее количество наблюдаемых в экспериментах эффектов, например, разупрочнение материала в результате рекристаллизации.

Методология и методы исследования.

В главе 1 доказательство невозможности описания сигмоидальной кривой с помощью однотипных соединений нелинейно-вязких элементов основано на методах математического анализа и методе индукции.

Классификация пространства параметров модели со смешанным типом соединения (модели Бэкофена) выполнена путём упрощения уравнений состояния модели методами математического анализа и теории размерностей. Для численного решения уравнений состояния модели использована программа на языке C++, в которой применяются метод половинного деления и метод Ньютона.

Моделирование сверхпластического одноосного растяжения материалов в главе 2 основано на определяющих соотношениях сверхпластичности, выраженных в форме математических уравнений с феноменологическими параметрами в духе Ю.Н. Работнова. Использованы соотношения из литературы, известные по работам F.P.E. Dunne, J. Lin, О.И. Были, Р.А. Васина и других.

Численное интегрирование системы уравнений, описывающей состояние материала, выполнено с помощью программы на языке Python с применением метода Рунге — Кутты. Поиск значений для параметров модели осуществлялся с помощью метода наименьших квадратов, минимизация функционала ошибки задействует алгоритмы Левенберга — Марквардта и численного дифференцирования. Реализация некоторых методов взята из распространённых библиотек для численных расчётов, таких как numpy, scipy, MINPACK.

При моделировании наложения шума на экспериментальные данные применён аппарат теории вероятностей: равномерная случайная величина, методы вычисления математического ожидания, дисперсии.

Решение задачи о формовке листового материала давлением в главе 3 выполнено на основе методов математического анализа и классического аппарата механики деформируемого твёрдого тела. Уравнения равновесия материала записаны в рамках безмоментной теории оболочек. Численное моделирование формовки осуществлялось аналогично главе 2 с применением аппарата теории дифференциальных уравнений.

Моделирование измельчения зёрен в главе 4 выполнено с помощью распространённого в механике сверхпластичности подхода. Работа с распределениями зёрен по размеру основана на методах математического и функционального анализа. Вычисление характеристик распределения затрагивает аппарат теории вероятностей. Численное интегрирование соотношений выполнено аналогично главе 2.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложенная модель измельчения зёрен, учитывающая неполное измельчение групп, качественно описывает наблюдающуюся в экспериментах эволюцию распределения зёрен, которую не удаётся описать при помощи рассмотренных известных моделей.
2. Предложенный алгоритм позволяет определять значения параметров в различных определяющих соотношениях сверхпластичности из рассмотренного класса, для верификации которых и оценки устойчивости алгоритма к шумам применимы разработанная методика и введённые метрики ошибки аппроксимации.
3. Определяющие соотношения, учитывающие эволюцию микроструктуры, позволяют решать краевые задачи о формовке мембраны давлением и более точно оценивать оптимальное соотношение размера зерна и скорости деформации, при которых неоднородность истончения минимальна.
4. Невозможность описания сигмоидальной кривой сверхпластичности однотипной комбинацией нелинейно-вязких элементов доказана строго при любом их количестве и любых значениях их параметров.

5. Проведённый анализ модели Бэкофена и пространства её параметров позволяет классифицировать задаваемые моделью кривые по формальным типам.

Достоверность результатов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением в работе строгих математических методов из соответствующих разделов математического и функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей; а также классических методов механики деформируемого твёрдого тела. Полученные результаты качественно подтверждаются при их сравнении с признанными результатами других авторов.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах:

— International conference "Materials science of the future: research, development, scientific training (MFS'2019)" (12–14 February 2019, Nizhni Novgorod, Lobachevsky University).
— 1st Russia-Japan Joint Workshop on Composite Materials (RJCM-1). October 31 – November 1, 2019. Lomonosov Moscow State University.
— XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС – 2019).
— Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики: 14–23 апреля 2014 года; 15–25 апреля 2019 года; октябрь 2020 года.
— Научно-исследовательский семинар лаборатории упругости и пластичности НИИ механики МГУ (под руководством д.ф.-м.н., проф. Р.А. Васина).
— Научно-исследовательские семинары на кафедрах механико-математического факультета МГУ:
  – семинар кафедры теории пластичности (под руководством д.ф.-м.н., проф., члена-корр. РАН Е.В. Ломакина);
  – семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости (под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского);
  – семинар имени Б.Е. Победри кафедры механики композитов (под руководством д.ф.-м.н., проф. В.И. Горбачева);
  – семинар кафедры газовой и волновой динамики (под руководством д.ф.-м.н., проф., академика РАН Р.И. Нигматулина).

Публикации.

Основные результаты диссертационного исследования представлены в **11** печатных работах [1—11], в том числе в **4** публикациях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI [1—4].

Личный вклад автора.

Постановка задач к главе 1 предложена Р.А. Васиным. Доказательство невозможности описания сигмоидальных кривых сверхпластичности однотипной комбинацией нелинейно-вязких элементов получено соискателем одновременно и независимо с А.В. Хохловым, что отражено в совместной публикации [4]. Классификация пространства параметров модели Бэкофена получена соискателем лично с применением разработанной им программы на языке C++ для численного решения уравнений модели.

Постановка задачи к главе 2 предложена Р.А. Васиным и научным руководителем соискателя Т.А. Беляковой. Методы исследования и идея предлагаемого алгоритма принадлежат соискателю. Проведение верификации моделей, а также разработка и применение методики оценки устойчивости алгоритма к шумам, выполнены соискателем самостоятельно с помощью авторской программы, реализованной в коде на языке Python.

Постановка задачи к главе 3 предложена Р.А. Васиным, расширена и дополнена Т.А. Беляковой. Все содержащиеся в главе результаты моделирования формовки и их анализ принадлежат соискателю.

Постановка задачи к главе 4 вдохновлена Т.А. Беляковой, но выбрана соискателем самостоятельно. Модель измельчения зёрен, учитывающая неполное измельчение групп, разработана лично соискателем. Идентификация модели и сравнение с экспериментальными данными также выполнены соискателем.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, **4** глав, заключения, списка литературы и **1** приложения. Общий объем диссертации составляет **156** страниц, включая **39** рисунков и **12** таблиц. Список литературы содержит **70** наименований.

Краткое содержание диссертации

Первая глава диссертации посвящена моделированию сверхпластичности с помощью структурно-механических моделей, состоящих из соединённых между собой элементов с небольшим количеством параметров. Для описания высокой скоростной чувствительности в состоянии сверхпластичности её модели традиционно базируются на степенном нелинейно-вязком элементе с определяющим соотношением $\sigma = K\dot{\varepsilon}^m$, где σ — напряжение Коши, $\dot{\varepsilon}$ — скорость логарифмической деформации, $K > 0$ и $m \in (0, 1]$ — параметры элемента.

