*Алгебра и логика, ??, № ? (????), ???—???*

## Содержание



# 1 Введение

Понятие рекурсивной реализуемости восходит к работе американского математика С. К. Клини [1], в которой была предложена интерпретация ряда специфических интуиционистских понятий на основе концепции теории алгоритмов. Пропозициональная и предикатная логики рекурсивной реализуемости по Клини исследовались, начиная с 50-х годов прошлого столетия. С недавних пор были введены в рассмотрение варианты реализуемости, основанные на различных видах субрекурсивной реализуемости: примитивно-рекурсивная реализуемость [2], [3] и минимальная реализуемость [4]; исследовались соответствующие им предикатные логики [5], [6], [7], [8]. Представляют интерес и другие виды субрекурсивной реализуемости.

В настоящей работе автор продолжает исследование понятия общерекурсивной реализуемости [9], основанного на использовании индексов общерекурсивных функций в качестве конструктивного способа получения одних реализаций из других. В [9] было показано, что базисная логика [10] корректна относительно абсолютной общерекурсивной реализуемости. В настоящей работе доказывается, что интуиционистская логика не является корректной относительно слабого варианта семантики общерекурсивной реализуемости. Аналогичный результат был получен ранее для реализуемостей, основанных на арифметической [11, 12] и гиперарифметической [13] вычислимостях, а также — для семантики $L$-реализуемости [14].

## 2 Нумерация общерекурсивных функций

Пусть фиксирована вычислимая нумерация всех $n$-местных частично-рекурсивных функций: $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots$ для каждого натурального числа $n$. Рассмотрим соответствующую нумерацию общерекурсивных функций, определив множество индексов $\mathsf{I}_n \rightleftharpoons \{e \mid \varphi_e^n$ — общерекурсивная функция$\}$. Таким образом, если $z \in \mathsf{I}_n$, то $\varphi_z^n$ — $n$-местная общерекурсивная функция, и напротив, всякая $n$-местная общерекурсивная функция есть $\varphi_z^n$ для некоторого $z \in \mathsf{I}_n$. В дальнейшем будем опускать верхний индекс у функции $\varphi_z^n$ там, где он может быть восстановлен из контекста.

**Предложение 1.** *Множество общерекурсивных функций вместе с вышеописанной нумерацией обладает следующими свойствами:*

- *если $\psi$ есть $n$-местная общерекурсивная функция, то функция $\psi'$, определенная условным равенством $\psi'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n)$, является общерекурсивной функцией, и при этом индекс функции $\psi'$ может быть найден общерекурсивно по индексу функции $\psi$, т.е. для любого натурального числа $n$ найдется такая общерекурсивная функция $s$, что для всех $e \in \mathsf{I}_n$ верно $s(e) \in \mathsf{I}_{n+1}$ и имеет место $\varphi_{s(e)}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \simeq \varphi_e(x_1, \ldots, x_n)$ (эФП);*

- *композиция общерекурсивных функций есть общерекурсивная функция, индекс которой может быть найден общерекурсивно, т.е. для любых натуральных числе $n, m_1, \ldots, m_n$ найдется такая $(n+1)$-местная общерекурсивная функция $s$, что для всех $e \in \mathsf{I}_n, e_1 \in \mathsf{I}_{m_1}, \ldots, e_n \in \mathsf{I}_{m_n}$ верно $s(e, e_1, \ldots, e_n) \in \mathsf{I}_m$ и имеет место*

$$\varphi_{s(e,e_1,\ldots,e_n)}(x_1, \ldots, x_m) \simeq \varphi_e(\varphi_{e_1}(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, \varphi_{e_n}(x_1, \ldots, x_{m_n})),$$

*где $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} m_i$ (эК);*

**Доказательство.** [9, Предложение 1] □

**Предложение 2.** *Не существует такой общерекурсивной функции* $\psi$*, что выполняется условное равенство* $\psi(a,x) \simeq \varphi_a(x)$ *для всех* $a \in \mathsf{I}_1$.

**Доказательство.** Предположим противное: существует общерекурсивная функция $\psi$, для которой условное равенство $\psi(a,x) \simeq \varphi_a(x)$ выполняется для любого натурального числа $a \in \mathsf{I}_1$. Рассмотрим функцию $\psi'(x) \simeq \psi(x,x)+1$. Очевидно, что функция $\psi'$ является общерекурсивной. Пусть $e$ — ее номер, т.е. $e \in \mathsf{I}_1$ и $\varphi_e(x) \simeq \psi'(x)$. Тогда $\varphi_e(e) = \psi'(e) = \psi(e,e)+1 = \varphi_e(e)+1$. Получили противоречие. □

## 3 Общерекурсивная реализуемость

Предикатные формулы строятся обычным образом из предикатных символов различной валентности, предметных переменных, констант $0,\ 1,\ 2, \ldots$ для натуральных чисел, логических символов $\top$ (истина), $\bot$ (ложь), логических связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\exists$, $\forall$.