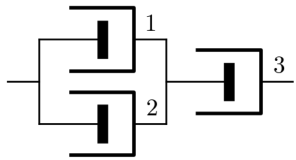

Рис. 1. Смешанное соединение нелинейно-вязких элементов (модель Бэкофена).

В первом разделе главы приводится постановка задачи и обзор литературы по теме. Кривые зависимости σ от $\dot{\varepsilon}$, получаемые из экспериментов на одноосное растяжение, в случае сверхпластичности имеют точку перегиба при изображении в логарифмических координатах (так называемая сигмоидальная форма кривой). Рассматривается вопрос о возможности моделирования сигмоидальной кривой с помощью степенных нелинейно-вязких элементов. В случае однотипных соединений Р.А. Васиным и соавторами численно получен отрицательный ответ при количестве элементов $N \leqslant 5$. В то же время, известна модель S.W. Zehr и W.A. Backofen на основе смешанного соединения (рис. 1), способная описать сигмоидальную кривую при некоторых значениях параметров.

Во втором разделе первой главы анализируются определяющие соотношения моделей на основе разных способов соединения элементов. Методом математической индукции доказывается следующее утверждение:

Лемма 1. *Для любого $N \geqslant 2$ при различных $m_i \in (0, 1]$, $i \in 1, \ldots, N$ и любых $K_i > 0$, $\dot{\varepsilon} > 0$ выполняется неравенство*

$$S[N] := \left(\sum K_i m_i^2 \dot{\varepsilon}^{m_i}\right) \cdot \left(\sum K_i \dot{\varepsilon}^{m_i}\right) - \left(\sum K_i m_i \dot{\varepsilon}^{m_i}\right)^2 > 0.$$

С помощью применения этой леммы показывается, что зависимость $\log \sigma$ от $\log \dot{\varepsilon}$, задаваемая параллельным соединением нелинейно-вязких элементов, является выпуклой вниз (первая производная монотонно возрастает, вторая — строго положительна). Случай последовательного соединения сводится к уже рассмотренному и зависимость оказывается выпуклой вверх. Таким образом, однотипное соединение нелинейно-вязких элементов независимо от их количества и параметров не позволяет описать сигмоидальную кривую сверхпластичности. Данный результат опубликован в работе [4].

Далее анализируется смешанное соединение элементов (рис. 1). Определяющие соотношения такой модели имеют вид

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon; \qquad \sigma = K_3 \dot{\varepsilon}_3^{m_3} = K_1 \dot{\varepsilon}_1^{m_1} + K_2 \dot{\varepsilon}_2^{m_2},$$

где K_i, m_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ — параметры элементов (нумерация соответствует рисунку). Многие из задаваемых этой моделью кривых зависимости $\log \sigma$ от $\log \dot{\varepsilon}$ имеют одинаковую форму, а потому можно ограничиться рассмотрением классов кривых, совпадающих с точностью до параллельного переноса.

На кривой выбирается опорная точка $(\hat{\dot{\varepsilon}}, \hat{\sigma})$ и вводятся параметры относительного вклада элементов $\alpha := \hat{\dot{\varepsilon}}_3 / \hat{\dot{\varepsilon}}$ и $\beta := \hat{\sigma}_2 / \hat{\sigma}$, принимающие значения из интервала $(0, 1)$. В новом пространстве параметров $(\hat{\dot{\varepsilon}}, \hat{\sigma}, \alpha, \beta)$, эквивалентном пространству (K_1, K_2, K_3), исследуемая зависимость принимает вид

$$\log \sigma = \log \hat{\sigma} + \Phi \left(\log \dot{\varepsilon} - \log \hat{\dot{\varepsilon}} \right),$$

где Φ — неявная функция, определяемая только параметрами α, β и m_i. Следовательно, параметры $\hat{\dot{\varepsilon}}$ и $\hat{\sigma}$ оказываются «параметрами сдвига», то есть влияют на положение кривой на плоскости, но не её форму.

Из соображений размерности можно установить связь между параметрами α и β, задающими кривые одинаковой формы. Она имеет вид

$$\tilde{c} := \alpha^{m_3(m_2 - m_1)} (1 - \alpha)^{m_3(m_1 - m_2)} \beta^{m_3 - m_1} (1 - \beta)^{m_2 - m_3} = const,$$

и явно разрешается относительно α:

$$\alpha = \frac{\tilde{\beta}^m}{\tilde{\beta}^m + \tilde{c}^m}; \qquad \tilde{\beta} := \beta^{m_3 - m_1} (1 - \beta)^{m_2 - m_3}, \quad m := \frac{1}{m_3(m_1 - m_2)}.$$

В диссертации показано, что параметр β также влияет только на положение кривой на плоскости. Наконец, параметр α и связанная с ним «константа класса» $\tilde{c}$ непосредственно отвечают за форму кривой.

В третьем разделе главы показано, каким образом численно решалось неявное уравнение модели и как определялся интервал скоростей, на котором производился поиск точки перегиба. Параметры сдвига полагались при расчётах фиксированными ($\hat{\dot{\varepsilon}} = \hat{\sigma} = 1$; $\beta = 0{,}5$), по остальным производился перебор в пределах возможного диапазона значений (по 20 значений для каждого из параметров m_i и 25 значений α для каждого набора m_i).

При анализе полученных результатов численного моделирования установлено, что классы кривых можно поделить на четыре больших типа по количеству экстремумов производной $\mathrm{d} \log \sigma / \mathrm{d} \log \dot{\varepsilon}$ на отрезке рассмотрения:

— Монотонность, означающая отсутствие перегибов кривой $\sigma(\dot{\varepsilon})$ при её изображении в логарифмических координатах.
— Единственный максимум, искомый случай сигмоидальности кривой.
— Единственный минимум, перегиб кривой в «неверном» направлении.
— Один минимум и один максимум.

Для всех рассмотренных наборов значений m_i были определены типы кривых, встречающиеся при данных значениях. В диссертации приводится статистика по количеству классов кривых разных типов и по количеству наборов, соответствующих наличию или отсутствию сигмоидальности.

Проведённая классификация позволила выделить в пространстве параметров модели Бэкофена области, в которых доминируют кривые определённого типа. Пример диаграмм, иллюстрирующий эти области, показан на рисунке 2. Полный набор диаграмм приведён **в приложении А** к диссертации. Результаты их анализа опубликованы в работе [1].

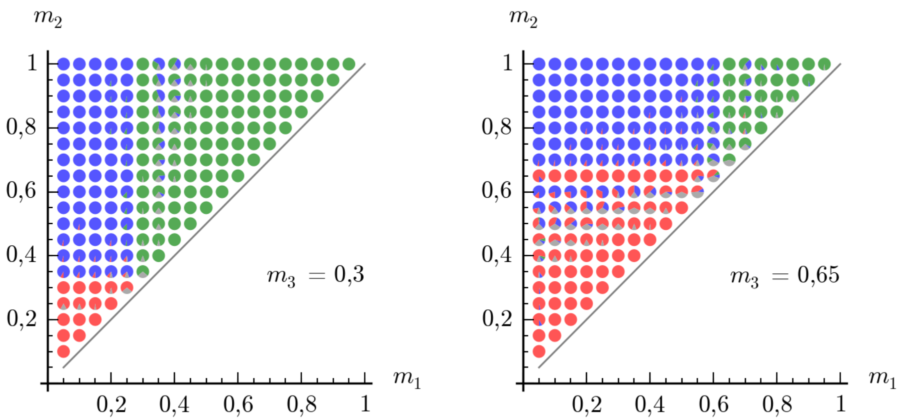

Рис. 2. Области в пространстве параметров модели Бэкофена. Каждая метка — круговая диаграмма количества классов разных типов при соответствующем наборе значений m_i. Зелёный цвет соответствует максимуму производной, красный цвет — минимуму, синий — двум экстремумам, серый — монотонности.

В заключении к первой главе описаны сделанные выводы и даётся формальный ответ на поставленный вопрос об области сигмоидальности кривых в пространстве параметров модели Бэкофена: «Кривые всегда сигмоидальны при $\min(m_1, m_2) = m_3$ или $\min(m_1, m_2) \geqslant km_3$ и сигмоидальны для большинства значений α при $\min(m_1, m_2) \in (m_3, km_3)$, где k — некоторый числовой коэффициент». Значение коэффициента k по результатам расчётов оценивается величиной $k \approx 1{,}8$.

Вторая глава диссертации посвящена определению значений параметров в моделях сверхпластичности. Одномерные определяющие соотношения сверхпластичности выражаются в форме уравнений, связывающих интенсивность напряжений с интенсивностью скоростей деформаций и несколькими материальными постоянными χ_i (параметрами модели). Сверхпластические свойства материала существенно зависят от его микроструктуры; её влияние на процесс, как и зависимость поведения материала от истории деформирования (в том числе, эволюции микроструктуры), может описываться в духе подхода Ю.Н. Работнова набором внутренних переменных системы.

В первом разделе второй главы приводится классификация моделей сверхпластичности в зависимости от количества входящих в них параметров. Вводится в рассмотрение некоторый конкретный, но достаточно широкий класс определяющих соотношений, записывающихся в форме

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_p(t, \sigma, \varepsilon_p, d, \chi_i) \quad \text{либо} \quad \sigma = \sigma(t, \dot{\varepsilon}_p, \varepsilon_p, d, \chi_i); \qquad (1)$$
$$\dot{d} = \dot{d}(t, \sigma, \dot{\varepsilon}_p, \varepsilon_p, d, \chi_i);$$

где t — время, σ — интенсивность напряжений, $\dot{\varepsilon}_p$ — интенсивность скоростей пластических деформаций, ε_p — накопленная пластическая деформация, d — параметр микроструктуры материала. Такие соотношения способны описывать начальный (упругий) участок, деформационное упрочнение, изменение микроструктуры. При необходимости модель может быть дополнена иными переменными состояния с соответствующими эволюционными уравнениями.

Во втором разделе главы собраны примеры определяющих соотношений сверхпластичности, относящихся к рассматриваемому классу, известных по работам A.A. Ball, B.H. Cheong, F.P.E. Dunne, D.R. Hayhurst, J. Lin, M. Zhou, О.И. Были, Р.А. Васина и других.

В соответствии с феноменологическим подходом, значения для параметров моделей χ_i определяются на основе экспериментальных данных. Поэтому в разделе также рассматриваются известные из литературы типы экспериментов на одноосное сверхпластическое растяжение материалов: зависимость осевого напряжения от полной осевой скорости деформации $\sigma(\dot{\varepsilon})$ (скоростные кривые), зависимость осевого напряжения от полной осевой деформации $\sigma(\varepsilon)$ (кривые деформирования), зависимость среднего размера зёрен от полной осевой деформации $d(\varepsilon)$ (кривые роста зёрен).

Третий раздел второй главы посвящён алгоритму поиска значений для параметров моделей на основе экспериментальных данных. Как правило, такой поиск производится с помощью авторских алгоритмов, привязанных к конкретным определяющим соотношениям. Наилучшее приближение обычно ищется с помощью метода наименьших квадратов (МНК), минимизирующего значение функционала ошибки

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\sigma\left(\varepsilon_{\text{эксп.},ij},\chi_k\right)-\sigma_{\text{эксп.},ij}\right)^2\to\min,$$

где χ_k — искомые параметры, N — количество кривых, n_j — количество точек на j-й кривой, индекс "ij" означает величины, относящиеся к i-й точке j-й кривой, а индекс «эксп.» — точки из набора экспериментальных данных.

Для минимизации чаще всего применяются итерационные алгоритмы построения оптимального набора значений путём численного дифференцирования функционала ошибки и решения уравнений в приращениях. Сходимость при реализации таких алгоритмов зависит от правильной подготовки как экспериментальных данных, так и самих уравнений модели. В диссертации обсуждаются сложности с применением скоростных кривых и необходимость использования в соотношениях безразмерных величин. В частности, приведённые в обзоре соотношения нормируются и для дальнейшего рассмотрения вводится две системы определяющих соотношений, относящихся к рассматриваемому классу (1) — по работам F.P.E. Dunne и соавторов:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_p=\frac{A}{d^\alpha}\sinh\Big(B(\sigma-h-1)\Big); && \dot{d}=\frac{D}{d^\beta}+\frac{G}{d^\varphi}\dot{\varepsilon}_p;\\
&h=H_0(1-\exp(-H\varepsilon_p)); && \sigma=E_n(\varepsilon-\varepsilon_p),
\end{aligned}\tag{2}$$

и комбинированная, состоящая из уравнений связи напряжений и деформаций по работам B.H. Cheong, J. Lin, A.A. Ball, D.R. Hayhurst и уравнения роста зёрен по работам О.И. Были, Р.А. Васина:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_p=\frac{\big(B(\sigma-h-1)\big)^\eta}{d^\alpha}; && \dot{d}=\frac{C_1\sigma^4+C_2\sigma^5}{1+C_3\sigma^4 d};\\
&h=H_0(1-\exp(-H\varepsilon_p)); && \sigma=E_n(\varepsilon-\varepsilon_p).
\end{aligned}\tag{3}$$

Далее приводится предлагаемый алгоритм определения значений параметров, не привязанный к конкретным определяющим соотношениям в рамках рассматриваемого класса (1). Это достигается благодаря группировке параметров по описываемому эффекту: основные параметры (входящие в соотношение для скорости пластических деформаций), параметры эволюции зёрен, параметры упрочнения. Алгоритм формулируется в виде последовательности шагов, на каждом из которых уточняются значения параметров из одной или нескольких групп с использованием в качестве начального приближения значений, полученных на предыдущем шаге. Для первого шага в диссертации используется «универсальное» начальное приближение (0 для всех мультипликативных констант, 1 — для степенных) с корректировкой на основе скоростных кривых. Этот «нулевой» шаг может быть пропущен при наличии экспертной оценки ожидаемых значений параметров.