Пусть фиксированы общерекурсивные двухместная функция $\mathsf{c}$, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции $\mathsf{p}_1$ и $\mathsf{p}_2$, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x,y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x,y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Напомним определение понятия общерекурсивной реализуемости, которое дано в работе [9]. Следуя [15], $n$-местным *обобщенным предикатом* будем называть всякую тотальную функцию типа $\mathbb{N}^n \to 2^{\mathbb{N}}$. Пусть $A$ — предикатная формула, $f$ — отображение, которое каждой предикатной переменной из $A$ ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение $f$ будем называть *оценкой* формулы $A$. Для каждого натурального числа $e$, произвольной замкнутой предикатной формулы $A$ и оценки $f$ определим отношение $e\ \mathbf{gr}_f\ A$ (натуральное число $e$ общерекурсивно реализует формулу $A$ при оценке $f$) индукцией по построению формулы $A$:

- неверно $e \ \mathbf{gr}_f \ \bot$, и верно $e \ \mathbf{gr}_f \ \top$;

- $e \ \mathbf{gr}_f \ P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$;

- $e \ \mathbf{gr}_f \ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e \ \mathbf{gr}_f \ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e \ \mathbf{gr}_f \ \Psi$;

- $e \ \mathbf{gr}_f \ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e \ \mathbf{gr}_f \ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e \ \mathbf{gr}_f \ \Psi)$;

- $e \ \mathbf{gr}_f \ \exists x \, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e \ \mathbf{gr}_f \ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

- $e \ \mathbf{gr}_f \ \forall x_1, \ldots, \forall x_n \, (\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \Psi(x_1, \ldots, x_n)) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_{n+1}$ и для всех[1] натуральных чисел $b$, $a_1, \ldots, a_n$ если $b \ \mathbf{gr}_f \ \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то имеет место $\varphi_e(a_1, \ldots, a_n, b) \ \mathbf{gr}_f \ \Psi(a_1, \ldots, a_n)$;

- $e \ \mathbf{gr}_f \ \forall x_1, \ldots, \forall x_n \, \Phi \rightleftharpoons e \ \mathbf{gr}_f \ \forall x_1, \ldots, x_n \, (\top \to \Phi)$, если $n > 0$, формула $\Phi$ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в $\Phi$.

Замкнутую предикатную формулу $A$ назовем *слабо общерекурсивно реализуемой*, если для каждой оценки $f$ формулы $A$ найдется натуральное число $e$, для которого верно $e \ \mathbf{gr}_f \ A$.

## 4 Основной результат

**Теорема 1.** *Предикатная формула*

$$\forall x \, (Q(x) \to \forall y \, \exists z \, P(x, y, z)) \to \forall y \, \forall x \, (Q(x) \to \exists z \, P(x, y, z)) \tag{1}$$

*не является слабо общерекурсивно реализуемой.*

**Доказательство.** Рассмотрим оценку $f$ формулы (1), определяемую

[1] Однако, если в списке $x_1, \ldots, x_n$ на некоторых позициях $i$ и $j$ стоят одинаковые переменные $x_i$ и $x_j$, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1, \ldots, a_n$, в которых $a_i \neq a_j$.

следующими равенствами:

$$f(Q)(x) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{если } x \in \mathsf{I}_1; \\ \varnothing, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2}$$

$$f(P)(x, y, z) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{если } x \in \mathsf{I}_1 \text{ и } \varphi_x(y) = z; \\ \varnothing, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Из предложения 1 (эК, эФП) следует, что найдется такая общерекурсивная функция $s$, что для всех $a \in \mathsf{I}_1$ верно $s(a) \in \mathsf{I}_2$ и имеет место

$$\varphi_{s(a)}(y, y') \simeq \mathsf{c}(\varphi_a(y), 0). \tag{4}$$

Из предложения 1 (эФП) получаем, что существует такое натуральное число $e$, что выполняется соотношение

$$\varphi_e(x, x') \simeq s(x). \tag{5}$$

Докажем, что верно

$$e \ \mathbf{gr}_f \ \forall x \, (Q(x) \to \forall y \, \exists z \, P(x, y, z)). \tag{6}$$

Из (3) следует, что для всех натуральных чисел $k$ и $a \in \mathsf{I}_1$ имеет место

$$0 \ \mathbf{gr}_f \ P(a, k, \varphi_a(k)). \tag{7}$$

Из (4), (7) получаем

$$\mathsf{p}_2\varphi_{s(a)}(k, 0) \ \mathbf{gr}_f \ P(a, k, \mathsf{p}_1\varphi_{s(a)}(k, 0)). \tag{8}$$