Алгоритм может не использовать данные о микроструктуре, то есть являться чисто феноменологическим и оперировать исключительно макрохарактеристиками процесса. Однако для более точного описания эволюции микроструктуры в диссертации применяется модификация алгоритма, использующая данные из экспериментов по росту зёрен. Схема шагов при этом выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \text{скоростные кривые} \to \\ \text{основные параметры} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{кривые деформирования} \to \\ \text{основные параметры} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{кривые роста зёрен} \to \\ \text{параметры эволюции зёрен} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \text{кривые деформирования} \to \\ \text{основные параметры, параметры упрочнения} \end{pmatrix}$$

Работа предложенного алгоритма иллюстрируется на примере определяющих соотношений (2) и (3). Показано, как применение шагов алгоритма воспроизводит последовательное усложнение модели (учёт большего числа действующих механизмов деформирования) и постепенно уточняет приближение. Результат применения алгоритма к экспериментальным данным для сплава титана Ti – 6Al – 4V при температуре 927°C представлен на рисунке 3.

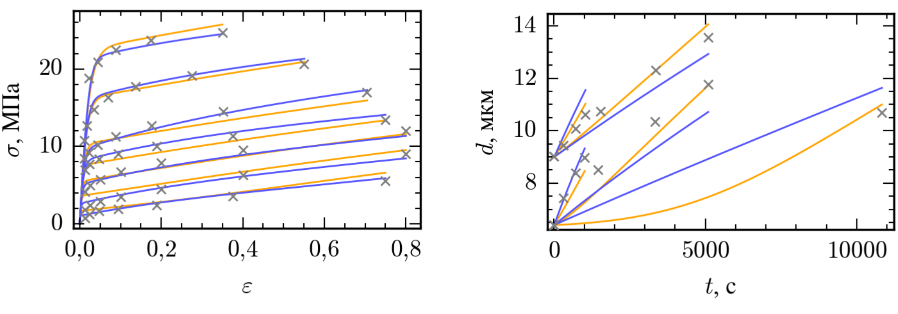

Рис. 3. Расчётные кривые деформирования и роста зёрен с параметрами, найденными с помощью предложенного алгоритма. Синие линии — модель на основе системы (2), оранжевые — системы (3). Знаками × отмечены экспериментальные точки из работы A.K. Ghosh, C.H. Hamilton. Разные кривые соответствуют скоростям $\dot{\varepsilon} \in \{5 \times 10^{-5}; 2 \times 10^{-4}; 1 \times 10^{-3}\}$ с$^{-1}$ и размерам зёрен $d \in \{6{,}4;\ 9{,}0;\ 11{,}5\}$ мкм.

В четвёртом разделе второй главы анализируется предложенный алгоритм и найденные с его помощью модели. Для объективной оценки качества моделей предлагаются метрики погрешности аппроксимации на основе относительной погрешности в каждой точке:

$$\Delta_{ij} := \frac{\left|\sigma\left(\varepsilon_{\text{эксп.},ij}, \chi_k\right) - \sigma_{\text{эксп.},ij}\right|}{\sigma_{\text{эксп.},ij}},$$

$$\Delta_{\text{avg}} := \frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}\Delta_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} n_j}, \quad \Delta_{\max} := \frac{\sum_{j=1}^{N}\max_{i=1}^{n_j}\Delta_{ij}}{N}.$$

Первая метрика Δ_{avg} является усреднением погрешностей во всех экспериментальных точках и показывает величину систематической ошибки, а вторая $\Delta_{\max}$ — усреднением по всем N кривым максимальной погрешности на каждой из кривых, которая соответствует отклонению на каких-либо конкретных её участках (обычно в начале или на конце).

С помощью метрик оцениваются модели, построенные на основе различных подмножеств набора экспериментальных кривых, для определения необходимого количества экспериментов. В диссертации показано, что двух кривых, отличающихся и начальным размером зерна, и скоростью деформации, не хватает для устойчивого определения параметров моделей. Однако при использовании четырёх кривых (все комбинации двух размеров и двух скоростей) полученная модель достаточно качественно описывает эксперимент — в том числе кривые, которые не использовались при её построении. При этом даётся рекомендация о выборе подходящих параметров для таких «опорных» экспериментов.

Во второй части раздела обсуждается влияние погрешностей («шума») в данных на устойчивость алгоритма. Шум моделируется наложением случайной равномерно распределённой погрешности в пределах 5% от исходного значения. Это проделывается неоднократно и на основе каждого варианта искажённых данных строятся модели и определяется погрешность в смысле введённых ранее метрик. После этого вычисляются среднее значение E и стандартное отклонение D полученного набора погрешностей. Для модели на основе системы уравнений (2) их величины таковы:

$$E[\Delta_{\text{avg}}] = 3{,}91, \quad D[\Delta_{\text{avg}}] = 0{,}38; \qquad E[\Delta_{\max}] = 23{,}78, \quad D[\Delta_{\max}] = 0{,}65.$$

Здесь стандартные отклонения погрешностей существенно меньше их средних значений. Для устранения влияния общей погрешности в диссертации предлагается методология исследования устойчивости, подразумевающая использование синтетического набора данных, построенного по модели на основе исходных (не искажённых) данных. На синтетических данных для той же системы (2) получены следующие значения погрешностей:

$$E[\Delta_{\text{avg}}] = 1{,}06, \quad D[\Delta_{\text{avg}}] = 0{,}4; \qquad E[\Delta_{\max}] = 1{,}78, \quad D[\Delta_{\max}] = 0{,}69.$$

Нетрудно заметить, что стандартные отклонения практически не изменились, тогда как средние значения уменьшились в разы. Таким образом, погрешность на искажённых данных можно условно представить в виде суммы: $\delta_e = \delta_0 + \delta_m$, где δ_0 — отклонение синтетических данных от экспериментальных (не зависит от наложенного шума), а δ_m — погрешность на синтетических данных (собственно, реакция алгоритма на наложенный шум). При этом первое слагаемое δ_0 отражает пригодность выбранной системы уравнений для описания имеющихся экспериментальных данных и может служить инструментом для поиска более качественных определяющих соотношений.

В заключении описываются основные результаты главы и делается вывод, что полученные с использованием предложенного алгоритма модели обладают предсказательной силой, а сам алгоритм демонстрирует устойчивость по отношению к шумам, в том числе по получаемым значениям параметров модели. Результаты главы опубликованы в работе [2].

Третья глава диссертации посвящена моделированию конструкционных расчётов со сложным напряжённо-деформированным состоянием. **Во введении** приводится обзор особенностей применения сверхпластического деформирования в промышленности. Обсуждается задача формовки изделий из листового материала давлением и допущения, часто применяющиеся для формализации этого процесса в виде краевых задач механики:

— однородность, изотропность и несжимаемость материала;
— малая скорость деформации и постоянная температура;
— малая толщина изделия по сравнению с линейными размерами;
— задание краевых условий в геометрической форме.

При этом целью решения соответствующих краевых задач является

— определение оптимальных условий деформирования и функции давления, требующейся для их поддержания в процессе обработки;
— вычисление изменения геометрии образца и построение распределения толщины в разных точках готового изделия;
— отслеживание изменения микроструктуры материала в процессе деформирования для предотвращения образования концентраторов.

Во втором разделе третьей главы ставится задача о деформировании плоской круглой пластины изначально равномерной толщины w_0 в цилиндрическую форму под действием распределённого давления (рис. 4). Принятые допущения позволяют рассматривать эту задачу как квазистатический изотермический процесс, описывающийся только геометрией образца и определяющими соотношениями материала.

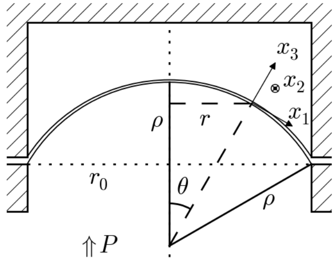

Рис. 4. Схема задачи о деформировании оболочки давлением.

Для анализа задачи привлекается безмоментная теория оболочек. Тензор напряжений Коши принимает диагональный вид с компонентами σ_1 и σ_2 (меридиональное и окружное напряжения), нормальное напряжение σ_3 по безмоментной теории пренебрежимо мало. Вычисляются девиатор тензора $S_{ij} := \sigma_{ij} - \left(\frac{1}{3}\sigma_{kl}\delta_{kl}\right)\delta_{ij}$ и интенсивность $\sigma_e := \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$.

Тензор скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ связан с S_{ij} и σ_e ассоциированным законом пластичности:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{\dot{p}(\sigma_e, \chi_k)}{\sigma_e}S_{ij}, \tag{4}$$

где $\dot{p}$ — интенсивность скоростей деформаций, зависимость которой от σ_e и параметров модели χ_k задаётся определяющими соотношениями материала.

Далее решение по безмоментной теории оболочек предполагает рассмотрение уравнений равновесия элемента и сегмента поверхности

$$\frac{\sigma_1}{\rho_m} + \frac{\sigma_2}{\rho_c} = \frac{P}{w}; \qquad 2\pi r\, w\, \sigma_1 \sin\theta = \pi r^2\, P,$$

где ρ_m и ρ_c — меридиональный и окружной радиусы кривизны, w — толщина, r — расстояние от точки поверхности до оси вращения, θ — угол между осью вращения и нормалью к поверхности. Учитывая $\rho_c \sin\theta = r$ (см. рис. 4) и $\rho_m = \rho_c = \rho$ (для сегмента сферы радиуса ρ), получаем

$$\sigma_1 = \frac{P\rho_c}{2w}, \quad \sigma_2 = \frac{P\rho_c}{2w}\left(2 - \frac{\rho_c}{\rho_m}\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P\rho}{2w}. \tag{5}$$

Фиксация оболочки по периметру означает равенство нулю окружной деформации на границе купола: $\varepsilon_{2b} = 0$ (индекс b здесь и далее означает величины, относящиеся к границе купола). В соответствии с ассоциированным законом пластичности (4) можно записать:

$$0 = \dot{\varepsilon}_{2b} = \frac{3}{2}\frac{\dot{p}_b}{\sigma_{eb}}S_{22} = \frac{\dot{p}_b}{2\sigma_{eb}}\left(2\sigma_{2b} - \sigma_{1b}\right),$$

откуда при ненулевой интенсивности скоростей пластических деформаций на границе $\dot{p}_b$ имеем $2\sigma_{2b} = \sigma_{1b}$, что противоречит их равенству.

Таким образом, при решении поставленной задачи невозможно одновременно удовлетворить безмоментной теории оболочек, сферической форме купола, ассоциированному закону пластичности и условию закрепления.

В третьем разделе главы приводится обзор литературы. По причине указанного противоречия в уравнениях, для описания поведения оболочки в промежуточных точках обычно привлекаются дополнительные гипотезы, такие как: одинаковое во всех точках поверхности значение произведения σw; явная форма связи главных напряжений; одинаковая или линейно изменяющаяся вдоль меридиана толщина; одинаковая меридиональная деформация либо степенная зависимость её от радиуса.

Вместе с тем, большинство авторов пользуются степенными определяющими соотношениями $\sigma = K\dot{\varepsilon}^m$. Известно, что неоднородность истончения оболочки уменьшается с ростом параметра m. Однако на графике зависимости $\sigma(\dot{\varepsilon})$ в логарифмических координатах такие соотношения задают прямую линию, тогда как кривые сверхпластичности имеют сигмоидальную форму (см. главу 1). Таким образом, степенные соотношения пригодны для описания материала лишь в узком диапазоне скоростей деформации. Кроме того, не рассматривался вопрос о влиянии на формовку размера зёрен в образце.

В четвёртом разделе главы строится аналитическая модель оболочки. Применяется гипотеза о параболической форме зависимости инженерной деформации от радиуса: $\varepsilon_{\text{eng}} = \varepsilon_{\text{eng},p} + (\varepsilon_{\text{eng},b} - \varepsilon_{\text{eng},p}) \cdot (r/r_0)^2$, где r_0 — начальный радиус оболочки, а индекс p здесь и далее означает величины, относящиеся к полюсу купола. Из этого соотношения получается связь радиуса ρ с деформациями оболочки. Далее применяются ассоциированный закон пластичности (4), соотношения (5) и условие заделки $\varepsilon_{2b} = 0$. В совокупности с определяющими соотношениями материала (2) получается полная система уравнений, описывающая поведение оболочки под действием давления:

$$\dot{\rho} = \frac{2\exp(\varepsilon_{1p})\dot{\varepsilon}_{1p} + \exp(\varepsilon_{1b})\dot{\varepsilon}_{1b}}{3\left(\frac{1}{r_0}\arcsin(\frac{r_0}{\rho}) - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r_0^2}}\right)};$$

$$2\dot{\varepsilon}_{1p} = \frac{A}{d_p^\alpha}\sinh\Big(B\left(\sigma_{1p} - h_p - 1\right)\Big); \qquad \dot{d}_p = \frac{D}{d_p^\beta} + \frac{G}{d_p^\varphi}\,2\dot{\varepsilon}_{1p};$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{1b} = \frac{A}{d_b^\alpha}\sinh\left(B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{1b} - h_b - 1\right)\right); \quad \dot{d}_b = \frac{D}{d_b^\beta} + \frac{G}{d_b^\varphi}\frac{2}{\sqrt{3}}\dot{\varepsilon}_{1b};$$

$$h_p = H_0\left(1 - \exp\left(-2H\varepsilon_{1p}\right)\right); \qquad \sigma_{1p} = \frac{P\rho}{2w_p}; \quad w_p = w_0\exp(-2\varepsilon_{1p});$$

$$h_b = H_0\left(1 - \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}H\varepsilon_{1b}\right)\right); \quad \sigma_{1b} = \frac{P\rho}{2w_b}; \quad w_b = w_0\exp(-\varepsilon_{1b}).$$