Из (8) следует

$$\varphi_{s(a)}(k, 0) \ \mathbf{gr}_f \ \exists z \, P(a, k, z). \tag{9}$$

Так как (9) выполняется для любого натурального числа $k$, верно

$$s(a) \ \mathbf{gr}_f \ \forall y \, (\top \to \exists z \, P(a, y, z)),$$

и следовательно —

$$s(a) \ \mathbf{gr}_f \ \forall y \, \exists z \, P(a, y, z). \tag{10}$$

Таким образом, выполняется (10) для всех $a \in \mathsf{I}_1$. Из (5), (10) получаем, что для всех натуральных чисел $q$ и $a \in \mathsf{I}_1$ имеет место

$$\varphi_e(a, q)\ \mathbf{gr}_f\ \forall y\, \exists z\, P(a, y, z). \tag{11}$$

В силу (2) условие $q\ \mathbf{gr}_f\ Q(a)$ эквивалентно тому, что $a \in \mathsf{I}_1$. Таким образом, для всех натуральных чисел $a$ и $q$, если $q\ \mathbf{gr}_f\ Q(a)$, то имеет место (11). Из этого факта получаем (6). Таким образом, посылка формулы (1) является реализуемой при оценке $f$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что никакое натуральное число не может быть реализацией заключения формулы (1) при оценке $f$. Предположим противное: найдется натуральное число $e'$, для которого имеет место

$$e'\ \mathbf{gr}_f\ \forall y\, \forall x\, (Q(x) \to \exists z\, P(x, y, z)). \tag{12}$$

Из (12) следует, что если для натуральных чисел $b, a, q$ верно $q\ \mathbf{gr}_f\ Q(a)$, то имеет место

$$\varphi_{e'}(b, a, q)\ \mathbf{gr}_f\ \exists z\, P(a, b, z).$$

В силу (2) условие $q\ \mathbf{gr}_f\ Q(a)$ эквивалентно тому, что $a \in \mathsf{I}_1$. Таким образом, выполняется

$$\varphi_{e'}(b, a, 0)\ \mathbf{gr}_f\ \exists z\, P(a, b, z) \tag{13}$$

для всех натуральных чисел $b$ и $a \in \mathsf{I}_1$. Из (13) получаем

$$\mathsf{p}_2\varphi_{e'}(b, a, 0) \in f(P)(a, b, \mathsf{p}_1\varphi_{e'}(b, a, 0)). \tag{14}$$

Из (14), (3) следует

$$\varphi_a(b) = \mathsf{p}_1\varphi_{e'}(b, a, 0).$$

Получили, что для общерекурсивной функции $\psi$, определяемой условным равенством $\psi(z, x) \simeq \mathsf{p}_1\varphi_{e'}(x, z, 0)$, верно $\psi(a, x) \simeq \varphi_a(x)$ для любого $a \in \mathsf{I}_1$, что противоречит предложению 2. $\square$

В силу того, что формула (1) выводима в интуиционистком исчислении предикатов, следующее утверждение, означающее некорректность интуиционистской логики относительно слабой общерекурсивной реализуемости, является следствием теоремы 1.

**Теорема 2.** *Существует предикатная формула, выводимая в интуиционистском исчислении предикатов, которая не является слабо общерекурсивно реализуемой.*

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № 075-15-2020-801).

## Список литературы

[1] S. K. Kleene. *On the interpretation of intuitionistic number theory*, Journ. Symbolic Logic., **10** (1945), 109—124.

[2] Damnjanovic Z. *Strictly primitive recursive realizability*, Journal of Symbolic Logic, **59**, N 4 (1994), 1210—1227.

[3] S. Salehi. *Provably total functions of basic arithmetic.* Math. Log. Quart. 2003, **49**, N 3, 316—322.

[4] Damnjanovic Z. *Minimal realizability of intuitionistic arithmetic and elementary analysis*, Journal of Symbolic Logic, **60**, N 4 (1995), 1208—1241.

[5] Д. А. Витер. *Примитивно-рекурсивная реализуемость и логика предикатов.* Депонировано в ВИНИТИ, № 1830–В2001. М., 2001.

[6] Д. А. Витер. Примитивно-рекурсивная реализуемость и конструктивная теория моделей: Канд. дис. М., 2001.

[7] Пак Бён Ха. *Минимальная реализуемость и логика предикатов.* Депонировано в ВИНИТИ № 1896-В2002. М., 2002.

[8] Пак Бён Ха. *Строго примитивно рекурсивная реализуемость и логика предикатов.* Депонировано в ВИНИТИ № 218-В2003. М., 2003.

[9] А. Ю. Коновалов. *Общерекурсивная реализуемость и базисная логика.* Алгебра и логика, № 5 (2020), стр. 542—566

[10] W. Ruitenburg. *Basic predicate calculus.* Notre Dame J. Formal Logic, **39**, N 1 (1998), 18–46.

[11] А. Ю. Коновалов. *Арифметическая реализуемость и базисная логика.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 1 (2016), стр. 52–56.

[12] А. Ю. Коновалов. *Арифметическая реализуемость и примитивно-рекурсивная реализуемость.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 4 (2016), стр. 60–64.

[13] А. Ю. Коновалов, В. Е. Плиско. *О гиперарифметической реализуемости.* Матем. заметки, т. 98, № 5 (2015), стр. 725—746.

[14] А. Ю. Коновалов. *Абсолютная $L$-реализуемость и интуиционистская логика.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 2 (2019), стр. 50–53.

[15] В. Е. Плиско. *Абсолютная реализуемость предикатных формул.* Изв. АН СССР, Сер. матем., т. 47, № 2 (1983), стр. 315—334.