Данная система из пяти дифференциальных уравнений содержит шесть неизвестных: P, ρ, ε_{1p}, d_p, ε_{1b}, d_b. При известном законе давления $P(t)$ или заданном режиме деформирования (например, $\dot{\varepsilon}_{1p} = const$) система замыкается и может быть проинтегрирована методом Рунге — Кутты. На каждом шаге метода по переменным системы можно вычислить как микро- и макрохарактеристики материала, так и геометрические параметры оболочки.

В пятом разделе третьей главы численно моделируется поведение оболочки и анализируются полученные результаты. Первая часть раздела посвящена истончению. Минимальная толщина готового изделия является важным технологическим параметром, лимитирующим применение сверхпластической формовки и диапазон допустимых скоростей деформации.

В рассматриваемой задаче формовки полусферы минимальная толщина наблюдается в полюсе купола, а максимальная — на его границе. В целях контроля их соотношения вводится параметр неоднородности истончения

$$\bar{w} = \frac{w_b - w_p}{w_b} = 1 - \frac{w_p}{w_b},$$

который принимает значения от нуля (одинаковая толщина) до единицы (прорыв оболочки). На рисунке 5 проиллюстрирована расчётная величина данного параметра для полусфер, полученных при температуре 927 °C из пластинок с $r_0 = 35$ мм и $w_0 = 1$ мм, состоящих из сплава Ti−6Al−4V.

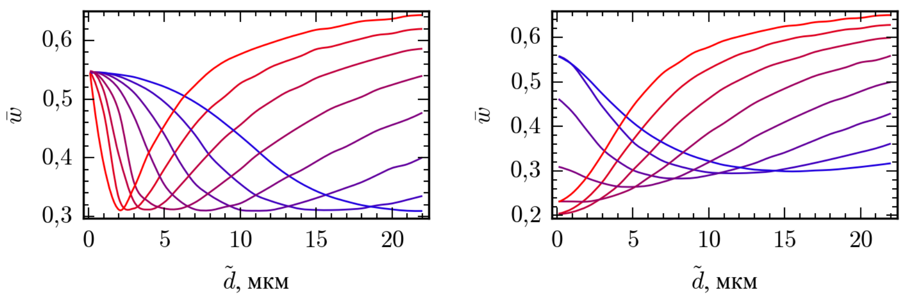

Рис. 5. Параметр неоднородности истончения $\bar{w}$ в зависимости от среднего размера зёрен в образце до деформирования $\tilde{d}$ при различных скоростях деформации в полюсе купола $\dot{\varepsilon}_p$ от $2{,}2 \times 10^{-5}$ (синие кривые) до $4{,}6 \times 10^{-3}$ (красные). Слева расчёт по модели, не учитывающей рост зёрен, справа — с учётом роста зёрен.

Видно, что для каждой скорости деформации существует оптимальный размер зёрен с наименьшим значением $\bar{w}$. Однако при расчёте без учёта роста зёрен это значение не зависит скорости деформации. При использовании модели, учитывающей рост зёрен, такая зависимость возникает. В частности, обнаруживается глобальный минимум $\bar{w}$, не равный нулю, то есть теоретический предел однородности толщины изделия даже при суб-микронных размерах зёрен, и соответствующая ему оптимальная скорость деформации. Данный результат опубликован в работе [5].

Также в диссертации обсуждается давление, необходимое для поддержания оптимального режима. Его форма имеет характерный максимум, определяющий требования к применяемому оборудованию. Показано, что в оптимальном режиме максимум давления остаётся приблизительно на одном уровне. Таким образом, при правильной подготовке микроструктуры увеличение скорости деформирования не повышает требований к оборудованию.

Во второй части раздела проводится анализ деформирования в оптимальном режиме, в том числе величины меридионального напряжения в промежуточных точках. Применяемые при расчётах гипотезы о поведении оболочки, основанные на экспериментах, содержат в себе информацию и о тех компонентах напряжений, которыми безмоментная теория оболочек пренебрегает. Сравнение напряжения, вычисленного на основе принятой гипотезы, со значением, полученным в рамках безмоментной теории, показано на рисунке 6.

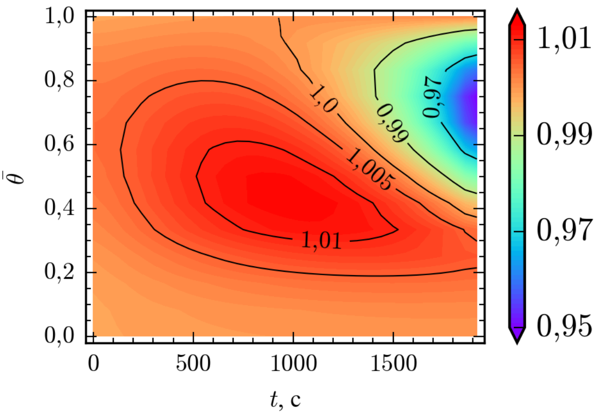

Рис. 6. Отношение меридионального напряжения σ_1 к его оценке на основании безмоментной теории оболочек (5). По осям: t — время, $\bar{\theta} := \frac{\theta}{\theta_b}$ — угловая координата.

Характер отличия отношения от единицы связан с геометрией купола. Когда направление нормали близко к направлению оси симметрии, часть меридионального напряжения σ_1 компенсируется нормальным σ_3. В оставшейся области вклад в равновесие оболочки, не учитываемый безмоментной теорией, вносят касательные напряжения. При этом интенсивность отклонений нарастает при приближении к границе, что хорошо согласуется с принципом локальности Сен-Венана. Максимальная за всё время величина погрешности составляет около 5 %. Таким образом, хотя безмоментная теория оболочек и не соответствует поведению материала формально, она позволяет получить приближённое решение с удовлетворительной степенью точности.

В заключении к третьей главе делаются следующие выводы:

— Определяющие соотношения, описывающие эволюцию микроструктуры, позволяют расширить область применимости модели и уточнить оценку параметров оптимального режима деформирования.
— Результаты расчётов со сложным напряжённо-деформированным состоянием при найденных с помощью авторского алгоритма значениях параметров хорошо согласуются с известными свойствами процесса сверхпластической формовки.

Четвёртая глава диссертации посвящена моделированию измельчения зёрен. Действующие в материале микроструктурные механизмы могут приводить не только к росту зёрен, но и к образованию новых внутризёренных границ. **Во введении** демонстрируется, что для уточнения результатов моделирования может быть полезным детальное описание микроструктуры в виде распределения количества зёрен различных размеров, сгруппированных по небольшим интервалам, либо занимаемой ими доли объёма образца.

Описываются используемые данные для сплава титана Ti−6Al−4V при температуре 900 °C, в которых наблюдаются эффекты, связанные с измельчением зёрен. Для получения экспериментальных распределений оригинальные зависимости количества зёрен от размера $n(d)$ в виде непрерывных кривых интегрируются по N интервалам (группам) с шагом $\delta = 0{,}25$ мкм и пересчитываются в объёмные доли:

$$d_i = d_{min} + \left(i - \frac{1}{2}\right)\delta; \quad V_i = \frac{1}{6}\pi d_i^3 \int_{d_{min}+(i-1)\delta}^{d_{min}+i\delta} n(d)\mathrm{d}d; \quad V_0 = \sum_{i=1}^{N} V_i; \quad v_i = \frac{V_i}{V_0},$$

где $i \in \{1, \ldots, N\}$ — номер группы, d_{min} — минимальный размер зерна в распределении, d_i — размер зёрен группы, V_i — суммарный объём, занимаемый зёрнами группы, V_0 — общий объём образца, v_i — объёмная доля группы.

Используются определяющие соотношения материала в форме (2). Деформация ε_i каждой группы принимается равной общей деформации образца ε. Макропараметры образца вычисляются как взвешенное среднее по группам, например, средний размер зёрен $d = \sum_{i=1}^{N} d_i v_i$. Рассчитанные по такой модели распределения v_i после деформирования качественно похожи на экспериментальные в случае, когда измельчения зёрен не происходит, однако некорректно описывают эксперимент, в котором оно наблюдается.

Во втором разделе четвёртой главы приводится обзор некоторых моделей измельчения из литературы. Основная идея состоит в рассмотрении критического размера зерна, по достижении которого группа зёрен измельчается и образуются новые группы с другими размерами зёрен.

Так, Р.А. Васин и соавторы предлагают условие измельчения на основе энергии деформации: $d_{crit} := d^* \exp(-qQ)$, $Q := \int \sigma \mathrm{d}\varepsilon$ (q, d^* — параметры). В используемых данных наибольшее значение Q достигается в эксперименте с $\dot{\varepsilon} = 1 \times 10^{-3}$ с$^{-1}$, а эффекты измельчения наблюдаются при $\dot{\varepsilon} = 0{,}1$ с$^{-1}$. Следовательно, эта модель не подходит для описания имеющихся данных.

Далее рассматривается модель A.K. Ghosh, R. Raj, в которой критический размер зависит от скорости пластической деформации:

$$d_{crit} := d_0 \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_{p,i}} \right)^{\frac{1}{\mu}}, \tag{6}$$

где μ — параметр, связанный со скоростной чувствительностью материала, $\dot{\varepsilon}_0$ — скорость деформации, при которой критическим становится даже минимальный размер d_0. Такая модель позволяет обеспечить поведение, при котором интенсивность измельчения пропорциональна скорости деформации.

В диссертации описан способ определения параметров модели μ и $\dot{\varepsilon}_0$ на основе МНК. Полученная модель применяется к эксперименту с измельчением, однако расчётное распределение (в отличие от экспериментального) обрывается при достижении критического размера d_{crit}. Для корректного моделирования рассматриваемых данных количество зёрен больших размеров должно уменьшаться, но не падать сразу до нуля. Приведённые модели не предполагают такого «промежуточного» состояния.

В третьем разделе главы предлагается модель на основе идеи того, что измельчение зёрен даже одного размера происходит не одновременно. Вводится вероятность измельчения зерна за единицу времени, пропорциональная отношению его текущего размера d_i к критическому размеру (6):

$$s_i := s_0 \left(\frac{d_i}{d_{crit}} \right)^{\theta} = s_0 \left(\frac{d_i}{d_0} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}_{p,i}} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right)^{\theta},$$

где s_0 — начальная вероятность измельчения, θ — степень роста вероятности.

Переход от конкретных зёрен к объёмным долям происходит путём взятия математического ожидания. Когда размер зёрен d_i в группе с объёмной долей v_i превышает критический размер (6), на каждом шаге расчёта от неё отделяется новая группа с размером зёрен rd_i (r — параметр модели) и объёмной долей $v_i s_i \mathrm{d}t$ ($\mathrm{d}t$ — шаг по времени). Объёмная доля исходной группы из условия сохранения общего объёма уменьшается до $(1 - s_i \mathrm{d}t)\, v_i$.

Значения параметров модели s_0, θ и r определяются с помощью МНК. Описание предложенной модели и результаты расчёта по ней для эксперимента с измельчением зёрен (рис. 7) опубликованы в работе [3].

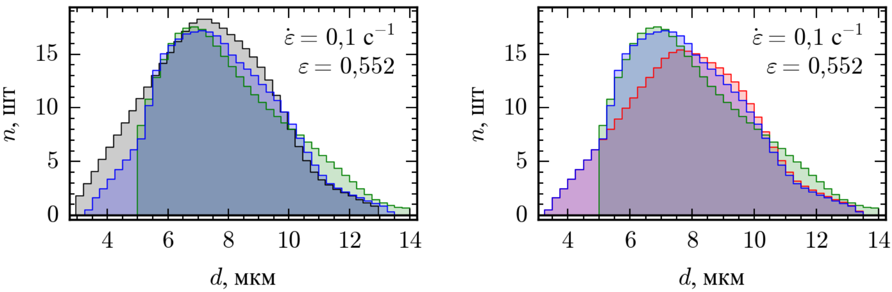

Рис. 7. Начальное распределение зёрен по размеру (серая область) и распределения после окончания деформирования: эксперимент (зелёная область), расчёт по предложенной модели (синяя), расчёт без учёта измельчения (красная).

В четвёртом разделе четвёртой главы обсуждаются полученные результаты. Область максимума экспериментального распределения в целом корректно смоделирована, а сравнение с расчётом без учёта измельчения зёрен согласуется с заложенной в модель идеей. Однако модель плохо описывает область больших размеров зёрен, в которой даже распределение без учёта измельчения проходит ниже экспериментального. Для её корректного описания следовало бы увеличивать количество зёрен с размерами, превышающими критический, что не закладывалось в модель.

Кроме того, в полученной модели полное измельчение группы соответствует недостижимо большим значениям размера зерна. Для устранения этого эффекта можно добавить в МНК весовую функцию, понижающую значимость ошибки в «хвосте» распределения. Модель, полученная при помощи такой функции, обеспечивает полное измельчение при размере $d = 18{,}5$ мкм. Однако экспериментальные данные описываются ею несколько хуже.

Наконец, демонстрируется важность учёта измельчения при недостаточно подготовленной микроструктуре образца. Для примера рассматривается комбинация двух «куполов» нормального распределения вокруг размеров 6 мкм и 20 мкм (первый содержит 95 % от общего количества зёрен, но лишь 36 % объёма). Хотя средний размер зёрен в таком материале превышает 15 мкм, при моделировании без учёта измельчения наблюдаются деформационное упрочнение и рост зёрен. При расчёте с учётом измельчения упрочнение полностью компенсируется (и даже переходит в разупрочнение; рис. 8).

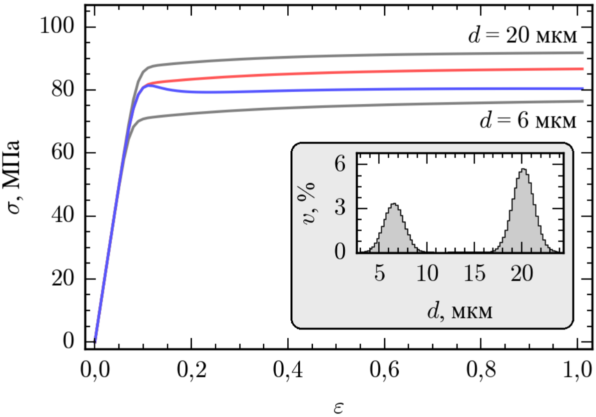

Рис. 8. Влияние измельчения зёрен на напряжение. Серым цветом показаны результаты для «опорных» размеров распределения (приведено на врезке), красным — результат расчёта без учёта измельчения зёрен, синим — с учётом измельчения.

В заключении к четвёртой главе отмечается, что параметр d в полученной модели не связывается напрямую с размером конкретных зёрен, а является обобщённой характеристикой некоторого подмножества зёрен материала, обладающих близким начальным размером и схожей историей эволюции. Тем не менее подобный феноменологический подход позволяет качественно описать наблюдаемые эффекты и продемонстрировать, что введение в рассмотрение измельчения зёрен позволяет не только лучше моделировать эволюцию самой микроструктуры образца, но и влияет на макропараметры процесса деформирования.

Благодарности.

Автор хотел бы посвятить свою работу памяти Рудольфа Алексеевича Васина, который познакомил его с темой сверхпластичности, предложил формулировки ряда задач и во многом определил направление исследований.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Татьяне Александровне Беляковой за поддержку при написании работы и кропотливое сопровождение на всём протяжении пути к её защите.

Также автор благодарит сотрудников Кафедры теории пластичности Механико-математического факультета МГУ за тёплую рабочую атмосферу, неоднократную помощь в организационных вопросах, полезные консультации и строгую, но конструктивную критику ранних версий его работы.

Кроме того, автор выражает благодарность коллективу Лаборатории упругости и пластичности НИИ механики МГУ и лично Андрею Владимировичу Хохлову за интерес к работе и большое количество ценных замечаний.

Публикации автора по теме диссертации в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI

1. *Белякова Т. А.*, *Васин Р. А.*, *Гончаров И. А.* Влияние параметров нелинейно-вязких элементов на моделирование характерных свойств процесса сверхпластичности // Письма о материалах. — 2015. — Т. 5, № 1. — С. 24—29. — Impact Factor (РИНЦ): 0,742.
2. *Гончаров И. А.*, *Белякова Т. А.* Методы оценки точности и устойчивости алгоритма определения значений параметров моделей сверхпластичности // Вычислительная механика сплошных сред. — 2018. — Т. 11, № 1. — С. 51—67. — Impact Factor (РИНЦ): 0,899.
3. *Гончаров И. А.* Особенности моделирования измельчения зерен металлов в условиях сверхпластического деформирования // Деформация и разрушение материалов. — 2019. — Т. 1. — С. 7—15. — Impact Factor (РИНЦ): 0,717.
4. *Белякова Т. А.*, *Гончаров И. А.*, *Хохлов А. В.* О невозможности моделирования сигмоидальных кривых сверхпластичности параллельным или последовательным соединениями степенных вязких элементов // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2019. — Т. 25, № 3. — С. 299—315. — Impact Factor (РИНЦ): 0,531.

Прочие публикации автора по теме диссертации

5. *Белякова Т. А.*, *Гончаров И. А.* Влияние микроструктуры металлического сплава на распределение толщины в круглой пластине при сверхпластической формовке давлением // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. — 2021. — Т. 26, № 2. — С. 50—62. — Impact Factor (РИНЦ): 0,156.
6. *Goncharov I. A.* Modeling of metal grains refinement under superplastic deformation conditions // International conference "Materials science of the future: research, development, scientific training (MSF'2019)" (12-14 February, 2019, Nizhni Novgorod, Lobachevsky University): Abstracts. — Nizhni Novgorod : LLC Yurist Publisher, 2019. — P. 28.
7. *Beliakova T. A.*, *Goncharov I. A.* Determination of parameters values in the models of microstructure evolution under superplastic deformation condition // Abstracts of 1st Russia-Japan Joint Workshop on Composite Materials (RJCM-1). October 31 - November 1, 2019. Lomonosov Moscow State University. — 2019. — P. 45.
8. *Гончаров И. А.* Влияние эволюции микроструктуры на макро-характеристики процесса деформирования при моделировании сверхпластичности // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2019): Сборник трудов конференции. — М. : Издательство ИМАШ РАН, 2020. — С. 8—11.
9. *Белякова Т. А.*, *Гончаров И. А.* Моделирование сигмоидальной кривой сверхпластичности комбинацией нелинейно-вязких элементов // Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, 14–23 апреля 2014г., Москва. Тезисы докладов. — М. : Издательство Московского университета, 2014. — С. 29.
10. *Гончаров И. А.*, *Белякова Т. А.* Моделирование измельчения зерен металлов при деформировании в режиме сверхпластичности // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 15–25 апреля 2019 года. Тезисы докладов. — М. : Издательство Московского университета, 2019. — С. 77—78.
11. *Гончаров И. А.*, *Белякова Т. А.* Влияние размера зерен на распределение толщины круглой пластины при сверхпластической выдувке // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Октябрь 2020 года. Тезисы докладов. — М. : Издательство Московского университета, 2020. — С. 69.